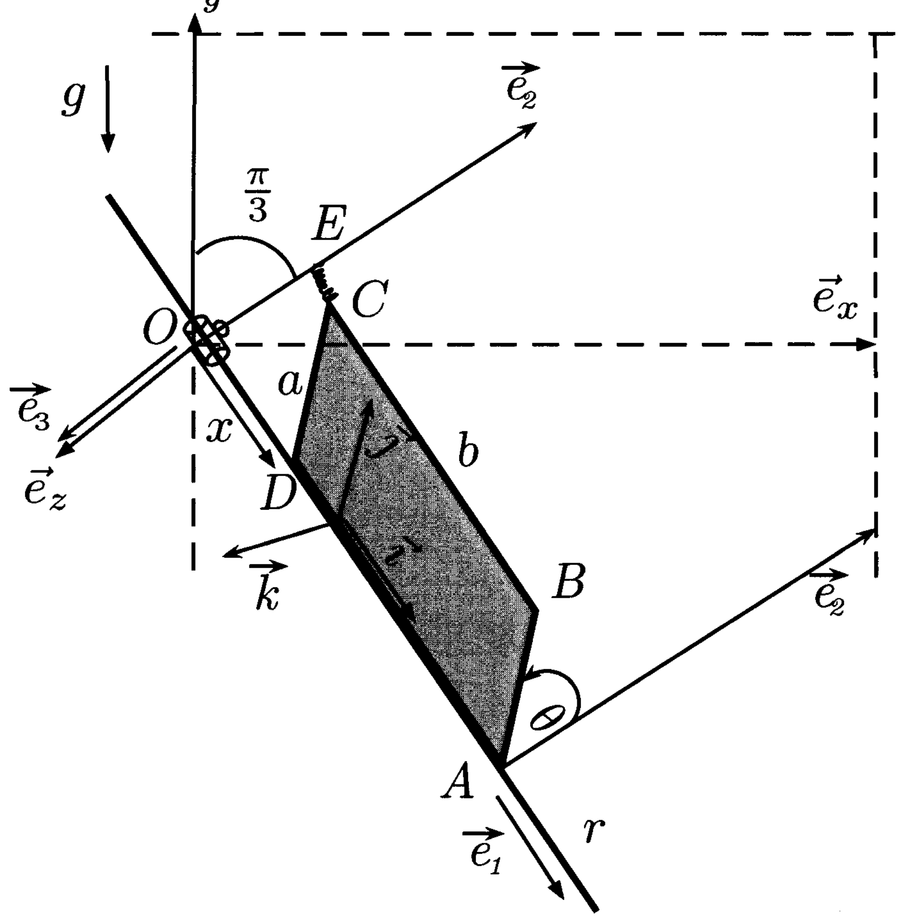
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 10 settembre 2018

(G. Tondo)



Una lamina rettangolare omogenea, di massa m e lati di lunghezza a e b, è vincolata, tramite un asse di massa trascurabile e solidale al lato AD, ad un collare cilindrico che è fissato nel punto O ed ha il proprio asse, appartenente al piano verticale per O, inclinato di un angolo $\frac{\pi}{3}$ rispetto all'orizzontale. Una molla di costante elastica c agisce sul vertice C della lamina ed ha l'altro estremo fissato nel punto E, che si trova a distanza a dal punto O.

Scelte come coordinate libere l'ascissa x del punto D e l' angolo θ di figura, si chiedono:

STATICA.

1) le configurazioni di equilibrio del modello e la loro stabilità in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{4ca}$;

2) il risultante delle reazioni vincolari del collare sulla lamina, all'equilibrio;

3) il momento risultante delle reazioni vincolari del collare sulla lamina, all'equilibrio.

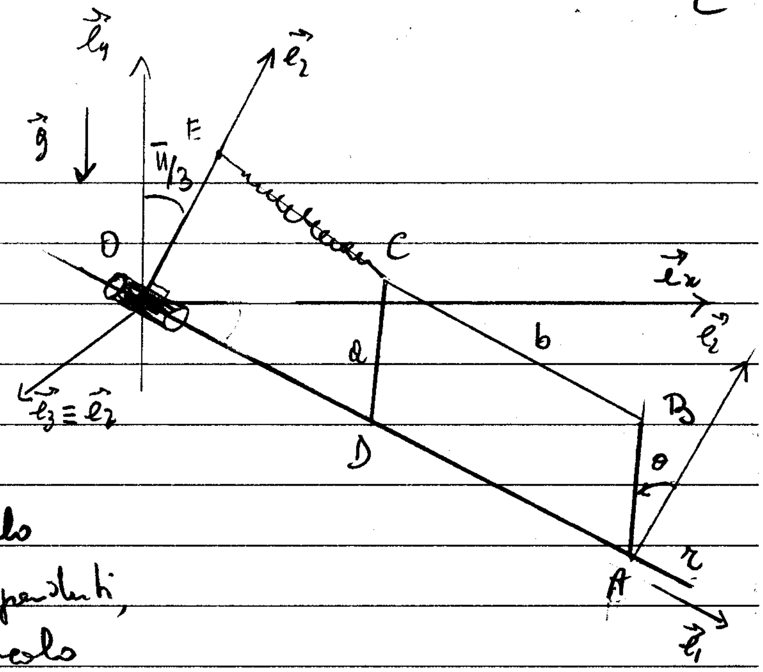
DINAMICA.

Inoltre, si chiede di:

4) scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e scriverne l'integrale generale;

6) calcolare le reazioni e il momento delle reazioni vincolari del collare sulla lamina, durante il moto.



Tema del 10/09/2018

Il modello è costituito da un solo rigido $\mathcal{R}$ vincolato da un collare cilindrico fisso.
Con il metodo dei congelamenti successivi si ricava che il modello ha 2 spostamenti virtuali indipendenti, quindi $l = 2$. Poiché il vincolo è supporto bilatero,

r è l'asse solidale alla lamina, contenente il lato AD.

$$x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Consideremo 3 basi ortonormali di versori

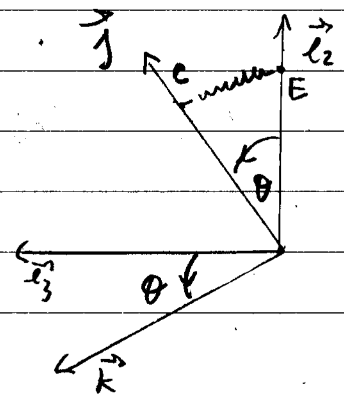
$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: "fissa"

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: "intermedia" e fissa

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y \\ \vec{e}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y \\ \vec{e}_3 = \vec{e}_z \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{e}_x = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_z = \vec{e}_3 \end{cases}$$

$\mathcal{B}'' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: "solidale" a $\mathcal{R}$

$$\begin{cases} \vec{i} = \vec{e}_1 \\ \vec{j} = \cos\theta\,\vec{e}_2 + \sin\theta\,\vec{e}_3 \\ \vec{k} = \vec{i} \times \vec{j} = -\sin\theta\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{i} \\ \vec{e}_2 = \cos\theta\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_3 = \sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \end{cases}$$



Vettori posizione rilevanti:

(2.1) $C-O = (C-D)+(D-O) = a\vec{j} + x\vec{i} = a(\cos\theta\,\vec{e}_2 + \sin\theta\,\vec{e}_3) + x\vec{e}_1$

(2.2) $O-E = -a\,\vec{e}_2$

(2.3) $C-E = (C-O)+(O-E) = (x\vec{i} + a\vec{j} - a\vec{e}_2) = x\vec{e}_1 + a(\cos\theta - 1)\,\vec{e}_2 + a\sin\theta\,\vec{e}_3$

(2.4) $G-O = \left(x+\frac{b}{2}\right)\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j} = \left(x+\frac{b}{2}\right)\vec{e}_1 + \frac{a}{2}\left(\cos\theta\,\vec{e}_2 + \sin\theta\,\vec{e}_3\right)$

Versore gravitazionale:

(2.5) $\vec{g} = -g\,\vec{e}_y = -g\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2\right) = \frac{g}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2\right)$

Il rigido è vincolato a compiere un moto elicoidale lungo l'asse $(O, \vec{e}_1)$. Quindi, la sua velocità angolare è

(2.6) $$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{e}_1 = \dot{\theta}\,\vec{i}$$

e la velocità di ogni punto $P \in$ all'asse $(O, \vec{i})$ e solidale al rigido è

(2.7) $$\vec{v}_P = \dot{x}\,\vec{e}_1$$

Statica

La sollecitazione attiva dovuta alla molla con un estremo fisso e al peso proprio, è conservativa, cioè ammette energia potenziale data da

(3.1) $$V(x,\theta) = \frac{1}{2} c\, \overline{CE}^2 - m\vec{g}\cdot(G-O)$$

$$\overline{CE}^2 = |C-E|^2 = x^2 + a^2(\cos\theta - 1)^2 + a^2 \sin^2\theta =$$

(3.2) $$= x^2 + a^2\cos^2\theta - 2a^2\cos\theta + a^2 + a^2\sin^2\theta =$$

$$= x^2 + 2a^2 - 2a^2\cos\theta = x^2 + 2a^2(1-\cos\theta)$$

Dunque,

$$V(x,\theta) = \frac{1}{2}c\left[x^2 + 2a^2(1-\cos\theta)\right] +$$

$$- m\frac{g}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2\right)\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)\vec{e}_1 + \frac{a}{2}\left(\cos\theta\,\vec{e}_2 + \sin\theta\,\vec{e}_3\right)\right]$$

(3.3) $$= \frac{1}{2}cx^2 - ca^2\cos\theta - \frac{mg}{2}\left[\left(x+\cancel{\frac{b}{2}}\right)\sqrt{3} - \frac{a}{2}\cos\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}cx^2 + \left(-ca^2 + \frac{mg}{4}a\right)\cos\theta - \frac{mg\sqrt{3}}{2}x$$

(3.4) $$\frac{\partial V}{\partial x} = cx - \frac{mg\sqrt{3}}{2} = -Q_x$$

(3.5) $$\frac{\partial V}{\partial \theta} = ca^2\left(-1 + \frac{mg}{4ca}\right)(-\sin\theta) = -Q_\theta$$

Risolviamo le eq. pure di equilibrio:

$$(4.1)\quad \begin{cases} c x - \dfrac{mg\sqrt{3}}{2} = 0 & \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{mg\sqrt{3}}{2c} \\ c a^2 (1-\lambda) \sin\theta = 0 & \Leftrightarrow \quad \sin\theta = 0 \text{ vel } \forall\theta \text{ se } \lambda = 1 \end{cases}$$

Quindi, gli equilibri $\vec{q}_e = (x_e, \theta_e)$ sono

$$\vec{q}_e^{\,(1)} = \left(\frac{mg\sqrt{3}}{2c}, 0\right), \quad \vec{q}_e^{\,(2)} = \left(\frac{mg\sqrt{3}}{2c}, \pi\right)$$

se $\lambda = 1$ $\quad \vec{q}_e^{\,(3)} = \left(\dfrac{mg\sqrt{3}}{2c}, \theta\right) \quad \forall\theta$

<u>Stabilità</u>

Determiniamo la matrice Hessiana di V.

$$\mathcal{H}_V = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \dfrac{\partial V}{\partial x \partial \theta} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c a^2 (1-\lambda)\cos\theta \end{bmatrix} \qquad [\mathcal{H}_V]_1^1 = c > 0$$

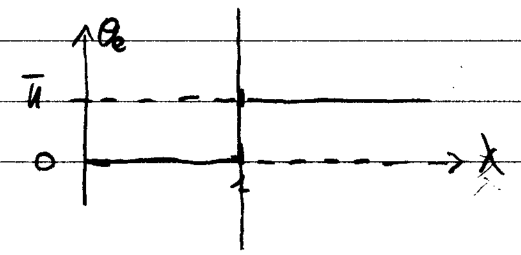
$$\det \mathcal{H}_V = c^2 a^2 (1-\lambda)\cos\theta$$

$\det \mathcal{H}_V\big|_{\vec{q}_e^{\,(1)}} = c a^2 (1-\lambda) > 0$ se $\lambda < 1$ $\qquad$ stabile $\overset{1}{|}$ instabile $\to \lambda$

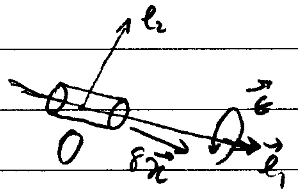
$\det \mathcal{H}_V\big|_{\vec{q}_e^{\,(2)}} = -c^2 a^2 (1-\lambda) > 0$ se $\lambda > 1$ $\qquad$ instabile $|$ stabile $\to \lambda$

$\det \mathcal{H}_V\big|_{\vec{q}_e^{\,(3)}} = 0 \implies$ caso dubbio

Dunque, vale il seguente diagramma



2) Consideriamo il collare cilindrico in O. Poiché è un vincolo non dissipativo, calcolando il lavoro virtuale della sollecitazione reattiva



$$\mathcal{L}^{reatt} = \{(O, \vec{\phi}), \vec{\mu}\}$$

si trova

$$0 = LV^{reatt} = \vec{\phi}_0 \cdot \delta \vec{x}_{O'} + \vec{\mu} \cdot \vec{\epsilon},$$

dove O' è il punto del rigido che passa per O.

Dato che

$$\delta \vec{x}_{O'} = \delta x \, \vec{e}_1 \,, \quad \vec{\epsilon} = \delta\theta \, \vec{e}_1 \qquad \forall \delta x, \forall \delta\theta$$

segue che

$$0 = \vec{\phi}_0 \cdot \vec{e}_1 \, \delta x + \vec{\mu} \cdot \vec{e}_1 \, \delta\theta \qquad \forall \delta x, \forall \delta\theta$$

da cui

$$\begin{cases} \vec{\phi}_0 \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \vec{\mu} \cdot \vec{e}_1 = 0 \end{cases}$$

sia in Statica, sia in Dinamica

Quindi,

$$(6.1)\quad \vec{\phi}_0 = \phi_2 \vec{e}_2 + \phi_3 \vec{e}_3 \quad , \quad \vec{\mu} = \mu_2 \vec{e}_2 , \mu_3 \vec{e}_3$$

2) Scriviamo la I ECS

$$(6.2)\quad \vec{R}^{(est,eff)} + \vec{\phi}_0 = \vec{0} \iff \vec{\phi}_0 = -\vec{R}^{(est,eff)}$$

$$\vec{R}^{(est,eff)} = \vec{F}_c^{(molla)} + m\vec{g} = -c(C-E) - mg\vec{e}_y$$

$$(6.3)\quad \overset{(2.3)(2.5)}{=} -c\left(x\vec{e}_1 + a(\cos\theta - 1)\vec{e}_2 + a\sin\theta\,\vec{e}_3\right) + $$

$$+ \frac{mg}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2\right)$$

$$= \left(\frac{mg\sqrt{3}}{2} - cx\right)\vec{e}_1 - \left[ca(\cos\theta - 1) + \frac{mg}{2}\right]\vec{e}_2 - ca\sin\theta\,\vec{e}_3$$

Proiettando la (6.2) sulla base $\mathcal{B}'$ si trova

$$(6.4)\quad \begin{cases} \dfrac{mg\sqrt{3}}{2} - cx = 0 \\ \phi_2 = ca(\cos\theta_e - 1) + \dfrac{mg}{2} \\ \phi_3 = ca\sin\theta_e \end{cases}$$

Allora,

$$\vec{\phi}_0\big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = \frac{mg}{2}\vec{e}_2 \quad , \quad \vec{\phi}_0\big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = \left(\frac{mg}{2} - 2ca\right)\vec{e}_2 ,$$

$$\vec{\phi}_0\big|_{\vec{q}_e^{(3)}} = ca\left[1 + \cos\theta_e\right]\vec{e}_2 + ca\sin\theta_e\,\vec{e}_3$$

N.B. La I delle (6.4) coincide con la I della (4.1)

3) Scriviamo la II ECS con polo in O

$$(7.1)\quad \vec{M}_O^{(ext,att)} + \vec{\mu} = \vec{0}, \qquad \vec{\mu} = \mu_2 \vec{e}_2 + \mu_3 \vec{e}_3$$

$$(7.2)\quad \vec{M}_O^{(ext,att)} = (C-O)\times \vec{F}^{(molla)} + (G-O)\times m\vec{g}$$

$$(7.3)\quad (C-O)\times \vec{F}^{(molla)} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x & a\cos\theta & a\sin\theta \\ -cx & -ca(\cos\theta-1) & -ca\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_1\left(-ca^2\sin\theta\cancel{\cos\theta} + ca^2\sin\theta(\cancel{\cos\theta}-1)\right)$$

$$-\vec{e}_2\left(\cancel{-cax\sin\theta} + \cancel{cax\sin\theta}\right) +$$

$$+\vec{e}_3\left(-cax(\cancel{\cos\theta}-1) + \cancel{cax\cos\theta}\right)$$

$$= -ca^2\sin\theta\,\vec{e}_1 + cax\,\vec{e}_3$$

$$(7.4)\quad (G-O)\times m\vec{g} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x+\frac{b}{2} & \frac{a}{2}\cos\theta & \frac{a}{2}\sin\theta \\ \frac{mg}{2}\sqrt{3} & -\frac{mg}{2} & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_1\left(\frac{a}{4}\sin\theta\right)mg + -\vec{e}_2\left(-\frac{\sqrt{3}a}{4}\sin\theta\right)mg + \vec{e}_3\left(-\frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}a}{4}\cos\theta\right)mg$$

$$= mg\left[\frac{a}{4}\sin\theta\,\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}a}{4}\sin\theta\,\vec{e}_2 - \left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{2}\right) + \frac{a\sqrt{3}\cos\theta}{4}\right)\vec{e}_3\right]$$

Quindi

$$(7.5)\quad \vec{M}_O^{(ext,att)} = \left(-ca^2 + \frac{mg}{4}a\right)\sin\theta\,\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}mga}{4}\sin\theta\,\vec{e}_2 + \left[cax - mg\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}a\cos\theta}{4}\right)\right]\vec{e}_3$$

$$= ca^2(\lambda-1)\sin\theta\,\vec{e}_1 + \frac{mga\sqrt{3}}{4}\sin\theta\,\vec{e}_2 + \left[cax(1-2\lambda) - \frac{mg}{4}(b + a\sqrt{3}\cos\theta)\right]\vec{e}_3$$

Nelle configurazioni di equilibrio:

$$\vec{\mu}\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = -\left[k a \frac{mg\sqrt{3}}{2k}(1-2\lambda) - \frac{mg}{4}\left(b + a\sqrt{3}\right)\right]\vec{e}_3 =$$

$$= -mga\left[\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}-\lambda\right) - \frac{b}{4a}\right]\vec{e}_3$$

$$\vec{\mu}\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = -\left[k a \frac{mg\sqrt{3}}{2k}(1-2\lambda) - \frac{mg}{4}\left(b - a\sqrt{3}\right)\right]\vec{e}_3 =$$

$$= -mga\left[\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}-\lambda\right) - \frac{b}{4a}\right]$$

$$\vec{\mu}\Big|_{\vec{q}_e^{(3)}} = -\frac{mg\sqrt{3}\,a\sin\theta_e}{4}\,\vec{e}_2 + \left[k a \frac{mg\sqrt{3}}{2k} + \frac{mg}{4}\left(b + \sqrt{3}\,a\cos\theta_e\right)\right]\vec{e}_3 =$$

$$= -mg\frac{\sqrt{3}}{4}a\sin\theta_e\,\vec{e}_2 + mga\left[\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos\theta_e\right) + \frac{b}{4a}\right]\vec{e}_3$$

Dinamica

4) Scriviamo l'energia cinetica di $\mathcal{R}$

$$K = \frac{1}{2} m |\vec{v}_P|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I_P(\vec{\omega}) + \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} \times (G-P) \qquad \forall P \in r$$

(9.1) $$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta} \vec{i} \cdot I_P(\dot{\theta} \vec{e}_1) + \cancel{\dot{x} \vec{e}_1 \cdot \dot{\theta} \vec{e}_1 \times (G-P)}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \vec{i} \cdot I_P(\vec{i})$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2 \qquad I_z = \frac{1}{3} m a^2$$

Dunque, tenuto conto delle (3.4) e (3.5), le EL sono

(9.2) EL_x : $\begin{cases} m \ddot{x} = \frac{mg\sqrt{3}}{2} - c x & \text{(lineare)} \\ \frac{1}{3} m a^2 \ddot{\theta} = c a^2 (\lambda - 1) \sin\theta \end{cases}$ (9.3) EL_θ

5) Poichè la sollecitazione è conservativa, le EL linearizzate intorno alle configurazioni di equilibrio si scrivono

$$A \ddot{\vec{\xi}} + V \vec{\xi} = \vec{0}, \qquad \vec{\xi} = \frac{\vec{q} - \vec{q}_e}{\varepsilon}$$

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} m a^2 \end{bmatrix}, \quad V = \mathcal{H}_{V|\vec{q}_e}$$

quindi

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} m a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c a^2 (1-\lambda) \cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Allora

$$(10.1)\begin{cases} m\ddot{\xi}_1 + c\,\xi_1 = 0 \\ \frac{1}{3} m \cancel{\ell^2}\ddot{\xi}_2 + c\cancel{\ell^2}(1-\lambda)\cos\theta_e\,\xi_2 = 0 \end{cases}$$

La I delle (10.1) è comune alle $\vec{q}_e$ e possiede l'integrale generale

$$\xi_1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \alpha_1\right) \Leftrightarrow x(t) = \frac{mg\sqrt{3}}{2c} + \tilde{A}_1\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \alpha_1\right)$$

La II delle (10.1) si specializza in

$$\vec{q}_e^{\,(1)} = \left(\frac{mg\sqrt{3}}{2c}, 0\right): \quad \frac{1}{3} m \cancel{\ell^2}\ddot{\xi}_2 + c\cancel{\ell^2}(1-\lambda)\,\xi_2 = 0$$

se $\lambda < 1$ $\qquad \xi_2(t) = A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{c(1-\lambda)3}{m}}\,t + \alpha_2\right)$

se $\lambda > 1$ $\qquad \xi_2(t) = A_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{c(\lambda-1)3}{m}}\,t + \alpha_2\right)$

$$\vec{q}_e^{\,(2)} = \left(\frac{mg\sqrt{3}}{2c}, \pi\right): \quad \frac{1}{3} m \ddot{\xi}_2 - c(1-\lambda)\,\xi_2 = 0$$

se $\lambda < 1$: $\qquad \xi_2(t) = A_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{3c(1-\lambda)}{m}}\,t + \alpha_2\right)$

se $\lambda > 1$: $\qquad \xi_2(t) = A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{3c(\lambda-1)}{m}}\,t + \alpha_2\right)$

$$\vec{q}_e^{\,(3)} = \left(\frac{mg\sqrt{3}}{2c}, \theta_e\right): \quad \ddot{\xi}_2 = 0 \Leftrightarrow \xi_2(t) = w_0 t + \alpha_2$$

6) Scriviamo le ECD

$$(11.1)\quad \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\phi}_0' = m\,\vec{a}_G \iff \vec{\phi}_0' = -\vec{R}^{(est,att)} + m\,\vec{a}_G$$

$$(11.2)\quad \vec{M}_O^{(est,att)} + \vec{\mu}' = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \iff \vec{\mu}' = -\vec{M}_O^{(est,att)} + \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_D + \dot{\vec{\omega}}\times(G-D) + \vec{\omega}\times\big(\vec{\omega}\times(G-D)\big) = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{\theta}\,\vec{i}\times\left(\cancel{\tfrac{b}{2}\vec{i}} + \tfrac{a}{2}\vec{j}\right) - \dot{\theta}^2 (G-D)_\perp$$

$$= \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{\theta}\,\frac{a}{2}\,\vec{k} - \dot{\theta}^2\,\frac{a}{2}\,\vec{j}$$

$$(11.3)\quad = \ddot{x}\,\vec{e}_1 + \frac{a}{2}\ddot{\theta}\left(-\sin\theta\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_3\right) - \frac{a}{2}\dot{\theta}^2\left(\cos\theta\,\vec{e}_2 + \sin\theta\,\vec{e}_3\right)$$

$$= \ddot{x}\,\vec{e}_1 - \frac{a}{2}\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_2 + \frac{a}{2}\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_3$$

Proiettando la (11.1) sulla base $\mathcal{B}'$, tenuto conto della (6.3), ritrovo

$\vec{e}_1$: $\quad 0 = cx - \frac{mg\sqrt{3}}{2} + m\ddot{x} \iff EL_x \ (9.2)$

$\vec{e}_2$: $\quad \phi_2' = ca(\cos\theta - 1) + \frac{mg}{2} - \frac{ma}{2}\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)$

$\vec{e}_3$: $\quad \phi_3' = ca\sin\theta + \frac{ma}{2}\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2\right)$

La II ECD (11.2) si può scrivere come nella (13.5) degli Appunti

(12.1) $$\vec{\mu}' = -\vec{M}_O^{(est,e\theta)} + I_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times I_G(\vec{\omega}) + (G-O) \times m\,\vec{a}_G$$

$$I_G(\dot{\vec{\omega}}) = I_G(\ddot{\theta}\,\vec{i}) = \ddot{\theta}\, I_G(\vec{i}) = \ddot{\theta}\,\frac{1}{12} m a^2 \vec{i}$$ poiché $\vec{i}$ è API(G)

$$\vec{\omega} \times I_G(\vec{\omega}) = \dot{\theta}^2\, \vec{i} \times I_G(\vec{i}) = 0$$ '' ''

$$(G-O) \times m\,\vec{a}_G = \left[\left(x+\frac{b}{2}\right)\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j}\right] \times m\left(\ddot{x}\,\vec{i} - \frac{a}{2}\dot{\theta}^2\vec{j} + \frac{a}{2}\ddot{\theta}\,\vec{k}\right)$$

$$= m\left[-\frac{a}{2}\dot{\theta}^2\left(x+\frac{b}{2}\right)\vec{k} - \frac{a}{2}\ddot{\theta}\left(x+\frac{b}{2}\right)\vec{j} - \frac{a}{2}\ddot{x}\,\vec{k} + \frac{a^2}{4}\ddot{\theta}\,\vec{i}\right]$$

$$= m\left[\frac{a^2}{4}\ddot{\theta}\,\vec{i} - \frac{a}{2}\left(x+\frac{b}{2}\right)\ddot{\theta}\,\vec{j} - \frac{a}{2}\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)\dot{\theta}^2 + \ddot{x}\right)\vec{k}\right]$$

Dunque,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times I_G(\vec{\omega}) + (G-O) \times m\,\vec{a}_G =$$

$$= \frac{1}{3} m a^2 \ddot{\theta}\,\vec{i} - \frac{ma}{2}\left(x+\frac{b}{2}\right)\ddot{\theta}\,\vec{j} - \frac{ma}{2}\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)\dot{\theta}^2 + \ddot{x}\right]\vec{k}$$

$$= \frac{1}{3} m a^2 \ddot{\theta}\,\vec{e}_1 - \frac{ma}{2}\left(x+\frac{b}{2}\right)\ddot{\theta}\left(\cos\theta\,\vec{e}_2 + \sin\theta\,\vec{e}_3\right) +$$

(12.2) $$- \frac{ma}{2}\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)\dot{\theta}^2 + \ddot{x}\right]\left(-\sin\theta\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_3\right)$$

$$= \frac{1}{3} m a^2 \ddot{\theta}\,\vec{e}_1 - \frac{ma}{2}\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2\right) - \sin\theta\,\ddot{x}\right]\vec{e}_2$$

$$- \frac{ma}{2}\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) + \cos\theta\,\ddot{x}\right]\vec{e}_3$$

Dunque, tenendo conto della (7.5), si trova

$$\vec{e}_1: \quad 0 = -c\,a^2(\lambda-1)\sin\theta + \frac{1}{3} m a^2 \ddot{\theta} \iff EL_\theta \ (9.3)$$

$$\vec{e}_2: \quad \mu'_2 = -\frac{m g a\sqrt{3}}{4}\sin\theta - \frac{m a}{2}\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2\right) - \sin\theta\,\ddot{x}\right]$$

$$\vec{e}_3: \quad \mu'_3 = -\left[c\,a x(1-2\lambda) - \frac{mg}{4}\left(b + a\sqrt{3}\cos\theta\right)\right] +$$
$$- \frac{m a}{2}\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) + \cos\theta\,\ddot{x}\right]$$

In alternativa, si può scomporre $\vec{M}_O^{(est,att)}$ (7.5) nella base $\mathcal{B}''$

$$\vec{M}_O^{(est,att)} = c\,a^2(\lambda-1)\sin\theta\,\vec{i} + \frac{mg}{4} a\sqrt{3}\sin\theta\left(\cos\theta\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}\right) +$$
$$+ \left[c\,a x(1-2\lambda) - \frac{mg}{4}\left(b + a\sqrt{3}\cos\theta\right)\right]\left(\sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}\right)$$
$$= c\,a^2(\lambda-1)\sin\theta\,\vec{i} + \left[c\,a x(1-2\lambda) - \frac{mg}{4}\, b\sin\theta\right]\vec{j} +$$
$$+ \left[c\,a x(1-2\lambda) - \frac{mg}{4}\left(b\cos\theta + \sqrt{3}a\right)\right]\vec{k}$$

e, tenendo conto della seconda riga della (12.2), si trova

$$\vec{i}: \quad \vec{\mu}\cdot\vec{i} = 0 = -c\,a^2(\lambda-1)\sin\theta + \frac{1}{3} m a^2\ddot{\theta} \iff EL_\theta \ (9.3)$$

$$\vec{j}: \quad \vec{\mu}\cdot\vec{j} = -\left[c\,a x(1-2\lambda) - \frac{mg}{4}\, b\sin\theta\right] - \frac{m a}{2}\left(x+\frac{b}{2}\right)\ddot{\theta}$$

$$\vec{k}: \quad \vec{\mu}\cdot\vec{k} = -\left[c\,a x(1-2\lambda) - \frac{mg}{4}\left(b\cos\theta + \sqrt{3}a\right)\right] - \frac{m a}{2}\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)\dot{\theta}^2 + \ddot{x}\right]$$