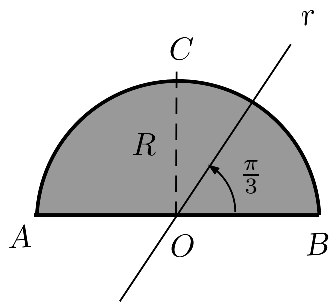
Compito di Meccanica Razionale

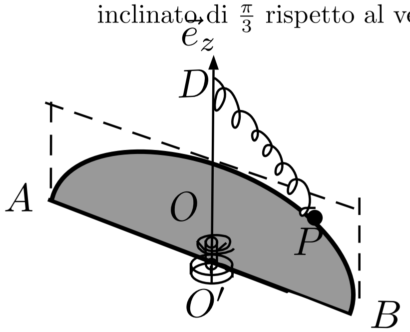
Trieste, 1 luglio 2020

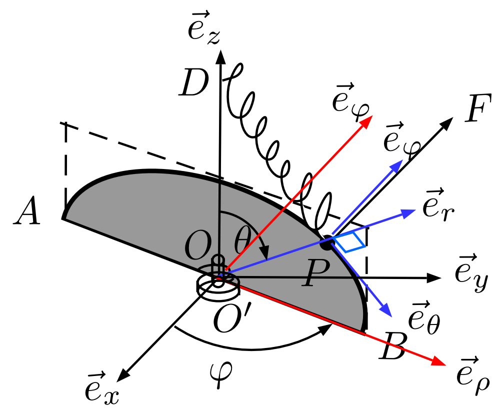
(G. Tondo)



È dato un semidisco rigido omogeneo, di massa $5\,m$ e raggio R .

1) Determinarne il baricentro e il momento d'inerzia rispetto all'asse r passante per il punto O e inclinato di $\frac{\pi}{3}$ rispetto al vettore $B - O$.





Il semidisco è vincolato ad un asse fisso verticale $(O', \vec{e}_z)$ mediante una cerniera cilindrica liscia fissata in $O \equiv O'$. Sul bordo del semidisco, è vincolato a scorrere senza attrito un punto materiale P, di massa m, collegato a una molla, di costante elastica c, che ha l'altro estremo fissato nel punto D dell'asse $(O', \vec{e}_z)$, posto a distanza $2R$ da O'. Inoltre, su P agisce una forza $F\vec{e}_\varphi$. Infine, sul semidisco agisce una molla angolare di richiamo fissata in O e di costante elastica b. Scelte come coordinate libere gli angoli di figura, $\varphi \in \mathbb{R}$ e $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, si chiede di:

STATICA.

2) determinare le configurazioni di equilibrio del modello in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{2cR}$;

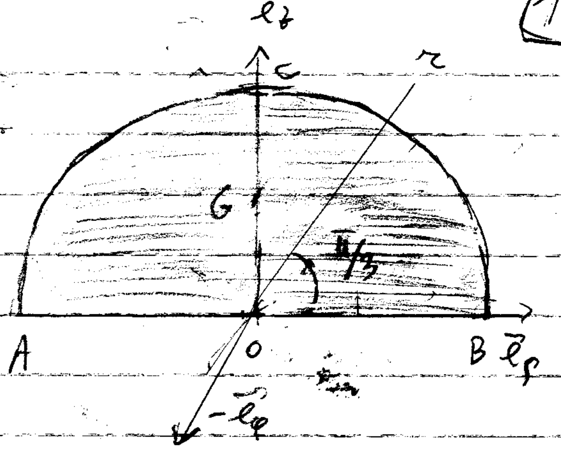
3) determinare l'insieme delle reazioni vincolari esterne sul semidisco, all'equilibrio;

DINAMICA.

4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e calcolare l'integrale generale intorno a una sola configurazione di equilibrio (a propria scelta);

Tema del 1/07/2020 (1)



Dal II Teorema di Guldino segue che:

(1.1) $$\vec{x}_G = G - O = \frac{4}{3\pi} R\, \vec{e}_z$$

1) Il momento d'inerzia del semidisco rs. all'asse $(O,\vec{r})$ si può calcolare come

(1.3) $$I_r = \vec{u}\cdot I_O(\vec{u}) \qquad \vec{u}: \text{ versore di } r$$

Dunque, ci serve la matrice d'inerzia rispetto al punto O. Per calcolarla, fissiamo la base $B'''=(\vec{e}_1=\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_2=\vec{e}_z,\ \vec{e}_3=-\vec{e}_\varphi)$ e osserviamo che (O,B''') è una TPI(O) per ragioni di simmetria materiale.

(1.4) $$[I_O]^{B'''} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{bmatrix}$$

$$I_{11} = \frac{1}{4}(5m)R^2$$

$$I_{22} = I_{11} = \frac{5}{4} m R^2$$

$$I_{33} = I_{11}+I_{22} = 2I_{11} = \frac{5}{2} m R^2$$

Dunque,

(1.5) $$[I_O]^{B'''} = mR^2 \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = 5mR^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

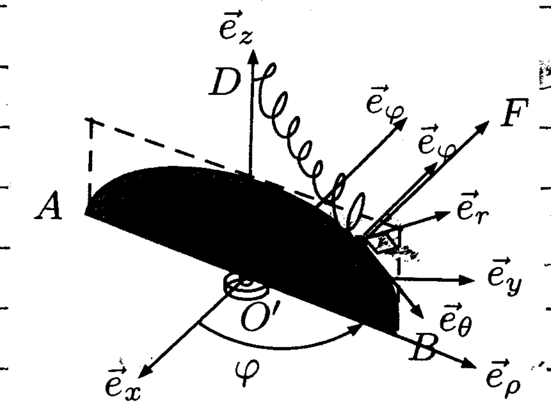
Allora, poiché il versore di r è $\vec{u} = \frac{1}{2}\left(\vec{e_1} + \sqrt{3}\vec{e_2}\right)$, risulta

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[1, \sqrt{3}, 0\right] 5mR^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{5}{4} mR^2 \left[1, \sqrt{3}, 0\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{5}{4} mR^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} mR^2$$

Il modello è formato da un rigido, il semidisco con asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$, e il punto materiale P vincolato al semidisco. Con il metodo dei congelamenti successivi si deduce che il modello ha 2 g.l. Quindi può essere descritto dalle coordinate lagrangiane della figura



$$\varphi \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Consideriamo le 3 basi:

$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: "fissa"

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: "intermedia" (solidale all'anello)

$\mathcal{B}'' = (\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$: solidale al punto P

$$(2.1)\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad (2.2)\begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(2.3)\begin{cases} \vec{e}_\theta = \cos\theta\, \vec{e}_\rho - \sin\theta\, \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_r = \sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z \end{cases} \qquad (2.4)\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\, \vec{e}_\theta + \sin\theta\, \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = -\sin\theta\, \vec{e}_\theta + \cos\theta\, \vec{e}_r \end{cases}$$

Quindi,

$$P - O = R\, \vec{e}_r = R\left(\sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z\right)$$

$$P - O = R\,\vec{e}_r$$

$$P - D = (P-O) + (O-D) = R\vec{e}_r - 2R\,\vec{e}_z = R\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta - 2)\,\vec{e}_z\right)$$
$$|P-D|^2 = R^2\left[\sin^2\theta + (\cos\theta - 2)^2\right] = R^2(5 - 4\cos\theta)$$

$$\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = R\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = R\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right) = R\left(\sin\theta\,\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}\right) = R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$
$$\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \theta} = R\,\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial\theta} = R\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right) = R\left(\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_z\right) = R\,\vec{e}_\theta$$

La sollecitazione dovuta al peso e alle molle è conservativa, quindi ammette energia potenziale

$$V(\varphi,\theta) = -5m\vec{g}\cdot\vec{x}_G - m\vec{g}\cdot\vec{x}_P + \frac{1}{2}b\varphi^2 + \frac{1}{2}c\,\overline{PD}^2$$

$$= \cancel{5mg\vec{e}_z\cdot\frac{4R}{3\pi}\vec{e}_z} + mg\,\vec{e}_z\cdot R\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right) + \frac{1}{2}b\varphi^2 + \frac{1}{2}cR^2(5 - 4\cos\theta)$$
$$\simeq (mgR - 2cR^2)\cos\theta + \frac{1}{2}b\varphi^2$$

Calcoliamo le componenti lagrangiane della forza $\vec{F}$ in P.

$$Q_\varphi^{(F_P)} = \vec{F}_P\cdot\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial\varphi} = F\,\vec{e}_\varphi\cdot R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi = FR\sin\theta$$

$$Q_\theta^{(F_P)} = F\,\vec{e}_\varphi\cdot\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial\theta} = F\,\vec{e}_\varphi\cdot R\,\vec{e}_\theta = 0$$

Dunque

$$\frac{\partial Q_\varphi^{(F_P)}}{\partial\theta} \neq \frac{\partial Q_\theta^{(F_P)}}{\partial\varphi} \Rightarrow \text{sollecitazione } \underline{\text{non}} \text{ conservativa}$$

Inoltre

$$Q_\varphi^{(con)} = \frac{\partial(-V)}{\partial\varphi} = -b\varphi$$
$$Q_\theta^{(con)} = \frac{\partial(-V)}{\partial\theta} = R(mg - 2cR)\sin\theta$$

Allora

(4.1) $Q_\varphi = -b\varphi + FR\sin\theta$

(4.2) $Q_\theta = R(mg - 2cR)\sin\theta$

e le equazioni pure di equilibrio sono

$$\begin{cases} -b\varphi + FR\sin\theta = 0 \\ (mg - 2cR)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

La II eq. pura di equilibrio ha soluzioni, posto $\lambda = \dfrac{mg}{2cR}$,

$\theta = 0 \quad \forall\lambda \quad , \quad \forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ se $\lambda = 1$.

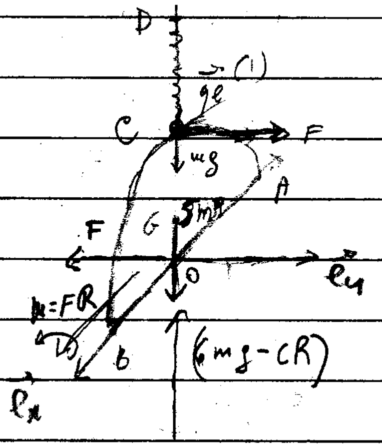
Sostituendo nella I eq. pura di equilibrio si trova

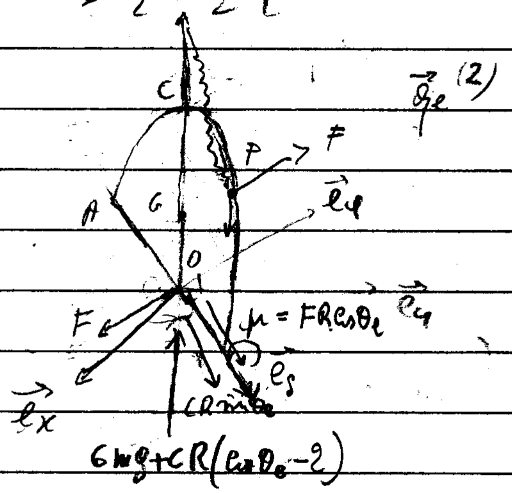
$$\varphi_e = \frac{FR}{b}\sin\theta_e$$

Dunque, le configurazioni di equilibrio $\vec{q}_e = (\varphi_e, \theta_e)$ sono

$\forall\lambda \quad \vec{q}_e^{\,(1)} = (0, 0)$

se $\lambda = 1 \quad \vec{q}_e^{\,(2)} = \left(\frac{FR}{b}\sin\theta_e, \theta_e\right) \qquad \forall\theta_e \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$





2) Reazioni esterne sul semidisco in O ~~→~~ all'equilibrio.

Sappiamo, poiché i vincoli sono non dissipativi e bilateri, che la cerniera cilindrica in O eserciti le reazioni vincolari

$$(5.1) \qquad \mathcal{L} = \{(O, \vec{\phi}), \vec{\mu}\} \qquad \text{con}$$

$$(5.2) \qquad \vec{\mu} \cdot \vec{e}_z = 0$$

Quindi, abbiamo 5 incognite scalari. Scriviamo le ECS su tutto il modello

$$(5.3) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\phi}_O = \vec{0} \\ \vec{M}_O^{(est,att)} + \vec{\mu} = \vec{0} \end{cases}$$

Dalla I ECS troviamo la $\vec{\phi}_0$:

(7.1) $\vec{\phi}_0 = - \vec{R}^{(est,att)}$

(7.2) $\vec{R}^{(est,att)} = 5m\vec{g} - c(P-D) + \vec{F}^{(punt)} + m\vec{g} = 6m\vec{g} + F\vec{e}_\varphi - cR(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta - 2)\vec{e}_z)$

$$= -6mg\,\vec{e}_z + F\vec{e}_\varphi - cR\sin\theta\,\vec{e}_\rho - cR(\cos\theta - 2)\vec{e}_z$$

$$= -cR\sin\theta\,\vec{e}_\rho + F\vec{e}_\varphi - \big(6mg + c(\cos\theta - 2)\big)\vec{e}_z$$

Quindi

$$\vec{\phi}_0 = \Big(cR\sin\theta\,\vec{e}_\rho - F\vec{e}_\varphi + \big(6mg + cR(\cos\theta - 2)\big)\vec{e}_z \Big)\Big|_{\vec{q}_e}$$

Dunque,

$$\vec{\phi}_0\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = -F\,e_\varphi\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}} + (6mg - cR)\,\vec{e}_z\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = -F\vec{e}_\varphi + (6mg - cR)\vec{e}_z$$

$$\vec{\phi}_0\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = cR\sin\theta_e\,\vec{e}_\rho\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} - F\,e_\varphi\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} + \big(6mg + cR(\cos\theta_e - 2)\big)\vec{e}_z\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}}$$

Dalla II ECD (5.3) calcoliamo

$$\vec{\mu} = -\vec{M}_{O}^{(est,att)}\Big|_{\vec{q}_e}$$

$$\vec{M}_O^{(est,att)} = \cancel{(G-O)\times\left(-3mg\vec{e}_z\right)} + (P-O)\times\left(-c(P-D)+\vec{F}^{(gell)} - mg\vec{e}_z\right) - b\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$= R\vec{e}_z\times\left(-cR\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta - 2)\vec{e}_z\right) + F\vec{e}_\varphi - mg\vec{e}_z\right) - b\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$= -cR^2\sin\theta\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho - cR^2(\cos\theta-2)\,\vec{e}_z\times\vec{e}_z + FR\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi - mgR\,\vec{e}_z\times\vec{e}_z - b\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$= \cancel{-cR^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_\varphi} + cR^2(\cancel{\cos\theta}-2)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - FR\,\vec{e}_\theta + mgR\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - b\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$= R\,(mg - 2cR)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - FR\,\vec{e}_\theta - b\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$= R\,(mg - 2cR)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - FR\left(\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_z\right) - b\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$= -FR\cos\theta\,\vec{e}_\rho + R\,(mg - 2cR)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \left(FR\sin\theta - b\dot{\varphi}\right)\vec{e}_z$$

Dunque,

$$\vec{\mu} = -\vec{M}_{O}^{(est,att)}\Big|_{\vec{q}_e}$$

Allora,

$$\vec{\mu}\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = FR\,\vec{e}_\rho\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = FR\,\vec{e}_x$$

$$\vec{\mu}\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = +FR\cos\theta_e\,\vec{e}_\rho\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} - \cancel{R\,\underbrace{(mg-2cR)}_{\lambda=1}\sin\theta_e\,\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}}} + \cancel{\left(FR\sin\theta_e - b\dot{\varphi}_e\right)\vec{e}_z}$$

4) Scriviamo le eq. di Lagrange non conservative. A tale segno calcoliamo

$$K = K^{(semid)} + K^{(P)} \qquad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$K^{(semid)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot I_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\cdot I_O(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z\cdot I_O(\vec{e}_z)$$

$$= \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\, I_{Oz}$$

dove

$$I_{Oz} \overset{(1.4)}{=} I_{zz} = \frac{5}{4}\, m R^2$$ (momento d'inerzia del telaio risp. all'asse $(O, \vec{e}_z)$)

$$K^{(P)} = \frac{1}{2}\, m\, |\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)} = R\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \vec{\omega}\times(P-O) = R\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times R\,\vec{e}_r$$

$$= R\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + R\,\dot{\varphi}\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$= R\left(\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$|\vec{v}_P|^2 = R^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

Quindi

$$K = \frac{5}{8}\, m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\, m R^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, m R^2\left[\left(\frac{5}{4} + \sin^2\theta\right)\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}\;\; \dot{\theta}\right]^T m R^2 \begin{bmatrix} \left(\frac{5}{4} + \sin^2\theta\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

EL_φ : $\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = mR^2\left(\frac{5}{4}+\sin^2\theta\right)\dot\varphi$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = mR^2\left[\left(\frac{5}{4}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right]$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$mR^2\left[\left(\frac{5}{4}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\ \dot\theta\dot\varphi\right] \overset{(4.1)}{=} -b\varphi + FR\sin\theta$$

EL_θ : $\frac{\partial K}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) = mR^2\ddot\theta$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{mR^2}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2$$

$$mR^2\left(\ddot\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\ \dot\varphi^2\right) \overset{(4.2)}{=} R\,(mg-2cR)\sin\theta$$

Donc, les 2 EL sont

$$(9.1)\quad \begin{cases} EL_\varphi & mR^2\left[\left(\frac{5}{4}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right] = -b\varphi + FR\sin\theta \\ EL_\theta & mR^2\left(\ddot\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2\right) = R\,(mg-2cR)\sin\theta \end{cases}$$

5) Linearizzazione delle EL intorno agli equilibri

Poiché la sollecitazione è non conservativa, dobbiamo usare la formula

$$(10.1)\quad A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0 \,, \quad \text{dove} \quad \vec{x} = \frac{\vec{q}(t)-\vec{q}_e}{\varepsilon}$$

$$A = A(\vec{q}_e) = mR^2\begin{bmatrix} \frac{5}{4}+\sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$C_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \Rightarrow \qquad C = -\begin{bmatrix} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Q_\theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{|\vec{q}_e} = -\begin{bmatrix} -b & FR\cos\theta_e \\ 0 & R(mg-2cR)\cos\theta_e \end{bmatrix}$$

Allora, la (10.1) si scrive

$$mR^2\begin{bmatrix} \frac{5}{4}+\sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -FR\cos\theta_e \\ 0 & -R(mg-2cR)\cos\theta_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cioè,

$$\begin{cases} mR^2\left(\frac{5}{4}+\sin^2\theta_e\right)\ddot{x}_1 + b\,x_1 - FR\cos\theta_e\, x_2 = 0 \\ mR^2\ddot{x}_2 - R(mg-2cR)\cos\theta_e\, x_2 = 0 \end{cases}$$

Donc que,

$\vec{q}_e^{(1)} = (0, 0)$

(11.1)

$$\begin{cases} \frac{5}{4} m R^2 \ddot{x}_1 + b x_1 - F R x_2 = 0 \\ m R \ddot{x}_2 - (m g \cancel{\chi} R) x_2 = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 1$

$q_e^{(2)} = \left(\frac{FR}{b} \sin \theta_e, \theta_e\right)$

$\forall \ \theta_e \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

(11.2)

$$\begin{cases} m R^2 \left(\frac{5}{4} + \sin^2 \theta_e\right) \ddot{x}_1 + b x_1 - F R \cos \theta_e \, x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo l'integrale generale del sistema (11.2).
La II eq (11.2) fornisce

$$x_2(t) = c_1 t + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Consideriamo l'omogenea associata alla I eq. (11.2)

$$m R^2 \left(\frac{5}{4} + \sin^2\theta_e \right) \ddot{x}_1 + b\, x_1 = 0$$

Il suo integrale generale è

$$\bar{x}_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{m R^2 \left(\frac{5}{4} + \sin^2\theta_e\right)}}\, t + \alpha_1 \right)$$

Cerchiamo una soluzione particolare della (11.2) del tipo

$$x_1^{(p)} = c_3 t + c_4$$

Sostituendo nella (11) troviamo

$$b(c_3 t + c_4) = F R \cos\theta_e (c_1 t + c_2)$$

Dunque, le costanti soddisfano il sistema

$$\begin{cases} b c_3 = F R \cos\theta_e\, c_1 \\ b c_4 = F R \cos\theta_e\, c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_3 = \dfrac{F R \cos\theta_e}{b} c_1 \\ c_4 = \dfrac{F R \cos\theta_e}{b} c_2 \end{cases}$$

Dunque,

$$x_1^{(p)} = \frac{F R \cos\theta_e}{b} (c_1 t + c_2) = \frac{F R \cos\theta_e}{b} x_2$$

e

$$x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{m R^2 \left(\frac{5}{4} + \sin^2\theta_e\right)}}\, t + \alpha_1 \right) + \frac{F R \cos\theta_e}{b} (c_1 t + c_2)$$

Dunque, l'integrale generale del sistema (11.2) è

$$x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2\left(\frac{5}{4}+\sin^2\theta_e\right)}}\, t + \alpha_1\right) + \frac{FR\cos\theta_e}{b}(c_1 t + c_2)$$

$$x_2(t) = c_1 t + c_2$$

$a_1, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 \in [0, 2\pi]$