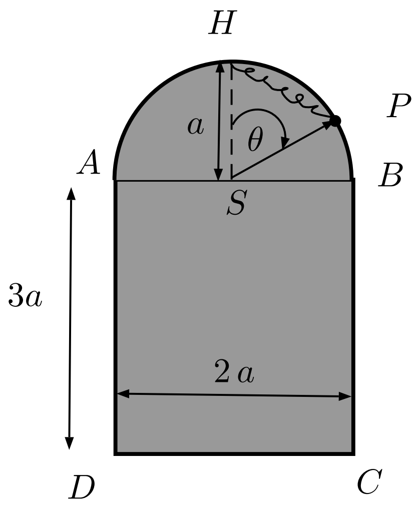
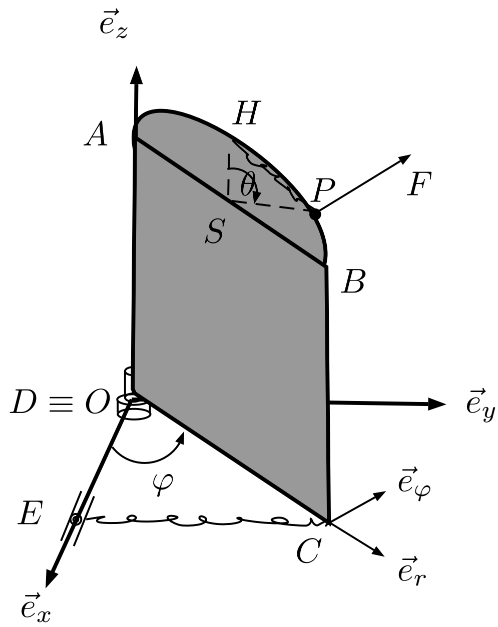
# Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 29 gennaio 2018. (G. Tondo)




Una lamina rigida omogenea di massa $M$, è vincolata a ruotare intorno ad un asse fisso verticale. Il dispositivo vincolare è realizzato mediante una cerniera cilindrica liscia, fissata in $O$. Un punto materiale $P$ di massa $m$, è vincolato a scorrere senza attrito sul bordo del semidisco $AB$. Sulla lamina agisce una molla di richiamo di costante elastica $c$, fissata in $C$, la quale si mantiene sempre parallela al versore $\vec{e}_y$. Sul punto $P$ agisce un'altra molla, con la stessa costante elastica, con estremo fissato in $H$, oltre ad una forza $F > 0$, sempre ortogonale al piano della lamina. Inoltre, su tutto il modello, agisce il peso proprio. Si denoti con $0 \leq \varphi < 2\pi$, l'angolo tra i versori $\vec{e}_x$ ed $\vec{e}_r$ e con $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ l'angolo tra il versore $\vec{e}_z$ e il vettore $P - S$.

**STATICA.**

**1)** Determinare le configurazioni di equilibrio del modello, supponendo $m\,g \neq c\,a$;

**2)** calcolare le reazioni e il momento delle reazioni vincolari, all'equilibrio, della cerniera cilidrica in $O$ sulla lamina;

**3)** calcolare le reazioni vincolari interne, all'equilibrio, della lamina sul punto $P$.

**DINAMICA.**

Si chiede di:

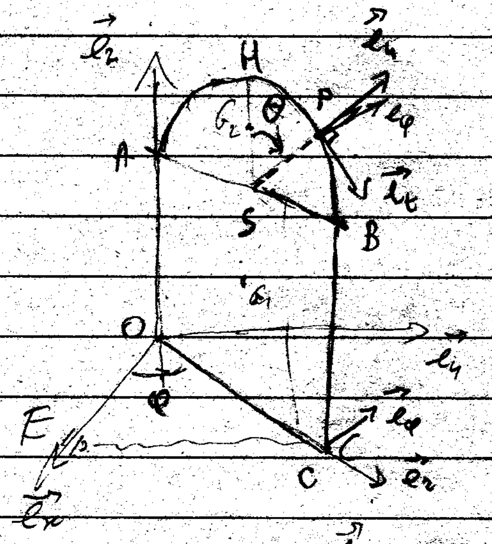
**4)** scrivere le equazioni pure di moto;

**5)** linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio;

**6)** calcolare le reazioni e il momento delle reazioni vincolari della cerniera in $O$ sulla lamina, durante il moto.

Il modello è formato da 1 rigido più un punto materiale vincolato al rigido. Con il metodo dei congelamenti successivi si deduce che il modello ha 2 g.l.. Quindi può essere descritto dalle coordinate lagrangiane della figura

$$0 \le \varphi < 2\pi \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

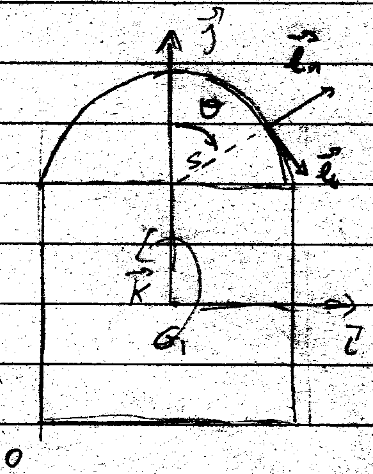



La cinematica del modello può essere descritta tramite le 3 basi

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ : "fissa"

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ : "intermedia"

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ : "solidale alla lamina"




$$(1.1) \begin{cases} \vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\,\vec{e}_r - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\,\vec{e}_r + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(1.2) \begin{cases} \vec{i} = \vec{e}_r \\ \vec{j} = \vec{e}_z \\ \vec{k} = -\vec{e}_\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_r = \vec{i} \\ \vec{e}_z = \vec{j} \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{k} \end{cases}$$

Quindi:

$$C-O = 2a\,\vec{e}_r = 2a\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right) \quad , \quad C-E = 2a\sin\varphi\,\vec{e}_y$$

$$(1.3)\quad P-S = a\left(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_z\right) = a\left(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z\right)$$

$$P-H = (P-S) + (S-H) = a\left(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_z\right) - a\,\vec{e}_z = a\left[\sin\theta\,\vec{e}_r + (\cos\theta - 1)\,\vec{e}_z\right]$$

$$P-O = (P-S) + (S-O) = a\sin\theta\,\vec{e}_r + a\cos\theta\,\vec{e}_z + a\left(\vec{e}_r + 3\,\vec{e}_z\right) =$$

$$= a\left[(\sin\theta + 1)\,\vec{e}_r + (\cos\theta + 3)\,\vec{e}_z\right]$$

Poiché la sollecitazione $\vec{F}_P^{(foll)}$ non è conservativa, conviene usare le eq. pure di equilibrio. Tuttavia, per calcolare le forze generalizzate dovute a $\vec{F}_C, \vec{F}_P^{(el)}$ e al peso proprio, che sono sollecitazioni conservative, utilizziamo la loro energia potenziale

$$V^{(el)} = \frac{1}{2} c \, \overline{CE}^2 + \frac{1}{2} c \, \overline{PH}^2 = \frac{1}{2} c \left[4a^2 \sin^2\varphi + a^2(2-2\cos\theta)\right]$$

$$= c\left(2a^2 \sin^2\varphi - a^2\cos\theta + a^2\right)$$

Quindi

$$Q_\varphi^{(el)} = -\frac{\partial V^{(el)}}{\partial \varphi} = -4a^2c \sin\varphi\cos\varphi = -2a^2c\sin 2\varphi$$

$$Q_\theta^{(el)} = -\frac{\partial V^{(el)}}{\partial \theta} = - a^2 c \sin\theta$$

$$V^{(peso)} = \cancel{-M\vec{g}\cdot\vec{x}_G} - m\vec{g}\cdot\vec{x}_P$$

G: baricentro della lamina

$$= mg\,\vec{e}_z\cdot(P-O) = mga(\cos\theta+3)$$

Dunque

$$Q_\varphi^{(peso)} = -\frac{\partial V^{(peso)}}{\partial \varphi} = 0$$

$$Q_\theta^{(peso)} = -\frac{\partial V^{(peso)}}{\partial \theta} = + mga\sin\theta$$

Per calcolare la forza generalizzata dovuta al carico follower, utilizziamo la definizione

$$Q_\varphi^{(foll)} = \vec{F}_p^{(foll)} \cdot \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \varphi} \qquad \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \varphi} = a\left[(\sin\theta+1)\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} + (\cos\theta+3)\cancel{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi}}\right]$$

$$Q_\theta^{(foll)} = \vec{F}_p^{(foll)} \cdot \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \theta} = a\left[\cos\theta\,\vec{e}_r + (\sin\theta+1)\cancel{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}} + \right.$$

$$\left. - \sin\theta\,\vec{e}_z + (\cos\theta+3)\cancel{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta}}\right]$$

Allora

$$\frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \varphi} = a(\sin\theta+1)\,\vec{e}_\varphi \quad , \quad \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \theta} = a\left(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_z\right)$$

Poiché $\vec{F} = F\,\vec{e}_\varphi$ $\qquad F>0$

$$Q_\varphi^{(foll)} = F a(\sin\theta+1)$$

$$Q_\theta^{(foll)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \theta} \neq \frac{\partial Q_\theta}{\partial \varphi} \Rightarrow \text{NON conservative}$$

Dunque, le forze generalizzate sono

(3.1)
$$Q_\varphi = Q_\varphi^{(el)} + Q_\varphi^{(peso)} + Q_\varphi^{(foll)} = -4a^2c\sin\varphi\cos\varphi + F a(\sin\theta+1)$$

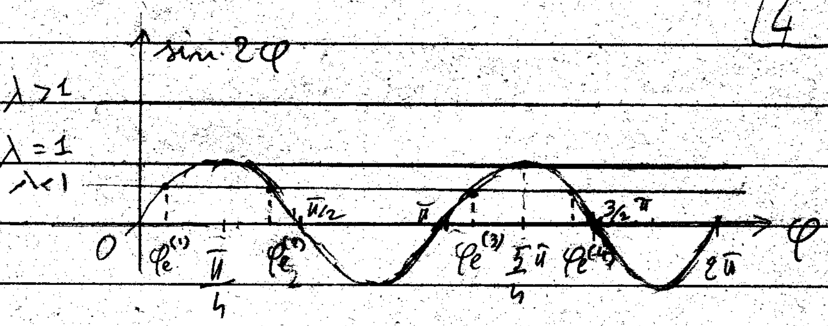
$$Q_\theta = Q_\theta^{(el)} + Q_\theta^{(peso)} + Q_\theta^{(foll)} = -a^2c\sin\theta + mga\sin\theta = a(mg-ac)\sin\theta$$

Allora, le eq. pure di equilibrio si scrivono

(3.2)
$$\begin{cases} -2a^2c\sin 2\varphi + F\cancel{a}(\sin\theta+1) = 0 \\ a(mg-ac)\sin\theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin 2\varphi = \dfrac{F}{2ac} = \lambda \\ \theta = 0 \end{cases}$$

se $\lambda > 1$ $\nexists$ soluzione

se $\lambda = 1$ $\vec{q}_e^{(5)} = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $\vec{q}_e^{(6)} = \left(\frac{5}{4}\pi, 0\right)$




se $\lambda < 1$

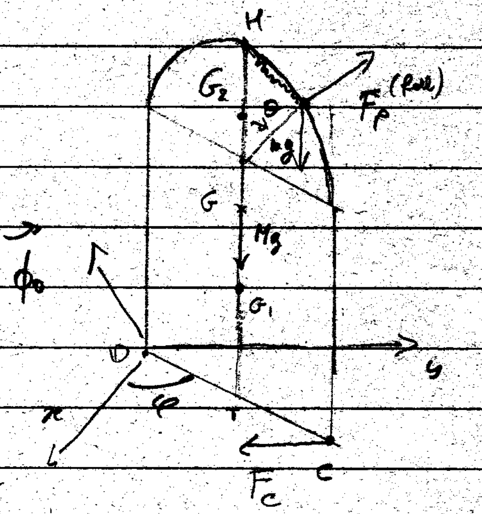
$$\vec{q}_e^{(1)} = \left(\varphi_e^{(1)}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}\arcsin\lambda, 0\right) \tag{4.1}$$

$$\vec{q}_e^{(2)} = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_e^{(1)}, 0\right), \quad \vec{q}_e^{(3)} = \left(\pi + \varphi_e^{(1)}, 0\right), \quad \vec{q}_e^{(4)} = \left(\frac{3}{2}\pi - \varphi_e^{(1)}, 0\right)$$

2) <u>Reazioni e momento delle reazioni negli equilibri in O</u>

Utilizziamo ~~le~~ le ECS applicate a <u>tutto</u> il modello.

$$\begin{cases} \vec{R}^{(att,est)} + \vec{\Phi}_O^{(reaz,est)} = \vec{0} \\ \vec{M}_O^{(att,est)} + \vec{\mu}^{(reaz,est)} = \vec{0} \end{cases}$$




dove

$$\vec{R}^{att,est} = \vec{F}_c + M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{F}_p^{(fol)} \tag{4.2}$$

$$\vec{F}_c = -c(C-E) = -2ca\sin\varphi\,\vec{e}_y = -2ca\sin\varphi\left(\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$\vec{F}_p = F\,\vec{e}_\varphi$$

Quindi

$$\vec{R}^{att,est} = -2ca\sin^2\varphi\,\vec{e}_x - 2ca\sin\varphi\cos\varphi\,\vec{e}_\varphi - (M+m)g\vec{e}_z + F\vec{e}_\varphi \tag{4.3}$$
$$= -2ac\sin^2\varphi\,\vec{e}_x + (F - ac\sin 2\varphi)\,\vec{e}_\varphi - (M+m)g\,\vec{e}_z$$

Dunque,

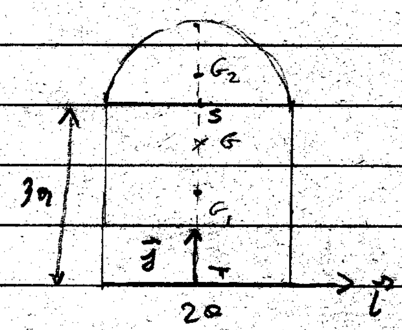
$$\vec{\Phi}_O = 2ca\sin^2\varphi_e\,\vec{e}_x - (F - ac\sin 2\varphi_e)\,\vec{e}_{\varphi_e} + (M+m)g\,\vec{e}_z \tag{4.4}$$

Inoltre,

(5.1) $\vec{M}_O^{(est,\,ext)} = (C-O)\times\vec{F}_c + (G-O)\times M\vec{g} + (P-O)\times m\vec{g} + (P-O)\times\vec{F}_P^{(ext)}$

Calcolo di G della lamina

Dalla definizione di baricentro




$$G-T = \frac{M_1(G_1-T)+M_2(G_2-T)}{M}$$

dove $M_1$ e $M_2$ sono, rispettivamente, la massa della parte quadrata e di quella semicircolare. Quindi, rispetto alla coppia di assi $(T;\vec{i},\vec{j})$

$$G_1-T=\frac{3}{2}a\,\vec{j}\,,\quad G_2-T=\left(3a+\overline{G_2S}\right)\vec{j}$$

$\overline{G_2S}=\frac{4}{3\pi}a$ dal Teo di Guldino applicato al semidisco

(5.2) $M_1 = \frac{M}{S}S_1 = M\frac{12}{12+\pi}$ $\quad S$: area della superficie di tutta la lamina

$S_1$: " " della parte rettangolare

(5.3) $M_2 = \frac{M}{S}S_2 = M\frac{\pi}{12+\pi}$ $\quad S_2$: " " della parte semicircolare

N.B. Il baricentro $G \notin$ all'asse di rotazione, quindi la lamina NON è bilanciata staticamente.

$$G-T = \frac{\cancel{M}S_1}{S\cancel{M}}\frac{3a}{2}\vec{j} + \frac{\cancel{M}S_2}{S\cancel{M}}\left(3a+\frac{4a}{3\pi}\right)\vec{j}$$

$S_1 = 2a\,3a = 6a^2$

$S_2 = \pi a^2/2$

$S = a^2\left(\frac{12+\pi}{2}\right)$

(5.4)
$$= \frac{a}{S}\left(\frac{3}{2}S_1 + S_2\left(3+\frac{4}{3\pi}\right)\right)\vec{j}$$

$$= \frac{a\,2}{a^2(12+\pi)}\left(9a^2+\frac{\cancel{\pi}a^2}{2}\,\frac{9\pi+4}{3\cancel{\pi}}\right)\vec{j}$$

$$= \frac{\cancel{2}\,a^2}{\cancel{a}(12+\pi)}\left(\frac{58+9\pi}{\cancel{2}\cdot 3}\right)\vec{j} = \frac{1\,a}{3}\left(\frac{58+9\pi}{12+\pi}\right)\vec{j} = a\,h\,\vec{j} \qquad h := \frac{1}{3}\,\frac{58+9\pi}{12+\pi} \sim 1{,}9$$

$$\vec{M}_o^{(att,est)} = 2a\,\vec{e}_r \times \left(-c\,2a \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi\right) + \left(a\,\vec{e}_r + a h\,\vec{e}_z\right) \times \left(-Mg\,\vec{e}_z\right) +$$
$$+ a\left[\left(\sin\theta + 1\right)\vec{e}_r + \left(\cos\theta + 3\right)\vec{e}_z\right] \times \left(-mg\,\vec{e}_z + F\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= -4a^2 c \sin\varphi \cos\varphi\, \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi - Mga\,\vec{e}_r \times \vec{e}_z +$$
$$+ a(\sin\theta + 1)\left(-mg\,\vec{e}_r \times \vec{e}_z + F\,\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi\right) +$$
$$(6.1) \qquad + a(\cos\theta + 3) F\, \vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi$$

$$= -4a^2 c \sin\varphi \cos\varphi\, \vec{e}_z + Mga\,\vec{e}_\varphi + a(\sin\theta + 1) mg\,\vec{e}_\varphi +$$
$$+ a(\sin\theta + 1) F\,\vec{e}_z - a(\cos\theta + 3) F\,\vec{e}_r$$

$$= -(\cos\theta + 3) Fa\,\vec{e}_r + \left(M + m(1 + \sin\theta)\right) ag\,\vec{e}_\varphi +$$
$$+ a\left[(1 + \sin\theta) F - 4a^2 c \sin\varphi \cos\varphi\right] \vec{e}_z$$

Quindi,

$$(6.2) \qquad \vec{M}_o^{(att,est)}\Big|_{\vec{q}_e} = -4Fa\,\vec{e}_r + (M + m) ag\,\vec{e}_\varphi + a\cancel{\left(F - 2ac\lambda\right)}\vec{e}_z$$

$$\vec{\mu} = -\vec{M}_o^{(att,est)}\Big|_{\vec{q}_e} = 4Fa\,\vec{e}_r\Big|_{\vec{q}_e} - (M + m) ag\,\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e}$$

Dunque, le componenti scalari del momento reattivo sono uguali in tutte le configurazioni di equilibrio. Invece, per la reazione vincolare vale che

$$2\sin^2\varphi_e = 1 - \cos 2\varphi = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-\lambda^2} & \varphi_e = \varphi_e^{(1)} & \vec{\phi}_o \cdot \vec{e}_r = ac\left(1 - \sqrt{1-\lambda^2}\right) \\ 1 & \varphi_e = \frac{\pi}{4} & \vec{\phi}_o \cdot \vec{e}_r = ac \\ 1 + \sqrt{1-\lambda^2} & \varphi_e = \varphi_e^{(2)} & \vec{\phi}_o \cdot \vec{e}_r = ac\left(1 + \sqrt{1+\lambda^2}\right) \\ 1 - \sqrt{1-\lambda^2} & \varphi_e = \varphi_e^{(3)} & \vec{\phi}_o \cdot \vec{e}_r = ac\left(1 - \sqrt{1-\lambda^2}\right) \\ 1 & \varphi_e = \frac{5}{4}\pi & \vec{\phi}_o \cdot \vec{e}_r = ac \\ 1 + \sqrt{1-\lambda^2} & \varphi_e = \varphi_e^{(4)} & \vec{\phi}_o \cdot \vec{e}_r = ac\left(1 + \sqrt{1-\lambda^2}\right) \end{cases}$$

mentre

$$\vec{\phi}_o \cdot \vec{e}_{\varphi_e} = -\frac{F}{2}, \qquad \vec{\phi}_o \cdot \vec{e}_z = (M + m) g$$

## 3) Reazioni della lamina nel punto P

Applicando l'eq. della statica nel punto P

$$\vec{F}_{P|_{eq}} + \vec{\Phi}_{P|_{eq}} = \vec{0} \,,$$

poiché

$$\vec{F}_{P|_{eq}} = m\vec{g} + \vec{F}^{(foll)}_{P|_{eq}} + \cancel{\vec{F}^{(el)}_{P|_{eq}}} = -mg\,\vec{e}_z + F\,\vec{e}_{\varphi}|_{q_e}$$

si ottiene

$$\vec{\Phi}_{P|_{eq}} = mg\,\vec{e}_z - F\,\vec{e}_{\varphi}|_{q_e}$$

4) Scriviamo le eq. di Lagrange. A tale scopo, dobbiamo calcolare l'energia cinetica

$$(8.1) \qquad K = K^{(lamina)} + K^{(punto)}$$

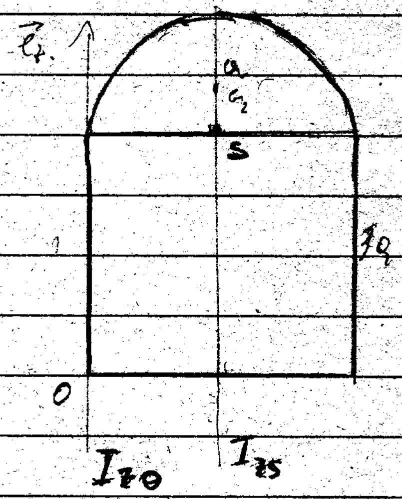
Calcolo di $K^{(lamina)}$

Poichè la lamina è un rigido con asse fisso, vale che

$$(8.2) \quad K^{(lamina)} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot \mathbb{I}_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}\vec{e}_z\cdot \mathbb{I}_O(\dot{\varphi}\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\vec{e}_z\cdot\mathbb{I}_O(\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 I_{zO}$$

dove $I_{zO}$ denota il momento d'inerzia rs. all'asse $(O;\vec{e}_z)$.
Quindi

$$I_{zO} = I_{zO}^{(rett)} + I_{zO}^{(sd)}$$




$$(8.3) \quad I_{zO}^{(rett)} = \frac{1}{3}M_1(2a)^2 \overset{(5.2)}{=} \frac{1}{3}M\frac{12}{12+\pi}4a^2 = 16\frac{M}{12+\pi}a^2$$

$$(8.4) \quad I_{zO}^{(sd)} = I_{zS}^{(sd)} + M_2a^2 = \frac{1}{4}M_2a^2 + M_2a^2 = \frac{5}{4}M_2a^2$$
$$\overset{(5.3)}{=} \frac{5a^2}{4}\frac{M\pi}{12+\pi}$$

Dunque

$$(8.5) \quad I_{zO} = \frac{M}{12+\pi}a^2\left(16 + \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{Ma^2}{12+\pi}\,\frac{64+5\pi}{4} = Ma^2 b$$

$$(8.6) \quad K^{(lam)} = \frac{1}{2}Ma^2 b\,\dot{\varphi}^2 \qquad\qquad b := \frac{64+5\pi}{4(12+\pi)}$$

$$K^{(punto)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{x}}_P \overset{(1.3)}{=} a \left[ \cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_z + (1+\sin\theta)\,\dot{\vec{e}}_x - \sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_x \right] \qquad \dot{\vec{e}}_x = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

(9.1)
$$= a \left[ \cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_z + (1+\sin\theta)\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - \sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_x \right] \qquad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_x$$

$$|\vec{v}_P|^2 = \vec{v}_P \cdot \vec{v}_P = a^2 \left[ \cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + (1+\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 \right]$$

$$= a^2 \left[ \dot{\theta}^2 + (1+\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2 \right]$$

Quindi

(9.2)
$$K^{(punto)} = \frac{1}{2} m a^2 \left[ \dot{\theta}^2 + (1+\sin\theta)^2 \dot{\varphi}^2 \right]$$

Dunque

(9.3)
$$K = \frac{1}{2} M a^2 b\, \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \left[ \dot{\theta}^2 + (1+\sin\theta)^2 \dot{\varphi}^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \left[ M b + m (1+\sin\theta)^2 \right] \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = a^2 \left[ M b + m (1+\sin\theta)^2 \right] \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = a^2 \left[ M b + m (1+\sin\theta)^2 \right] \ddot{\varphi} + 2 a^2 m (1+\sin\theta)\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}$$

(9.4) $EL_\varphi$:
$$a^2 \left[ M b + m (1+\sin\theta)^2 \right] \ddot{\varphi} + 2 a^2 m (1+\sin\theta)\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} = -2a^2 c \sin 2\varphi + F_a (1+\sin\theta)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = m a^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = a^2 m (1+\sin\theta)\cos\theta\,\dot{\varphi}^2, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}\right) = m a^2 \ddot{\theta}$$

(9.5) $EL_\theta$:
$$m a^2 \ddot{\theta} - m a^2 (1+\sin\theta)\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 = \cancel{a} (mg - ac) \sin\theta$$

5) Linearizzazione intorno agli equilibri

Introdotto il vettore degli scarti $\vec{x} = \underbrace{\vec{q}(t) - \vec{q}_e}_{\varepsilon}$, il sistema delle EL linearizzate è dato da

(10.1) $A \ddot{\vec{x}} + B \dot{\vec{x}} + C \vec{x} = 0$,

dove

(10.2) $A_{ij} = \dfrac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\Big|_{eq}$, $\cancel{B_{ij} = \dfrac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j}\Big|_{eq}} = 0$, $C_{ij} = -\dfrac{\partial Q_i}{\partial q_j}\Big|_{eq}$

Allora

(10.3) $A = a^2 \begin{bmatrix} Mb + m(1+\sin\theta_e)^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = a^2 \begin{bmatrix} Mb+m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$

(10.4) $C = - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial Q_\varphi}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial Q_\theta}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{eq} = - \begin{bmatrix} -4a^2 c \cos 2\varphi_e & Fa \cos\theta_e \\ 0 & a(mg - ae)\cos\theta_e \end{bmatrix}$

$= + \begin{bmatrix} 4a^2 c \cos 2\varphi_e & -Fa \\ 0 & a(ae - mg) \end{bmatrix}$

Allora, il sistema (10.1) si scrive

(10.5) $\begin{cases} a^2 (Mb + m)\ddot{x}_1 + 4a^2 c \cos 2\varphi_e \, x_1 - F\cancel{a}\, x_2 = 0 \\ a^2 m \ddot{x}_2 + \cancel{a}(ae - mg)\, x_2 = 0 \end{cases}$

Quindi, intorno a

$\vec{\varphi}_e^{(1)}$ e $\vec{\varphi}_e^{(3)}$ :
$\cos 2\varphi_e = \sqrt{1-\lambda^2}$

$$\begin{cases} a(M b + m)\ddot{x}_1 + 4ac\sqrt{1-\lambda^2}\,x_1 - F x_2 = 0 \\ a m \ddot{x}_2 + (ac - mg)x_2 = 0 \end{cases}$$

$\vec{\varphi}_e^{(2)}$ e $\vec{\varphi}_e^{(4)}$ :
$\cos 2\varphi_e = -\sqrt{1-\lambda^2}$

$$\begin{cases} a(M b + m)\ddot{x}_1 - 4ac\sqrt{1-\lambda^2}\,x_1 - F x_2 = 0 \\ a m \ddot{x}_2 + (ac - mg)x_2 = 0 \end{cases}$$

$\vec{\varphi}_e^{(5)}$ e $\vec{\varphi}_e^{(6)}$ :
$\cos 2\varphi_e = 0$

$$\begin{cases} a(M b + m)\ddot{x}_1 - F x_2 = 0 \\ a m \ddot{x}_2 + (ac - mg)x_2 = 0 \end{cases}$$

6) Reazioni dinamiche in O sulla lamina

Usiamo le ECD su tutto il modello

$$(12.1)\quad \begin{cases} \vec{R}^{ext,att} + \vec{\Phi}_O' = M\,\vec{a}_G + m\,\vec{a}_P \\ \vec{M}_O^{ext,att} + \vec{\mu} = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt} \end{cases}$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$
$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r$$

$$\vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G = \ddot{\vec{x}}_G = \frac{d^2}{dt^2}\left(a\,\vec{e}_r + a\,h\,\vec{e}_z\right) = a\frac{d^2\vec{e}_r}{dt^2} =$$

$$(12.2)\quad = a\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right) = a\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi\right) = a\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\,\vec{e}_r\right)$$

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P \overset{(9.1)}{=} a\Big[\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_r + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\vec{e}}_r +$$
$$\left(\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} + (1+\sin\theta)\,\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + (1+\sin\theta)\,\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi +$$
$$-\left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_z\Big]$$

$$(12.3)\quad = a\Big[\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\ddot{\theta} - (1+\sin\theta)\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r +$$
$$+\left(2\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} + (1+\sin\theta)\,\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi - \left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_z\Big]$$

Quindi, tenendo conto della (4.3), (12.2) e (12.3), si ottiene

$$\vec{\Phi}_O' = +2ac\sin^2\varphi\,\vec{e}_r - \left(F - ac\sin 2\varphi\right)\vec{e}_\varphi + (M+m)\,g\,\vec{e}_z$$
$$+ M a\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - a\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_r\right) +$$
$$+ m a\Big[\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\ddot{\theta} - (1+\sin\theta)\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r +$$
$$+\left(2\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} + (1+\sin\theta)\,\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi - \left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_z\Big]$$

Dunque

$$\vec{\phi}_O' = \left[2ac \sin^2\varphi - Ma^2\dot\varphi^2 + ma\left(-\sin\theta\,\dot\theta^2 + \cos\theta\,\ddot\theta - (1+\sin\theta)\dot\varphi^2\right)\right]\vec{e}_r +$$

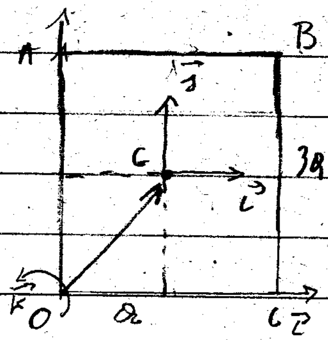
(13.1)
$$+\left[-F + ac\sin 2\varphi + Ma\ddot\varphi + ma\left(2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi + (1+\sin\theta)\ddot\varphi\right)\right]\vec{e}_\varphi +$$

$$+\left[(M+m)g - ma\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right)\right]\vec{e}_z$$

Calcolo di $\vec{L}_O$

$$\vec L_O = \vec L_O^{(lam)} + \vec L_O^{(punto)}$$

$$\vec L_O^{(lam)} = \vec L_O^{(quad)} + \vec L_O^{(rett)} = \mathbb{I}_O^{(quad)}(\vec\omega) + \mathbb{I}_O^{(rett)}(\vec\omega)$$




Dal Teo di Huygens-Steiner per l'op. d'inerzia

$$I_O^{(rett)} = I_{G_1}^{(rett)} + M_1 \begin{bmatrix} \left(\frac{3a}{2}\right)^2 & -\frac{3}{2}a^2 & 0\\ -\frac{3a^2}{2} & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{4}a^2\end{bmatrix}$$

$$I_{G_1}^{(rett)} = a^2 \begin{bmatrix}\frac{9}{12}M_1 & & \\ & \frac{4}{12}M_1 & \\ & & \frac{13}{12}M_1\end{bmatrix} = a^2 M_1 \begin{bmatrix}\frac34 & & \\ & \frac13 & \\ & & \frac{13}{12}\end{bmatrix}$$

$$I_O^{(rett)} = M_1 a^2 \begin{bmatrix}3 & -\frac32 & 0\\ -\frac32 & \frac43 & 0\\ 0 & 0 & \frac{13}{3}\end{bmatrix}$$

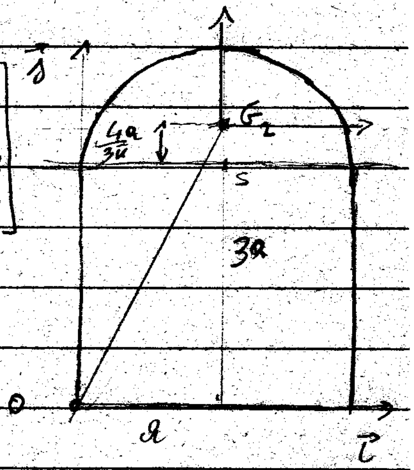
Allora

$$\mathbb I_O^{(rett)}(\vec\omega) = \dot\varphi\, \mathbb I_O^{(rett)}(\vec e_z) = \dot\varphi\, \mathbb I_O^{(rett)}(\vec j) = M_1 a^2\dot\varphi\left(-\frac{3\vec i}{2} + \frac{4}{3}\vec j\right) = M_1 a^2 \dot\varphi\left(-\frac{3\vec e_r}{2} + \frac{4}{3}\vec e_z\right)$$

$$= \frac{12}{12+4} M a^2 \dot\varphi\left(-\frac{3\vec e_r}{2} + \frac{4}{3}\vec e_z\right)$$

$$\vec{L}_O^{(sd)} = \mathbb{I}_O^{(sd)}(\vec{\omega})$$

$$I_O^{(sd)} = I_{G_2}^{(sd)} + M_2 \begin{bmatrix} (3a+\overline{G_2S})^2 & -a(3a+\overline{G_2S}) & 0 \\ -a(3a+\overline{GS}) & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+(3a+\overline{GS})^2 \end{bmatrix}$$




$$I_{G_2}^{(sd)} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{bmatrix}$$

dove

$$I_{11} = I_{1S} - M_2\overline{G_2S}^2 = \frac{1}{4}M_2a^2 - M_2\overline{G_2S}^2 = M_2a^2\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2\right)$$

$$I_{22} = I_{2S} = \frac{1}{4}M_2a^2, \quad I_{11}+I_{22} = M_2a^2\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2\right)$$

Quindi

$$I_{G_2}^{(sd)} = M_2a^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4}-\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{2}-\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Dunque

$$I_O^{(sd)} = M_2a^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4}-\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{2}-\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \end{bmatrix} + M_2 \begin{bmatrix} \left(3a+\frac{4a}{3\pi}\right)^2 & -a\left(3a+\frac{4a}{3\pi}\right) & 0 \\ -a\left(3a+\frac{4a}{3\pi}\right) & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+\left(3a+\frac{4a}{3\pi}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Allora

$$(15.1)\quad I_0^{(sd)} = M_2 a^2 \begin{bmatrix} \frac{37}{4}+\frac{8}{\pi} & -\left(3+\frac{4}{3\pi}\right) & 0 \\ -\left(3+\frac{4}{3\pi}\right) & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2}+\frac{8}{\pi} \end{bmatrix}$$

Dunque, il momento angolare della parte semicircolare è

$$\vec{L}_0^{(sd)} = \mathbb{I}_0^{(sd)}\left(\dot\varphi\,\vec{e}_z\right) = \dot\varphi\,\mathbb{I}_0^{(sd)}\left(\vec{j}\right) = M_2 a^2\dot\varphi\left[-\left(3+\frac{4}{3\pi}\right)\vec{i} + \frac{5}{4}\vec{j}\right]$$

$$= \frac{\pi}{12+\pi} M a^2\dot\varphi\left[-\left(3+\frac{4}{3\pi}\right)\vec{e}_x + \frac{5}{4}\vec{e}_z\right] =$$

Quindi, il momento angolare di tutta la lamina è

$$\vec{L}_0^{(lam)} = \frac{12}{12+\pi} M a^2\dot\varphi\left(-\frac{3}{2}\vec{e}_x + \frac{4}{3}\vec{e}_z\right) + \frac{\pi}{12+\pi} M a^2\dot\varphi\left[-\left(3+\frac{4}{3\pi}\right)\vec{e}_x + \frac{5}{4}\vec{e}_z\right]$$

$$(15.2)\quad = \frac{M}{12+\pi} a^2\dot\varphi\left[\left(-18-\pi\left(3+\frac{4}{3\pi}\right)\right)\vec{e}_x + \left(16+\frac{5\pi}{4}\right)\vec{e}_z\right]$$

$$= \frac{M}{12+\pi} a^2\dot\varphi\left[-\left(\frac{58}{3}+3\pi\right)\vec{e}_x + \left(16+\frac{5\pi}{4}\right)\vec{e}_z\right]$$

N.B. Dato che $\vec{L}_0 = I_0(\dot\varphi\,\vec{e}_z)$, si noti che $\vec{e}_z$ NON è API(O) per la lamina, quindi essa NON è bilanciata dinamicamente.

$$\frac{d\vec{L}_0^{(lam)}}{dt} = \frac{M}{12+\pi} a^2\ddot\varphi\left[-\left(\frac{58}{3}+3\pi\right)\vec{e}_x + \left(16+\frac{5}{4}\pi\right)\vec{e}_z\right] +$$

$$(15.3)\quad + \frac{M}{12+\pi} a^2\dot\varphi\left[-\left(\frac{58}{3}+3\pi\right)\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi\right] =$$

$$= \frac{M}{12+\pi} a^2\left[-\left(\frac{58}{3}+\pi\right)\left(\ddot\varphi\,\vec{e}_x + \dot\varphi^2\,\vec{e}_\varphi\right) + \left(16+\frac{5}{4}\pi\right)\ddot\varphi\,\vec{e}_z\right]$$

Calcoliamo, ora, il momento angolare del punto P.

$$\vec{L}_0^{(P)} = (P-O) \times m\vec{V}_P = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ a(\sin\theta+1) & 0 & a(\cos\theta+3) \\ ma(\cos\theta\dot\theta) & ma(1+\sin\theta)\dot\varphi & -ma\sin\theta\,\dot\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -\vec{e}_r \; m a^2(\cos\theta+3)(1+\sin\theta)\dot\varphi +$$

(16.1) $$- \vec{e}_\varphi \left[-m a^2(\sin\theta+1)\sin\theta\,\dot\theta - m a^2 \cos\theta\,\dot\theta\,(\cos\theta+3)\right] +$$

$$+ \vec{e}_z \; m a^2(\sin\theta+1)^2\dot\varphi$$

$$= m a^2\left[-(\cos\theta+3)(\sin\theta+1)\dot\varphi\,\vec{e}_r + (1+\sin\theta+3\cos\theta)\,\dot\theta\,\vec{e}_\varphi + (\sin\theta+1)^2\dot\varphi\,\vec{e}_z\right]$$

La sua derivata rs. al tempo è:

$$\frac{d\vec{L}_0^{(P)}}{dt} = (\vec{V}_P - \vec{V}_O)\times m\vec{V}_P + (P-O)\times m\vec{a}_P =$$

(12.3)
$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ a(\sin\theta+1) & 0 & a(\cos\theta+3) \\ ma(-\sin\theta\,\dot\theta^2+\cos\theta\,\ddot\theta-(1+\sin\theta)\dot\varphi^2) & ma(2\cos\theta\,\dot\theta\,\dot\varphi+(1+\sin\theta)\ddot\varphi) & -ma(\cos\theta\,\dot\theta^2+\sin\theta\,\ddot\theta) \end{vmatrix}$$

$$= - m\,\vec{e}_r\, a^2(\cos\theta+3)(2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi+(1+\sin\theta)\ddot\varphi)+$$

$$+ m\,\vec{e}_\varphi\left[+a^2(\sin\theta+1)(\cos\theta\,\dot\theta^2+\sin\theta\,\ddot\theta)+a^2(\cos\theta+3)(-\sin\theta\,\dot\theta^2+\cos\theta\,\ddot\theta-(1+\sin\theta)\dot\varphi^2)\right]$$

(16.2) $$+ m\,\vec{e}_z\, a^2(\sin\theta+1)(2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi+(1+\sin\theta)\ddot\varphi)$$

$$= -\vec{e}_r\, m a^2(\cos\theta+3)(2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi+(1+\sin\theta)\ddot\varphi)+$$
$$+\vec{e}_\varphi\, a^2 m\left[(\cos\theta-3\sin\theta)\dot\theta^2+(\sin\theta+3\cos\theta+1)\ddot\theta-(\cos\theta+3)(\sin\theta+1)\dot\varphi^2\right]+$$
$$+\vec{e}_z\, a^2 m(\sin\theta+1)(2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi+(1+\sin\theta)\ddot\varphi)$$

Dunque, dalla (15.3) e dalla (16.2) si ottiene

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}_O}{dt} = {} & a^2\left[-\frac{M}{12+\pi}\left(\frac{58}{3}+\pi\right) - m a^2(\cos\theta+3)\Big(2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi+(1+\sin\theta)\Big)\right]\ddot\varphi\,\vec{e}_r + \\
(17.1) \quad & + a^2\left[\left(-\frac{M}{12+\pi}\left(\frac{58}{3}+\pi\right) - m(\cos\theta+3)(\sin\theta+1)\right)\dot\varphi^2 + m\Big[(\cos\theta-3\sin\theta)\dot\theta^2+(\sin\theta+3\cos\theta+1)\ddot\theta\Big]\right]\vec{e}_\varphi \\
& + a^2\left[\left(\frac{M}{12+\pi}\left(16+\frac{5}{4}\pi\right) + m(\sin\theta+1)^2\right)\ddot\varphi + m(\sin\theta+1)2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right]\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

Allora, tenendo conto della (6.1), si ottiene

$$
(17.2) \quad \vec\mu\cdot\vec{e}_r = Fa(\cos\theta+3) + a^2\left[-\frac{M}{12+\pi}\left(\frac{58}{3}+\pi\right) - m a^2(\cos\theta+3)\Big(2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi+(1+\sin\theta)\Big)\right]\ddot\varphi
$$

$$
\begin{aligned}
(17.3) \quad \vec\mu\cdot\vec{e}_\varphi = {} & -\big[M+m(1+\sin\theta)\big]ag + \\
& + a^2\left[-\frac{M}{12+\pi}\left(\frac{58}{3}+\pi\right) - m(\cos\theta+3)(\sin\theta+1)\,\dot\varphi^2 + m\Big[(\cos\theta-3\sin\theta)\dot\theta^2+(\sin\theta+3\cos\theta+1)\ddot\theta\Big]\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(17.4) \quad \vec\mu\cdot\vec{e}_z = {} & -Fa(1+\sin\theta) + 2ae\sin 2\varphi + \\
& a^2\left[\left(\frac{M}{12+\pi}\left(16+\frac{5}{4}\pi\right) + m(\sin\theta+1)^2\right)\ddot\varphi + m(\sin\theta+1)2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right]
\end{aligned}
$$

Si osservi che il secondo termine della (17.4) equivale all'eq. di Lagrange $EL_\varphi$, quindi è nullo, come ci si aspetta, dato che la cerniera cilindrica liscia in O NON può esercitare un momento reattivo lungo il suo asse.

Quiz: qual è il significato meccanico della $EL_\theta$ (9.5)?