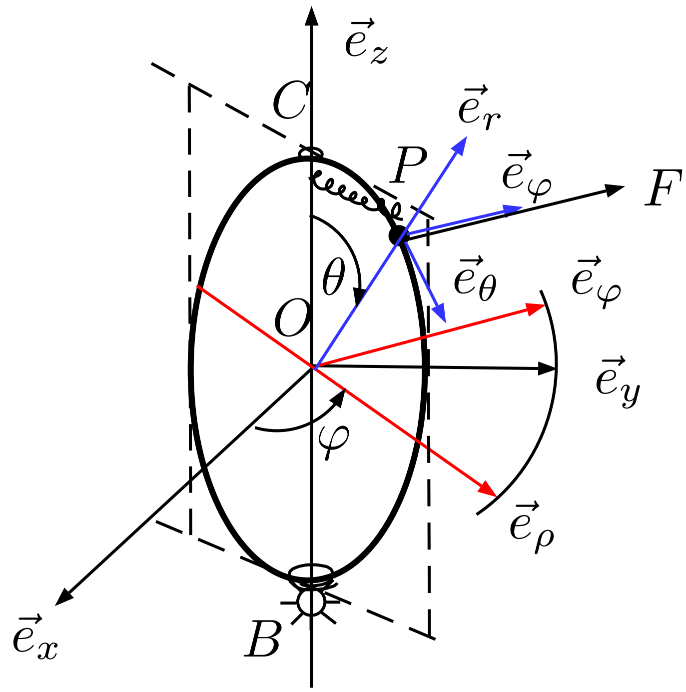
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 18 giugno 2018

(G. Tondo)



Un anello omogeneo, di massa $5m$ e raggio R, è vincolato ad un asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$ mediante un anellino in C e una cerniera sferica fissa in B, entrambi lisci. Sull'anello, è vincolato a scorrere senza attrito un punto materiale P, di massa m, collegato a una molla, di costante elastica c, che ha l'altro estremo fissato all'asse fisso nel punto $C' \equiv C$. Inoltre, su P agisce una forza $F\vec{e}_\varphi$. Sull'anello agisce una molla angolare di richiamo fissata in B e di costante elastica b. Tutti i vincoli sonno supposti bilateri. Scelte come coordinate libere gli angoli φ e θ di figura, si chiede di:

STATICA.

1) individuare le configurazioni di equilibrio del modello;

2) determinare le reazioni vincolari esterne sull'anello nei punti C e B all'equilibrio;

3) determinare le reazioni vincolari dell'anello sul punto materiale P all'equilibrio.

DINAMICA.

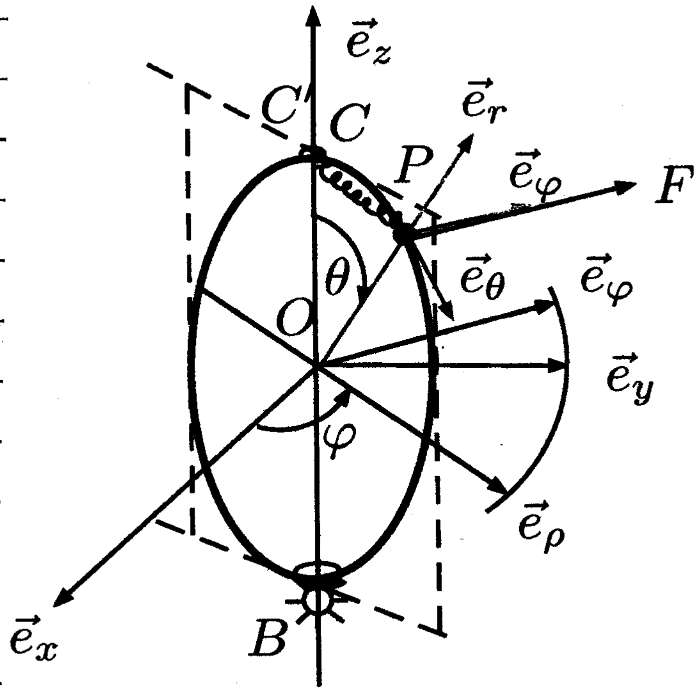
4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e trovarne l'integrale generale;

6) calcolare le reazioni vincolari esterne sull'anello nei punti C e B durante il moto in funzione del tempo.

Tema del 18/06/2018

Il modello è formato da un rigido, l'anello con asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$, e il punto materiale P vincolato all'anello. Con il metodo dei congelamenti successivi si deduce che il modello ha 2 g.l. Quindi può essere descritto dalle coordinate lagrangiane della figura



$\varphi \in \mathbb{R}$, $-\pi < \theta \leq \pi$

Consideriamo le 3 basi:

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: "fissa"

$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: "intermedia" (solidale all'anello)

$(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$: solidale al punto P

$$(1.1)\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad (1.2)\begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(1.3)\begin{cases} \vec{e}_\theta = \cos\theta\, \vec{e}_\rho - \sin\theta\, \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_r = \sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z \end{cases} \qquad (1.4)\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\, \vec{e}_\theta + \sin\theta\, \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = -\sin\theta\, \vec{e}_\theta + \cos\theta\, \vec{e}_r \end{cases}$$

Quindi,

$$P-O = R\, \vec{e}_r = R\left(\sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z\right)$$

$$P-B=(P-O)+(O-B) = R\vec{e}_r + R\vec{e}_z = R(\vec{e}_r+\vec{e}_z) = R(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta+1)\vec{e}_z)$$

$$P-C=(P-O)+(O-C) = R(\vec{e}_r - \vec{e}_z) = R(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta-1)\vec{e}_z)$$

$$|P-C|^2 = R^2[\sin^2\theta+(\cos\theta-1)^2] = 2R^2(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial\varphi} = R\frac{\partial\vec e_r}{\partial\varphi} = R\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\theta\,\vec e_\rho+\cos\theta\,\vec e_z) = R\left(\sin\theta\,\frac{\partial\vec e_\rho}{\partial\varphi}\right) = R\sin\theta\,\vec e_\varphi$$

$$\frac{\partial\vec x_P}{\partial\theta} = R\frac{\partial \vec e_r}{\partial\theta} = R\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\vec e_\rho+\cos\theta\,\vec e_z) - R(\cos\theta\,\vec e_\rho - \sin\theta\,\vec e_z) = R\,\vec e_\theta$$

La sollecitazione dovuta al peso e alle molle è conservativa, quindi ammette energia potenziale

$$V(\varphi,\theta) = \cancel{-5m\vec g\cdot\vec x_O} - m\vec g\cdot\vec x_P + \frac12 b\varphi^2 + \frac12 c\,\overline{PC}^2$$

$$= +mg\,\vec e_z\cdot R(\sin\theta\,\vec e_\rho + \cos\theta\,\vec e_z) + \frac12 b\varphi^2 + \frac{1}{\cancel{2}}c\,\cancel{2}R^2(\cancel{1}-\cos\theta)$$

$$\simeq (mgR - cR^2)\cos\theta + \frac12 b\varphi^2$$

Calcoliamo le componenti lagrangiane della forza $\vec F$ in P.

$$Q_\varphi^{(foll)} = \vec F_P\cdot\frac{\partial\vec x_P}{\partial\varphi} = F\,\vec e_\varphi\cdot R\sin\theta\,\vec e_\varphi = FR\sin\theta$$

$$Q_\theta^{(foll)} = F\,\vec e_\varphi\cdot\frac{\partial \vec x_P}{\partial\theta} = F\,\vec e_\varphi\cdot R\,\vec e_\theta = 0$$

Dunque

$$\frac{\partial Q_\varphi^{(foll)}}{\partial\theta} \neq \frac{\partial Q_\theta^{(foll)}}{\partial\varphi} \Rightarrow$$ sollecitazione <u>non</u> conservativa

Inoltre

$$Q_\varphi^{(con)} = \frac{\partial(-V)}{\partial\varphi} = -b\varphi$$

$$Q_\theta^{(con)} = \frac{\partial(-V)}{\partial\theta} = R(mg-cR)\sin\theta$$

Allora

$$Q_\varphi = -b\varphi + FR\sin\theta$$

$$Q_\theta = R(mg - cR)\sin\theta$$

e le equazioni pure di equilibrio sono

$$\begin{cases} -b\varphi + FR\sin\theta = 0 \\ (mg - cR)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

La II eq. pura di equilibrio ha soluzioni, posto $\lambda = \frac{mg}{cR}$

$\theta = 0,\ \theta = \pi \quad \forall\lambda$, $\quad \forall\theta$ se $\lambda = 1$

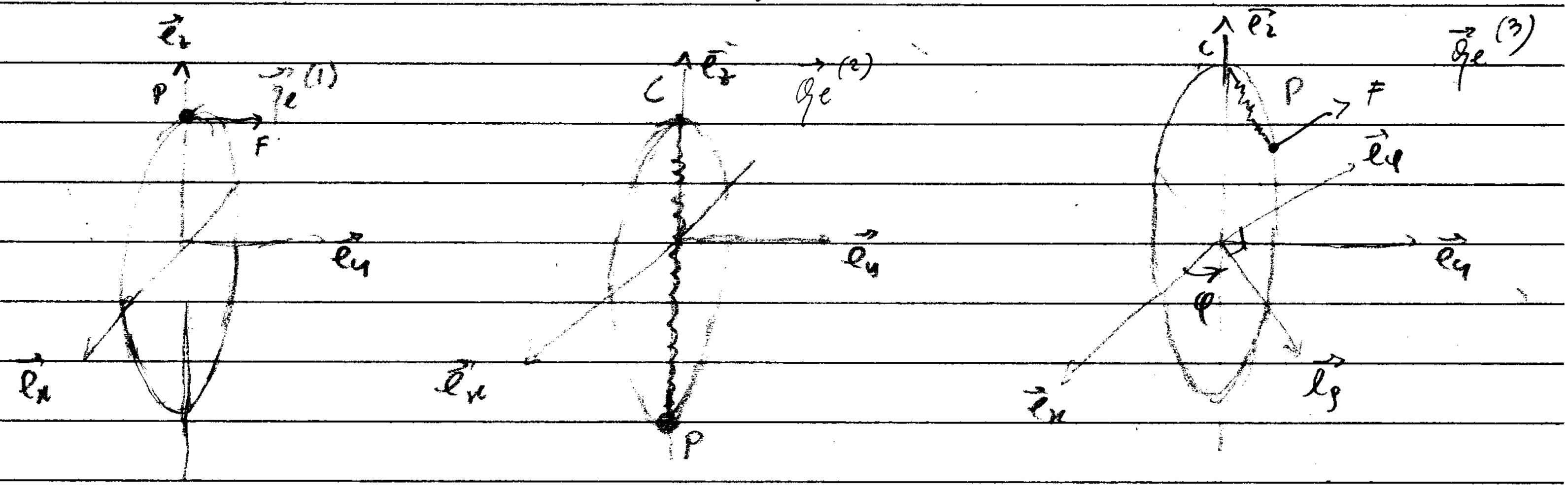
Sostituendo nella I eq pura di equilibrio si trova

$$\varphi_e = \frac{FR}{b}\sin\theta_e$$

Dunque, le configurazioni di equilibrio $\vec{q}_e = (\varphi_e, \theta_e)$ sono

$\forall\lambda \quad \vec{q}_e^{\,(1)} = (0, 0), \quad \vec{q}_e^{\,(2)} = (0, \pi)$

se $\lambda = 1 \quad \vec{q}_e^{\,(3)} = \left(\frac{FR}{b}\sin\theta_e, \theta_e\right) \qquad \forall\theta_e \in \left]-\pi, \pi\right[$



2) Reazioni esterne sull'anello in C e B all'equilibrio.

Sappiamo poiché i vincoli sono non olonomi/potenti e bilateri, che la cerniera sferica in B esercita una reazione

$$\mathcal{L}^{(B)} = \{(B, \vec{\phi})\}$$

e l'anellino in C una reazione

$$\mathcal{L}^{(C)} = \{(C, \vec{\psi})\} \qquad \vec{\psi}_C \cdot \vec{e}_z = 0$$

Quindi, abbiamo 5 incognite scalari. Scriviamo le ECS su tutto il modello.

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\phi}_B + \vec{\psi}_C = \vec{0} \\ \vec{M}_B^{(est,att)} + (C-B)\times\vec{\psi}_C = \vec{0} \end{cases}$$

La II ECS equivale a

$$\vec{\psi}_C \times (C-B) = \vec{M}_B^{(est,att)} \iff \vec{\psi}_C = \frac{(C-B)\times \vec{M}_B^{(est,att)}}{|C-B|^2} + \cancel{f}\,\vec{e}_z,$$

dove la $f=0$ poiché $\vec{\psi}_C \cdot \vec{e}_z = 0$

$$\vec{M}_B^{(est,att)} = \cancel{(O-B)\times(-5mg\vec{e}_z)} + (P-B)\times\left(\vec{F}^{(el)} + \vec{F}^{(ext)} - mg\,\vec{e}_z\right) - b\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= R(\vec{e}_\rho + \vec{e}_z)\times\left(-c\,R(\vec{e}_\rho - \vec{e}_z) + F\vec{e}_\varphi - mg\vec{e}_z\right) - b\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= R\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (1+\cos\theta)\vec{e}_z\right)\times\left[-cR\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta-1)\vec{e}_z\right) + F\vec{e}_\varphi - mg\vec{e}_z\right] - b\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= -cR^2\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta+1)\vec{e}_z\right)\times\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta-1)\vec{e}_z\right) + FR\sin\theta\,\vec{e}_\rho\times\vec{e}_\varphi - mgR\sin\theta\,\vec{e}_\rho\times\vec{e}_z$$

$$+ FR(1+\cos\theta)\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi - b\varphi\,\vec{e}_z$$

Dunque,

$$\vec{M}_{O}^{(ext,e^{*})} = -cR^2\left[-\sin\theta\left(\cancel{\cos\theta}-1\right)+\left(1+\cancel{\cos\theta}\right)\sin\theta\right]\vec{e}_\varphi + FR\sin\theta\,\vec{e}_z + mgR\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$-FR\,(1+\cos\theta)\,\vec{e}_\rho - b\varphi\,\vec{e}_z$$

(5.1) $$= -FR\,(1+\cos\theta)\,\vec{e}_\rho + \left(mgR-2cR^2\right)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi +$$

$$+\left(FR\sin\theta - b\varphi\right)\vec{e}_z$$

Allora,

$$\vec{\psi}_c = \frac{\vec{e}_z}{2R}\times\left[-FR\,(1+\cos\theta)\,\vec{e}_\rho + (mg-2cR)\,R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + (\;---\;)\,\vec{e}_z\right]$$

(5.2) $$= -\frac{F\cancel{R}\,(1+\cos\theta)}{2\cancel{R}}\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho + \frac{(mg-2cR)\cancel{R}\sin\theta}{2\cancel{R}}\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi$$

$$= -\frac{F}{2}\,(1+\cos\theta)\,\vec{e}_\varphi - \left(\frac{mg}{2}-cR\right)\sin\theta\,\vec{e}_\rho$$

Quindi,

$$\vec{\psi}_c\big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = -F\,\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = -F\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\psi}_c\big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = 0$$

$$\vec{\psi}_c\big|_{\vec{q}_e^{(3)}} = -\frac{F}{2}\left(1+\cos\theta_e\right)\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e^{(3)}} - cR\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\sin\theta_e\,\vec{e}_\rho\big|_{\vec{q}_e^{(3)}}$$

Dalla I ECS troviamo la ϕ_B:

$$\vec{\phi}_B = -\vec{\Psi}_c - \vec{R}^{(ext,att)}$$

$$\vec{R}^{(ext,att)} = 5m\vec{g} + \vec{F}_p^{(el)} + \vec{F}^{(foll)} + m\vec{g} = 6m\vec{g} - c(P-C) + F\vec{e}_\varphi$$

$$= -(6m)g\,\underset{0}{\vec{e}_z} - cR\left[\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta - 1)\underset{0}{\vec{e}_z}\right] + F\vec{e}_\varphi$$

$$= -\left[(6m)g + cR(\cos\theta - 1)\right]\vec{e}_z - cR\sin\theta\,\vec{e}_\rho + F\vec{e}_\varphi$$

Quindi

$$\vec{\phi}_B = \frac{F}{2}(1+\cos\theta)\underset{\square}{\vec{e}_\varphi} + \left(\frac{mg}{2} - \cancel{cR}\right)\sin\theta\,\underset{\Delta}{\vec{e}_\rho} +$$

$$+\left[6mg + cR(\cos\theta - 1)\right]\vec{e}_z + \cancel{cR\sin\theta}\,\underset{\Delta}{\vec{e}_\rho} - F\underset{\square}{\vec{e}_\varphi}$$

$$= \frac{mg}{2}\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \left[\frac{F}{2}(1+\cos\theta) - F\right]\vec{e}_\varphi + \left[6mg - cR(1-\cos\theta)\right]\vec{e}_z$$

$$= \frac{mg}{2}\sin\theta\,\vec{e}_\rho - \frac{F}{2}(1-\cos\theta)\vec{e}_\varphi + \left[6mg - cR(1-\cos\theta)\right]\vec{e}_z$$

Dunque,

$$\vec{\phi}_B\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = 6mg\,\vec{e}_z$$

$$\vec{\phi}_B\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = +F\,\vec{e}_\varphi + (6mg - 2cR)\vec{e}_z$$

$$\vec{\phi}_B\Big|_{\vec{q}_e^{(3)}} = \frac{mg}{2}\sin\theta_e\,\vec{e}_\rho\Big|_{\vec{q}_e^{(3)}} - \frac{F}{2}(1-\cos\theta_e)\,\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e^{(3)}} + \left[6mg - cR(1-\cos\theta_e)\right]\vec{e}_z\Big|_{\vec{q}_e^{(3)}}$$

3) Reazioni dell'anello nel punto P all'equilibrio

Poichè l'anello è liscio, la reazione in P starà nel piano $\perp$ a $\vec{e}_\theta$, quindi

(7.1) $$\vec{\Psi}_P = \Psi_r \vec{e}_r + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi \iff \vec{\Psi}_P \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

Scriviamo l'eq. della statica per P:

$$\vec{F}_P^{(el)} + \vec{F}_P^{(poll)} + m\vec{g} + \vec{\Psi}_P = \vec{0}$$

Quindi

$$\vec{\Psi}_P = -\vec{F}_P^{(el)} - \vec{F}_P^{(poll)} - m\vec{g}$$

$$= \left[mg + cR(\cos\theta - 1)\right]\vec{e}_z + cR\sin\theta\,\vec{e}_\rho - F\vec{e}_\varphi$$

$$= \left[mg + cR(\cos\theta-1)\right]\left(-\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\theta\,\vec{e}_r\right) + cR\sin\theta\left(\cos\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\vec{e}_r\right)$$

$$-F\vec{e}_\varphi$$

(7.2)

$$= \left[\left(mg + cR(\cos\theta - 1)\right)\cos\theta + cR\sin^2\theta\right]\vec{e}_r +$$

$$+\left\{\left[mg + cR(\cancel{\cos\theta} - 1)\right](-\sin\theta) + cR\cancel{\sin\theta\cos\theta}\right\}\vec{e}_\theta - F\vec{e}_\varphi$$

$$= \left[(mg - cR)\cos\theta + cR\right]\vec{e}_r - (mg - cR)\sin\theta\,\vec{e}_\theta - F\vec{e}_\varphi$$

Dunque

$$\vec{\Psi}_{P|\vec{q}_e^{(1)}} = mg\,\vec{e}_{r|\vec{q}_e^{(1)}} - F\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e^{(1)}} = mg\,\vec{e}_z - F\vec{e}_y$$

$$\vec{\Psi}_{P|\vec{q}_e^{(2)}} = (-mg + 2cR)\,\vec{e}_{r|\vec{q}_e^{(2)}} - F\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e^{(2)}} = -(-mg + 2cR)\vec{e}_z - F\vec{e}_y$$

$$\vec{\Psi}_{P|\vec{q}_e^{(3)}} = cR\,\vec{e}_{r|\vec{q}_e^{(3)}} - F\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e^{(3)}}$$

4) Scriviamo le eq. di Lagrange non conservative. A tale segno calcoliamo

$$K = K^{(an)} + K^{(P)} \qquad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$K^{(an)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot I_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\cdot I_O(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z\cdot I_O(\vec{e}_z)$$

$$= \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\,I_{Oz}$$

dove

$$I_{Oz} = \frac{1}{2}\,5mR^2$$ (momento d'inerzia dell'anello rs. a un suo diametro.

$$K^{(P)} = \frac{1}{2}\,m\,|\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \vec{\omega}\times(P-O) = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z\times R\,\vec{e}_r$$
$$= R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + R\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$
$$= R\left(\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$|\vec{v}_P|^2 = R^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

Quindi

$$K = \frac{1}{2}\frac{5mR^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\,mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,mR^2\left[\left(\frac{5}{2}+\sin^2\theta\right)\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}, \dot{\theta}\right]^T mR^2 \begin{bmatrix} \left(\frac{5}{2}+\sin^2\theta\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

EL_φ : $\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = mR^2\left(\frac{5}{2}+\sin^2\theta\right)\dot\varphi$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = mR^2\left[\left(\frac{5}{2}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right]$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$mR^2\left[\left(\frac{5}{2}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\;\dot\theta\dot\varphi\right] \overset{(3.7)}{=} -b\varphi + FR\sin\theta$$

EL_θ : $\frac{\partial K}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) = mR^2\ddot\theta$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{mR^2}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2$$

$$mR^2\left(\ddot\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\;\dot\varphi^2\right) = R\,(mg - cR)\sin\theta$$

Dunque, le 2 EL sono

$$(9.1)\quad \begin{cases} EL_\varphi & mR^2\left[\left(\frac{5}{2}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right] = -b\varphi + FR\sin\theta \\ EL_\theta & m\cancel{R^2}\left(\ddot\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2\right) = \cancel{R}\,(mg - cR)\sin\theta \end{cases}$$

5) Linearizzazione delle EL intorno agli equilibri

Poiché la sollecitazione è non conservativa, dobbiamo usare la formula

$$(10.1)\quad A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0 \quad , \quad \text{dove} \quad \vec{x} = \frac{\vec{q}(t)-\vec{q}_e}{\varepsilon}$$

$$A = A(\vec{q}_e) = mR^2 \begin{bmatrix} \frac{5}{2} + \sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$C_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \Rightarrow \qquad C = -\begin{bmatrix} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Q_\theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{|\vec{q}_e} = -\begin{bmatrix} -b & FR\cos\theta_e \\ 0 & R(mg-cR)\cos\theta_e \end{bmatrix}$$

Allora, la (10.1) si scrive

$$mR^2 \begin{bmatrix} \frac{5}{2} + \sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -FR\cos\theta_e \\ 0 & -R(mg-cR)\cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cioè,

$$\begin{cases} mR^2\left(\frac{5}{2} + \sin^2\theta_e\right)\ddot{x}_1 + b\,x_1 - FR\cos\theta_e\, x_2 = 0 \\ \\ mR^2\ddot{x}_2 - R(mg-cR)\cos\theta_e\, x_2 = 0 \end{cases}$$

Dunque,

$$\vec{q}_e^{\,(1)} = (0, 0) \qquad \begin{cases} \frac{5}{2} m R^2 \ddot{x}_1 + b x_1 - F R x_2 = 0 \\ m R \ \ddot{x}_2 - (mg - C R) x_2 = 0 \end{cases} \qquad (11.1)$$

$$\vec{q}_e^{\,(2)} = (0, \pi) \qquad \begin{cases} \frac{5}{2} m R^2 \ \ddot{x}_1 + b x_1 + F R x_2 = 0 \\ m R \ddot{x}_2 + (mg - C R) x_2 = 0 \end{cases} \qquad (11.2)$$

$$\lambda = 1 \quad \vec{q}_e^{\,(3)} = \left(\frac{FR}{b} \sin\theta_e, \theta_e\right) \qquad \begin{cases} m R^2 \left(\frac{5}{2} + \sin^2\theta_e\right) \ddot{x}_1 + b x_1 - F R \cos\theta_e \, x_2 = 0 \\ m R \ \ddot{x}_2 = 0 \end{cases} \qquad (11.3)$$

Calcolo dell' integrale generale del sistema (11.1)

La II della (11.1) equivale a

$$(11.4) \quad \ddot{x}_2 + \frac{C}{m}(1-\lambda) + x_2 = 0 \iff x_2(t) = \begin{cases} \lambda<1 \quad a_2 \cos\left(\sqrt{\frac{C}{m}(1-\lambda)}\, t + \alpha_2\right) & (11.3a) \\ \lambda>1 \quad a_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{C}{m}(\lambda-1)}\, t + \alpha_2\right) & (11.3b) \end{cases} \quad a_2, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Sostituendo nella I della (11.1) si ottiene

$$(11.5) \quad \ddot{x}_1 + \frac{2b}{5mR^2} x_1 = \frac{2F}{5mR} a_2 \, x_2(t) \quad \text{dove} \quad x_2(t) = \begin{cases} \lambda<1 & (11.3a) \\ \lambda>1 & (11.3b) \end{cases}$$

L'integrale generale dell'omogenea associata alla (11.5) è

$$(11.6) \quad \bar{x}_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2b}{5mR^2}}\, t + \alpha_1\right)$$

Inoltre, una soluzione particolare della (11.2) si può trovare con il metodo delle funzioni simili. Tentiamo, se $\lambda<1$, la soluzione di prova oscillante:

$$(12.1) \qquad x_p(t) = a_p \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_p\right) \qquad a_p, d_p \in \mathbb{R}$$

$$\dot{x}_p(t) = -a_p \sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_p\right)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -a_p \frac{c}{m}(1-\lambda)\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_p\right)$$

Sostituendo nella (11.2) si trova

$$-a_p \frac{c}{m}(1-\lambda)\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_p\right) + \frac{2b}{5mR^2}\,a_p \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_p\right) = \frac{2Fa_2}{5mR}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_2\right)$$

Quindi, la (12.1) è soluzione di (11.5) se le costanti (a_p, d_p) soddisfano le condizioni

$$a_p\left(-\frac{c}{m}(1-\lambda) + \frac{2b}{5mR^2}\right) = \frac{2Fa_2}{5mR}, \qquad d_p = d_2,$$

cioè se

$$(12.2) \qquad \begin{cases} a_p = \dfrac{2Fa_2}{\cancel{5}\cancel{m}R}\,\dfrac{\cancel{5}\cancel{m}R^{\cancel{2}}}{-5R^2c(1-\lambda)+2b} = \dfrac{2FR\,a_2}{2b-5cR^2(1-\lambda)} \qquad b \neq \dfrac{5}{2}cR^2(1-\lambda) \\ d_p = d_2 \end{cases}$$

Quindi, l'integrale generale della (11.2) è

$$(12.3) \qquad x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2b}{5mR^2}}\,t + d_1\right) + \frac{2FR\,a_2}{2b-5cR^2(1-\lambda)}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_2\right),$$

dove (a_1, d_1, a_2, d_2) sono costanti dipendenti dalle condizioni iniziali. Dunque, l'integrale generale del sistema (11.1) è

$$(12.4) \quad \lambda<1 \qquad \begin{cases} x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\dfrac{2b}{5mR^2}}\,t + d_1\right) + \dfrac{2FR\,a_2}{2b-5cR^2(1-\lambda)}\cos\left(\sqrt{\dfrac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_2\right) \\ x_2(t) = a_2 \cos\left(\sqrt{\dfrac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_2\right) \end{cases}$$

Se, invece, $\lambda > 1$, proviamo con la funzione iperbolica:

$$(12.5) \quad x_p(t) = a_p \cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\, t + \alpha_p\right) \qquad a_p, \alpha_p \in \mathbb{R}$$

$$\dot{x}_p(t) = a_p \sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)} \sinh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\, t + \alpha_p\right)$$

$$\ddot{x}_p(t) = a_p \frac{c}{m}(\lambda-1) \cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\, t + \alpha_p\right)$$

Sostituendo nella (11.2) si trova

$$a_p \frac{c}{m}(\lambda-1) \cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\, t + \alpha_p\right) + \frac{2b}{5mR^2} a_p \cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\, t + \alpha_p\right) = \frac{2F}{5mR} a_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\, t + \alpha_2\right)$$

Quindi, la (12.5) è soluzione della (11.5) per $\lambda > 1$, se

$$a_p \left(\frac{c}{m}(\lambda-1) + \frac{2b}{5mR^2}\right) = \frac{2F a_2}{5mR}, \qquad \alpha_p = \alpha_2$$

cioè se

$$(12.6) \quad \begin{cases} a_p = \dfrac{2Fa_2}{\cancel{5mR}} \dfrac{\cancel{5m}R^2}{5R^2 c(\lambda-1)+2b} = \dfrac{2FRa_2}{2b+5cR^2(\lambda-1)} \\ \alpha_p = \alpha_2 \end{cases}$$

Quindi, l'integrale generale del sistema (11.1), per $\lambda > 1$, è

$$(12.7) \quad \begin{cases} x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\dfrac{2b}{5mR^2}}\, t + \alpha_1\right) + \dfrac{2FRa_2}{2b+5cR^2(\lambda-1)} \cosh\left(\sqrt{\dfrac{c}{m}(\lambda-1)}\, t + \alpha_p\right) \\ x_2(t) = a_2 \cosh\left(\sqrt{\dfrac{c}{m}(\lambda-1)}\, t + \alpha_2\right) \end{cases}$$

con $(a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2)$ costanti dipendenti dalle condizioni iniziali.

Seguiamo un'analoga procedura per il calcolo dell'integrale generale del sistema (11.2). La II delle (11.2) fornisce

(13.1) $$\ddot{x}_2 + \frac{c}{m}(\lambda-1)x_2 = 0 \iff x_2(t) = \begin{cases} \lambda>1: & = b_2\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_2\right) \\ \lambda<1: & = b_2\cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t+\beta_2\right) \end{cases}$$

Sostituendo nella I delle (11.2) si ottiene

(13.2) $$\ddot{x}_1 + \frac{2b}{5mR^2}x_1 = -\frac{2F\cancel{R}}{5mR^{\cancel{2}}}x_2(t) \quad \text{dove } x_2(t) = \begin{cases} \lambda>1: & b_2\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_2\right) \\ \lambda<1: & b_2\cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t+\beta_2\right) \end{cases}$$

che ha come integrale generale dell'omogenea associata ancora la (11.6)

Cerchiamo una soluzione particolare della (13.2) per $\lambda>1$

(13.3) $$x_p(t) = b_p\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_p\right)$$

$$\dot{x}_p(t) = -b_p\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_p\right)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -b_p\frac{c}{m}(\lambda-1)\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_p\right)$$

Sostituendo nella (13.2) si trova

$$-b_p\frac{c}{m}(\lambda-1)\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_p\right) + \frac{2b}{5mR^2}b_p\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_p\right) = -\frac{2F}{5mR}b_2\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_2\right)$$

Quindi, la (13.3) è soluzione della (13.2) se le costanti (b_p, β_p) soddisfano

$$b_p\left(-\frac{c}{m}(\lambda-1)+\frac{2}{5}\frac{b}{mR^2}\right) = -\frac{2F\,b_2}{5mR}, \quad \beta_p = \beta_2$$

Dunque,

(13.4) $$b_p = -\frac{2F\,b_2}{\cancel{5m}R}\,\frac{\cancel{5m}R^{\cancel{2}}}{-5c(\lambda-1)R^2+2b} = -\frac{2FR}{2b-5c(\lambda-1)R^2}\,b_2$$

Quindi, l'integrale generale della (11.2) è, per $\lambda>1$,

(13.5) $$\begin{cases} x_1(t) = a_1\cos\left(\sqrt{\frac{2b}{5mR^2}}\,t+\alpha_1\right) - \frac{2FR\,b_2}{2b-5c(\lambda-1)R^2}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_2\right) \\ x_2(t) = b_2\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_2\right) \end{cases}$$

Analogamente, si può costruire l'integrale generale del sistema (11.2) per $\lambda < 1$. Il risultato è

$$(13.6)\quad \begin{cases} x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2b}{5mR^2}}\, t + \alpha_1\right) - \frac{2FR}{2b+5c(1-\lambda)R^2} \cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\, t + \beta_2\right) \\ x_2(t) = b_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\, t + \beta_2\right) \end{cases}$$

Ora, calcoliamo l'integrale generalizzato delle eq. linearizzate, per $\lambda = 1$, cioè delle (11.3).
La II delle (11.3) è

$$(13.7)\qquad \ddot{x}_2 = 0 \iff x_2(t) = V_{20}t + x_{20} \qquad (x_{20}, V_{20}) \in \mathbb{R}^2$$

L'integrale generale dell'omogenea associata alla I della (11.3) è

$$(13.8)\qquad \bar{x}_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2\left(\frac{5}{2}+\sin^2\theta_e\right)}}\, t + \alpha_1\right) \qquad (a_1, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$$

Resta da trovare una soluzione particolare di

$$(13.9)\qquad mR^2\left(\frac{5}{2}+\sin^2\theta_e\right)\ddot{x}_1 + b x_1 = FR\cos\theta_e\,(V_{20}t + x_{20})$$

Proviamo una funzione simile $x_p(t) = c_1 t + c_2$, che sostituita in (13.9)

$$b(c_1 t + c_2) = FR\cos\theta_e\,(V_{20}t + x_{20}).$$

Allora, una soluzione particolare è $x_p(t) = \frac{FR\cos\theta_e}{b}(V_{20}t + x_{20})$
e l'integrale generale del sistema (11.3)

$$(13.10)\quad \begin{cases} x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2\left(\frac{5}{2}+\sin^2\theta_e\right)}}\, t + \alpha_1\right) + \frac{FR\cos\theta_e}{b}(V_{20}t + x_{20}) \\ x_2(t) = V_{20}t + x_{20} \end{cases}$$

6) Reazioni sull'anello nei punti C e B.

Le ECD su tutto il modello si scrivono:

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\Phi}'_B + \vec{\Psi}'_C = \cancel{5m\,\vec{a}_O} + m\,\vec{a}_P & (14.1) \\ \vec{M}_B^{(est,att)} + (C-B)\times\vec{\Psi}'_C = \dfrac{d}{dt}\vec{L}_B + \cancel{\vec{v}_B}\times m\vec{v}_G & (14.2) \end{cases}$$

Calcoliamo il momento angolare di tutto il modello rs. a B.

$$\vec{L}_B = \vec{L}_B^{(an)} + \vec{L}_B^{(P)}$$

$$\vec{L}_B^{(an)} = I_B(\vec{\omega}) = I_B(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \dot{\varphi}\, I_B(\vec{e}_z) = \dot{\varphi}\, I_{Bz}\,\vec{e}_z = \frac{5}{2} mR^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

poiché $\vec{e}_z$ è API(B).

$$\vec{L}_B^{(P)} = (P-B)\times m\vec{V}_P = R(\vec{e}_r + \vec{e}_z)\times mR\left(\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= mR^2\left(\dot{\theta}\,\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= mR^2\left(\dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi - \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\,\vec{e}_z\times\left(\cos\theta\,\vec{e}_\xi - \cancel{\sin\theta\,\vec{e}_z}\right) + \right.$$
$$\left. - \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\xi\right)$$

$$= mR^2\left(\underset{\Delta}{\dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi} - \sin\theta\,\dot{\varphi}\left(\cos\theta\,\underset{\square}{\vec{e}_\xi} - \sin\theta\,\vec{e}_z\right) + \dot{\theta}\cos\theta\,\underset{\Delta}{\vec{e}_\varphi} - \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\underset{\square}{\vec{e}_\xi}\right)$$

$$= mR^2\left(-\sin\theta\,\dot{\varphi}\,(\cos\theta+1)\,\vec{e}_\xi + \dot{\theta}\,(\cos\theta+1)\,\vec{e}_\varphi + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\right)$$

Comunque, si può notare che

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_B^{(P)} = \cancel{(\vec{V}_P - \vec{V}_B)\times m\vec{V}_P} + (P-B)\times m\,\vec{a}_P \overset{(16.5)}{=} mR\left(\sin\theta\,\vec{e}_\xi + (1+\cos\theta)\,\vec{e}_z\right)\times$$
$$R\left\{\left[\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\right)\right]\vec{e}_r + \left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi - \left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_z\right\}$$
$$= mR^2\left\{\sin\theta\left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_z + \sin\theta\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \underset{\Delta}{\cos\theta}\,\dot{\theta}^2\right)\underset{\Delta}{\vec{e}_\varphi} + \right.$$
$$\left.(1+\cos\theta)\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \underset{\Delta}{\sin\theta}\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\right)\right)\underset{\Delta}{\vec{e}_\varphi} - (1+\cos\theta)\left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\xi\right\}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_B = mR^2\left[-(1+\cos\theta)(\sin\theta\,\ddot{\varphi}+2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi})\right]\vec{e}_\xi +$$

$$+\,mR^2\left[(1+\cos\theta)(\ddot{\theta}-\sin\theta\,\dot{\varphi}^2)-\sin\theta\,\dot{\theta}^2\right]\vec{e}_\varphi$$

$$+\,mR^2\left[\sin 2\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi}+\left(\sin^2\theta+\frac{5}{2}\right)\ddot{\varphi}\right]\vec{e}_z$$

Allora, risolvendo la (13.2) risp. a Ψ'_C si trova

$$\vec{\Psi}'_C = \frac{C-B}{|C-B|^2}\times\left(\vec{M}_B^{(est,att)}-\frac{d\vec{L}_B}{dt}\right)+\cancel{\lambda'\vec{e}_z} = \frac{\vec{e}_z}{2R}\times\left(\vec{M}_B^{(est,att)}-\frac{d\vec{L}_B}{dt}\right)$$

Il termine $\dfrac{\vec{e}_z}{2R}\times\vec{M}_B^{(est,att)}$ è stato calcolato nella (5.2)

Calcoliamo il termine

$$\frac{\vec{e}_z}{2R}\times\left(-\frac{d\vec{L}_B}{dt}\right) = -\frac{1}{2R}\,mR^2\left[-(1+\cos\theta)(\sin\theta\,\ddot{\varphi}+2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi})\right]\vec{e}_z\times\vec{e}_\xi +$$

$$-\frac{1}{2R}\,mR^2\left[-\sin\theta\,\dot{\theta}^2+(1+\cos\theta)(\ddot{\theta}-\sin\theta\,\dot{\varphi}^2)\right]\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi$$

$$= +\frac{mR}{2}\left[(1+\cos\theta)(\sin\theta\,\ddot{\varphi}+2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi})\right]\vec{e}_\varphi$$

$$+\,\frac{mR}{2}\left[-\sin\theta\,\dot{\theta}^2+(1+\cos\theta)(\ddot{\theta}-\sin\theta\,\dot{\varphi}^2)\right]\vec{e}_\xi$$

Dunque,

$$\vec{\Psi}'_C = \left\{-\left(\frac{mg}{2}-CR\right)\sin\theta+\frac{mR}{2}\left[-\sin\theta\,\dot{\theta}^2+(1+\cos\theta)(\ddot{\theta}-\sin\theta\,\dot{\varphi}^2)\right]\right\}\vec{e}_\xi +$$

$$+\left\{-\frac{E}{2}(1+\cos\theta)+\frac{mR}{2}\left[(1+\cos\theta)(\sin\theta\,\ddot{\varphi}+2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi})\right]\right\}\vec{e}_\varphi$$

Utilizziamo ora la (13.1) per calcolare $\vec{\Phi}'_B$. A tale scopo, calcoliamo $\vec{a}_P$ considerando il moto di P relativo alla terna mobile $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

(16.1) $$\vec{a}_P = \vec{a}_P^{(rel)} + \vec{a}_P^{(tr)} + \vec{a}_P^{(Cor)}$$

(16.2) $$\vec{a}_P^{(rel)} = R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\vec{e}_\rho = R\left[\ddot{\theta}\left(\cos\theta\,\vec{e}_\xi - \sin\theta\,\vec{e}_z\right) - \dot{\theta}^2\left(\sin\theta\,\vec{e}_\xi + \cos\theta\,\vec{e}_z\right)\right]$$

(16.3) $$\vec{a}_P^{(tr)} = \dot{\vec{\omega}}\times(P-O) + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times(P-O)\right)$$

$$= \ddot{\varphi}\,\vec{e}_z \times R\,\vec{e}_\rho + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \left(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times R\,\vec{e}_\rho\right)$$

$$= R\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z \times \sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$= R\sin\theta\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\sin\theta\,\vec{e}_\xi$$

(16.4) $$\vec{a}_P^{(Cor)} = 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}_P^{(rel)} = 2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = 2R\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi$$

(16.5) $$\vec{a}_P = R\Big[\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)\right)\vec{e}_\xi + \left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi - \left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_z\Big]$$

Dunque,

$$\vec{\Phi}'_B = -\vec{R}^{(est,att)} + m\vec{a}_P - \vec{\Psi}'_C$$

$$= \left[6mg + cR(\cos\theta - 1)\right]\vec{e}_z + \cancel{cR}\sin\theta\,\vec{e}_\xi - F\,\vec{e}_\varphi +$$

$$+ mR\left[\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)\right]\vec{e}_\xi + mR\left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$- mR\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_z$$

$$+ \left\{\left(\frac{mg}{2} - \cancel{cR}\right)\sin\theta - \frac{mR}{2}\left[-\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + (1 + \cos\theta)\left(\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\right]\right\}\vec{e}_\xi$$

$$+ \left\{\frac{F}{2}(\cos\theta + 1) - \frac{mR}{2}\left[(1 + \cos\theta)\left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)\right]\right\}\vec{e}_\varphi$$

Quindi,

$$\vec{\phi}'_B = m\left[\frac{R}{2}\left(\cos\theta - 1\right)\ddot{\theta} - \frac{R}{2}\sin\theta\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right) + \frac{g}{2}\sin\theta\right]\vec{e}_\rho +$$

$$+ mR\,(1-\cos\theta)\left(\frac{1}{2}\sin\theta\,\ddot{\varphi} + \cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{F}{2}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$+\left[6mg + CR\left(\cos\theta - 1\right) - mR\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\right]\vec{e}_z$$

Sebbene non fosse richiesto nel tema, per completezza, ricaviamo la reazione in dinamica dell'anello nel punto P. A tale scopo, scriviamo l'equazione dinamica per P

$$\vec{F}_P^{(el)} + \vec{F}_P^{(foll)} + m\vec{g} + \vec{\varphi}'_P = m\,\vec{a}_P$$

Risolvendo rispetto a φ'_P, si trova

$$\vec{\varphi}'_P = -\left(\vec{F}_P^{(el)} + \vec{F}_P^{(foll)} - m\vec{g}\right) + m\,\vec{a}_P$$

Tenendo conto della (7.2) otteniamo,

$$\vec{\varphi}'_P = \left[\left(mg - CR\right)\cos\theta + CR\right]\vec{e}_z - \left(mg - CR\right)\sin\theta\,\vec{e}_\theta - F\,\vec{e}_\varphi + m\,\vec{a}_P$$

Dalla (16.5) ricaviamo l'espressione di $\vec{a}_P$ nella terna $(\vec{e}_z, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ tramite le (1.4).

$$\vec{a}_P = R\left[\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)\right]\left(\cos\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\vec{e}_z\right) +$$

$$+ R\left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi - R\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\left(-\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\theta\,\vec{e}_z\right)$$

$$= R\left(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\theta + R\left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi -$$

$$- R\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r$$

Che coincide con l'espressione di $\vec{a}_P$ in coordinate sferiche se $\dot{r} = 0$. (Vedi

Dunque,

$$\vec{\varphi}'_P = \left[-(mg-CR)\sin\theta + mR\left(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\right]\vec{e}_\theta +$$

$$+\left[-F + mR\left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\ddot{\theta}\right)\right]\vec{e}_\varphi +$$

$$\left[+(mg-CR)\cos\theta + CR - mR\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\right]\vec{e}_z$$

N.B. Si osservi che, come previsto, $\vec{\varphi}'_P \cdot \vec{e}_\theta = 0$. Infatti $\varphi'_P \cdot \vec{e}_\theta$ coincide con la EL_θ (9.1). Ciò spiega il significato fisico della EL_θ: è la proiezione lungo il versore $\vec{e}_\theta$ dell'equazione della dinamica del punto P.
Analogamente, si può verificare che la EL_φ è la proiezione della II ECD, applicata a tutto il modello, lungo il versore $\vec{e}_z$.