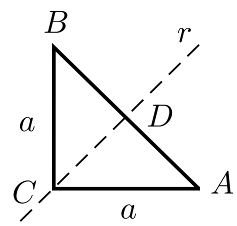
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

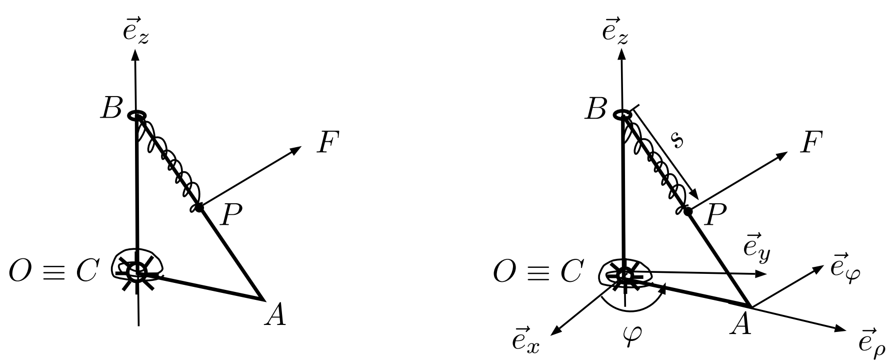
Trieste, 4 luglio 2016. (G. Tondo)

Si consideri il telaio *omogeneo* della figura, a forma di triangolo rettangolo isoscele, con ogni cateto di lunghezza a e massa M.

1) Si calcoli il baricentro G e il momento d'inerzia del telaio rispetto alla mediana r passante per il vertice C.



Il telaio suddetto è vincolato a ruotare, come in figura, attorno all'asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$ passante per C, mediante una cerniera sferica fissa in $O \equiv C$ e un collare sottile in B. Inoltre, sull'ipotenusa del telaio è vincolato a scorrere senza attrito un punto materiale P di massa m. Sul telaio agiscono: il peso proprio ed una molla *angolare* di richiamo posta in C e di costante elastica c. Sul punto P agiscono: il peso proprio, la forza di richiamo di una molla fissata nel vertice B e di costante elastica $b > mg/(2a)$, una forza F sempre ortogonale al telaio, come in figura.



STATICA

Detta s l'ascissa di P su AB e φ l'angolo tra il piano del telaio e il piano verticale fisso in cui la molla angolare è a riposo, individuato dagli assi $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$, determinare:

2) le configurazioni di equilibrio del modello $\vec{q}_e = (s_e, \varphi_e)$;

3) le reazioni vincolari esterne sul telaio in C e in B, all'equilibrio.

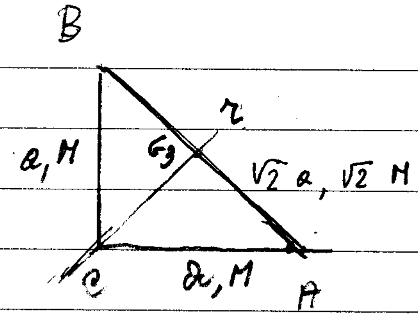
DINAMICA

4) Scrivere le equazione differenziali pure di moto;

5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio;

6) calcolare la reazione vincolare interna sul punto P, durante il moto.

Tema del 4/07/2016



1) Per calcolare il baricentro del telaio, applichiamo la proprietà distributiva ai tre lati omogenei.

$$G-C = \frac{M(G_1-C)+M(G_2-C)+\sqrt{2}\,M(G_3-C)}{(2+\sqrt{2})\,M}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}\vec{i}+\frac{a}{2}\vec{j}+\sqrt{2}\,\frac{a}{2}(\vec{i}+\vec{j})}{2+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a}{2}\,\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\,(\vec{i}+\vec{j})$$

N.B. Il baricentro del telaio appartiene alla mediana CG_3 per simmetria, ma NON coincide con il baricentro geometrico del triangolo. Sappiamo dall'Es. 5.2.3, pag. 70 degli Appunti che questo succede per tutti i telai triangolari, eccetto per quelli equilateri.

Calcolo del momento d'inerzia I_r.

a) Il modo più veloce è quello di calcolare I_r come somma dei momenti dei tre lati rispetto ad r

$$I_r = I_r^{(1)} + I_r^{(2)} + I_r^{(3)}$$
$$= 2 I_r^{(1)} + I_r^{(3)}$$

Per calcolare il momento d'inerzia di un'asta omogenea lunga L, rs. ad una retta passante per un estremo e formante un angolo α con l'asta, si usa la formula

$$I_r(\alpha) = \frac{1}{3} m L^2 \sin^2\alpha$$

Dunque, nel nostro caso

$$I_r^{(1)} = \frac{1}{3} M a^2 \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} M a^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{6} M a^2$$

Analogamente, per calcolare il momento d'inerzia di un'asta omogenea lunga L (e di massa m), rs. ad una retta passante per il centro e formante un angolo α con l'asta, si può usare la formula

$$I_r(\alpha) = \frac{1}{12} m L^2 \sin^2\alpha$$

Dunque,

$$I_r^{(3)} = \frac{1}{12} \sqrt{2} M (\sqrt{2} a)^2 \sin^2\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6} M a^2$$

$$I_r = \frac{1}{3} M a^2 + \frac{\sqrt{2}}{6} M a^2 = \frac{1}{3} M a^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

b) Metodo standard

Calcoliamo la matrice d'inerzia del telaio rispetto alla terna $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Denotando con $(x, y, 0)$ le coordinate di un generico punto P del telaio, si ha

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx}+I_{yy} \end{bmatrix}$$

$$I_{xx} = \cancel{I_{xx}^{(1)}} + I_{xx}^{(2)} + I_{xx}^{(3)}$$

$$I_{xx}^{(2)} = \frac{1}{3} M a^2 \ , \quad I_{xx}^{(3)} = \frac{1}{3} \sqrt{2} M \left(\sqrt{2}a\right)^2 \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{3} M a^2$$

Quindi

$$I_{xx} = \frac{1+\sqrt{2}}{3} M a^2 \overset{\text{simm.}}{=} I_{yy}$$

$$I_{xy} = -\frac{M}{a}\int_{R} x\,y\,dR = -\frac{M}{a}\int_{R_1} x\,\cancel{y}\,dR_1 - \frac{M}{a}\int_{R_2} \cancel{x}\,y\,dR_2 +$$

$$-\frac{M}{a}\int_{R_3} x\,y\,dR_3$$

L'integrale rimasto è un integrale di linea lungo l'ipotenusa del triangolo, che si può parametrizzare con l'ascissa curvilinea

$$\gamma : \left[0, \sqrt{2}a\right] \mapsto \left(x(s) = \frac{s}{\sqrt{2}} \ , \ y(s) = a - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} - \vec{j}\right) \quad \Rightarrow |\dot{\gamma}|^2 = 1$$

Dunque

$$\int_{R_3} x\,y\,dR_3 = \int_0^{\sqrt{2}a} x(s)\,y(s)\,|\dot{\gamma}(s)|\,ds =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{s}{\sqrt{2}}\left(a - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) ds = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3\sqrt{2}}\right]_0^{\sqrt{2}a} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^3 - \frac{2}{3}a^3\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}}a^3$$

Quindi, il momento deviatore non nullo è

$$I_{xy} = -\frac{M}{\cancel{a}}\frac{a^{\cancel{3}\,2}}{3\sqrt{2}} = -\frac{M}{3\sqrt{2}}a^2,$$

$$I_C = Ma^2 \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\sqrt{2})}{3} \end{bmatrix}$$

Allora,

$$I_2 = \vec{e}_2 \cdot I_C(\vec{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[1\ 1\ 0]\, I_C \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}[1,1]\, Ma^2 \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{Ma^2}{2}[1,1]\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} = Ma^2\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) = \frac{Ma^2}{3}\,\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Cinematica

Il modello è formato da un rigido più un punto vincolato sul esso. Con il metodo dei congelamenti successivi, si conclude che ha 2 g.l.. Come coordinate libere, si possono usare l'angolo φ di rotazione del telaio e l'ascissa curvilinea s di P nel lato AB

$$\varphi \in \mathbb{R}, \qquad 0 \le s \le a\sqrt{2}$$

Utilizzeremo le seguenti basi di versori

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: base "fissa"

$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: base "solidale" al telaio

$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$: base "solidale" al telaio

$(\vec{t}, \vec{n}, \vec{k})$: base "adattata" al vincolo del punto P

Le trasformazioni sono

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\imath} = \vec{e}_\rho \\ \vec{\jmath} = \vec{e}_z \\ \vec{k} = -\vec{e}_\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_\rho = \vec{\imath} \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{k} \\ \vec{e}_z = \vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}) \\ \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) \\ \vec{K} = \vec{K} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{t} + \vec{n}) \\ \vec{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{t} + \vec{n}) \\ \vec{K} = \vec{K} \end{cases}$$

Componendo le trasformazioni

$$\begin{cases} \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_\rho - \vec{e}_z) \\ \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_\rho + \vec{e}_z) \\ \vec{K} = -\vec{e}_\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{t} + \vec{n}) \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{K} \\ \vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{t} + \vec{n}) \end{cases}$$

$$B - O = a\,\vec{e}_z$$

$$G - O \equiv G - C = \frac{a}{2}\,\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) = \frac{a}{2}\,\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(\vec{e}_\rho + \vec{e}_z)$$

$$P - O = (P - B) + (B - O) = s\,\vec{t} + a\,\vec{e}_z = \frac{s}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}) + a\,\vec{e}_z$$

$$= \frac{s}{\sqrt{2}}\,\vec{e}_\rho + \left(a - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{e}_z$$

Dunque,

$$\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = \frac{s}{\sqrt{2}}\,\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \frac{s}{\sqrt{2}}\,\vec{e}_\varphi \, , \quad \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_\rho - \vec{e}_z)$$

Statica

2) Per trovare gli equilibri, scriviamo le eq. pure di equilibrio. A questo scopo, calcoliamo le forze lagrangiane, tramite l'energia potenziale, per la sollecitazione conservativa; tramite la definizione per il carico follower

$$\vec{F}_p = F\,\vec{e}_\varphi$$

$$V(s,\varphi) = \frac{1}{2}c\varphi^2 \cancel{- M\vec{g}\cdot(G-O)} + \frac{1}{2}bs^2 - m\vec{g}\cdot(P-O)$$

$$= \frac{1}{2}c\varphi^2 + \frac{1}{2}bs^2 + mg\,\vec{e}_2\cdot\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{e}_\varphi + \left(a - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{e}_2\right)$$

$$= \frac{1}{2}c\varphi^2 + \frac{1}{2}bs^2 + mg\left(a - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$Q_\varphi^{(con)} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -c\varphi$$

$$Q_s^{(cons)} = -\frac{\partial V}{\partial s} = -\left(bs - \frac{mg}{\sqrt{2}}\right)$$

$$Q_\varphi^{(foll)} = \vec{F}_p \cdot \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \varphi} = F\vec{e}_\varphi \cdot \frac{s}{\sqrt{2}}\vec{e}_\varphi = \frac{Fs}{\sqrt{2}}$$

$$Q_s^{(foll)} = \vec{F}_p \cdot \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial s} = F\vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_s - \vec{e}_2\right) = 0$$

Quindi

$$Q_\varphi = Q_\varphi^{(con)} + Q_\varphi^{(poll)} = -c\varphi + F\frac{s}{\sqrt{2}}$$

$$Q_s = Q_s^{(con)} + Q_s^{(poll)} = -bs + \frac{mg}{\sqrt{2}}$$

Dunque, le eq. pure di equilibrio sono

$$\begin{cases} -c\varphi + F\dfrac{s}{\sqrt{2}} = 0 \\ -bs + \dfrac{mg}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi_e = \dfrac{F}{c}\dfrac{s_e}{\sqrt{2}} = \dfrac{F}{c\sqrt{2}}\dfrac{mg}{b\sqrt{2}} = \dfrac{Fmg}{2bc} \\ s_e = \dfrac{mg}{b\sqrt{2}} < \sqrt{2}a \end{cases}$$

Pertanto, $\exists!$ una configurazione di equilibrio

$$\vec{q}_e = (s_e, \varphi_e) = \left(\frac{mg}{b\sqrt{2}}, \frac{Fmg}{2bc}\right)$$

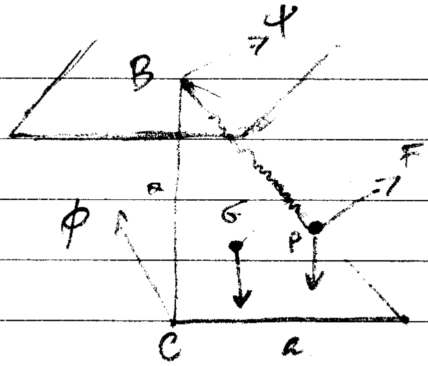
3) Reazioni nel telaio in B e in C all'equilibrio

Poichè la cerniera sferica in C e il collare sottile in B sono lisci, esercitano le reazioni vincolari

$$\mathcal{L}^{(redd)} = \{(C, \vec{\Phi}), (B, \vec{\Psi})\},$$

con $\vec{\Phi}_C$ generica e $\vec{\Psi}_B \cdot \vec{e}_3 = 0$

Per determinarle, usiamo le ECS su tutto il modello



$$\begin{cases} \vec{R}^{(est,ot)} + \vec{\phi}_C + \vec{\Psi}_B = \vec{0} \\ \vec{M}_C^{(est,ot)} + (B-C)\times\vec{\Psi}_B = \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{R}^{(est,ot)} = -\left((2+\sqrt{2})M+m\right) g\,\vec{e}_z + F\,\vec{e}_\varphi ,$$

$$\vec{M}_C^{(est,ot)} = (G-C)\times\left(-(2+\sqrt{2})M\right)g\vec{e}_z + (P-C)\times\left(-mg\,\vec{e}_z + F\,\vec{e}_\varphi\right) - c\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= \frac{a}{2}\,\frac{1+\sqrt{2}}{\cancel{2+\sqrt{2}}}\left(\vec{e}_\rho+\vec{e}_z\right)\times\left(-\cancel{(2+\sqrt{2})}Mg\right)\vec{e}_z$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_\rho + \left(a-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{e}_z\right)\times\left(-mg\,\vec{e}_z + F\,\vec{e}_\varphi\right) - c\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= -\frac{Mga}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\vec{e}_\rho\times\vec{e}_z + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-mg\,\vec{e}_\rho\times\vec{e}_z + F\,\vec{e}_\rho\times\vec{e}_\varphi\right) +$$

$$+\left(a-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)F\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi - c\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= \left(\frac{Mga}{2}\left(1+\sqrt{2}\right) + mg\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{F1}{\sqrt{2}} - c\varphi\right)\vec{e}_z - F\left(a-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{e}_\rho$$

Allora, dalla II ECS si ottiene

$$\vec{\Psi}_B\times(B-C) = \vec{M}_C^{(est,ot)} \quad \overset{\vec{\Psi}_B\cdot\vec{e}_z=0}{\Longrightarrow}$$

$$\vec{\Psi}_B = \frac{(B-C)\times\vec{M}_C^{(est,ot)}}{|B-C|^2}$$

Dunque,

$$\vec{\psi}_B = \frac{a}{a^2}\,\vec{e}_z \times \left[\left(\frac{Mga}{2}(1+\sqrt{2}) + mg\frac{s_e}{\sqrt{2}}\right)\vec{e}_\varphi + \cancel{\left(\frac{F s_e}{\sqrt{2}} - c\varphi_e\right)\vec{e}_z} - F\left(a - \frac{s_e}{\sqrt{2}}\right)\vec{e}_\varrho\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{Mga}{2}(1+\sqrt{2}) + \frac{mg}{\sqrt{2}}\,\frac{mg}{b\sqrt{2}}\right)\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi - \frac{1}{a}F\left(a - \frac{mg}{\sqrt{2}\,b\sqrt{2}}\right)\vec{e}_z \times \vec{e}_\varrho$$

$$= \left(\frac{Mg}{2}(1+\sqrt{2}) + \frac{(mg)^2}{2ab}\right)\vec{e}_\varrho\big|_{\vec{q}_e} + F\left(\frac{mg}{2ab} - 1\right)\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e}$$

Dalla II CS si ricava

$$\vec{\phi}_C = -\vec{\psi}_B - \vec{R}_1^{(est,e\theta)} = \left(\frac{Mg}{2}(1+\sqrt{2}) + \frac{(mg)^2}{2ab}\right)\vec{e}_\varrho\big|_{\vec{q}_e} - F\left(\frac{mg}{2ab} \cancel{-1}\right)\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e} +$$

$$+\big((2+\sqrt{2})M + m\big)g\,\vec{e}_z \cancel{- F\,\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e}}$$

$$= \left(\frac{Mg}{2}(1+\sqrt{2}) + \frac{(mg)^2}{2ab}\right)\vec{e}_\varrho\big|_{\vec{q}_e} - \frac{F\,mg}{2ab}\,\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e} + \big((2+\sqrt{2})M + m\big)g\,\vec{e}_z$$

Dinamica

Scriviamo le eq. di Lagrange relative a (s, φ).
A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica

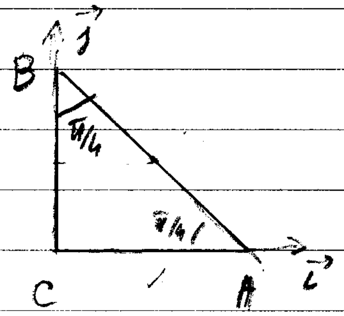
$$K = K^{(tel)} + K^{(P)}$$

$$K^{(tel)} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I_c(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}\, \vec{e}_z \cdot I_c(\dot{\varphi}\, \vec{e}_z) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 I_{cz},$$

dove

$$I_{cz} = \vec{e}_z \cdot I_c(\vec{e}_z)$$

è il momento d'inerzia del telaio rispetto all'asse di rotazione BC.



$$\cancel{I_{cz} = I_{cz}^{(1)} + I_{cz}^{(2)} + I_{cz}^{(3)}}$$

$$I_{cz}^{(1)} = \frac{1}{3} M a^2$$

$$I_{cz}^{(3)} = \frac{1}{3} \sqrt{2} M (\sqrt{2} a)^2 \sin^2 \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} M a^2 \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} M a^2$$

Quindi

$$I_{cz} = \frac{1}{3} M a^2 (1 + \sqrt{2})$$

$$K^{(tel)} = \frac{1}{2} M a^2 \frac{1+\sqrt{2}}{3} \dot{\varphi}^2$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m \left|\vec{v}_P\right|^2$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)}$$

$$\vec{v}_P^{(rel)} = \dot{s}\,\vec{t}$$

$$\vec{v}_P^{(tr)} = \vec{\omega} \times P - O = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \left[\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{e}_\rho + \left(a - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{e}_z\right] =$$

$$= \frac{s}{\sqrt{2}}\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \frac{s}{\sqrt{2}}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Dunque

$$\vec{v}_P = \dot{s}\,\vec{t} + \frac{s}{\sqrt{2}}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi = \frac{\dot{s}}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_\rho - \vec{e}_z\right) + \frac{s}{\sqrt{2}}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\left|\vec{v}_P\right|^2 = \frac{1}{2}\left(2\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2\right) = \dot{s}^2 + \frac{s^2}{2}\dot{\varphi}^2$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m \left(\dot{s}^2 + \frac{s^2}{2}\dot{\varphi}^2\right)$$

Allora,

$$K = \frac{1}{2}\left[M a^2 \frac{1+\sqrt{2}}{3}\dot{\varphi}^2 + m\left(\dot{s}^2 + \frac{s^2}{2}\dot{\varphi}^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[m\dot{s}^2 + \left(M a^2 \frac{1+\sqrt{2}}{3} + m\frac{s^2}{2}\right)\dot{\varphi}^2\right]$$

Dunque, le EL sono

EL_s: $\dfrac{\partial K}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial \dot{s}}\right) = m\ddot{s}$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = m\frac{s}{2}\dot{\varphi}^2$$

- $$m\left(\ddot{s} - \frac{s}{2}\dot{\varphi}^2\right) = -bs + \frac{mg}{\sqrt{2}}$$

EL_φ: $\dfrac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \left(Ma^2\dfrac{1+\sqrt{2}}{3} + m\dfrac{s^2}{2}\right)\dot{\varphi}$, $\dfrac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \left(Ma^2\frac{1+\sqrt{2}}{3} + m\frac{s^2}{2}\right)\ddot{\varphi} + ms\dot{s}\dot{\varphi}$$

- $$\left(Ma^2\frac{1+\sqrt{2}}{3} + m\frac{s^2}{2}\right)\ddot{\varphi} + ms\dot{s}\dot{\varphi} = -c\varphi + \frac{Fs}{\sqrt{2}}$$

5) Linearizzazione intorno all'equilibrio

La sollecitazione non è conservativa, quindi si deve utilizzare la formula

$$A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0, \qquad \vec{x} := \frac{\vec{q}-\vec{q}_e}{\varepsilon}$$

dove

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 K}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\Big|_{\vec{q}_e}, \quad B_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial\dot{q}_j}\Big|_{\vec{q}_e} = 0, \quad C_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\Big|_{\vec{q}_e}$$

Quindi,

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m}{2}s_e^2 + \frac{1+\sqrt{2}}{3}Ma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m^3g^2}{4b^2} + \frac{1+\sqrt{2}}{3}Ma^2 \end{bmatrix}$$

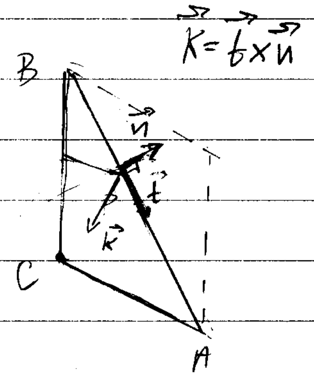
$$C = -\begin{bmatrix} -b & 0 \\ \frac{F}{\sqrt{2}} & -c \end{bmatrix}$$

Dunque,

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m^3g^2}{4b^2} + \frac{1+\sqrt{2}}{3}Ma^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ -\frac{F}{\sqrt{2}} & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + b x_1 = 0 \\ \left(\frac{m^3g^2}{4b^2} + \frac{1+\sqrt{2}}{3}Ma^2\right)\ddot{x}_2 - \frac{F}{\sqrt{2}}x_1 + c x_2 = 0 \end{cases}$$

6) Reazioni dinamiche nel punto P.



Dall'eq. di Newton su (m, P)

$$\vec{\phi}_P = -\vec{F}_P + m\vec{a}_P$$

$$\vec{F}_P = -mg\vec{e}_z - bs\vec{t} + F\vec{e}_\varphi$$

$$= -mg\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{t}+\vec{n}) - bs\vec{t} - F\vec{k} = \left(\frac{mg}{\sqrt{2}} - bs\right)\vec{t} - \frac{mg}{\sqrt{2}}\vec{n} - F\vec{k}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^{(rel)} + \vec{a}_P^{(tr)} + \vec{a}_P^{(Cor)}$$

$$\vec{a}_P^{(rel)} = \ddot{s}\,\vec{t}$$

$$\vec{a}_P^{(tr)} = \cancel{\vec{a}_C} + \dot{\vec{\omega}} \times (P-C) - |\vec{\omega}|^2 (P-C)_\perp$$

$$= \ddot{\varphi}\,\vec{e}_z \times (s\vec{t} + a\vec{e}_z) - \dot{\varphi}^2 \frac{s}{\sqrt{2}}\vec{\imath}$$

$$= s\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \vec{t} - \dot{\varphi}^2 \frac{s}{2}(\vec{t}+\vec{n})$$

$$= s\ddot{\varphi}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{n}\times\vec{t} - \frac{s}{2}\dot{\varphi}^2(\vec{t}+\vec{n})$$

$$= -\frac{s}{2}\dot{\varphi}^2(\vec{t}+\vec{n}) - \frac{s\ddot{\varphi}}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

$$\vec{a}_P^{(Cor)} = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_P^{(rel)} = 2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \dot{s}\vec{t} = 2\dot{s}\dot{\varphi}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}\right)$$

Dunque

$$\vec{a}_P = \left(\ddot{s} - \frac{s}{2}\dot{\varphi}^2\right)\vec{t} - \frac{s}{2}\dot{\varphi}^2\vec{n} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(s\ddot{\varphi} + 2\dot{s}\dot{\varphi}\right)\vec{k}$$

Allora,

$$\vec{\phi}_P = \cancel{\left(-\frac{mg}{\sqrt{2}} + bs\right)}\vec{t} + \frac{mg}{\sqrt{2}}\vec{n} + F\vec{K} +$$

$$+ \cancel{m\left(\ddot{s} - \frac{s}{2}\dot{\varphi}^2\right)\vec{t}} - \frac{ms}{2}\dot{\varphi}^2\vec{n} - \frac{m}{\sqrt{2}}\left(s\ddot{\varphi} + 2\dot{s}\dot{\varphi}\right)\vec{K}$$

$$= m\left(\frac{g}{\sqrt{2}} - \frac{s}{2}\dot{\varphi}^2\right)\vec{n} + \left(F - \frac{m}{\sqrt{2}}\left(s\ddot{\varphi} + 2\dot{s}\dot{\varphi}\right)\right)\vec{K}$$