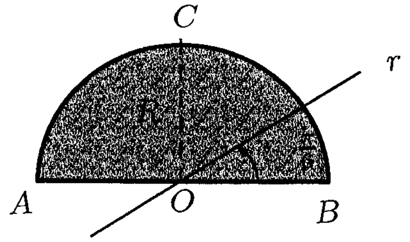
Compito di Meccanica Razionale

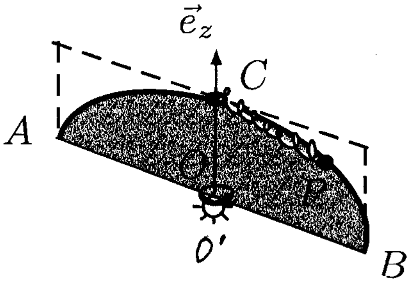
Trieste, 9 settembre 2019

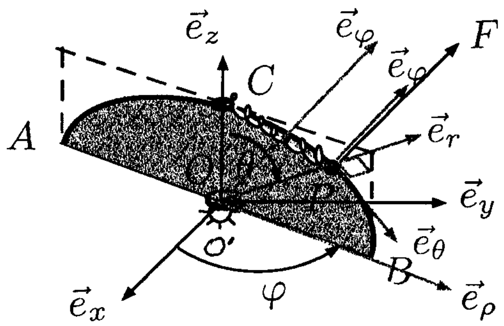
(G. Tondo)



È dato un semidisco rigido omogeneo, di massa $3m$ e raggio R .

1) Determinarne il baricentro e il momento d'inerzia rispetto all'asse r passante per il punto O e inclinato di $\frac{\pi}{6}$ rispetto al vettore $B - O$.





Il semidisco è vincolato ad un asse fisso verticale $(O', \vec{e}_z)$ mediante una cerniera sferica liscia fissata in $O \equiv O'$ e un anellino in C. Sul semidisco, è vincolato a scorrere senza attrito un punto materiale P, di massa m, collegato a una molla, di costante elastica c, che ha l'altro estremo fissato nel punto C del semidisco. Inoltre, su P agisce una forza $F\vec{e}_\varphi$. Infine, sul semidisco agisce una molla angolare di richiamo fissata in O e di costante elastica b. Scelte come coordinate libere gli angoli di figura, $\varphi \in \mathbb{R}$ e $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, si chiede di:

STATICA.

2) determinare le configurazioni di equilibrio del modello in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{cR}$;

3) determinare l'insieme delle reazioni vincolari esterne sul semidisco nei punti O e C, all'equilibrio;

DINAMICA.

4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

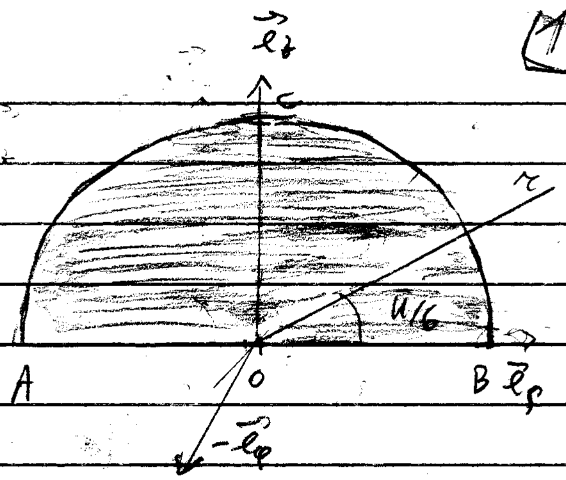
5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e calcolare l'integrale generale intorno a una sola configurazione di equilibrio (a propria scelta);

6) calcolare le reazioni vincolari del semidisco sul punto materiale P durante il moto.

Tema del 9/9/2019

1

Dal II Teorema di Guldino segue che:



(1.1) $\vec{x}_G = G - O = \frac{4}{3\pi} R \vec{e}_z$

1) Il momento d'inerzia del semidisco risp. all'asse $(O, \vec{r})$ si può calcolare come

(1.3) $I_r = \vec{u} \cdot I_O(\vec{u})$ $\quad\vec{u}$: versore di r

Dunque, ci serve la matrice d'inerzia rispetto al punto O. Per calcolarla, fissiamo la base $\mathcal{B}''' = (\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho, \vec{e}_2 = \vec{e}_z, \vec{e}_3 = -\vec{e}_\varphi)$ e osserviamo che $(O, \mathcal{B}''')$ è una TPI(O) per ragioni di simmetria materiale.

(1.4) $\left[I_O\right]^{\mathcal{B}'''} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{bmatrix}$

$I_{11} = \frac{1}{4}(3m)R^2$

$I_{22} = I_{11} = \frac{3}{4} m R^2$

$I_{33} = I_{11} + I_{22} = 2 I_{11} = \frac{3}{2} m R^2$

Dunque,

(1.5) $\left[I_O\right]^{\mathcal{B}'''} = m R^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = 3 m R^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

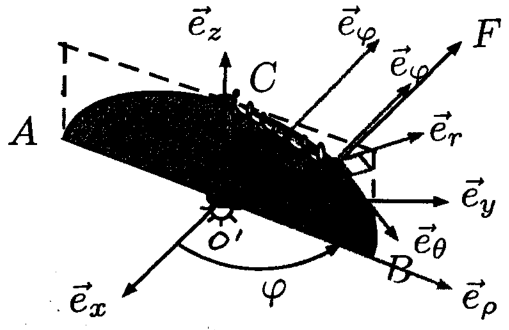
Allora, poiché il versore di r è $\vec{u} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\vec{e}_y + \vec{e}_z\right)$, risulta

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3}, 1, 0\right] 3mR^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{3}{4} mR^2 \left[\sqrt{3}, 1, 0\right] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{3}{4} mR^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} mR^2$$

Il modello è formato da un rigido, il semidisco con asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$, e il punto materiale P vincolato al semidisco. Con il metodo dei congelamenti successivi si deduce che il modello ha 2 g.l. Quindi può essere descritto dalle coordinate lagrangiane della figura



$$\varphi \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Consideriamo le 3 basi:

$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: "fissa"

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: "intermedia" (solidale all'anello)

$\mathcal{B}'' = (\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$: solidale al punto P

$$(2.1)\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad (2.2)\begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(2.3)\begin{cases} \vec{e}_\theta = \cos\theta\, \vec{e}_\rho - \sin\theta\, \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_r = \sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z \end{cases} \qquad (2.4)\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\, \vec{e}_\theta + \sin\theta\, \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = -\sin\theta\, \vec{e}_\theta + \cos\theta\, \vec{e}_r \end{cases}$$

Quindi,

$$P - O = R\, \vec{e}_r = R\left(\sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z\right)$$

$$P-O = R\,\vec{e}_r$$

$$P-C = (P-O)+(O-C) = R(\vec{e}_r-\vec{e}_z) = R(\sin\theta\,\vec{e}_\rho+(\cos\theta-1)\vec{e}_z)$$

$$|P-C|^2 = R^2[\sin^2\theta+(\cos\theta-1)^2] = 2R^2(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\varphi} = R\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = R\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\theta\,\vec{e}_\rho+\cos\theta\,\vec{e}_z) = R\left(\sin\theta\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi}\right) = R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\theta} = R\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = R\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\vec{e}_\rho+\cos\theta\,\vec{e}_z) = R(\cos\theta\,\vec{e}_\rho-\sin\theta\,\vec{e}_z) = R\,\vec{e}_\theta$$

La sollecitazione dovuta al peso e alla molla è conservativa, quindi ammette energia potenziale

$$V(\varphi,\theta) = -3m\vec{g}\cdot\vec{x}_G - m\vec{g}\cdot\vec{x}_P + \frac{1}{2}b\varphi^2+\frac{1}{2}c\,\overline{PC}^2$$

$$= \cancel{3mg\vec{e}_z\cdot\frac{4R}{3\pi}\vec{e}_z} + mg\vec{e}_z\cdot R(\sin\theta\,\vec{e}_\rho\,\cos\theta\,\vec{e}_z)+\frac{1}{2}b\varphi^2+\frac{1}{\cancel{2}}c\,\cancel{2}R^2(\cancel{1}-\cos\theta)$$

$$\simeq (mgR-cR^2)\cos\theta+\frac{1}{2}b\varphi^2$$

Calcoliamo le componenti lagrangiane della forza $\vec{F}$ in P.

$$Q_\varphi^{(fol)} = \vec{F}_P\cdot\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\varphi} = F\,\vec{e}_\varphi\cdot R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi = FR\sin\theta$$

$$Q_\theta^{(fol)} = F\,\vec{e}_\varphi\cdot\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\theta} = F\,\vec{e}_\varphi\cdot R\,\vec{e}_\theta = 0$$

Dunque

$$\frac{\partial Q_\varphi^{(fol)}}{\partial\theta} \neq \frac{\partial Q_\theta^{(fol)}}{\partial\varphi} \Rightarrow \text{sollecitazione } \underline{\text{non}} \text{ conservativa}$$

Inoltre

$$Q_\varphi^{(con)} = \frac{\partial(-V)}{\partial\varphi} = -b\varphi$$

$$Q_\theta^{(con)} = \frac{\partial(-V)}{\partial\theta} = R(mg-cR)\cdot\sin\theta$$

Allora

(4.1) $Q_\varphi = -b\varphi + FR\sin\theta$

(4.2) $Q_\theta = R(mg - cR)\sin\theta$

e le equazioni pure di equilibrio sono

$$\begin{cases} -b\varphi + FR\sin\theta = 0 \\ (mg - cR)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

La II eq. pura di equilibrio ha soluzioni, posto $\lambda = \frac{mg}{cR}$,

$\theta = 0 \quad \forall\lambda \quad , \quad \forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ se $\lambda = 1$.

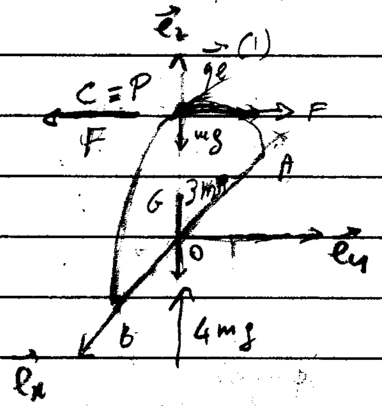
Sostituendo nella I eq. pura di equilibrio si trova

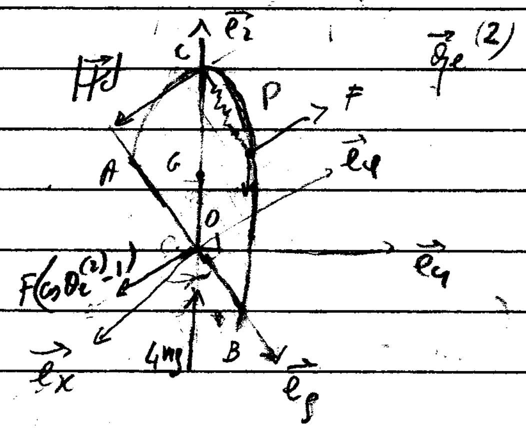
$$\varphi_e = \frac{FR}{b}\sin\theta_e$$

Dunque, le configurazioni di equilibrio $\vec{q_e} = (\varphi_e, \theta_e)$ sono

$\forall\lambda \quad \vec{q_e}^{(1)} = (0, 0)$

se $\lambda = 1 \quad \vec{q_e}^{(2)} = \left(\frac{FR}{b}\sin\theta_e, \theta_e\right) \quad \forall\theta_e \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$





2) Reazioni esterne sul semidisco in O all'equilibrio.

Sappiamo, poiché i vincoli sono non olonomi fisici e bilateri, che la cerniera sferica in O e l'anellino in C esercitano le reazioni vincolari

$$(5.1) \qquad \mathcal{L} = \{(O, \phi), (C, \psi)\} \text{ con}$$

$$(5.2) \qquad \vec{\psi}_C \cdot \vec{e}_z$$

Quindi, abbiamo 5 incognite scalari. Scriviamo le ECS su tutto il modello

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est, att)} + \vec{\phi}_O + \vec{\psi}_C = \vec{0} \\ \vec{M}_O^{(est, att)} + (C-O) \times \vec{\psi}_C = \vec{0} \end{cases}$$

La II ECS equivale a (5.2)

$$\vec{\psi}_C \times (C-O) = \vec{M}_O^{(est, att)} \iff \vec{\psi}_C = \frac{C-O}{|C-O|^2} \times \vec{M}_O^{(est, att)} + \cancel{\lambda \vec{e}_z}$$

dove

$$\vec{M}_O^{(est, att)} = \cancel{(G-O) \times (-3mg\vec{e}_z)} + (P-O) \times (\vec{F}^{(\ldots)} - mg\,\vec{e}_z) - b\varphi\,\vec{e}_z =$$

$$= R\,\vec{e}_r \times (F\vec{e}_\varphi - mg\,\vec{e}_z) - b\varphi\,\vec{e}_z =$$

$$= R\,\vec{e}_r \times ((-mg)\vec{e}_z + F\vec{e}_\varphi) - b\varphi\,\vec{e}_z =$$

$$= R\left[-(-mg)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - F\,\vec{e}_\theta\right] - b\varphi\,\vec{e}_z$$

Dunque,

$$M_O^{(est,att)} = R\left[mg \sin\theta \,\vec{e}_\varphi - F\left(\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_z\right)\right] - b\varphi\,\vec{e}_z$$

$$(6.1) \quad = -FR\cos\theta\,\vec{e}_\rho + R(mg)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \left(FR\sin\theta - b\varphi\right)\vec{e}_z$$

Allora,

$$\vec{\Psi}_c = \frac{\vec{e}_z}{R} \times \left[-FR\cos\theta\;\vec{e}_\rho + mgR\sin\theta\;\vec{e}_\varphi + \left(FR\sin\theta - b\varphi\right)\vec{e}_z\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{R}}\left[-F\cancel{R}\cos\theta_e\,\vec{e}_{\varphi}\big|_{\vec{q}_e} - \cancel{R}(mg)\sin\theta_e\;\vec{e}_{\rho}\big|_{\vec{q}_e}\right]$$

Quindi,

$$\vec{\Psi}_c\big|_{\vec{q}_e}(1) = -F\;\vec{e}_{\varphi}\big|_{\vec{q}_e(1)} = -F\,\vec{e}_y$$

$$\vec{\Psi}_c\big|_{\vec{q}_e}(2) = -\left(F\cos\theta_e^{(2)}\,\vec{e}_{\varphi}\big|_{\vec{q}_e(2)} + mg\sin\theta_e^{(2)}\,\vec{e}_{\rho}\big|_{\vec{q}_e(2)}\right) \qquad \lambda = 1$$

Dalla I ECS troviamo la ϕ_0:

$$(7.1)\quad \vec{\phi}_0 = -\vec{\Psi}_c - \vec{R}^{(ext,att)}$$

$$(7.2)\quad \vec{R}^{(ext,att)} = 3m\vec{g} + \text{—} + \vec{F}^{(folle)} + m\vec{g} = 4m\vec{g} + F\vec{e}_\varphi$$

$$= -4mg\vec{e}_z + F\vec{e}_\varphi$$

Quindi

$$\vec{\phi}_0 = \left(-F\vec{e}_\varphi + 4mg\vec{e}_z + mg\sin\theta_e\vec{e}_\rho + F\cos\theta\vec{e}_\varphi\right)\Big|_{\vec{q}_e}$$

$$= \left[F(\cos\theta - 1)\vec{e}_\varphi + mg\sin\theta\vec{e}_\xi + 4mg\vec{e}_z\right]\Big|_{\vec{q}_e}$$

Dunque,

$$\vec{\phi}_0\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = 4mg\vec{e}_z$$

$$\vec{\phi}_0\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = F\left(\cos\theta_e^{(2)} - 1\right)\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} + mg\sin\theta_e^{(2)}\vec{e}_\xi\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} + 4mg\vec{e}_z\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}}$$

4) Scriviamo le eq. di Lagrange non conservative. A tale scopo calcoliamo

$$K = K^{(semid)} + K^{(P)} \qquad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$$

$$K^{(semid)} = \frac{1}{2}\, \vec{\omega} \cdot I_0(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\, \dot{\varphi}\, \vec{e}_z \cdot I_0(\dot{\varphi}\, \vec{e}_z) = \frac{1}{2}\, \dot{\varphi}^2\, \vec{e}_z \cdot I_0(\vec{e}_z)$$
$$= \frac{1}{2}\, \dot{\varphi}^2 I_{0z}$$

dove

$$I_{0z} \overset{(1.4)}{=} I_{zz} = \frac{3}{4}\, m R^2$$ (momento d'inerzia del telaio risp. all'asse $(O, \vec{e}_z)$)

$$K^{(P)} = \frac{1}{2}\, m |\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)} = R\dot{\theta}\, \vec{e}_\theta + \vec{\omega} \times (P-O) = R\dot{\theta}\, \vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\, \vec{e}_z \times R\, \vec{e}_r$$
$$= R\dot{\theta}\, \vec{e}_\theta + R\dot{\varphi} \sin\theta\, \vec{e}_\varphi$$
$$= R\left(\dot{\theta}\, \vec{e}_\theta + \sin\theta\, \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi\right)$$

$$|\vec{v}_P|^2 = R^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2\right)$$

Quindi

$$K = \frac{3}{8}\, m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\, m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\, m R^2 \left[\left(\frac{3}{4} + \sin^2\theta\right)\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\, [\dot{\varphi}, \dot{\theta}]^T\, m R^2 \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{4} + \sin^2\theta\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

EL_φ : $\dfrac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = mR^2\left(\dfrac{3}{4} + \sin^2\theta\right)\dot\varphi$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = mR^2\left[\left(\dfrac{3}{4}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right]$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$mR^2\left[\left(\frac{3}{4} + \sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\ \dot\theta\dot\varphi\right] \overset{(4.1)}{=} -b\varphi + FR\sin\theta$$

EL_θ : $\dfrac{\partial K}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) = mR^2\ddot\theta$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{mR^2}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2$$

$$mR^2\left(\ddot\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\ \dot\varphi^2\right) \overset{(4.2)}{=} R\,(mg - cR)\sin\theta$$

Donc, les 2 EL sont

$$(9.1)\quad \begin{cases} EL_\varphi & mR^2\left[\left(\dfrac{3}{4} + \sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right] = -b\varphi + FR\sin\theta \\ EL_\theta & mR^2\left(\ddot\theta - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2\right) = R\,(mg - cR)\sin\theta \end{cases}$$

5) Linearizzazione delle EL intorno agli equilibri

Poiché la sollecitazione è non conservativa, dobbiamo usare la formula

$$(10.1) \quad A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0 \quad , \quad \text{dove} \quad \vec{x} = \frac{\vec{q}(t) - \vec{q}_e}{\varepsilon}$$

$$A = A(\vec{q}_e) = mR^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + \sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$C_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \Rightarrow \qquad C = -\begin{bmatrix} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Q_\theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{\vec{q}_e} = -\begin{bmatrix} -b & FR\cos\theta_e \\ 0 & R(mg - CR)\cos\theta_e \end{bmatrix}$$

Allora, la (10.1) si scrive

$$mR^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + \sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -FR\cos\theta_e \\ 0 & -R(mg - CR)\cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cioè,

$$\begin{cases} mR^2\left(\frac{3}{4} + \sin^2\theta_e\right)\ddot{x}_1 + b\,x_1 - FR\cos\theta_e\, x_2 = 0 \\ \\ mR^2\ddot{x}_2 - R(mg - CR)\cos\theta_e\, x_2 = 0 \end{cases}$$

Donc que,

$$\vec{q}_e^{\,(1)} = (0, 0) \qquad \begin{cases} \frac{3m}{4} R^2 \ddot{x}_1 + b\, x_1 - FR\, x_2 = 0 \\ m R\, \ddot{x}_2 - (mg - CR)\, x_2 = 0 \end{cases}$$

(11.1)

si $\lambda = 1$

$$q_e^{(2)} = \left(\frac{FR}{b} \sin\theta_e , \theta_e \right) \qquad \begin{cases} m R^2 \left(\frac{3}{4} + \sin^2\theta_e \right) \ddot{x}_1 + b\, x_1 - FR \cos\theta_e\, x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$\forall\ \theta_e \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

(11.2)

Calcoliamo l'integrale generale del sistema (11.2).
La II eq. (11.2) fornisce

$$x_2(t) = c_1 t + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Consideriamo l'omogenea associata alla I eq. (11.3)

$$mR^2\left(\frac{3}{4} + \sin^2\theta_e\right)\ddot{x}_1 + b\,x_1 = 0$$

Il suo integrale generale è

$$\bar{x}_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2\left(\frac{3}{4}+\sin^2\theta_e\right)}}\; t + \alpha_1\right)$$

Cerchiamo una soluzione particolare della (11.2) del tipo

$$x_1^{(P)} = c_3 t + c_4$$

Sostituendola nella (11.3) troviamo

$$b\,(c_3 t + c_4) = FR\cos\theta_e\,(c_1 t + c_2)$$

Dunque, le costanti soddisfano il sistema

$$\begin{cases} b\,c_3 = FR\cos\theta_e\, c_1 \\ b\,c_4 = FR\cos\theta_e\, c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_3 = \dfrac{FR\cos\theta_e}{b}\, c_1 \\ c_4 = \dfrac{FR\cos\theta_e}{b}\, c_2 \end{cases}$$

Dunque,

$$x_1^{(P)} = \frac{FR\cos\theta_e}{b}\,(c_1 t + c_2) = \frac{FR\cos\theta_e}{b}\, x_2$$

e

$$x_1(t) = a_1\cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2\left(\frac{3}{4}+\sin^2\theta_e\right)}}\; t + \alpha_1\right) + \frac{FR\cos\theta_e}{b}\,(c_1 t + c_2)$$

Dunque, l'integrale generale del sistema (11.2) è

$$x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2\left(\frac{3}{4}+\sin^2\theta_e\right)}}\, t + \alpha_1\right) + \frac{FR\cos\theta_e}{b}\left(c_1 t + c_2\right)$$

$$x_2(t) = c_1 t + c_2$$

$a_1, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 \in [0, 2\pi]$

6) Ricaviamo la reazione in dinamica del semidisco nel punto P. A tale scopo, scriviamo l'equazione dinamica per P

$$\vec{F}_P^{(el)} + \vec{F}_P^{(foll)} + m\vec{g} + \vec{\Psi}'_P = m\,\vec{a}_P$$

Risolvendo rispetto a $\vec{\Psi}'_P$, si trova

$$\vec{\Psi}'_P = -\left(\vec{F}_P^{(el)} + \vec{F}_P^{(foll)} - m\vec{g}\right) + m\,\vec{a}_P$$

dove $\vec{F}_P^{(el)} = -c\,(P-C) = -c\left[(P-O)+(O-C)\right] = -cR\left(\vec{e}_r - \vec{e}_z\right)$

$$= -cR\left[\vec{e}_r - \left(-\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\theta\,\vec{e}_r\right)\right]$$

$$\vec{\Psi}'_P = \left[(mg - cR)\cos\theta + cR\right]\vec{e}_r - (mg - cR)\sin\theta\,\vec{e}_\theta - F\,\vec{e}_\varphi + m\,\vec{a}_P$$

Dalla (14.5) ricaviamo l'espressione di $\vec{a}_P$ nella terna $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ tramite le (1.4).

$$\vec{a}_P = R\left[\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)\right]\left(\cos\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\vec{e}_r\right) +$$

$$+ R\left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi - R\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\left(-\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\theta\,\vec{e}_r\right)$$

$$= R\left(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\theta + R\left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi -$$

$$- R\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r$$

che coincide con l'espressione di $\vec{a}_P$ in coordinate sferiche se $\dot{R} = 0$. (Vedi Appunti)

Calcoliamo $\vec{a}_P$ considerando il moto di P relativo alla terna mobile $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

(14.1) $$\vec{a}_P = \vec{a}_P^{(rel)} + \vec{a}_P^{(tr)} + \vec{a}_P^{(cor)}$$

(14.2) $$\vec{a}_P^{(rel)} = R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r = R\left[\ddot{\theta}\left(\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_z\right) - \dot{\theta}^2\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right)\right]$$

(14.3) $$\vec{a}_P^{(tr)} = \dot{\vec{\omega}}\times(P-O) + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times(P-O)\right)$$

$$= \ddot{\varphi}\,\vec{e}_z\times R\,\vec{e}_r + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z\times\left(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\times R\,\vec{e}_r\right)$$

$$= R\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z\times\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$= R\sin\theta\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - R\,\dot{\varphi}^2\sin\theta\,\vec{e}_\rho$$

(14.4) $$\vec{a}_P^{(cor)} = 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}_P^{(rel)} = 2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\times R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = 2R\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi$$

(14.5) $$\vec{a}_P = R\Big[\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\right)\right)\vec{e}_\rho + \left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi - \left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_z\Big]$$

Dunque,

(9.1)

$$\vec{\varphi}'_P = \left[-(mg-CR)\sin\theta + mR\left(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\right]\vec{e}_\theta +$$
$$+\left[F + mR\left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\right)\right]\vec{e}_\varphi +$$
$$\left[+(mg-CR)\cos\theta + CR - mR\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\right]\vec{e}_z$$

N.B. Si osservi che, come previsto, $\vec{\varphi}'_P \cdot \vec{e}_\theta = 0$. Infatti $\varphi'_P \cdot \vec{e}_\theta$ coincide con la EL_θ (9.1). Ciò spiega il significato fisico della EL_θ: è la proiezione lungo il versore $\vec{e}_\theta$ dell'equazione della dinamica del punto P.
Analogamente, si può verificare che la EL_φ è la proiezione della II ECD, applicata a tutto il modello, lungo il versore $\vec{e}_z$.