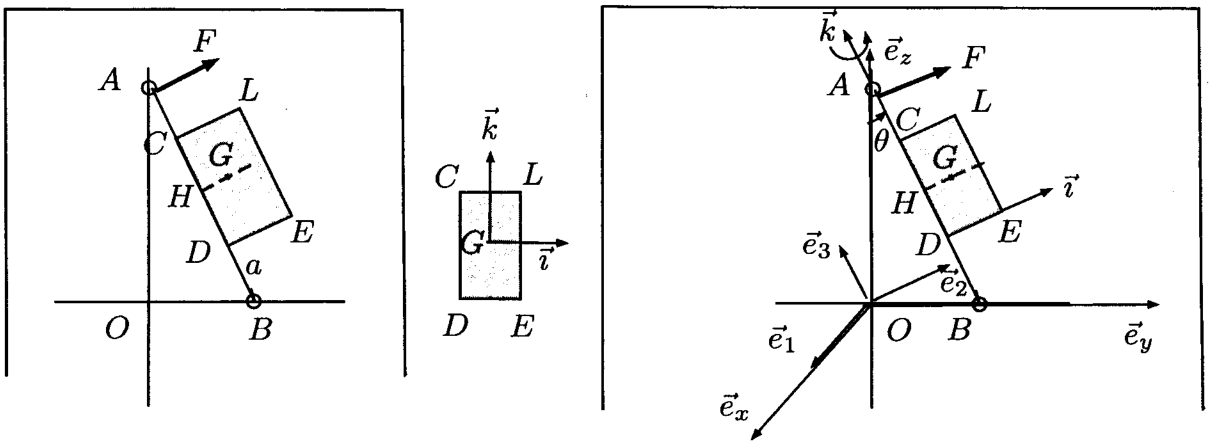
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 8 febbraio 2019. (G. Tondo)

Un rigido è costituito da una lamina rettangolare omogenea di massa m e lati a e $4a$, saldata, lungo il lato CD, ad un'asta AB di lunghezza $6a$ e di massa trascurabile, in modo che il punto medio H del lato CD coincida con il punto medio di AB. Gli estremi dell'asta sono vincolati, come in figura, a scorrere senza attrito lungo due guide fisse ortogonali, tramite due cerniere sferiche "bucate". Sul rigido agisce il peso proprio opposto ad $\vec{e}_z$ e una forza F diretta come il versore $\vec{e}_2$ (vedi sotto) e applicata nell'estremo A dell'asta.



Oltre alla terna fissa $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, si suggerisce di usare anche una terna intermedia formata dai versori $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, con $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$, $\vec{e}_3 = vers(A - D)$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$. Inoltre, si consiglia di prendere una terna solidale alla lamina $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, con il versore $\vec{\imath} = vers(E - D)$, $\vec{k} = \vec{e}_3$ e $\vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{\imath}$.

Sia $-\pi < \theta \leq \pi$ l'angolo compreso tra $\vec{e}_z$ e $\vec{k}$, e sia $-\pi < \psi \leq \pi$ quello compreso tra $\vec{e}_1$ e $\vec{\imath}$.

STATICA

Determinare:

1) il valore del parametro $\lambda = \frac{F}{mg}$ necessario (e sufficiente) all'equilibrio nella configurazione $\theta_e = \frac{\pi}{6}, \psi_e = \frac{\pi}{2}$, e la stabilità di tale configurazione;

2) le reazioni vincolari esterne sul rigido in A, in tale configurazione di equilibrio;

3) le reazioni vincolari esterne sul rigido in B, in tale configurazione di equilibrio.

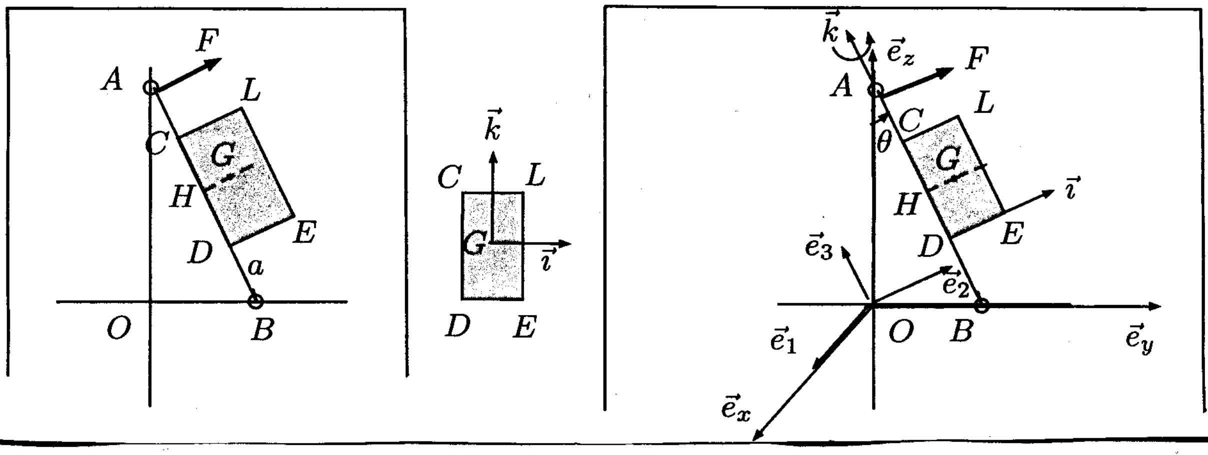
DINAMICA

4) Scrivere le equazione differenziali pure di moto;

5) linearizzare le equazioni di moto intorno alla configurazione di equilibrio suddetta e trovarne l'integrale generale;

6) calcolare le reazioni vincolare esterne nei punti A e B, durante il moto.

Tema del 8/02/2019



Il modello è formato da un solo rigido vincolato con 2 cerniere sferiche lisce. Con il metodo dei congelamenti successivi, possiamo osservare che se blocchiamo lo scorrimento del punto B del rigido sull'asse $(O, \vec{e}_y)$, il rigido può ancora ruotare attorno all'asse $(B, \vec{k})$. Dunque, il rigido ha 2 g.l e, come coordinate libere possiamo prendere gli angoli

$$-\pi < \theta \leq \pi \quad , \quad -\pi < \psi \leq \pi$$

Quindi, ogni configurazione del rigido è individuata da

$$\vec{q} = (\theta, \psi)$$

Consideriamo le 3 basi

$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: "fissa"

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: "intermedia"

$\mathcal{B}'' = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$: solidale al rigido

Le equazioni di trasformazione sono

$$(2.1)\begin{cases}\vec{e}_1 = \vec{e}_x \\ \vec{e}_2 = \cos\theta\,\vec{e}_y + \sin\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_3 = -\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z\end{cases}$$

$$[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = [\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z]\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}}_{R_\theta}$$

Quindi,

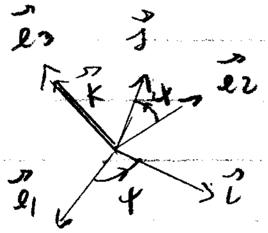
$$R_\theta R_\theta^T = \mathbb{1}$$

$$[\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]\, R_\theta^T = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}}_{R_\theta^T}$$

cioè:

$$(2.2)\begin{cases}\vec{e}_x = \vec{e}_1 \\ \vec{e}_y = \cos\theta\,\vec{e}_2 - \sin\theta\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_z = \sin\theta\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_3\end{cases}$$

Analogamente,



$$(2.3)\begin{cases}\vec{i} = \cos\psi\,\vec{e}_1 + \sin\psi\,\vec{e}_2 \\ \vec{j} = -\sin\psi\,\vec{e}_1 + \cos\psi\,\vec{e}_2 \\ \vec{k} = \vec{e}_3\end{cases}$$

$$[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]\underbrace{\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{R_\psi}$$

Quindi

$$(2.4)\quad [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]\, R_\psi^T = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]\underbrace{\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{R_\psi^T}$$

cioè

$$(2.5)\begin{cases}\vec{e}_1 = \cos\psi\,\vec{i} - \sin\psi\,\vec{j} \\ \vec{e}_2 = \sin\psi\,\vec{i} + \cos\psi\,\vec{j} \\ \vec{e}_3 = \vec{k}\end{cases}$$

Componendo la trasformazioni (2.2) e (2.4) o, equivalentemente, moltiplicando le matrici R_θ^T e R_ψ^T, si trova

$$(3.1)\qquad [\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]\, R_\theta^T \overset{(2.4)}{=} [\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}]\, R_\psi^T R_\theta^T$$

cioè

$$(3.2)\begin{cases} \vec{e}_x = \cos\psi\,\vec{\imath} - \sin\psi\,\vec{\jmath} \\ \vec{e}_y = \cos\theta\,(\sin\psi\,\vec{\imath} + \cos\psi\,\vec{\jmath}) - \sin\theta\,\vec{k} = \cos\theta\sin\psi\,\vec{\imath} + \cos\theta\cos\psi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_z = \sin\theta\,(\sin\psi\,\vec{\imath} + \cos\psi\,\vec{\jmath}) + \cos\theta\,\vec{k} = \sin\theta\sin\psi\,\vec{\imath} + \sin\theta\cos\psi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k} \end{cases}$$

$$(3.3)\begin{cases} \vec{\imath} = \cos\psi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\psi\,\vec{e}_y + \sin\theta\sin\psi\,\vec{e}_z \\ \vec{\jmath} = -\sin\psi\,\vec{e}_x + \cos\theta\cos\psi\,\vec{e}_y + \sin\theta\cos\psi\,\vec{e}_z \\ \vec{k} = -\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z \end{cases}$$

$$(3.3)\quad G-H = \frac{a}{2}\,\vec{\imath} = \frac{a}{2}\,(\cos\psi\,\vec{e}_1 + \sin\psi\,\vec{e}_2) \overset{(2.1)}{=} \frac{a}{2}\left[\cos\psi\,\vec{e}_x + \sin\psi\,(\cos\theta\,\vec{e}_y + \sin\theta\,\vec{e}_z)\right]$$

$$(3.4)\quad H-B = 3a\,\vec{k} = 3a\,\vec{e}_3 = 3a\,(-\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z)$$

$$(3.5)\quad B-O = 6a\sin\theta\,\vec{e}_y$$

Quindi,

$$(3.6)\quad G-O = (G-H) + (H-B) + (B-O) = \frac{a}{2}\,\vec{\imath} + 3a\,\vec{e}_3 + 6a\sin\theta\,\vec{e}_y$$

$$= \frac{a}{2}\cos\psi\,\vec{e}_x + \frac{a}{2}\cos\theta\sin\psi\,\vec{e}_y + \frac{a}{2}\sin\theta\sin\psi\,\vec{e}_z +$$

$$+ 3a\,(-\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z) + 6a\sin\theta\,\vec{e}_y$$

$$= \frac{a}{2}\cos\psi\,\vec{e}_x + \left(\frac{a}{2}\cos\theta\sin\psi + 3a\sin\theta\right)\vec{e}_y + \left(\frac{a}{2}\sin\theta\sin\psi + 3a\cos\theta\right)\vec{e}_z$$

Statica

La sollecitazione attiva è data dal peso (conservativa) e da un carico follower. Allora, calcoliamo le forze generalizzate (Q_θ, Q_ψ). Sappiamo che, per la parte conservativa,

$$Q_\theta^{(peso)} = -\frac{\partial V^{(peso)}}{\partial \theta} \quad , \quad Q_\psi^{(peso)} = -\frac{\partial V^{(peso)}}{\partial \psi}$$

Allora, calcoliamo

$$V^{(peso)} = -m\vec{g}\cdot(G-O) = mg\,\vec{e}_z\cdot(G-O) = mga\left(\frac{1}{2}\sin\theta\sin\psi + 3\cos\theta\right)$$

Quindi

$$Q_\theta^{(peso)} = -mga\left(\frac{1}{2}\cos\theta\sin\psi - 3\sin\theta\right)$$

$$Q_\psi^{(peso)} = -mga\left(\frac{1}{2}\sin\theta\cos\psi\right)$$

Ora calcoliamo il contributo alle forze generalizzate dato dal carico follower

$$Q_\theta^{(foll)} \, , \quad Q_\psi^{(foll)}$$

utilizzando la definizione

$$Q_\theta^{(foll)} = \vec{F}_A\cdot\frac{\partial \vec{x}_A}{\partial\theta} \quad , \quad Q_\psi^{(foll)} = \vec{F}_A\cdot\frac{\partial \vec{x}_A}{\partial\psi}$$

$$\vec{x}_A = 6a\cos\theta\,\vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{x}_A}{\partial\theta} = -6a\sin\theta\,\vec{e}_z \quad , \quad \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial\psi} = 0$$

Poichè

$$\vec{F}_A = F\,\vec{e}_2 \overset{(2.1)}{=} F\left(\cos\theta\,\vec{e}_y + \sin\theta\,\vec{e}_z\right)$$

si ottiene

$$Q_\theta^{(foll)} = F\left(\cos\theta\,\vec{e}_y + \sin\theta\,\vec{e}_z\right)\cdot\left(-6a\sin\theta\,\vec{e}_z\right),\quad Q_\varphi^{(foll)} = 0$$

Dunque,

(5.2) $$Q_\theta^{(foll)} = -6Fa\sin^2\theta \quad , \quad Q_\varphi^{(foll)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q_\theta^{(foll)}}{\partial\varphi} = 0 = \frac{\partial Q_\varphi^{(foll)}}{\partial\theta}$$

Quindi, il carico follower è conservativo e le forze generalizzate sono

(5.3) $$Q_\theta = Q_\theta^{(peso)} + Q_\theta^{(foll)} = -mga\left(\frac{1}{2}\cos\theta\sin\varphi - 3\sin\theta\right) - 6Fa\sin^2\theta$$

$$Q_\varphi = Q_\varphi^{(peso)} + \cancel{Q_\varphi^{(foll)}} = -\frac{mga}{2}\sin\theta\cos\varphi$$

La configurazione assegnata $\vec{q}_e = \left(\theta_e = \frac{\pi}{6}, \varphi_e = \frac{\pi}{2}\right)$ è di equilibrio se e solo se

(5.4) $$0 = Q_\theta|_{\vec{q}_e} = -mga\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}Fa$$

(5.5) $$0 = Q_\varphi|_{\vec{q}_e} \qquad \text{O.K.}$$

Allora, la (5.4) è soddisfatta se e solo se

(5.6) $$\frac{3}{\cancel{2}}F = \frac{mg}{\cancel{2}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\right) \Leftrightarrow \lambda = \frac{F}{mg} = \frac{1}{3}\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} > 0$$

Per determinare la stabilità dell'equilibrio $\vec{q}_e$, determiniamo la matrice Hessiana di V

$$\mathcal{H}_V = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \psi} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \psi \partial \theta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial Q_\psi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Q_\theta}{\partial \psi} & \frac{\partial Q_\psi}{\partial \psi} \end{bmatrix} =$$

(6.1)
$$= \begin{bmatrix} -mga\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\sin\psi - 3\cos\theta\right) + -12Fa\sin\theta\cos\theta & -\frac{mga}{2}\cos\theta\cos\psi \\ -\frac{mga}{2}\cos\theta\cos\psi & +\frac{mga}{2}\sin\theta\sin\psi \end{bmatrix}$$

Allora

$$\mathcal{H}_{V|\vec{q}_e} = \begin{bmatrix} mga\left(-\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + 12Fa\,\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{mga}{4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{mga}{2}\left(\frac{1}{2} + 3\sqrt{3}\right) + 3\sqrt{3}\,a\,mg\lambda & 0 \\ 0 & -\frac{mga}{4} \end{bmatrix} =$$

(6.2)
$$= mga \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{mga}{2} \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} - \frac{7}{2} & \\ & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Dunque, $\mathcal{H}_{11}$ e $\det \mathcal{H}_{V|\vec{q}_e}$ sono opposti in segno $\Rightarrow$ instabilità

2) + 3) Reazioni all'equilibrio in A e B

Le cerniere sferiche sono, per ipotesi, non dissipative e bilatere. Quindi, eserciteranno una sollecitazione reattiva data da

$$(7.1) \qquad \mathcal{L}^{(reatt)} = \{(A,\vec{\Psi}),(B,\vec{\Phi})\} \text{ con } \vec{\Psi}_A \cdot \vec{e}_z = 0, \ \vec{\Phi}_B \cdot \vec{e}_y = 0$$

Per calcolare $\vec{\Psi}_A$ e $\vec{\Phi}_B$, scriviamo le ECS su tutto il rigido

$$(7.2) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\Psi}_A + \vec{\Phi}_B = 0 \\ \vec{M}_B^{(es,att)} + (A-B)\times\vec{\Psi}_A = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo il risultante delle forze esterne attive:

$$\vec{R}^{(est,att)} = -mg\vec{e}_z + \vec{F} = -mg\vec{e}_z + F\vec{e}_2 =$$
$$= -mg\vec{e}_z + F(\cos\theta\,\vec{e}_y + \sin\theta\,\vec{e}_z) =$$
$$= F\cos\theta\,\vec{e}_y + (F\sin\theta - mg)\,\vec{e}_z$$

Quindi, proiettando la I ECS (7.2) sulla base fissa $\mathcal{B}$

$$(7.3) \quad \begin{cases} (\vec{\Psi}_A + \vec{\Phi}_B)\cdot\vec{e}_x = 0 \\ \vec{\Psi}_A \cdot \vec{e}_y = -F\cos\theta \\ \vec{\Phi}_B \cdot \vec{e}_z = -(F\sin\theta - mg) \end{cases}$$

Dunque, nella configurazione di equilibrio assegnata $\vec{q}_e = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ si trova

$$(7.4) \quad \begin{cases} (\vec{\Psi}_A + \vec{\Phi}_B)\cdot\vec{e}_x = 0 \\ \vec{\Psi}_A \cdot \vec{e}_y = -F\frac{\sqrt{3}}{2} = -mg\lambda\frac{\sqrt{3}}{2} = -mg\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = -\frac{mg}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right) \\ \vec{\Phi}_B \cdot \vec{e}_z = -\frac{F}{2} + mg = -\frac{mg\lambda}{2} + mg = mg\left(1-\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{mg}{2}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \end{cases}$$

Restano da determinare $\vec{\varphi}_A \cdot \vec{e}_x$ e $\vec{\phi}_B \cdot \vec{e}_x$. A tale scopo, osserviamo che, nella configurazione di equilibrio $\bar{q}_e$, il rigido giace nel piano $\Pi_x = (O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ insieme con tutte le forze attive a cui è soggetto. Dunque,

$$\vec{R}^{(est,att)} \in \Pi_x, \quad \vec{M}_P^{(est,att)} \perp \Pi_x \quad \forall P \in \Pi_x$$

Dalle ECS, segue che

$$\vec{R}^{(est,reatt)} \in \Pi_x, \quad \vec{M}_P^{(est,reatt)} \perp \Pi_x \quad \forall P \in \Pi_x$$

La I equivale alla I delle (7.4), la II implica che

$$\vec{M}_B^{(est,reatt)} = (A-B) \times \vec{\varphi}_A \perp \Pi_x$$

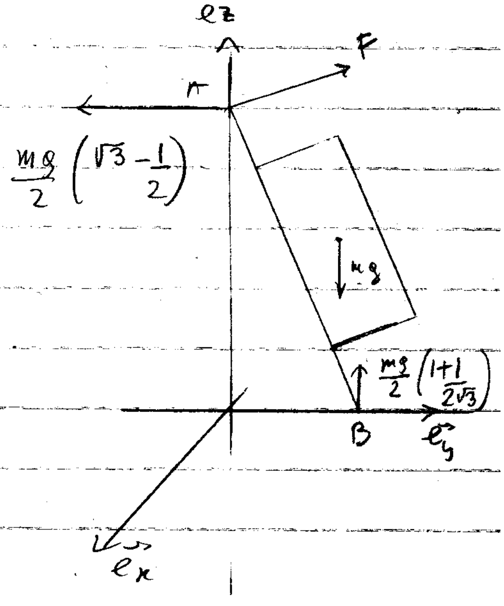
Dunque, $\vec{\varphi}_A \in \Pi_x$, quindi

$$\vec{\varphi}_A \cdot \vec{e}_x = 0 \quad et \quad \vec{\phi}_B \cdot \vec{e}_x \overset{(7.4)}{=} 0$$

In conclusione,

$$\vec{\varphi}_A = -\frac{mg}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\vec{e}_y$$

$$\vec{\phi}_B = \frac{mg}{2}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\vec{e}_z$$



Dinamica

4) Scriviamo le 2 EL relative a θ e φ. A tale scopo calcoliamo l'energia cinetica del rigido.

(10.1) $K = \frac{1}{2} m |\vec{v}_H|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I_H(\vec{\omega}) + m \vec{v}_H \cdot \vec{\omega} \times (G-H)$

Dalla (3.4) e (3.5) segue che

(10.2) $H-O = (H-B)+(B-O) = 3a\vec{k} + 6a\sin\theta\,\vec{e}_y = 3a(\sin\theta\, e_y + \cos\theta\, \vec{e}_z)$

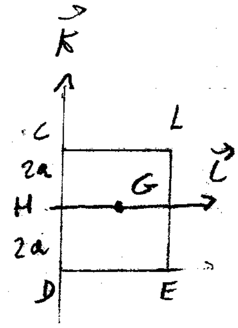
Quindi,

(10.3) $\vec{v}_H = \frac{d}{dt}(H-O) = 3a(\cos\theta\, \vec{e}_y - \sin\theta\, \vec{e}_z)\dot{\theta}$

(10.4) $|\vec{v}_H|^2 = 9a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\dot{\theta}^2 = 9a^2\dot{\theta}^2$

Dal Teo. di Frini segue che

(10.5) $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e}_1 + \dot{\varphi}\vec{K} \overset{(2.5)}{=} \dot{\theta}(\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j}) + \dot{\varphi}\vec{K}$



La terna $(H, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è una TPI(H) (perché?) quindi

(10.6) $I_H^{(B'')} = ma^2 \begin{bmatrix} \cancel{\frac{16}{12}}\,\frac{4}{3} & & \\ & \frac{5}{3} & \\ & & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{ma^2}{3} \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 5 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

Dunque

(10.7) $\frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot I_H(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \frac{ma^2}{3} \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 5 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cos\varphi \\ -\dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{ma^2}{6}[\dot{\theta}\cos\varphi, -\dot{\theta}\sin\varphi, \dot{\varphi}] \begin{bmatrix} 4\dot{\theta}\cos\varphi \\ -5\dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} =$

$= \frac{ma^2}{6}(4\dot{\theta}^2\cos^2\varphi + 5\dot{\theta}^2\sin^2\varphi + \dot{\varphi}^2) =$

$= \frac{ma^2}{6}[(4+\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2]$

$$\vec{\omega} \times (G-H) = \left(\dot{\theta} \cos\psi \, \vec{i} - \dot{\theta} \sin\psi \, \vec{j} + \dot{\psi} \vec{k}\right) \times \frac{a}{2} \vec{i} =$$

$$= \frac{a}{2} \left(\dot{\theta} \sin\psi \, \vec{k} + \dot{\psi} \, \vec{j}\right)$$

Inoltre, riscrivendo $\vec{v}_H$ nella base solidale $\mathcal{B}''$, si ottiene

$$\vec{V}_H = 3a\dot{\theta} \left(\cos\theta \, \vec{e}_4 - \sin\theta \, \vec{e}_5\right) = 3a\dot{\theta} \left[\cos\theta \left(\sin\psi \, \vec{i} + \cos\psi \, \vec{j}\right) - \sin\theta \, \vec{k}\right] \cos\theta +$$

$$- 3a\dot{\theta} \left[\sin\theta \left(\sin\psi \, \vec{i} + \cos\psi \, \vec{j}\right) + \cos\theta \, \vec{k}\right] \sin\theta$$

$$= 3a\dot{\theta} \left[\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\left(\sin\psi \, \vec{i} + \cos\psi \, \vec{j}\right) - 2\sin\theta \cos\theta \, \vec{k}\right] =$$

$$= 3a\dot{\theta} \left[\cos 2\theta \left(\sin\psi \, \vec{i} + \cos\psi \, \vec{j}\right) - \sin 2\theta \, \vec{k}\right]$$

Quindi, il termine misto delle (10.1) vale

$$\vec{V}_H \cdot \vec{\omega} \times (G-H) = \frac{3}{2} a^2 \dot{\theta} \left[-\dot{\theta} \sin 2\theta \sin\psi + \cos 2\theta \cos\psi \, \dot{\psi}\right]$$

Dunque,

$$K = \frac{1}{2} m \, 9 a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{6} m a^2 \left[\left(4 + \sin^2\psi\right)\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\right] + \frac{3}{2} m a^2 \dot{\theta} \left[-\sin 2\theta \sin\psi \, \dot{\theta} + \cos 2\theta \cos\psi \, \dot{\psi}\right]$$

$$= m a^2 \left[\left(\frac{31}{6} + \frac{1}{6}\sin^2\psi - \frac{3}{2}\sin 2\theta \sin\psi\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}\dot{\psi}^2 + \frac{3}{2}\cos 2\theta \cos\psi \, \dot{\theta}\dot{\psi}\right]$$

$$= \frac{1}{2} m a^2 \left[\dot{\theta}, \dot{\psi}\right] \begin{bmatrix} \frac{31}{3} + \frac{1}{3}\sin^2\psi - 3\sin 2\theta \sin\psi & \frac{3}{2}\cos 2\theta \cos\psi \\ \frac{3}{2}\cos 2\theta \cos\psi & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Scriviamo le EL.

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\theta} = 2ma^2\left(\left(\frac{31}{6}+\frac{1}{6}\sin^2\psi-\frac{3}{2}\sin 2\theta\sin\psi\right)\dot\theta+\frac{3}{2}\cos 2\theta\cos\psi\,\dot\psi\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\theta}\right) = 2ma^2\left(\frac{1}{3}\sin\psi\cos\psi\,\dot\psi-3\cos 2\theta\sin\psi\,\dot\theta-\frac{3}{2}\sin 2\theta\cos\psi\,\dot\psi\right)\dot\theta+$$
$$+2ma^2\left(\frac{31}{6}+\frac{1}{6}\sin^2\psi-\frac{3}{2}\sin 2\theta\sin\psi\right)\ddot\theta+$$
$$+\left(-3\sin 2\theta\,\dot\theta\right)\cos\psi\,\dot\psi-\frac{3}{2}\cos 2\theta\sin\psi\,\dot\psi^2+\frac{3}{2}\cos 2\theta\cos\psi\,\ddot\psi$$

$$\frac{\partial K}{\partial\theta} = ma^2\left(-3\cos 2\theta\sin\psi\,\dot\theta^2-3\sin 2\theta\cos\psi\,\dot\theta\dot\psi\right)$$

$$EL_\theta: 2ma^2\left[\left(\frac{1}{3}\sin\psi-\frac{3}{2}\sin 2\theta\right)\cos\psi\,\dot\theta\dot\psi-\frac{3}{2}\cos 2\theta\sin\psi\,\dot\theta^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{31}{6}+\frac{1}{6}\sin^2\psi-\frac{3}{2}\sin 2\theta\sin\psi\right)\ddot\theta-\frac{3}{4}\cos 2\theta\sin\psi\,\dot\psi^2+\frac{3}{4}\cos 2\theta\cos\theta\,\ddot\psi\right]=$$
$$=-mga\left(\frac{1}{2}\cos\theta\sin\psi-3\sin\theta\right)-6Fa\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\psi} = ma^2\left[\frac{1}{3}\dot\psi+\frac{3}{2}\cos 2\theta\cos\psi\,\dot\theta\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\psi}\right) = ma^2\left[\frac{1}{3}\ddot\psi+\left(-3\sin 2\theta\cos\psi\,\dot\theta^2\right)+\frac{3}{2}\cos 2\theta\left(-\sin\psi\,\dot\psi\dot\theta+\cos\psi\,\ddot\theta\right)\right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial\psi} = ma^2\left[\left(\frac{1}{3}\sin\psi\cos\psi-\frac{3}{2}\sin 2\theta\cos\psi\right)\dot\theta^2-\frac{3}{2}\cos 2\theta\sin\psi\,\dot\theta\dot\psi\right]$$

$$EL_\psi: ma^2\left[\frac{1}{3}\ddot\psi-\left(\frac{1}{3}\sin\psi+\frac{3}{2}\sin 2\theta\right)\cos\psi\,\dot\theta^2+\frac{3}{2}\cos 2\theta\cos\psi\,\ddot\theta\right]=-mga\left(\frac{1}{2}\sin\theta\cos\psi\right)$$

5) Linearizzazione nelle configurazioni di eq. $\vec{q}_e = \left(\theta_e = -\frac{\pi}{6}, \varphi_e = \frac{\pi}{2}\right)$

Poiché la sollecitazione è conservativa, possiamo usare la formula

$$(13.1)\quad A(\vec{q}_e)\ddot{\vec{x}} + \mathcal{H}(\vec{q}_e)\,\vec{x} = \theta \qquad \vec{x} = \frac{\vec{q}(t) - \vec{q}_e}{\varepsilon},$$

dove

$$(13.2)\quad A(\vec{q}_e) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{31}{3} + \frac{1}{3}\sin^2\varphi_e - 3\sin 2\theta_e \sin\varphi_e & \frac{3}{2}\cos 2\theta_e \cos\varphi_e \\ \frac{3}{2}\cos 2\theta_e \cos\varphi_e & \frac{1}{3} \end{array}\right] ma^2 = \left[\begin{array}{c|c} \frac{32}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right] ma^2$$

$$\mathcal{H}(q_e) \overset{(6.2)}{=} mga \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - \frac{7}{2}\right) & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Dunque, tenendo conto che $\lambda = 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}$, si trova

$$ma^2 \left[\begin{array}{c|c} \frac{32}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + mga \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - \frac{7}{2}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi, il sistema delle EL linearizzate intorno a $\vec{q}_e = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{cases} ma^2\left(\frac{32}{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\ddot{x}_1 + mga\,\frac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - \frac{7}{2}\right)x_1 = 0 \\ ma^2\,\frac{1}{3}\,\ddot{x}_2 - \frac{mga}{4}\,x_2 = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \left(\frac{32}{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\ddot{x}_1 + \frac{g}{2a}\left(3\sqrt{3} - \frac{7}{2}\right)x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 - \frac{3}{4}\frac{g}{a}\,x_2 = 0 \end{cases}$$

L'integrale generale del sistema linearizzato è dato da

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cos(\nu_1 t + d_1) \\ x_2(t) = c_2 \cosh(\nu_2 t + d_2) \end{cases}$$

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{g}{2a}\left(3\sqrt{3} - \frac{7}{2}\right)\Big/\left(\frac{32}{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)}$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3\,\frac{g}{a}}$$

dove c_1, c_2, d_1, d_2 sono costanti arbitrarie dipendenti dalle condizioni iniziali.

b) Reazioni dinamiche in A e B.

Scriviamo le 2 ECD, scegliendo come polo per la II il punto $B \in R$

$$(15.1)\quad \begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\Psi}_A + \vec{\phi}_B = m\,\vec{a}_G \\ \vec{M}_B^{(est,att)} + (A-B)\times\vec{\Psi}_A = \dfrac{d\vec{L}_B}{dt} + \vec{v}_B \times \vec{p} \end{cases}$$

Proiettando la I ECD sulla base fissa $\mathcal{B}$, possiamo ricavare subito $\Psi_A \cdot \vec{e}_y$ e $\vec{\phi}_B \cdot \vec{e}_z$.

$$(15.2)\quad \vec{\Psi}_A \cdot \vec{e}_x + \vec{\phi}_B \cdot \vec{e}_x = \cancel{m g \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x} - F\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x + m\,\vec{a}_G \cdot \vec{e}_x$$

$$(15.3)\quad \vec{\Psi}_A \cdot \vec{e}_y = \cancel{m g \vec{e}_z \cdot \vec{e}_y} - \cancel{\vec{\phi}_B \cdot \vec{e}_y} + m\,\vec{a}_G \cdot \vec{e}_y - F\vec{e}_z \cdot \vec{e}_y$$

$$(15.4)\quad \vec{\phi}_B \cdot \vec{e}_z = m g\, \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z - \cancel{\vec{\Psi}_A \cdot \vec{e}_z} + m\,\vec{a}_G \cdot \vec{e}_z - F\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z$$

Quindi, dobbiamo calcolare le componenti di $\vec{a}_G$ in $\mathcal{B}$.
Facciamolo derivando 2 volte rs. al tempo la (3.6)

$$(15.5)\quad \vec{v}_G = \frac{d}{dt}(G-O) = a\Big[-\frac{1}{2}\sin\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_x + \Big(-\frac{1}{2}\sin\theta\sin\varphi\,\dot\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\cos\varphi\,\dot\varphi + 3\cos\theta\,\dot\theta\Big)\vec{e}_y + \Big(\frac{1}{2}\cos\theta\sin\varphi\,\dot\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\varphi\,\dot\varphi - 3\sin\theta\,\dot\theta\Big)\vec{e}_z\Big]$$

$$= a\Big\{-\frac{1}{2}\sin\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_x + \Big[\Big(-\frac{1}{2}\sin\theta\sin\varphi + 3\cos\theta\Big)\dot\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\cos\varphi\,\dot\varphi\Big]\vec{e}_y + \Big[\Big(\frac{1}{2}\cos\theta\sin\varphi - 3\sin\theta\Big)\dot\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\varphi\,\dot\varphi\Big]\vec{e}_z\Big\}$$

$$\vec{a}_G = a \Big\{ -\frac{1}{2}\left(\cos\varphi\, \dot\varphi^2 + \sin\varphi\, \ddot\varphi\right) \vec{e}_x +$$

$$+\Big[\Big(-\frac{1}{2}\left(\cos\theta \sin\varphi\, \dot\theta + \sin\theta\cos\varphi\, \dot\varphi\right) - 3\sin\theta\,\dot\theta\Big)\dot\theta + \Big(-\frac{1}{2}\sin\theta\sin\varphi + 3\cos\theta\Big)\ddot\theta$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\sin\theta\cos\varphi\,\dot\theta + \cos\theta\sin\varphi\,\dot\varphi\right)\dot\varphi + \frac{1}{2}\cos\theta\cos\varphi\,\ddot\varphi\Big]\vec{e}_y$$

(16.1) $$+\Big[\Big(\frac{1}{2}\left(-\sin\theta\sin\varphi\,\dot\theta + \cos\theta\cos\varphi\,\dot\varphi\right) - 3\cos\theta\,\dot\theta\Big)\dot\theta + \Big(\frac{1}{2}\cos\theta\sin\varphi - 3\sin\theta\Big)\ddot\theta +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\cos\theta\cos\varphi\,\dot\theta - \sin\theta\sin\varphi\,\dot\varphi\right)\dot\varphi + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\varphi\,\ddot\varphi\Big]\vec{e}_z\Big\}$$

$$= a\Big\{ -\frac{1}{2}\left(\cos\varphi\,\dot\varphi^2 + \sin\varphi\,\ddot\varphi\right)\vec{e}_x +$$

$$+\Big[-\Big(\frac{1}{2}\cos\theta\sin\varphi + 3\sin\theta\Big)\dot\theta^2 - \sin\theta\cos\varphi\,\dot\theta\dot\varphi + \Big(-\frac{1}{2}\sin\theta\sin\varphi + 3\cos\theta\Big)\ddot\theta$$

$$-\frac{1}{2}\cos\theta\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\cos\theta\cos\varphi\,\ddot\varphi\Big]\vec{e}_y +$$

$$+\Big[-\Big(\frac{1}{2}\sin\theta\sin\varphi + 3\cos\theta\Big)\dot\theta^2 + \cos\theta\cos\varphi\,\dot\theta\dot\varphi + \Big(\frac{1}{2}\cos\theta\sin\varphi - 3\sin\theta\Big)\ddot\theta$$

$$-\frac{1}{2}\sin\theta\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\varphi\,\ddot\varphi\Big]\vec{e}_z\Big\}$$

Inoltre, proiettiamo il carico follower su $\mathcal{B}$

$$\vec{F}\cdot\vec{e}_x = F\vec{e}_2\cdot\vec{e}_x = 0$$

(16.2) $$\vec{F}\cdot\vec{e}_y = F\vec{e}_2\cdot\vec{e}_y = F\cos\theta$$

$$\vec{F}\cdot\vec{e}_z = F\vec{e}_2\cdot\vec{e}_z = F\sin\theta$$

Dunque, la (15.3) e (15.4), insieme con la (16.1) e (16.2) forniscono

$$(17.1)\quad \vec{\Phi}_A \cdot \vec{e}_y = ma\left[-\left(\frac{1}{2}\cos\theta\sin\varphi + 3\sin\theta\right)\dot{\theta}^2 - \sin\theta\cos\varphi\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \left(-\frac{1}{2}\sin\theta\sin\varphi + 3\cos\theta\right)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}\cos\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\cos\theta\cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right] - F\cos\theta$$

$$(17.2)\quad \vec{\Phi}_B \cdot \vec{e}_z = mg + ma\left[-\left(\frac{1}{2}\sin\theta\sin\varphi + 3\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \cos\theta\cos\varphi\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \left(\frac{1}{2}\cos\theta\sin\varphi - 3\sin\theta\right)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right] - F\sin\theta$$

Inoltre, la (15.2) fornisce la somma delle reazioni lungo $\vec{e}_x$

$$(17.3)\quad (\vec{\Phi}_A + \vec{\Phi}_B)\cdot\vec{e}_x = -\frac{ma}{2}\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right)$$

Per determinare ognuna delle 2 incognite $\vec{\Phi}_A\cdot\vec{e}_x$, $\vec{\Phi}_B\cdot\vec{e}_x$ dobbiamo usare la II ECD (15.1). Osserviamo che

$$(A-B)\times\vec{\Phi}_A = 6a\,\vec{k}\times(\Phi_x\vec{e}_x + \Phi_y\vec{e}_y) =$$

$$(17.4)\quad = 6a\left(-\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z\right)\times\left(\Phi_x\vec{e}_x + \Phi_y\vec{e}_y\right)$$

$$= 6a\left(\Phi_x\sin\theta\,\vec{e}_z + \Phi_x\cos\theta\,\vec{e}_y - \Phi_y\cos\theta\,\vec{e}_x\right)$$

Allora, se proiettiamo la II ECD lungo $\vec{e}_y$, otteniamo

$$(17.5)\quad 6a\cos\theta\,\Phi_x = -(G-B)\times m\vec{g}\cdot\vec{e}_y + \frac{d\vec{L}_B}{dt}\cdot\vec{e}_y + \cancel{\vec{v}_B\times\vec{p}}\cdot\vec{e}_y - (A-B)\times\vec{F}\cdot\vec{e}_y \qquad \vec{v}_B \parallel \vec{e}_y$$

Il momento della forza peso e quello del carico follower sono

$$(G-B)\times m\vec g = \left(\frac{a}{2}\,\vec i + 3a\,\vec k\right)\times(-mg\,\vec e_z) = -mg\left(\frac{a}{2}\,\vec i\times\vec e_z + 3a\,\vec k\times\vec e_z\right)$$

$$= -mg\left[\frac{a}{2}\left(\cos\varphi\,\vec e_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec e_y\right)\times\vec e_z + 3a(-\sin\theta)\,\vec e_y\times\vec e_z\right]$$

$$= -mga\left[-\frac{1}{2}\cos\varphi\,\vec e_y + \cos\theta\sin\varphi\,\vec e_x - 3\sin\theta\,\vec e_x\right]$$

$$= -mga\left[(\cos\theta\sin\varphi - 3\sin\theta)\,\vec e_x - \frac{1}{2}\cos\varphi\,\vec e_y\right]$$

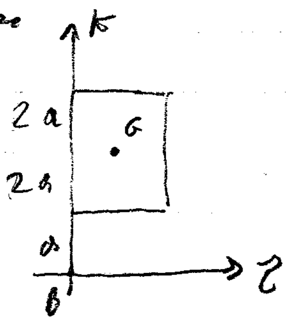
$$(A-B)\times\vec F = 6a\,\vec e_3\times F\,\vec e_2 = -6Fa\,\vec e_1 = -6Fa\,\vec e_x$$

Inoltre

$$\frac{d\vec L_B}{dt}\cdot\vec e_y = \frac{d}{dt}\left(\vec L_B\cdot\vec e_y\right)$$

$$\vec L_B\cdot\vec e_y = I_B(\vec\omega)\cdot\vec e_y + \cancel{(G-B)\times m\vec v_B\cdot\vec e_y} \qquad \vec v_B \parallel \vec e_y$$

Determiniamo I_B con il Teo di Huygens-Steiner



$$[I_B]^{\mathcal B''} = [I_G]^{\mathcal B''} + m\begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

dove con (x,y,z) abbiamo indicato le coordinate di G r. a $(B,\mathcal B'')$.

$$[I_B]^{\mathcal B''} = ma^2\begin{bmatrix} \frac{16}{12} & & \\ & \frac{17}{12} & \\ & & \frac{1}{12} \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} 9a^2 & 0 & -\frac{a}{2}3a \\ 0 & \frac{37}{4}a^2 & 0 \\ -\frac{3}{2}a^2 & 0 & \frac{a^2}{4} \end{bmatrix} = ma^2\begin{bmatrix} \frac{31}{3} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{32}{3} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Allora

$$I_B(\vec{\omega}) = m a^2 \left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right] \begin{bmatrix} \frac{31}{3} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{32}{3} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\theta \cos\psi \\ -\dot\theta \sin\psi \\ \dot\psi \end{bmatrix} =$$

$$= m a^2 \left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right] \begin{bmatrix} \frac{31}{3} \cos\psi\,\dot\theta - \frac{3}{2}\dot\psi \\ -\frac{32}{3} \sin\psi\,\dot\theta \\ -\frac{3}{2}\cos\psi\,\dot\theta + \frac{1}{3}\dot\psi \end{bmatrix}$$

Quindi,

$$I_B(\vec{\omega}) = m a^2 \left[\left(\frac{31}{3}\cos\psi\,\dot\theta - \frac{3}{2}\dot\psi\right)\vec{i} - \frac{32}{3}\sin\psi\,\dot\theta\,\vec{j} + \left(\frac{1}{3}\dot\psi - \frac{3}{2}\cos\psi\,\dot\theta\right)\vec{k} \right]$$

$$\overset{(3.3)}{=} m a^2 \Big[\left(\frac{31}{3}\cos\psi\,\dot\theta - \frac{3}{2}\dot\psi\right)\left(\cos\psi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\psi\,\vec{e}_y + \sin\theta\sin\psi\,\vec{e}_z\right) +$$

$$- \frac{32}{3}\sin\psi\,\dot\theta \left(-\sin\psi\,\vec{e}_x + \cos\theta\cos\psi\,\vec{e}_y + \sin\theta\cos\psi\,\vec{e}_z\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{3}\dot\psi - \frac{3}{2}\cos\psi\,\dot\theta\right)\left(-\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z\right)\Big]$$

$$= m a^2 \Big\{ \left[\left(\frac{31}{3}\cos\psi\,\dot\theta - \frac{3}{2}\dot\psi\right)\cos\psi + \frac{32}{3}\sin^2\psi\,\dot\theta \right]\vec{e}_x +$$

$$+ \left[\left(\frac{31}{3}\cos\psi\,\dot\theta - \frac{3}{2}\dot\psi\right)\cos\theta\sin\psi - \frac{32}{3}\dot\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi - \sin\theta\left(\frac{1}{3}\dot\psi - \frac{3}{2}\cos\psi\,\dot\theta\right)\right]\vec{e}_y$$

$$+ \left[\left(\frac{31}{3}\cos\psi\,\dot\theta - \frac{3}{2}\dot\psi\right)\sin\theta\sin\psi - \frac{32}{3}\dot\theta\sin\theta\sin\psi\cos\psi + \left(\frac{1}{3}\dot\psi - \frac{3}{2}\cos\psi\,\dot\theta\right)\cos\theta\right]\vec{e}_z$$

$$I_B(\vec{\omega})\cdot\vec{e}_y = m a^2 \left[\cos\psi\,\dot\theta\left(-\frac{1}{3}\cos\theta\sin\psi + \frac{3}{2}\sin\theta\right) - \left(\frac{1}{3}\sin\theta + \frac{3}{2}\cos\theta\sin\psi\right)\dot\psi \right]$$

Dunque,

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_B\cdot\vec{e}_y\right) = \frac{d}{dt}\left(I_O(\vec{\omega})\cdot\vec{e}_y\right) =$$

$$= ma^2\Big[-\sin\psi\,\dot\psi\,\dot\theta\left(-\frac{1}{3}\cos\theta\sin\psi+\cancel{\frac{3}{2}\sin\theta}\right)+\cos\psi\,\ddot\theta\left(-\frac{1}{3}\cos\theta\sin\psi+\frac{3}{2}\sin\theta\right)+$$

(20.1) $$+\cos\psi\,\dot\theta\left(+\frac{1}{3}\sin\theta\,\dot\theta\sin\psi-\frac{1}{3}\cos\theta\cos\psi\,\dot\psi+\frac{3}{2}\cos\theta\,\dot\theta\right)+$$

$$-\left(\frac{1}{3}\cos\theta\,\dot\theta-\frac{3}{2}\sin\theta\,\cancel{\sin\psi}\,\dot\theta+\frac{3}{2}\cos\theta\cos\psi\,\dot\psi\right)\dot\psi-\left(\frac{1}{3}\sin\theta+\frac{3}{2}\cos\theta\sin\psi\right)\ddot\psi\Big]=$$

$$=ma^2\Big[\left(\frac{1}{3}\cos\theta\left(\sin^2\psi-\cos^2\psi\right)-\frac{1}{3}\cos\theta\right)\dot\psi\dot\theta+\cos\psi\left(\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{1}{3}\cos\theta\sin\psi\right)\ddot\theta+\cos\psi\left(\frac{1}{3}\sin\theta\sin\psi+\frac{3}{2}\cos\theta\right)\dot\theta^2$$
$$-\frac{3}{2}\cos\theta\cos\psi\,\dot\psi^2-\left(\frac{1}{3}\sin\theta+\frac{3}{2}\cos\theta\sin\psi\right)\ddot\psi\Big]$$

Allora, la (17.5) si scrive:

$$6a\cos\theta\,\Psi_x = -\frac{mga}{2}\cos\psi + ma^2\Big[-\frac{1}{3}\cos\theta\left(\cos 2\psi+1\right)\dot\psi\dot\theta+\cos\psi\left(\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{1}{3}\cos\theta\sin\psi\right)\ddot\theta$$

(20.2) $$+\cos\psi\left(\frac{1}{3}\sin\theta\sin\psi+\frac{3}{2}\cos\theta\right)\dot\theta^2-\frac{3}{2}\cos\theta\cos\psi\,\dot\psi^2-\left(\frac{1}{3}\sin\theta+\frac{3}{2}\cos\theta\sin\psi\right)\ddot\psi\Big]$$

Quindi, se $\cos\theta\neq 0 \iff \theta\neq\pm\pi/2$, si trova

(20.3) $$\Psi_x = -\frac{mg}{12}\,\frac{\cos\psi}{\cos\theta}+\frac{ma}{6\cos\theta}\Big[-\frac{1}{3}\cos\theta\left(1+\cos 2\psi\right)\dot\theta\dot\psi+\cos\psi\left(-\frac{1}{3}\cos\theta\sin\psi+\frac{3}{2}\sin\theta\right)\ddot\theta$$
$$+\left(\frac{1}{6}\sin\theta\sin 2\psi+\frac{3}{2}\cos\theta\right)\dot\theta^2-\frac{3}{2}\cos\theta\cos\psi\,\dot\psi^2-\left(\frac{1}{3}\sin\theta+\frac{3}{2}\cos\theta\sin\psi\right)\ddot\psi\Big]$$

Sostituendo nella (17.3), otteniamo

(20.4) $$\Phi_x = -\frac{ma}{2}\left(\cos\psi\,\dot\psi^2+\sin\psi\,\ddot\psi\right)+\frac{mg}{12}\,\frac{\cos\psi}{\cos\theta}+$$
$$-\frac{ma}{6}\Big[-\frac{2}{3}\cos^2\psi\,\dot\theta\dot\psi+\cos\psi\left(-\frac{1}{3}\sin\psi+\frac{3}{2}\mathrm{tg}\,\theta\right)\ddot\theta+\frac{1}{6}\left(\mathrm{tg}\,\theta\sin 2\psi+\frac{3}{2}\right)\dot\theta^2-\frac{3}{2}\cos\psi\,\dot\psi^2+$$
$$-\left(\frac{1}{3}\mathrm{tg}\,\theta+\frac{3}{2}\sin\psi\right)\ddot\psi\Big]$$