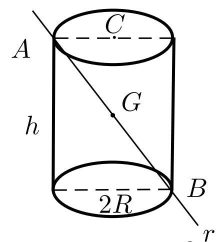
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

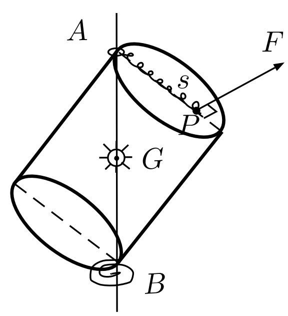
Trieste, 28 settembre 2017. (G. Tondo)

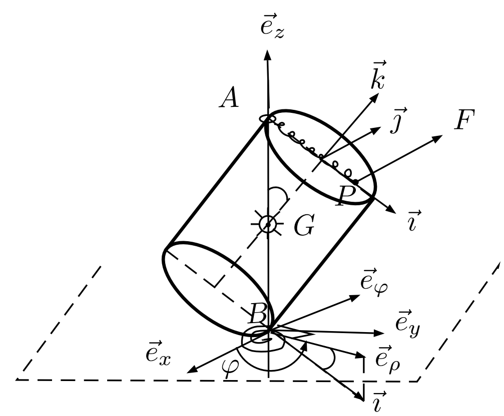
Si consideri un cilindro circolare retto, omogeneo, di massa M, raggio di base R e altezza $h = 3R$.

1) Si calcoli il momento d'inerzia del cilindro rispetto a una retta r passante per il baricentro G e per un punto qualsiasi, detto A, di una delle circonferenze di base.



Il cilindro suddetto è vincolato a ruotare, come in figura, attorno all'asse fisso verticale $(G, \vec{e}_z)$ passante per A, mediante una cerniera sferica in G e un collare sottile in A. Inoltre, un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito sulla base del cilindro contenente il punto C, lungo il diametro passante per A. La sollecitazione attiva sul cilindro è data: da una molla *angolare* posta in B e di costante elastica b e dal peso proprio. La sollecitazione attiva sul punto materiale P: dal peso proprio, da una forza F appartenente al piano della base del cilindro e diretta ortogonalmente al diametro passante per A e da una molla fissata nel punto A del cilindro.





STATICA

Determinare:

2) le configurazioni di equilibrio del modello costituito dal cilindro e dal punto materiale P;

3) la sollecitazione reattiva sul cilindro in A e sul punto P, all'equilibrio.

DINAMICA

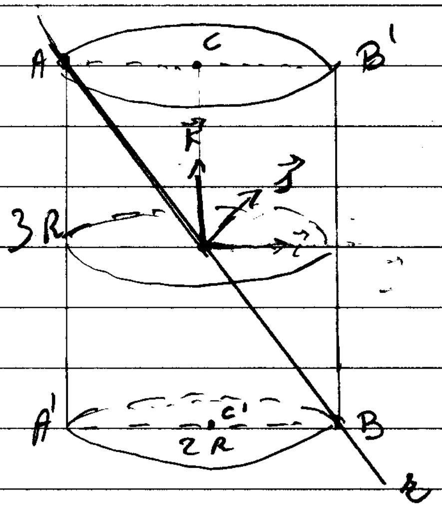
4) Scrivere un sistema di equazioni differenziali pure di moto per il modello;

5) calcolare le reazioni vincolari sul cilindro in A, durante i moti;

6) calcolare le reazioni vincolari sul punto P, durante i moti.

Tema del 28/09/2017

1) Geometria delle masse



La retta r passante per G e per uno qualsiasi punto A di una della circonferenza di base, passa anche per il punto B, appartenente al diametro A'C' parallelo a quello per A.

Poiché $G \in r$, prendiamo una terna principale centrale $(G; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e calcoliamo la matrice d'inerzia.

$$[I_G] = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix}$$

dove gli elementi

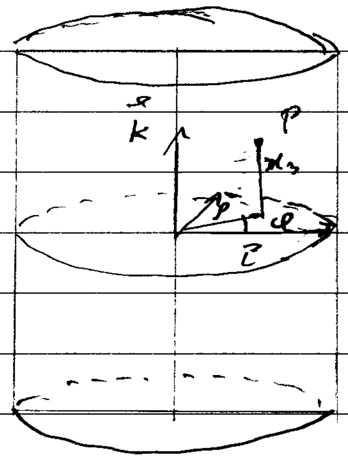
$$I_{11} = \sigma \int_{R} (x_2^2 + x_3^2)\, dx_1 dx_2 dx_3 \equiv I_{22}$$

$$I_{33} = \sigma \int_{R} (x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2 dx_3$$

sono i momenti d'inerzia del cilindro rispetto agli assi principali $(G, \vec{i})$, $(G, \vec{j})$, $(G, \vec{k})$, rispettivamente, e σ è la densità di massa, pari a

$$\sigma = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 h} = \frac{M}{\pi R^3 3}$$

Per il calcolo degli integrali di volume, conviene usare coordinate adattate al problema, cioè coordinate cilindriche legate alle coordinate cartesiane (G, x_1, x_2, x_3) dalla trasformazione



$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi \\ x_2 = \rho\sin\varphi & \rho > 0 \\ x_3 = x_3 & x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La matrice Jacobiana è

$$[J] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det[J] = \rho$$

Quindi

$$I_{11} = \sigma \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dx_3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(\rho^2 \sin^2\varphi + x_3^2\right) \rho \, d\rho$$

$$= \sigma \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dx_3 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_0^R \rho^3 \sin^2\varphi \, d\rho + \int_0^R \rho x_3^2 \, d\rho \right)$$

$$= \sigma \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dx_3 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho + \sigma \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^2 \, dx_3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \, d\rho$$

Poiché

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dx_3 = h$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\Big[\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\pi = \pi$$

$$\int_0^R \rho^3 \, d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = \frac{R^4}{4}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^2 \, dx_3 = \left[\frac{x_3^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{3}\,2\,\frac{h^3}{8} = \frac{h^3}{12}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \quad , \quad \int_0^R \rho \, d\rho = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R = \frac{R^2}{2} \, ,$$

segue che

$$I_{11} = \sigma\left(h\pi\frac{R^4}{4} + \frac{h^3}{12}\,\cancel{2}\pi\frac{R^2}{\cancel{2}}\right) = \frac{M}{\cancel{\pi}\cancel{R^2}\cancel{h}}\left(\cancel{\pi}\cancel{h}\frac{R^{\cancel{4}\,2}}{4} + \cancel{\pi}\,\frac{h^{\cancel{3}\,2}\cancel{R^2}}{12}\right)$$

$$= M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{\cancel{9}\,3\,R^2}{\cancel{12}\,4}\right) = M\,R^2 = I_{22}$$

$$I_{33} = \sigma \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dx_3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 \rho \, d\rho = \sigma \left(h \cancel{2}\pi \frac{R^4}{\cancel{4}2} \right) = \sigma \pi h \frac{R^4}{2} =$$

(4.1)

$$= \frac{M}{\pi R^2 \cancel{h}} \pi \cancel{h} \frac{R^{\cancel{4}2}}{2} = M \frac{R^2}{2} \quad \text{(indipendente da } h\text{)}$$

Dunque,

$$[I_G] = M \begin{bmatrix} R^2 & & \\ & R^2 & \\ & & \frac{R^2}{2} \end{bmatrix},$$

(4.2)

(4.3) $\text{vers}(A-G) = \frac{A-G}{|A-G|} = \left(-R\vec{\imath} + \frac{3}{2}R\vec{k}\right) \frac{2}{\sqrt{13}\cancel{R}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(-2\vec{\imath} + 3\vec{k}\right)$

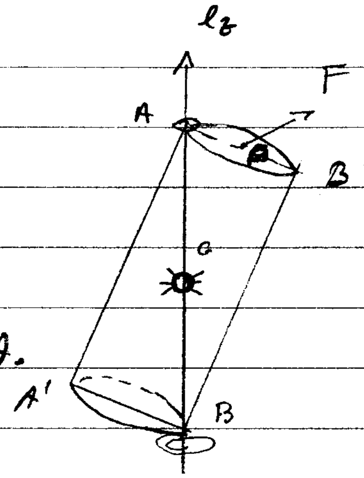
Quindi, il momento d'inerzia I_r è pari a

$$I_r = \text{vers}(A-G) \cdot I_G \left(\text{vers}(A-G)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2, & 0, & 3 \end{bmatrix} MR^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(4.4)

$$= \frac{MR^2}{13} \begin{bmatrix} -2, & 0, & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{MR^2}{13}\left(4 + \frac{9}{2}\right) = \frac{17}{26} MR^2$$



Cinematica

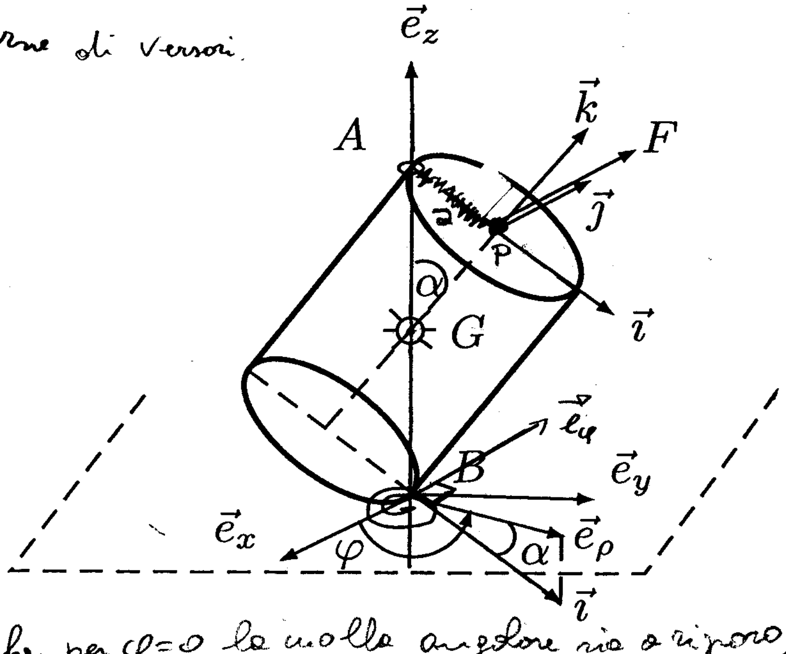
Il cilindro è vincolato ad avere 2 punti fissi (e quindi un asse): il baricentro G e un punto della circonferenza di base, che chiamiamo A. Naturalmente, l'asse per A e G, passa per il punto della circonferenza della base opposta ad A, punto che sta sul diametro parallelo ad AC.

Dunque, il cilindro ha 1 g.l e come coordinate libere prendiamo l'angolo di rotazione $\varphi \in R$, misurato tra 2 piani, uno fisso e uno solidale al cilindro, che fisseremo qui sotto.
Il punto P ha un'altro grado di libertà: $0 \le s \le 2R$ è la seconda coordinata libera.
Consideriamo le seguenti terne di versori.

$(\vec e_x, \vec e_y, \vec e_z)$: terna "fissa"

$(\vec e_\rho, \vec e_\varphi, \vec e_z)$: terna "intermedia"

$(\vec i, \vec j, \vec k)$: terna "solidale"



Il versore $\vec e_z$ è preso parallelo a un asse verticale ed $\vec e_x$ in modo che per $\varphi=0$ la molla angolare sia a riposo;
$\vec k$ è parallelo all'asse di simmetria del cilindro,
$\vec i$ è parallelo al diametro AC e $\vec j = \vec k \times \vec i$;
$\vec e_\rho$ è scelto parallelo all'intersezione del piano (verticale) passante per gli assi $(B;\vec e_z)$, $(B;\vec i)$ e il piano orizzontale per B.
L'angolo di rotazione φ sarà quello compreso tra l'asse fisso $(B, \vec e_x)$ e l'asse solidale $(B, \vec e_\rho)$ ed $\vec e_\varphi := \vec e_z \times \vec e_\rho$.

Ricaviamo le leggi di trasformazione tra le suddette terne e le loro inverse.

$$(6.1)\quad \begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos\varphi\,\vec{e}_\rho - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y &= \sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$(6.2)\quad \begin{aligned} \vec{i} &= \cos\alpha\,\vec{e}_\rho - \sin\alpha\,\vec{e}_z = \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{e}_\rho - \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{e}_z \\ \vec{j} &= \vec{k}\times\vec{i} = (\cos\alpha\,\vec{e}_z + \sin\alpha\,\vec{e}_\rho)\times(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho - \sin\alpha\,\vec{e}_z) = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi \\ \vec{k} &= \cos\alpha\,\vec{e}_z + \sin\alpha\,\vec{e}_\rho = \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{e}_z + \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{e}_\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3\vec{i}+2\vec{k})\ ; \quad \sin\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}} = \frac{2R}{\sqrt{13}R} = \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \vec{e}_\varphi &= \vec{j} \\ \vec{e}_z &= -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2\vec{i}+3\vec{k})\ ; \quad \cos\alpha = \frac{\overline{GC}}{\overline{AG}} = \frac{3R}{R\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Componendo le (6.1) con le (6.2) si trova

$$(6.3)\quad \begin{aligned} \vec{i} &= \cos\alpha(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y) - \sin\alpha\,\vec{e}_z = \frac{3}{\sqrt{13}}\cos\varphi\,\vec{e}_x + \frac{3}{\sqrt{13}}\sin\varphi\,\vec{e}_y - \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{e}_z \\ \vec{j} &= -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{k} &= \sin\alpha(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y) + \cos\alpha\,\vec{e}_z = \frac{2}{\sqrt{13}}\cos\varphi\,\vec{e}_x + \frac{2}{\sqrt{13}}\sin\varphi\,\vec{e}_y + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{e}_z \end{aligned}$$

e le sue inverse

$$(6.4)\quad \begin{aligned} \vec{e}_x &= \frac{3}{\sqrt{13}}\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{13}}\cos\varphi\,\vec{k} \\ \vec{e}_y &= \frac{3}{\sqrt{13}}\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{13}}\sin\varphi\,\vec{k} \\ \vec{e}_z &= -\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{r}_P = P - B = (P-A) + (A-B) = s\,\vec{i} + \sqrt{13}R\,\vec{e}_z$$

Statica

I vincoli sono olonomi, non dissipativi, bilateri e fissi. Scriviamo le equazioni pure di equilibrio

7.1) $Q_\varphi^{(att)} = 0, \quad Q_s^{(att)} = 0$

A tale scopo, calcoliamo l'energia potenziale della sollecitazione attiva

$$V(\varphi, s) = \frac{1}{2} b\varphi^2 + \frac{1}{2} c s^2 - M\vec{g} \cdot \vec{x}_G - m\vec{g} \cdot \vec{x}_P$$

$$\vec{x}_G = G - B = \frac{\sqrt{13}}{2} R\vec{e}_z$$

$$\vec{x}_P = P - B = (P-A) + (A-B) = s\vec{\imath} + \sqrt{13} R\vec{e}_z \Rightarrow \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = s\frac{\partial \vec{\imath}}{\partial \varphi} \overset{(1.2)}{=} s\frac{3}{\sqrt{13}}\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial \varphi}$$

Quindi

$$\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial s} = \vec{\imath}$$

$$V(\varphi, s) = \frac{1}{2} b\varphi^2 + \frac{1}{2} c s^2 + Mg\, \vec{e}_z \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} R\vec{e}_z + mg\, \vec{e}_z \cdot \left(s\vec{\imath} + \sqrt{13} R\vec{e}_z\right)$$

$$= \frac{1}{2} b\varphi^2 + \frac{1}{2} c s^2 + \cancel{\frac{Mg\sqrt{13}}{2} R} + mgs\, \vec{e}_z \cdot \vec{\imath} + \cancel{mg\sqrt{13} R}$$

a meno di termini costanti $= \frac{1}{2} b\varphi^2 + \frac{1}{2} c s^2 - mgs\frac{2}{\sqrt{13}}$

Allora,

$$Q_\varphi^{(att)} = -b\varphi$$

$$Q_s^{(att)} = -cs + mg\frac{2}{\sqrt{13}}$$

Ora, calcoliamo le componenti lagrangiane del carico follower agente su P:

$$Q_\varphi^{(foll)} = \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = F\vec{j} \cdot s \frac{3}{\sqrt{13}} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = Fs\frac{3}{\sqrt{13}}\, \vec{j}\cdot\vec{e}_\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}} Fs$$

$$Q_s^{(foll)} = \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial s} = F\vec{j}\cdot\vec{i} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{\partial Q_\varphi}{\partial s} = \frac{3}{\sqrt{13}} F \neq \frac{\partial Q_s}{\partial \varphi} = 0$$

Dunque,

$$Q_\varphi = -b\varphi + \frac{3}{\sqrt{13}} Fs$$

$$Q_s = -cs + mg\frac{2}{\sqrt{13}}$$

Le eq. pure di equilibrio sono:

$$\begin{cases} -b\varphi + \frac{3}{\sqrt{13}} Fs = 0 \\ -cs + mg\frac{2}{\sqrt{13}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_e = \frac{3}{\sqrt{13}}\frac{F s_e}{b} = \frac{3}{\sqrt{13}}\frac{F}{b}\frac{mg}{c}\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{6}{13}\frac{Fmg}{bc} \\ s_e = \frac{mg}{c}\frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

Quindi, il modello ammette la sola configurazione di equilibrio

$$\vec{q}_e = \left(\frac{6}{13}\frac{Fmg}{bc}, \frac{mg}{c}\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = (\varphi_e, s_e)$$

3) Reazioni vincolari all'equilibrio in A e in P.

Il collare sottile in A esercita una reazione sul cilindro, posta nel piano orizzontale:

$$(8.2)\quad \vec{\Psi}_A = \Psi_\rho \vec{e}_\rho + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi \,,$$

mentre il vincolo in P una reazione $\vec{\Phi}_P$ posta nel piano ortogonale a $\vec{i}$:

$$(8.3)\quad \vec{\Phi}_P = \Phi_j \vec{j} + \Phi_k \vec{k}$$

Quindi, dobbiamo trovare 4 incognite $(\Psi_\rho, \Psi_\varphi, \Phi_j, \Phi_k)$.
A tale scopo, scriviamo le ECS su tutto il modello:

$$(8.4)\quad \vec{R}^{(est,att)} + \vec{R}^{(est,reatt)} = \vec{0} \iff \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\Psi}_A + \vec{\Psi}_G = 0$$

$$(8.5)\quad \vec{M}_G^{(est,att)} + \vec{M}_G^{(est,reatt)} = \vec{0} \qquad \vec{M}_G^{(est,att)} + (A-G)\times\vec{\Psi}_A = \vec{0}$$

Dalla (8.5), ricaviamo immediatamente la $\vec{\Psi}_A$

$$\vec{\Psi}_A \times (A-G) = \vec{M}_G^{(est,att)} \iff \vec{\Psi}_A = \frac{(A-G)\times\vec{M}_G^{(est,att)}}{|A-G|^2} + \cancel{\lambda(A-G)}$$

$\Uparrow_{(8.2)}$

$$\begin{aligned}\vec{M}_G^{(est,att)} &= -b\varphi\vec{e}_z + (P-G)\times(m\vec{g}+F\vec{j}) = -b\varphi\vec{e}_z + \left(s\vec{i} + \frac{\sqrt{13}R\vec{e}_z}{2}\right)\times(-mg\vec{e}_z + F\vec{j}) \\ &\overset{!}{=} -b\varphi\vec{e}_z + s(-mg\vec{i}\times\vec{e}_z + F\vec{i}\times\vec{j}) + \frac{\sqrt{13}}{2}FR\vec{e}_z\times\vec{j} \\ &\overset{!}{=} -b\varphi\vec{e}_z - mgs\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{e}_\varphi\right) + Fs\vec{k} - \frac{\sqrt{13}}{2}FR\vec{e}_\rho\end{aligned}$$

$$\vec{M}_G^{(est,att)} = -b\varphi\,\vec{e}_z + \frac{3}{\sqrt{13}}\,mgs\,\vec{e}_\varphi + Fs\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\,\vec{e}_\rho + \frac{3}{\sqrt{13}}\,\vec{e}_z\right) - \frac{\sqrt{13}}{2}RF\,\vec{e}_\rho$$

(9.1)
$$= F\left(\frac{2}{\sqrt{13}}s - \frac{\sqrt{13}}{2}R\right)\vec{e}_\rho + \frac{3}{\sqrt{13}}\,mgs\,\vec{e}_\varphi + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}Fs - b\varphi\right)\vec{e}_z$$

Dunque,

(9.2)
$$\vec{\Psi}_A = \frac{2}{\sqrt{13}\,R}\,\vec{e}_z \times \vec{M}_G^{(est,att)} = \frac{2}{\sqrt{13}\,R}\,F\left(\frac{2}{\sqrt{13}}s - \frac{\sqrt{13}}{2}R\right)\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho + \frac{3}{\sqrt{13}}\,mgs\left(\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi\right)\frac{2}{\sqrt{13}\,R}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{13}}\frac{F}{R}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}s - \frac{\sqrt{13}}{2}R\right)\vec{e}_\varphi - \frac{6}{13}\frac{mgs}{R}\,\vec{e}_\rho$$

$$\vec{\Psi}_A\big|_{\vec{q}_e} = \frac{2}{\sqrt{13}}\frac{F}{R}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\frac{mg}{C}\frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{\sqrt{13}}{2}R\right)\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e} - \frac{6}{13}\frac{mg}{R}\frac{mg}{C}\frac{2}{\sqrt{13}}\,\vec{e}_\rho\big|_{\vec{q}_e}$$

(9.3)
$$= \frac{2}{\sqrt{13}}\frac{F}{R}\left(\frac{4}{13}\frac{mg}{C} - \frac{\sqrt{13}}{2}R\right)\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e} - \frac{12}{13\sqrt{13}}\frac{(mg)^2}{CR}\,\vec{e}_\rho\big|_{\vec{q}_e}$$
$$= \left(\frac{8}{13\sqrt{13}}\frac{Fmg}{CR} - F\right)\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e} - \frac{12}{13\sqrt{13}}\frac{(mg)^2}{CR}\,\vec{e}_\rho\big|_{\vec{q}_e}$$

Sostituendo la (9.3) nella (8.4) si può ricavare $\vec{\Psi}_G$ che, però, non è richiesta. Calcoliamo $\vec{\phi}_P$, scrivendo l'equazione della Statica del punto materiale

(9.4)
$$\vec{R}_P + \vec{\phi}_P = \vec{0} \iff \left(m\vec{g} - Cs\,\vec{i} + F\vec{j}\right) + \vec{\phi}_P = \vec{0}$$

Quindi

(9.5)
$$\vec{\phi}_P = -m\vec{g} + Cs\,\vec{i} - F\vec{j} = mg\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\,\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\,\vec{k}\right) + Cs\,\vec{i} - F\vec{j}$$

Dunque,

(9.6)
$$\vec{\phi}_P\big|_{\vec{q}_e} = \frac{mg}{\sqrt{13}}\left(\cancel{-2\,\vec{i}\big|_{\vec{q}_e}} + 3\,\vec{k}\big|_{\vec{q}_e}\right) + \cancel{C\,\frac{mg}{C}\,\frac{2}{\sqrt{13}}\,\vec{i}\big|_{\vec{q}_e}} - F\vec{j}\big|_{\vec{q}_e}$$
$$= -F\vec{j}\big|_{\vec{q}_e} + \frac{3}{\sqrt{13}}\,mg\,\vec{k}\big|_{\vec{q}_e} = -F\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e} + \frac{3}{\sqrt{13}}\,mg\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\,\vec{e}_\rho\big|_{\vec{q}_e} + \frac{3}{\sqrt{13}}\,\vec{e}_z\big|_{\vec{q}_e}\right)$$

Dinamica

4) Scriviamo le equazioni di Lagrange
A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello.

$$K = K^{(rig)} + K^{(P)}$$

(10.1)
$$K^{(rig)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot \mathbb{I}_G(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \cdot \mathbb{I}_G(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z\cdot\mathbb{I}_G(\vec{e}_z)$$

Lo scalare $\vec{e}_z\cdot\mathbb{I}_G(\vec{e}_z)$ è il momento d'inerzia del cilindro rs. all'asse di rotazione per G e A, quindi

(10.2)
$$\vec{e}_z\cdot\mathbb{I}_G(\vec{e}_z) = I_z \overset{(4.4)}{=} \frac{17}{26}\,M\,R^2$$

Dunque

(10.3)
$$K^{(rig)} = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{26}\,M\,R^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2}\,m\,|\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(P-B) = \frac{d}{dt}\Big((A-B)+(P-A)\Big) = \frac{d}{dt}(P-A) = \frac{d}{dt}(s\vec{\imath}) = \dot{s}\vec{\imath} + s\dot{\vec{\imath}}$$

(10.4)
$$\dot{\vec{\imath}} = \vec{\omega}\times\vec{\imath} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z\times\vec{\imath} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \dot{\varphi}\cos\alpha\,\vec{e}_\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

(10.5)
$$\vec{v}_P = \dot{s}\,\vec{\imath} + \frac{3}{\sqrt{13}}\,s\,\dot{\varphi}\,\vec{\jmath} \;\Rightarrow\; |\vec{v}_P|^2 = \dot{s}^2 + \frac{9}{13}\,s^2\dot{\varphi}^2$$

Allora,

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m \left(\dot{s}^2 + \frac{9}{13} s^2 \dot{\varphi}^2 \right)$$

e

$$K = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{26} M R^2 \dot{\varphi}^2 + m \dot{s}^2 + m \frac{9}{13} s^2 \dot{\varphi}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{17}{26} M R^2 + \frac{9}{13} m s^2 \right) \dot{\varphi}^2 + m \dot{s}^2 \right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \left(\frac{17}{26} M R^2 + \frac{9}{13} m s^2 \right) \dot{\varphi} \,, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \left(\frac{17}{26} M R^2 + \frac{9}{13} m s^2 \right) \ddot{\varphi} + \frac{18}{13} m s \dot{s} \dot{\varphi}$$

$$EL_{\varphi}: \quad \boxed{\left(\frac{17}{26} M R^2 + \frac{9}{13} m s^2 \right) \ddot{\varphi} + \frac{18}{13} m s \dot{s} \dot{\varphi} = -b\varphi + \frac{3}{\sqrt{13}} F s}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = m \dot{s} \,, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} \right) = m \ddot{s} \,, \quad \frac{\partial K}{\partial s} = \frac{9}{13} m s \dot{\varphi}^2$$

$$EL_{s}: \quad \boxed{m \ddot{s} - \frac{9}{13} m s \dot{\varphi}^2 = -c s + \frac{2}{\sqrt{13}} m g}$$

5) Reazione vincolare in A durante il moto in funzione di φ

Scriviamo la II ECS con polo in G, in modo da eliminare il contributo di $\vec{\Phi}'_G$.

$$(12.1)\quad \vec{M}_G^{(est)} + (A-G)\times\vec{\varphi}'_A = \frac{d\vec{L}_G}{dt} \quad ; \quad \vec{\varphi}'_A = \varphi'_3\vec{e}_3 + \varphi'_4\vec{e}_4$$

cioè

$$(12.2)\quad \vec{\varphi}'_A \times (A-G) = \vec{M}_G^{(est)} - \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$

Dunque,

$$(12.3)\quad \vec{\varphi}'_A = \frac{(A-G)}{|A-G|^2}\times\left(\vec{M}_G^{(est)} - \frac{d\vec{L}_G}{dt}\right) = \frac{A-G\times\vec{M}_G^{(est)}}{|A-G|^2} - \frac{A-G}{|A-G|^2}\times\frac{d\vec{L}_G}{dt}$$

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^{(cil)} + \vec{L}_G^{(punto)} \qquad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_2 = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{13}}\left(-2\vec{i} + 3\vec{k}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_G^{(cil)}\right) = \left.\frac{d\,\mathbb{I}_G(\vec{\omega})}{dt}\right|_{proprio} = \mathbb{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega}\times\mathbb{I}_G(\vec{\omega}) \quad , \quad \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi}\,\vec{e}_2$$

$$\mathbb{I}_G(\vec{e}_2) = [\vec{i},\vec{j},\vec{k}]\,MR^2\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{13}}\\ 0\\ \frac{3}{\sqrt{13}}\end{bmatrix} =$$

$$= [\vec{i},\vec{j},\vec{k}]\,MR^2\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{13}}\\ 0\\ \frac{3}{2\sqrt{13}}\end{bmatrix} = \frac{MR^2}{\sqrt{13}}\left(-2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{k}\right)$$

N.B. Il vettore $\mathbb{I}_G(\vec{e}_2)$ NON è parallelo a $\vec{e}_2$, poiché $(G,\vec{e}_2)$ NON è API(G).

Quindi,

(13.1) $$\mathbb{I}_G(\vec{\omega}) = \mathbb{I}_G(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \dot{\varphi}\,\mathbb{I}_G(\vec{e}_z) = \dot{\varphi}\,\frac{MR^2}{\sqrt{13}}\left(-2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{k}\right)$$

(13.2) $$\mathbb{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) = \mathbb{I}_G(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \ddot{\varphi}\,\mathbb{I}_G(\vec{e}_z) = \ddot{\varphi}\,\frac{MR^2}{\sqrt{13}}\left(-2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{k}\right) =$$

$$= \ddot{\varphi}\,\frac{MR^2}{\sqrt{13}}\left(-2\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{e}_\rho - \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{e}_z\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{e}_z + \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{e}_\rho\right)\right) =$$

$$= \ddot{\varphi}\,\frac{MR^2}{13}\left(-3\vec{e}_\rho + \frac{17}{2}\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{\omega} \times \mathbb{I}_G(\vec{\omega}) = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{13}}\left(-2\vec{i} + 3\vec{k}\right) \times \dot{\varphi}\,\frac{MR^2}{\sqrt{13}}\left(-2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{k}\right)$$

$$= \frac{MR^2}{13}\,\dot{\varphi}^2\left(-3\vec{j}\right)$$

$$= -\frac{3}{13}\,MR^2\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\varphi$$

Allora,

(13.4) $$\mathbb{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_G(\vec{\omega}) = \frac{MR^2}{13}\left(-3\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\rho - 3\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\varphi + \frac{17}{2}\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{L}_G^{(punto)} = (P-G) \times m\vec{v}_P$$

$$\frac{d\vec{L}_G^{(punto)}}{dt} = \cancel{\left(\vec{v}_P - \vec{v}_G\right) \times m\vec{v}_P} + (P-G) \times m\,\vec{a}_P$$

$$P-G = (P-A) + (A-G) = s\,\vec{i} + \frac{\sqrt{13}}{2}R\,\vec{e}_z = s\,\vec{i} + \frac{\sqrt{13}R}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{k}\right) =$$

$$= (s-R)\,\vec{i} + \frac{3}{2}R\,\vec{k}$$

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P \overset{(10.5)}{=} \frac{d}{dt}\left(\dot{s}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}} s\dot{\varphi}\vec{j}\right) =$$

(14.1)
$$= \ddot{s}\vec{i} + \dot{s}\dot{\vec{i}} + \frac{3}{\sqrt{13}}\left(\dot{s}\dot{\varphi}\vec{j} + s\ddot{\varphi}\vec{j} + s\dot{\varphi}\dot{\vec{j}}\right)$$

$$= \ddot{s}\vec{i} + \dot{s}\frac{3}{\sqrt{13}}\dot{\varphi}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{13}}\left(\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{13}} s\dot{\varphi}\dot{\vec{j}}$$

(14.2) $$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega}\times\vec{j} = \dot{\varphi}\vec{e}_z \times \vec{j} = \dot{\varphi}\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho \overset{(6.2)}{=} -\dot{\varphi}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{k}\right)$$

Quindi,

(14.3)
$$\vec{a}_P = \ddot{s}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{j} - \frac{3}{\sqrt{13}} s\dot{\varphi}^2\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{k}\right)$$

$$= \left(\ddot{s} - \frac{9}{13}s\dot{\varphi}^2\right)\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{j} - \frac{6}{13}s\dot{\varphi}^2\vec{k}$$

Dunque

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_C \overset{(p\text{-}to)}{=} m\left(\left(s-R\right)\vec{i} + \frac{3}{2}R\vec{k}\right) \times \left(\left(\ddot{s} - \frac{9}{13}s\dot{\varphi}^2\right)\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{j} - \frac{6}{13}s\dot{\varphi}^2\vec{k}\right)$$

$$= m\left[\frac{3}{\sqrt{13}}(s-R)\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{k} + \frac{6}{13}(s-R)s\dot{\varphi}^2\vec{j} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}R\left(\ddot{s} - \frac{9}{13}s\dot{\varphi}^2\right)\vec{j} - \frac{9}{2\sqrt{13}}R\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{i}\right]$$

$$= m\left[-\frac{9}{2\sqrt{13}}R\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{i} + \left(\frac{3}{2}R\ddot{s} + \frac{6}{13}s^2\dot{\varphi}^2 - \frac{3}{2}Rs\dot{\varphi}^2\right)\vec{j} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{\sqrt{13}}(s-R)\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{k}\right]$$

$$= m\left[-\frac{9}{2\sqrt{13}}R\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{e}_\rho - \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{e}_z\right) + \left(\frac{3}{2}R\ddot{s} + \frac{6}{13}s^2\dot{\varphi}^2 - \frac{3}{2}Rs\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{\sqrt{13}}(s-R)\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{e}_\rho + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{e}_z\right)\right.$$

Quindi,

$$\frac{d}{dt}\overset{(\text{punto})}{\vec{L}_G} = m\left[\left(\frac{6}{13}s-\frac{3}{2}R\right)\left(2\dot{s}\dot{\varphi}+s\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_s+\left(\frac{3}{2}R\ddot{s}+\left(\frac{6}{13}s-\frac{3}{2}R\right)s\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\varphi+\right.$$
$$\left.+\frac{9}{13}s\left(2\dot{s}\dot{\varphi}+s\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_z\right]$$

Allora,

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \left[-\frac{3}{13}MR^2\ddot{\varphi}+m\left(\frac{6}{13}s-\frac{3}{2}R\right)\left(2\dot{s}\dot{\varphi}+s\ddot{\varphi}\right)\right]\vec{e}_s+$$
$$+\left[-\frac{3}{13}MR^2\dot{\varphi}^2+m\left(\frac{3}{2}R\ddot{s}+\left(\frac{6}{13}s-\frac{3}{2}R\right)s\dot{\varphi}^2\right)\right]\vec{e}_\varphi+$$
$$+\frac{1}{13}\left[\frac{17}{2}MR^2\ddot{\varphi}+m\,9\,s\left(2\dot{s}\dot{\varphi}+s\ddot{\varphi}\right)\right]\vec{e}_z$$

$$\frac{A-G}{|A-G|^2}\times\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{2}{\sqrt{13}\,R}\left[-\frac{3}{13}MR^2\ddot{\varphi}+m\left(\frac{6}{13}s-\frac{3}{2}R\right)\left(2\dot{s}\dot{\varphi}+s\ddot{\varphi}\right)\right]\underbrace{\vec{e}_z\times\vec{e}_s}_{\vec{e}_\varphi}+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{13}\,R}\left[-\frac{3}{13}MR^2\dot{\varphi}^2+m\left(\frac{3}{2}R\ddot{s}+\left(\frac{6}{13}s-\frac{3}{2}R\right)s\dot{\varphi}^2\right)\right]\underbrace{\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi}_{-\vec{e}_s}$$

Dunque, tenendo conto della (12.3) e della (9.2), si ottiene

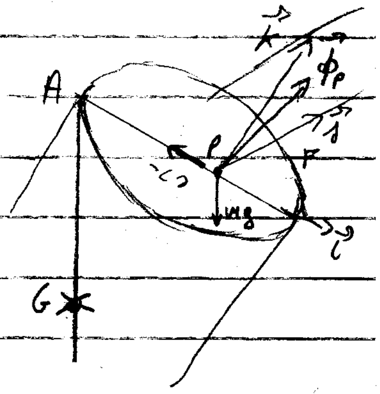
$$\psi'_A = \frac{2}{\sqrt{13}}\frac{E}{R}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}s-\frac{\sqrt{13}}{2}R\right)\vec{e}_\varphi-\frac{6}{13}\frac{mgs}{R}\vec{e}_s+$$
$$-\frac{2}{\sqrt{13}\,R}\left[-\frac{3}{13}MR^2\ddot{\varphi}+m\left(\frac{6}{13}s-\frac{3}{2}R\right)\left(2\dot{s}\dot{\varphi}+s\ddot{\varphi}\right)\right]\vec{e}_\varphi+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{13}\,R}\left[-\frac{3}{13}MR^2\dot{\varphi}^2+m\left(\frac{3}{2}R\ddot{s}+\left(\frac{6}{13}s-\frac{3}{2}R\right)s\dot{\varphi}^2\right)\right]\vec{e}_s$$

Allora, la reazione dell'anellino in A è

$$\vec{\varphi}'_A = \frac{2}{\sqrt{13}\,R}\left[-\frac{3}{\sqrt{13}}\,mgs - \frac{3}{13}\,MR^2\dot{\varphi}^2 + m\left(\frac{3}{2}R\ddot{s} + \left(\frac{6}{13}s - \frac{3R}{2}\right)s\dot{\varphi}^2\right)\right]\vec{e}_s +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{13}\,R}\left[F\left(\frac{2}{\sqrt{13}}s - \frac{\sqrt{13}}{2}R\right) + \frac{3}{13}MR^2\ddot{\varphi} - m\left(\frac{6}{13}s - \frac{3R}{2}\right)\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\right]\vec{e}_\varphi$$

6) Per calcolare le reazioni nel punto materiale P, usiamo l'equazione della dinamica del punto



$$\vec{R}_P + \vec{\phi}'_P = m\vec{a}_P$$

$$\vec{\phi}'_P = -\vec{R}_P + m\vec{a}_P$$

Quindi, tenendo conto delle (9.5) e delle (14.3), si trova

$$\vec{\phi}'_P = \left(cs - \frac{2}{\sqrt{13}}mg\right)\vec{i} - F\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{13}}mg\vec{k} +$$

$$+m\left(\ddot{s} - \frac{9}{13}s\dot{\varphi}^2\right)\vec{i} + \frac{3m}{\sqrt{13}}\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{j} - \frac{6ms\dot{\varphi}^2}{13}\vec{k}$$

$$= \left[\cancel{cs - \frac{2}{\sqrt{13}}mg + m\left(\ddot{s} - \frac{9}{13}s\dot{\varphi}^2\right)}\right]\vec{i} + \quad \Leftarrow EL_s$$

$$+\left[-F + \frac{3}{\sqrt{13}}m\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\right]\vec{j} +$$

$$+\,m\left[\frac{3}{\sqrt{13}}g - \frac{6}{13}s\dot{\varphi}^2\right]\vec{k}$$