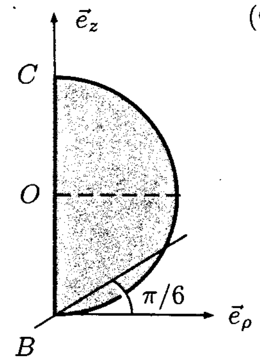
# Compito di Meccanica Razionale

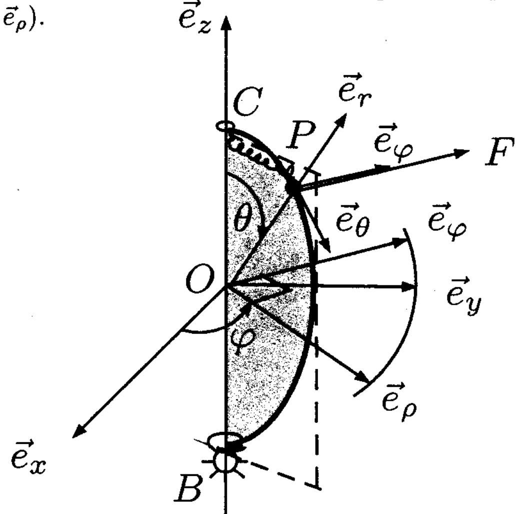
Trieste, 14 giugno 2019

(G. Tondo)




É dato un semidisco rigido e omogeneo, di massa $4m$ e raggio $R$.

**1)** Determinarne il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il punto $B$ e inclinato di $\frac{\pi}{6}$ rispetto all'asse $(B, \vec{e}_\rho)$.




Il semidisco è vincolato ad un asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$ mediante un anellino in $C$ e una cerniera sferica fissa in $B$, entrambi lisci. Sul semidisco, è vincolato a scorrere senza attrito un punto materiale $P$, di massa $m$, collegato a una molla, di costante elastica $c$, che ha l'altro estremo fissato nel punto $C$. Inoltre, su $P$ agisce una forza $F\vec{e}_\varphi$. Sul semidisco agisce una molla angolare di richiamo fissata in $B$ e di costante elastica $b$. Scelte come coordinate libere gli angoli $\varphi$ e $\theta$ di figura, si chiede di:

**STATICA.**

**2)** determinare le configurazioni di equilibrio del modello in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{cR}$;

**3)** determinare le reazioni vincolari esterne sul semidisco nei punti $C$ e $B$ all'equilibrio;

**DINAMICA.**

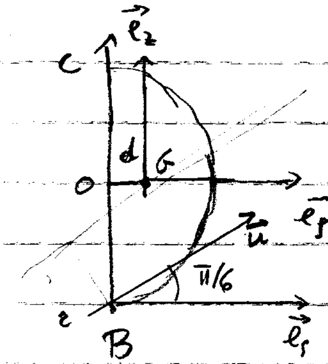
**4)** Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

**5)** linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e trovarne l'integrale generale;

**6)** calcolare le reazioni vincolari esterne sul semidisco nei punti $C$ e $B$ durante il moto in funzione del tempo.

Tema del 14/6/2019 1

(1.1) $\vec{x}_G = (G-O) = d\,\vec{e}_y$




dove, per il II teo di Guldino

(1.2) $d = \frac{4}{3\pi}R$

1) Il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse $(O,\vec{e}_y)$ si può calcolare come

(1.3) $I_r = \vec{u}\cdot I_B(\vec{u})$   $\vec{u}$: versore di r

Dunque, ci serve la matrice d'inerzia rispetto al punto B. Per calcolarla, usiamo il teo di H-S. Fissata la base $\mathcal{B}''' = (\vec{e}_y, \vec{e}_z, -\vec{e}_y)$, osserviamo che $(O,\mathcal{B}''')$ è una TPI(G). Allora

(1.4) $$[I_G]^{\mathcal{B}'''} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{bmatrix}$$

$$I_{11} = \frac{1}{4}(4m)R^2 = mR^2$$

$$I_{22} = \frac{1}{4}(4m)R^2 - 4m\,\overline{OG}^2$$
$$= mR^2 - 4m\frac{16}{9\pi^2}R^2$$
$$= mR^2\left(1-\frac{64}{9\pi^2}\right)$$

Dunque,

$$[I_B]^{\mathcal{B}'''} = [I_G]^{\mathcal{B}'''} + 4m\begin{bmatrix} R^2 & -dR & 0 \\ -dR & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2+R^2 \end{bmatrix}$$

(1.5) $$= \begin{bmatrix} I_{11}+4mR^2 & -4mdR & 0 \\ -4mdR & I_{22}+4md^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22}+4m(d^2+R^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5mR^2 & -\frac{16}{3\pi}mR^2 & 0 \\ -\frac{16}{3\pi}mR^2 & mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6mR^2 \end{bmatrix}$$

Allora, poiché il versore di $r$ è $\vec{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\vec{e_y} + \vec{e_z})$, risulta

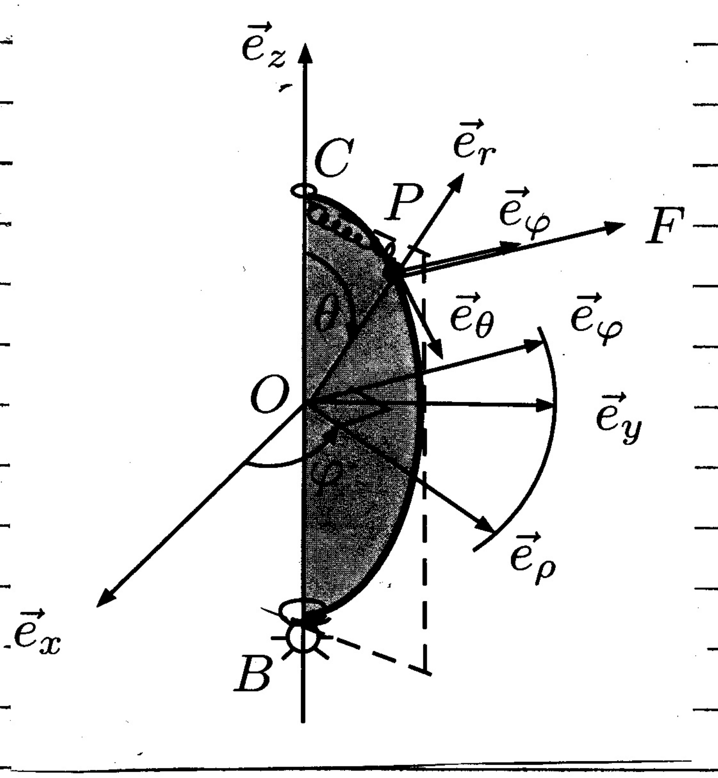
$$I_2 = \frac{1}{2}[\sqrt{3}, 1, 0]\; mR^2 \begin{bmatrix} 5 & -\frac{16}{3\pi} & 0 \\ -\frac{16}{3\pi} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} mR^2 \; [\sqrt{3}, 1, 0] \begin{bmatrix} 5\sqrt{3} - \frac{16}{3\pi} \\ -\frac{16\sqrt{3}}{3\pi} + 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} mR^2 \left( 15 - \frac{16}{3\pi}\sqrt{3} - \frac{16}{3\pi}\sqrt{3} + 1 \right) =$$

(1.6) $$= \frac{1}{4} mR^2 \left( 16 - 2 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3\pi} \right) = 4mR^2 \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{3}\pi} \right)$$

Il modello è formato da un rigido, il semidisco con asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$, e il punto materiale P vincolato all'anello. Con il metodo dei congelamenti successivi si deduce che il modello ha 2 g.l. Quindi può essere descritto dalle coordinate lagrangiane della figura




$\varphi \in \mathbb{R}$ , $0 \le \theta \le \pi$

Consideriamo le 3 basi:

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: "fissa"

$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: "intermedia" (solidale all'anello)

$(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$: solidale al punto P

$$(2.1)\begin{cases}\vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y\\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y\\ \vec{e}_z = \vec{e}_z\end{cases} \qquad (2.2)\begin{cases}\vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi\\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi\\ \vec{e}_z = \vec{e}_z\end{cases}$$

$$(2.3)\begin{cases}\vec{e}_\theta = \cos\theta\, \vec{e}_\rho - \sin\theta\, \vec{e}_z\\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi\\ \vec{e}_r = \sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z\end{cases} \qquad (2.4)\begin{cases}\vec{e}_\rho = \cos\theta\, \vec{e}_\theta + \sin\theta\, \vec{e}_r\\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi\\ \vec{e}_z = -\sin\theta\, \vec{e}_\theta + \cos\theta\, \vec{e}_r\end{cases}$$

Quindi,

$P - O = R\, \vec{e}_r = R\left(\sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z\right)$

$$P-B=(P-O)+(O-B) = R\vec{e}_r+R\vec{e}_z = R(\vec{e}_r+\vec{e}_z) = R(\sin\theta\,\vec{e}_\rho+(\cos\theta+1)\vec{e}_z)$$

$$P-C=(P-O)+(O-C) = R(\vec{e}_r-\vec{e}_z) = R(\sin\theta\,\vec{e}_\rho+(\cos\theta-1)\vec{e}_z)$$
$$|P-C|^2 = R^2[\sin^2\theta+(\cos\theta-1)^2] = 2R^2(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\varphi} = R\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = R\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\theta\,\vec{e}_\rho+\cos\theta\,\vec{e}_z) = R\left(\sin\theta\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi}\right) = R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$
$$\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\theta} = R\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = R\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\vec{e}_\rho+\cos\theta\,\vec{e}_z) = R(\cos\theta\,\vec{e}_\rho-\sin\theta\,\vec{e}_z) = R\,\vec{e}_\theta$$

La sollecitazione dovuta al peso e alle molle è conservativa, quindi ammette energia potenziale

$$V(\varphi,\theta) = -4m\vec{g}\cdot\vec{x}_G - m\vec{g}\cdot\vec{x}_P+\frac{1}{2}b\varphi^2+\frac{1}{2}c\,\overline{PC}^2$$
$$=\cancel{+4mg\vec{e}_z\cdot d\vec{e}_\rho} + mg\vec{e}_z\cdot R(\sin\theta\,\vec{e}_\rho\ \cos\theta\,\vec{e}_z)+\frac{1}{2}b\varphi^2+\frac{1}{\cancel{2}}c\,\cancel{2}R^2(\cancel{1}-\cos\theta)$$
$$\simeq (mgR-cR^2)\cos\theta+\frac{1}{2}b\varphi^2$$

Calcoliamo le componenti lagrangiane della forza $\vec{F}$ in P.

$$Q_\varphi^{(F)} = \vec{F}_P\cdot\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\varphi} = F\vec{e}_\varphi\cdot R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi = FR\sin\theta$$

$$Q_\theta^{(F)} = F\vec{e}_\varphi\cdot\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\theta} = F\vec{e}_\varphi\cdot R\vec{e}_\theta = 0$$

Dunque

$$\frac{\partial Q_\varphi^{(F)}}{\partial\theta} \neq \frac{\partial Q_\theta^{(F)}}{\partial\varphi} \Rightarrow \text{sollecitazione \underline{non} conservativa}$$

Inoltre

$$Q_\varphi^{(con)} = \frac{\partial(-V)}{\partial\varphi} = -b\varphi$$
$$Q_\theta^{(con)} = \frac{\partial(-V)}{\partial\theta} = R(mg-cR)\sin\theta$$

Allora 

(4.1) $Q_\varphi = -b\varphi + FR\sin\theta$

(4.2) $Q_\theta = R(mg - cR)\sin\theta$

e le equazioni pure di equilibrio sono

$$\begin{cases} -b\varphi + FR\sin\theta = 0 \\ (mg - cR)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

La II eq. pura di equilibrio ha soluzioni, posto $\lambda = \frac{mg}{cR}$

$\theta = 0$, $\theta = \pi$ $\forall \lambda$, $\forall\theta$ se $\lambda = 1$

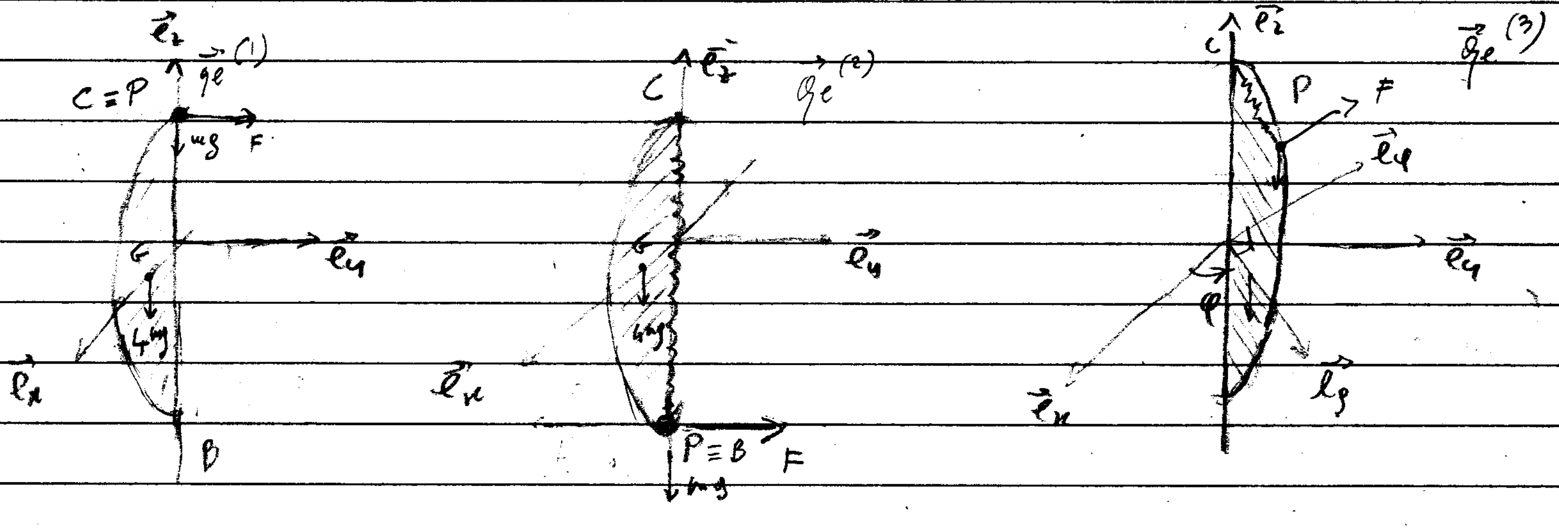
Sostituendo nella I eq. pura di equilibrio si trova

$$\varphi_e = \frac{FR}{b}\sin\theta_e$$

Dunque, le configurazioni di equilibrio $\vec{q}_e = (\varphi_e, \theta_e)$ sono

$\forall\lambda$ $\vec{q}_e^{\,(1)} = (0, 0)$, $\vec{q}_e^{\,(2)} = (0, \pi)$

se $\lambda = 1$ $\vec{q}_e^{\,(3)} = \left(\frac{FR}{b}\sin\theta_e, \theta_e\right)$ $\forall\theta_e \in\, ]-\pi, \pi[$



2) Reazioni esterne sul semidisco in C e B all'equilibrio. 

Sappiamo, poiché i vincoli sono non olonomi perfetti e bilateri, che la cerniera sferica in B e l'anellino in C esercitano l'insieme reattivo

$$\mathcal{L}^{(B)} = \{(B, \vec{\phi}), (C, \vec{\Psi})\} \quad \vec{\Psi}_C \cdot \vec{e}_z = 0$$

Quindi, abbiamo 5 incognite scalari. Scriviamo le ECS su tutto il modello.

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est, att)} + \vec{\phi}_B + \vec{\Psi}_C = \vec{0} \\ \vec{M}_B^{(est, att)} + (C-B) \times \vec{\Psi}_C = \vec{0} \end{cases}$$

La II ECS equivale a

$\vec{\Psi}_C \times (C-B) = \vec{M}_B^{(est, att)}$ le cui soluzioni sono

$$\vec{\Psi}_C = \frac{C-B}{|C-B|^2} \times \vec{M}_B^{(est, att)} + \cancel{f \vec{e}_z}$$

$$\vec{M}_B^{(est, att)} = (G-B) \times (-4mg\vec{e}_z) + (P-B) \times \left(\vec{F}^{(ext)} - mg\vec{e}_z\right) - b\varphi \vec{e}_z =$$

$$= (d\vec{e}_\rho + R\vec{e}_z) \times (-4mg\vec{e}_z) + R(\vec{e}_z + \vec{e}_z) \times (F\vec{e}_\varphi - mg\vec{e}_z) - b\varphi\vec{e}_z =$$

$$= 4mgd\vec{e}_\rho + R(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (1+\cos\theta)\vec{e}_z) \times \left[F\vec{e}_\varphi - mg\vec{e}_z\right) - b\varphi\vec{e}_z =$$

$$= 4mgd\vec{e}_\varphi + FR\sin\theta\,\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi - mgR\sin\theta\,\vec{e}_\rho \times \vec{e}_z + FR(1+\cos\theta)\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi +$$
$$- b\varphi\vec{e}_z$$

Dunque,

$$M_B^{(est,att)} = \underline{\hspace{3cm}} - 4mgd\,\vec{e}_\varphi + FR\sin\theta\,\vec{e}_z + mgR\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$- FR(1+\cos\theta)\,\vec{e}_\rho - b\varphi\,\vec{e}_z$$

(6.1) $$= -FR(1+\cos\theta)\,\vec{e}_\rho + mgR\left(\frac{16}{3\pi} + \sin\theta\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+ \left(FR\sin\theta - b\varphi\right)\vec{e}_z$$

Allora,

$$\vec{\Psi}_c = \frac{\vec{e}_z}{2R} \times \left[-FR(1+\cos\theta_e)\,\vec{e}_\rho + mgR\left(\frac{16}{3\pi} + \sin\theta_e\right)\vec{e}_\varphi + \left(FR\sin\theta_e - b\varphi_e\right)\vec{e}_z\right]$$

(6.2) $$= \frac{-1}{2\cancel{R}}\left[+F\cancel{R}(1+\cos\theta_e)\,\vec{e}_\varphi + mg\cancel{R}\left(\frac{16}{3\pi} + \sin\theta_e\right)\vec{e}_\rho\right]$$

Quindi,

$$\vec{\Psi}_c\big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = -F\,\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e^{(1)}} - mg\frac{8}{3\pi}\,\vec{e}_{\rho|\vec{q}_e^{(1)}} = -\left(F\,\vec{e}_y + mg\frac{8}{3\pi}\,\vec{e}_x\right)$$

$$\vec{\Psi}_c\big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = -mg\frac{8}{3\pi}\,\vec{e}_{\rho|\vec{q}_e^{(2)}} = -mg\frac{8}{3\pi}\,\vec{e}_x$$

$$\vec{\Psi}_c\big|_{\vec{q}_e^{(3)}} = -\frac{F}{2}(1+\cos\theta_e)\,\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e^{(3)}} - mg\left(\frac{8}{3\pi} + \frac{1}{2}\sin\theta_e\right)\vec{e}_{\rho|\vec{q}_e^{(3)}}$$

Dalla I ECS troviamo la $\vec{\phi}_B$:

$$\vec{\phi}_B = -\vec{R}^{(est,att)} - \vec{\psi}_C$$

$$\vec{R}^{(est,att)} = 4m\vec{g} + \vec{F}^{(foll)} + m\vec{g} = 5m\vec{g} + F\vec{e}_\varphi$$

$$= -5mg\vec{e}_z + F\vec{e}_\varphi$$

Quindi

$$\vec{\phi}_B = -F\vec{e}_\varphi + 5mg\,e_z$$

$$+\frac{1}{2}\left[F(1-\cos\theta_e)\vec{e}_\varphi + mg\left(\frac{16}{3\pi} + \sin\theta_e\right)\vec{e}_\rho\right] =$$

$$= \frac{1}{2}mg\left(\frac{16}{3\pi} + \sin\theta_e\right)\vec{e}_\rho + \frac{1}{2}F(-1+\cos\theta_e)\vec{e}_\varphi + 5mg\,\vec{e}_z$$

Dunque,

$$\vec{\phi}_{B|\vec{q}_e^{(1)}} = mg\frac{8}{3\pi}\,\vec{e}_{\rho|\vec{q}_e^{(1)}} + 5mg\vec{e}_z = mg\frac{8}{3\pi}\,\vec{e}_x + 5mg\,\vec{e}_z$$

$$\vec{\phi}_{B|\vec{q}_e^{(2)}} = -F\,\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e^{(2)}} + 5mg\vec{e}_z + mg\frac{8}{3\pi}\,\vec{e}_{\rho|\vec{q}_e^{(1)}} = mg\frac{8}{3\pi}\,\vec{e}_x - F\vec{e}_y + 5mg\vec{e}_z$$

$$\vec{\phi}_{B|\vec{q}_e^{(3)}} = \frac{F}{2}(-1+\cos\theta_e)\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e^{(3)}} + \frac{1}{2}mg\left(\frac{16}{3\pi} + \sin\theta_e\right)\vec{e}_{\rho|\vec{q}_e^{(3)}} + 5mg\,\vec{e}_z$$

4) Scriviamo le eq. di Lagrange non conservative. A tale scopo calcoliamo

$$K = K^{(an)} + K^{(P)} \qquad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$K^{(an)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot I_o(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\cdot I_o(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z\cdot I_o(\vec{e}_z)$$

$$= \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\, I_{oz}$$

dove

$$I_{oz} = \frac{1}{\cancel{4}}\left(\cancel{4}\, m R^2\right) \quad \text{(momento d'inerzia del semidisco rs. al suo diametro)}$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2}\, m\,|\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \vec{\omega}\times(P-O) = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z\times R\,\vec{e}_r$$

$$= R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + R\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$= R\left(\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$|\vec{v}_P|^2 = R^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

Quindi

$$K = \frac{1}{2}\, m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\, m R^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, m R^2\left[\left(1+\sin^2\theta\right)\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{\varphi} & \dot{\theta}\end{bmatrix} mR^2\begin{bmatrix}(1+\sin^2\theta) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$$

$EL_\varphi$ : $\dfrac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = mR^2(1+\sin^2\theta)\dot\varphi$ , $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = mR^2\left[(1+\sin^2\theta)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right]$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$mR^2\left[(1+\sin^2\theta)\ddot\varphi + \sin 2\theta\;\dot\theta\dot\varphi\right] \overset{(4.1)}{=} -b\varphi + FR\sin\theta$$

$EL_\theta$ : $\dfrac{\partial K}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta$ , $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) = mR^2\ddot\theta$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{mR^2}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2$$

$$mR^2\left(\ddot\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\;\dot\varphi^2\right) \overset{(4.2)}{=} R\,(mg - cR)\sin\theta$$

Donque, le 2 EL sont

$$(9.1)\quad \begin{cases} EL_\varphi & mR^2\left[(1+\sin^2\theta)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right] = -b\varphi + FR\sin\theta \\ EL_\theta & m\cancel{R^2}\left(\ddot\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2\right) = \cancel{R}(mg - cR)\sin\theta \end{cases}$$

5) Linearizzazione delle EL intorno agli equilibri

Poichè la sollecitazione è non conservativa, dobbiamo usare la formula

$$(10.1) \quad A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0 \quad , \quad \text{dove} \quad \vec{x} = \frac{\vec{q}(t)-\vec{q}_e}{\varepsilon}$$

$$A = A(\vec{q}_e) = mR^2 \begin{bmatrix} 1+\sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$C_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \Rightarrow \qquad C = -\begin{bmatrix} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Q_\theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{|\vec{q}_e} = -\begin{bmatrix} -b & FR\cos\theta_e \\ 0 & R(mg-CR)\cos\theta_e \end{bmatrix}$$

Allora, la (10.1) si scrive

$$mR^2 \begin{bmatrix} 1+\sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -FR\cos\theta_e \\ 0 & -R(mg-CR)\cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cioè,

$$\begin{cases} mR^2(1+\sin^2\theta_e)\ddot{x}_1 + b\,x_1 - FR\cos\theta_e\, x_2 = 0 \\ \\ mR^2\ddot{x}_2 - R(mg-CR)\cos\theta_e\, x_2 = 0 \end{cases}$$

Dunque,

$$\vec{q}_e^{\,(1)} = (0,0) \qquad \begin{cases} mR^2\ddot{x}_1 + b\,x_1 - FR\,x_2 = 0 \\ mR\,\ddot{x}_2 - (mg - CR)\,x_2 = 0 \end{cases} \tag{11.1}$$

$$\vec{q}_e^{\,(2)} = (0,\pi) \qquad \begin{cases} mR^2\ddot{x}_1 + b\,x_1 + FR\,x_2 = 0 \\ mR\,\ddot{x}_2 + (mg - CR)\,x_2 = 0 \end{cases} \tag{11.2}$$

$$x\,\lambda=1 \quad \vec{q}_e^{\,(3)} = \left(\frac{FR}{b}\sin\theta_e,\ \theta_e\right) \qquad \begin{cases} mR^2(1+\sin^2\theta_e)\,\ddot{x}_1 + b\,x_1 - FR\cos\theta_e\, x_2 = 0 \\ mR\,\ddot{x}_2 = 0 \end{cases} \tag{11.3}$$

Calcolo dell'integrale generale del sistema (11.1)

La II della (11.1) equivale a

$$(11.4)\quad \ddot{x}_2 + \frac{C}{m}(1-\lambda) + x_2 = 0 \iff x_2(t) = \begin{cases} \lambda<1 & a_2\cos\left(\sqrt{\frac{C}{m}(1-\lambda)}\,t + \alpha_2\right) \quad (11.3a) \\ \lambda=1 & x_2 = x_{20} + v_{20}t \\ \lambda>1 & a_2\cosh\left(\sqrt{\frac{C}{m}(\lambda-1)}\,t + \alpha_2\right) \quad (11.3b) \end{cases} \quad a_2, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Sostituendo nella I della (11.1) si ottiene

$$(11.5)\quad \ddot{x}_1 + \frac{b}{mR^2}x_1 = \frac{F}{mR}x_2(t) \qquad \text{dove } x_2(t) = \begin{cases} \lambda<1 & (11.3a) \\ \lambda=1 & x_2 = x_{20} + v_{20}t \\ \lambda>1 & (11.3b) \end{cases}$$

L'integrale generale dell'omogenea associata alla (11.5) è

$$(11.6)\quad \bar{x}_1(t) = a_1\cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2}}\,t + \alpha_1\right)$$

Inoltre, una soluzione particolare della (11.5) si può 
trovare con il metodo delle funzioni simili. Tentiamo, se $\lambda<1$, la soluzione di prova oscillante:

$$(12.1)\qquad x_p(t) = a_p \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_p\right) \qquad a_p, d_p \in \mathbb{R}$$

$$\dot{x}_p(t) = -a_p \sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_p\right)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -a_p \frac{c}{m}(1-\lambda)\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_p\right)$$

Sostituendo nella (11.5) si trova

$$-a_p \frac{c}{m}(1-\lambda)\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_p\right) + \frac{b}{mR^2}\,a_p \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_p\right) = \frac{F a_2}{mR}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_2\right)$$

Quindi, la (12.1) è soluzione di (11.5) se le costanti $(a_p, d_p)$ soddisfano le condizioni

$$a_p\left(-\frac{c}{m}(1-\lambda) + \frac{b}{mR^2}\right) = \frac{F a_2}{mR}, \qquad d_p = d_2,$$

cioè se

$$(12.2)\qquad \begin{cases} a_p = \dfrac{F a_2}{\cancel{m}\cancel{R}}\,\dfrac{\cancel{m}R^{\cancel{2}}}{-R^2 c(1-\lambda) + b} = \dfrac{F R a_2}{b - cR^2(1-\lambda)} \qquad b \neq cR^2(1-\lambda) \\ d_p = d_2 \end{cases}$$

Quindi, l'integrale generale della (11.5) è

$$(12.3)\qquad x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2}}\,t + d_1\right) + \frac{F R a_2}{b - cR^2(1-\lambda)}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_2\right),$$

dove $(a_1, d_1, a_2, d_2)$ sono costanti dipendenti dalle condizioni iniziali. Dunque, l'integrale generale del sistema (11.1) è

$$(12.4)\ \lambda<1 \qquad \begin{cases} x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2}}\,t + d_1\right) + \dfrac{F R a_2}{b - cR^2(1-\lambda)}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_2\right) \\ x_2(t) = a_2 \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t + d_2\right) \end{cases}$$

Se, invece, $\lambda > 1$, proviamo con la funzione iperbolica:

$$(12.5) \quad x_p(t) = a_p \cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\, t + \alpha_p\right) \qquad a_p, \alpha_p \in \mathbb{R}$$

$$\dot{x}_p(t) = a_p \sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)} \sinh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\, t + \alpha_p\right)$$

$$\ddot{x}_p(t) = a_p \frac{c}{m}(\lambda-1) \cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\, t + \alpha_p\right)$$

Sostituendo nella (11.5) si trova

$$a_p \frac{c}{m}(\lambda-1)\cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\, t+\alpha_p\right) + \frac{b}{mR^2} a_p \cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\, t+\alpha_p\right) = \frac{F}{mR} a_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\, t+\alpha_2\right)$$

Quindi, la (12.5) è soluzione della (11.5) per $\lambda > 1$, se

$$a_p\left(\frac{c(\lambda-1)}{m} + \frac{b}{mR^2}\right) = \frac{F a_2}{mR}, \qquad \alpha_p = \alpha_2$$

cioè se

$$(12.6) \quad \begin{cases} a_p = \dfrac{F a_2}{mR} \dfrac{mR^2}{R^2 c(\lambda-1)+b} = \dfrac{F R a_2}{b + cR^2(\lambda-1)} \\ \alpha_p = \alpha_2 \end{cases}$$

Quindi, l'integrale generale del sistema (11.1), per $\lambda > 1$, è

$$(12.7) \quad \begin{cases} x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\dfrac{b}{mR^2}}\, t+\alpha_1\right) + \dfrac{FR\, a_2}{b + cR^2(\lambda-1)} \cosh\left(\sqrt{\dfrac{c}{m}(\lambda-1)}\, t+\alpha_p\right) \\ x_2(t) = a_2 \cosh\left(\sqrt{\dfrac{c}{m}(\lambda-1)}\, t+\alpha_2\right) \end{cases}$$

con $(a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2)$ costanti dipendenti dalle condizioni iniziali.

Seguiamo un'analoga procedura per il calcolo dell'integrale generale del sistema (11.2). La II delle (11.2) fornisce

$$(13.1)\qquad \ddot{x}_2 + \frac{c}{m}(\lambda-1)x_2 = 0 \iff x_2(t) = \begin{cases} \lambda>1 & = b_2\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_2\right) \\ \lambda<1 & = b_2\cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t+\beta_2\right) \end{cases}$$

Sostituendo nella I delle (11.2) si ottiene

$$(13.2)\qquad \ddot{x}_1 + \frac{b}{mR^2}x_1 = -\frac{FR}{mR^2}x_2(t) \quad \text{dove } x_2(t) = \begin{cases} \lambda>1 & b_2\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_2\right) \\ \lambda<1 & b_2\cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\,t+\beta_2\right) \end{cases}$$

che ha come integrale generale dell'omogenea associata ancora la (11.6)

Cerchiamo una soluzione particolare della (13.2) per $\lambda>1$

$$(13.3)\qquad x_p(t) = b_p\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_p\right)$$

$$\dot{x}_p(t) = -b_p\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_p\right)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -b_p\frac{c}{m}(\lambda-1)\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_p\right)$$

Sostituendo nella (13.2) si trova

$$-b_p\frac{c}{m}(\lambda-1)\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_p\right) + \frac{b}{mR^2}b_p\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_p\right) = -\frac{Fb_2}{mR}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_2\right)$$

Quindi, la (13.3) è soluzione della (13.2) se le costanti $(b_p, \beta_p)$ soddisfano

$$b_p\left(-\frac{c}{m}(\lambda-1) + \frac{b}{mR^2}\right) = -\frac{Fb_2}{mR}, \qquad \beta_p = \beta_2$$

Dunque,

$$(13.4)\qquad b_p = -\frac{Fb_2}{mR}\,\frac{mR^2}{-c(\lambda-1)R^2+b} = -\frac{FR\,b_2}{b-c(\lambda-1)R^2}$$

Quindi, l'integrale generale della (11.2) è, per $\lambda>1$,

$$(13.5)\qquad \begin{cases} x_1(t) = a_1\cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2}}\,t+\alpha_1\right) - \frac{FR\,b_2}{b-c(\lambda-1)R^2}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_2\right) \\ x_2(t) = b_2\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda-1)}\,t+\beta_2\right) \end{cases}$$

Analogamente, si può costruire l'integrale generale del sistema (11.2) per $\lambda < 1$. Il risultato è

(13.6)
$$\begin{cases} x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2}}\, t + \alpha_1\right) - \frac{FR}{b + c(1-\lambda)R^2} \cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\, t + \beta_2\right) \\ x_2(t) = b_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1-\lambda)}\, t + \beta_2\right) \end{cases}$$

Ora, calcoliamo l'integrale generalizzato delle eq. linearizzate, per $\lambda = 1$, cioè delle (11.3).
La II delle (11.3) è

(13.7)
$$\ddot{x}_2 = 0 \iff x_2(t) = v_{20}\, t + x_{20} \qquad (x_{20}, v_{20}) \in \mathbb{R}^2$$

L'integrale generale dell'omogenea associata alla I delle (11.3) è

(13.8)
$$\bar{x}_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2(1+\sin^2\theta_e)}}\, t + \alpha_1\right) \qquad (a_1, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$$

Resta da trovare una soluzione particolare di

(13.9)
$$mR^2(1+\sin^2\theta_e)\, \ddot{x}_1 + b\, x_1 = FR\cos\theta_e\, (v_{20}\, t + x_{20})$$

Proviamo una funzione simile $x_p(t) = c_1 t + c_2$, che sostituita in (13.9)

$$b(c_1 t + c_2) = FR\cos\theta_e\, (v_{20}\, t + x_{20}).$$

Allora, una soluzione particolare è $x_p(t) = \frac{FR\cos\theta_e}{b}(v_{20}\, t + x_{20})$
e l'integrale generale del sistema (11.3)

(13.10)
$$\begin{cases} x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2(1+\sin^2\theta_e)}}\, t + \alpha_1\right) + \frac{FR\cos\theta_e}{b}(v_{20}\, t + x_{20}) \\ x_2(t) = v_{20}\, t + x_{20} \end{cases}$$

6) Reazioni vincolari della cerniera sferica in B e dell'anellino in C, nel 

le ECD su tutto il modello si scrivono:

$$(14.1)\quad \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\Phi}'_B + \vec{\Psi}'_C = 4m\,\vec{a}_G + m\,\vec{a}_P$$

$$(14.2)\quad \vec{M}_B^{(est,att)} + (C-B)\times\vec{\Psi}'_C = \frac{d}{dt}\vec{L}_B + \cancel{\vec{v}_B}\times m\vec{v}_G$$

Calcoliamo il momento angolare di tutto il modello rs. a B.

$$\vec{L}_B = \vec{L}_B^{(sdisco)} + \vec{L}_B^{(P)}$$

$$\vec{L}_B^{(sdisco)} = I_B(\vec{\omega}) = I_B(\dot\varphi\,\vec{e}_z) = \dot\varphi\, I_B(\vec{e}_z) \overset{(1.5)}{=} \dot\varphi\left(-\frac{16}{3\pi}mR^2\vec{e}_\rho + mR^2\vec{e}_z\right)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_B^{(sdisco)} = \ddot\varphi\left(-\frac{16}{3\pi}mR^2\vec{e}_\rho + mR^2\vec{e}_z\right) - \frac{16}{3\pi}mR^2\dot\varphi^2\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{L}_B^{(P)} = (P-B)\times m\vec{v}_P = R(\vec{e}_r + \vec{e}_z)\times mR\left(\dot\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= mR^2\left(\dot\theta\,\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot\varphi\,\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi + \dot\theta\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot\varphi\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= mR^2\Big(\dot\theta\,\vec{e}_\varphi - \sin\theta\,\dot\varphi\,\vec{e}_\theta + \dot\theta\,\vec{e}_z\times(\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_z) + {} - \sin\theta\,\dot\varphi\,\vec{e}_\rho\Big)$$

$$= mR^2\Big(\dot\theta\,\vec{e}_\varphi - \sin\theta\,\dot\varphi(\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_z) + \dot\theta\cos\theta\,\vec{e}_\varphi - \sin\theta\,\dot\varphi\,\vec{e}_\rho\Big)$$

$$= mR^2\Big(-\sin\theta\,\dot\varphi(\cos\theta+1)\,\vec{e}_\rho + \dot\theta(\cos\theta+1)\,\vec{e}_\varphi + \sin^2\theta\,\dot\varphi\,\vec{e}_z\Big)$$

Comunque, si può notare che

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_B^{(P)} = \cancel{(\vec{v}_P - \vec{v}_B)\times m\vec{v}_P} + (P-B)\times m\vec{a}_P \overset{(16.5)}{=} mR\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (1+\cos\theta)\,\vec{e}_z\right)\times$$
$$R\Big\{\left[\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta(\dot\theta^2+\dot\varphi^2)\right]\vec{e}_\rho + \left(\sin\theta\,\ddot\varphi + 2\cos\theta\,\dot\varphi\dot\theta\right)\vec{e}_\varphi - \left(\sin\theta\,\ddot\theta + \cos\theta\,\dot\theta^2\right)\vec{e}_z\Big\}$$
$$= mR^2\Big\{\sin\theta\left(\sin\theta\,\ddot\varphi + 2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right)\vec{e}_z + \sin\theta\left(\sin\theta\,\ddot\theta + \cos\theta\,\dot\theta^2\right)\vec{e}_\varphi +$$
$$(1+\cos\theta)\left(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta(\dot\theta^2+\dot\varphi^2)\right)\vec{e}_\varphi - (1+\cos\theta)\left(\sin\theta\,\ddot\varphi + 2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right)\vec{e}_\rho\Big\}$$

Dunque,

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_B = mR^2\left[-(1+\cos\theta)(\sin\theta\,\ddot{\varphi}+2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi})-\frac{16}{3\pi}mR^2\ddot{\varphi}\right]\vec{e}_\rho +$$

$$+\, mR^2\left[(1+\cos\theta)(\ddot{\theta}-\sin\theta\,\dot{\varphi}^2)-\sin\theta\,\dot{\theta}^2-\frac{16}{3\pi}\dot{\varphi}^2\right]\vec{e}_\varphi$$

$$+\, mR^2\left[\sin 2\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi}+(\sin^2\theta+1)\ddot{\varphi}\right]\vec{e}_z$$

Allora, risolvendo la (14.2) rsp. a $\vec{\Psi}'_c$ si trova

$$\vec{\Psi}'_c = \frac{C-B}{|C-B|^2}\times\left(\vec{M}_B^{(ext,att)}-\frac{d\vec{L}_B}{dt}\right)+\cancel{f}\,\vec{e}_z =$$

$$= \frac{\vec{e}_z}{2R}\times\Big\{-FR(1+\cos\theta)\vec{e}_\rho + mgR\left(\frac{16}{3\pi}+\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$- mR^2\left[(1+\cos\theta)(\sin\theta\,\ddot{\varphi}+2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi})-\frac{16}{3\pi}\ddot{\varphi}\right]\vec{e}_\rho +$$

$$- mR^2\left[(1+\cos\theta)(\ddot{\theta}-\sin\theta\,\dot{\varphi}^2)-\sin\theta\,\dot{\theta}^2-\frac{16}{3\pi}\dot{\varphi}^2\right]\vec{e}_\varphi\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2R}\Big\{\left[-FR(1+\cos\theta) - mR^2\left[(1+\cos\theta)\sin\theta\,\ddot{\varphi}+2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi}+\frac{16}{3\pi}\ddot{\varphi}\right]\right]\vec{e}_\varphi$$

$$\left[-mg\left(\frac{16}{3\pi}+\sin\theta\right) + mR^2\left[(1+\cos\theta)(\ddot{\theta}-\sin\theta\,\dot{\varphi}^2)-\sin\theta\,\dot{\theta}^2-\frac{16}{3\pi}\dot{\varphi}^2\right]\right]\vec{e}_\rho\Big\}$$

Utilizziamo ora la (14.1) per calcolare $\vec{\Phi}'_B$. A tale scopo, calcoliamo $\vec{a}_P$ considerando il moto di P relativo alla terna mobile $(O, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$.

(16.1) $$\vec{a}_P = \vec{a}_P^{(rel)} + \vec{a}_P^{(tr)} + \vec{a}_P^{(Cor)}$$

(16.2) $$\vec{a}_P^{(rel)} = R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r = R\left[\ddot{\theta}\left(\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_z\right) - \dot{\theta}^2\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right)\right]$$

(16.3) $$\vec{a}_P^{(tr)} = \dot{\vec{\omega}}\times(P-O) + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times(P-O)\right)$$

$$= \ddot{\varphi}\,\vec{e}_z\times R\,\vec{e}_r + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z\times\left(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\times R\,\vec{e}_r\right)$$

$$= R\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z\times\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$= R\sin\theta\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - R\,\dot{\varphi}^2\sin\theta\,\vec{e}_\rho$$

(16.4) $$\vec{a}_P^{(Cor)} = 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}_P^{(rel)} = 2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\times R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = 2R\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi$$

(16.5) $$\vec{a}_P = R\Big[\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\right)\right)\vec{e}_\rho + \left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi - \left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_z\Big]$$

Inoltre,

$$\vec{a}_G = \frac{d}{dt}\vec{v}_G = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3\pi}R\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right) = \frac{4}{3\pi}R\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\rho\right)$$

Dunque,

$$\vec{\Phi}'_B = -\vec{R}^{(est,B)} - \vec{\Phi}'_C + \frac{16\,m\,R}{3\pi}\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\rho\right) +$$

$$+ mR\Big[\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\right)\right)\vec{e}_\rho + \left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi - \left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_z\Big]$$

Quindi,

$$\vec{\Phi}'_B = \Big\{ \frac{mg}{2}\left(\frac{16}{3\pi} + \sin\theta\right) - \frac{mR}{2}(1+\cos\theta)\ddot{\theta} + mR\left[(-1+\cos\theta\sin\theta) - \frac{16}{3\pi}\right]\dot{\varphi}^2 +$$

$$- \frac{1}{2} mR \sin\theta\, \dot{\theta}^2 + \frac{8}{3\pi} mR\, \dot{\varphi}^2 \Big\} \vec{e}_\rho +$$

$$+ \Big\{ \frac{F}{2}(-1+\cos\theta) + mR\left[\frac{1}{2}(3+\cos\theta)\sin\theta\,\dot{\varphi} + \frac{16}{3\pi}\right]\ddot{\varphi} + mR\left(3\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{8}{3\pi}\ddot{\varphi}\right) \Big\} \vec{e}_\varphi$$

$$+ \left[5mg - mR\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\right] \vec{e}_z$$