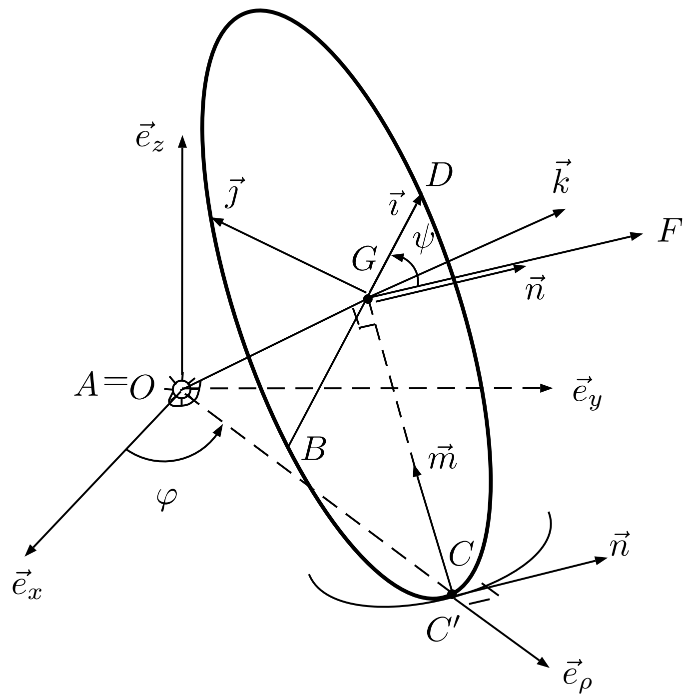
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 13 luglio 2020

(G. Tondo)



Un rigido è formato da un **anello** omogeneo, di massa m e raggio R, saldato nel suo centro G (sostenuto dai due raggi BG e DG) ad un asta AG di lunghezza d, il cui estremo A è vincolato ad un punto fisso O mediante una cerniera sferica. Si supponga che l'asta AG e i due raggi siano di massa trascurabile. L'asta AG è ortogonale al piano dell'anello, il quale rotola senza strisciare sul piano orizzontale scabro passante per O. Sul rigido agisce una forza $F > 0$ applicata in G e parallela a $\vec{n}$ e una molla angolare fissata in O che esercita un momento di richiamo $\vec{M}^{(molla)} = -b\,\varphi\,\vec{m}$, con $b > 0$. Si suppone che tutti i vincoli siano non dissipativi. Scelta come coordinata libera l'angolo φ della figura, si chiede di:

CINEMATICA.

1) Classificare il moto, il campo di velocità del rigido e determinarne l'asse d'istantanea rotazione.

STATICA.

2) Verificare se la sollecitazione della molla è conservativa, poi individuare le configurazioni di equilibrio del modello e la loro stabilità;

3) all'equilibrio, determinare la reazione vincolare esterna sull'anello nel punto C, supponendo che la sua componente lungo $\vec{e}_\rho$ sia nulla e trascurando l'attrito di rotolamento;

4) all'equilibrio, determinare la reazione vincolare esterna sull'asta nel punto A, nell' ipotesi del punto 3).

DINAMICA.

5) Trovare il moto del rigido $\varphi(t)$ con le condizioni iniziali $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$;

Tema del 13/07/2020

Il modello è un rigido R con 1 g.l., come si può verificare con il metodo dei congelamenti meccanici. Infatti, se si congela la rotazione dell'asta AG intorno all'asse $\vec{e}_z$, poiché l'anello non può slittare sul piano scabro, il rigido è del tutto congelato. Dunque, ammette una sola coordinata libera, che scegliamo come

$$(1.1) \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Dunque, l'angolo di rotazione ψ dell'anello intorno al proprio asse, $\vec{k}$, deve poter esprimersi in funzione di φ. Per trovare tale equazione di vincolo, ricordiamo che, per ipotesi, il rigido rotola senza strisciare sul piano $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Tale vincolo di mobilità si esprime tramite l'equazione

$$(1.2) \qquad \vec{v}_c = 0 \qquad C \in R$$

Dalle formule di Poisson, segue che

$$(1.3) \qquad \vec{v}_C = \cancel{\vec{v}_A} + \vec{\omega} \times (C-A) = \vec{\omega} \times (C-A)$$

poiché A è un punto fisso. La velocità angolare $\vec{\omega}$ del rigido vincolato con il solo appoggio sul piano, vale

$$(1.4) \qquad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\psi}\,\vec{k}$$

dal Teo di Frisi. Poiché, $C-A = \sqrt{d^2+R^2}\,\vec{e}_f =: a\,\vec{e}_f$

$$(1.5) \qquad \vec{V}_c = (\dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\psi}\,\vec{k}) \times a\,\vec{e}_f = a\left(\dot{\varphi}\,\vec{n} + \dot{\psi}\,\frac{R}{a}\,\vec{n}\right)$$

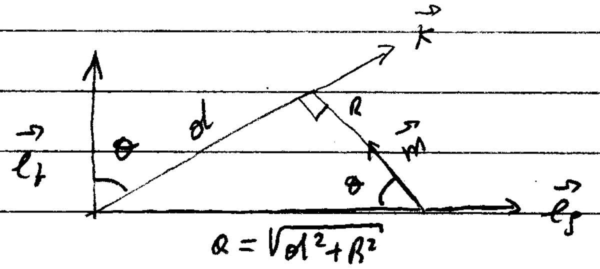
Nel seguito, utilizzeremo le seguenti basi ortonormali

$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ $\quad \begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \end{cases}$

$\mathcal{B}'' = (\vec{n}, \vec{m}, \vec{k})$ $\quad \begin{cases} \vec{n} = \vec{e}_\varphi \\ \vec{m} = -\frac{R}{a}\vec{e}_\rho + \frac{d}{a}\vec{e}_z \\ \vec{k} = \frac{d}{a}\vec{e}_\rho + \frac{R}{a}\vec{e}_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_\varphi = \vec{n} \\ \vec{e}_\rho = -\frac{R}{a}\vec{m} + \frac{d}{a}\vec{k} \\ \vec{e}_z = \frac{d}{a}\vec{m} + \frac{R}{a}\vec{k} \end{cases}$

$\mathcal{B}''' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



$\cos\theta = \frac{R}{a}$

$\sin\theta = \frac{d}{a}$

Allora, dal vincolo (1.2), segue che

(2.1) $\dot\varphi + \dot\psi \frac{R}{\sqrt{d^2+R^2}} = 0 \iff \boxed{\dot\psi = -\dot\varphi\sqrt{1+\frac{d^2}{R^2}}}$

In questo caso, il vincolo di mobilità (2.1) è integrabile, cioè equivale al vincolo olonomo

(2.2) $\psi = -\varphi\sqrt{1+\frac{d^2}{R^2}} + \varphi_0$

Scegliamo la costante $\varphi_0 = 0$, in modo che $\varphi = 0$ corrisponda a $\psi = 0$, cioè $\vec{i}_{|\varphi=0} = \vec{e_y}$. Dunque, l'eq. di vincolo fra i due angoli φ e ψ risulta

(2.3) $\psi = -\sqrt{1+\frac{d^2}{R^2}}\,\varphi = -\frac{a}{R}\varphi$

Inoltre, sostituendo la (2.1) nella (1.4), si trova l'espressione di $\vec\omega$ per il rigido in puro rotolamento sul piano

(2.4) $\vec\omega = \dot\varphi\,\vec{e_z} - \sqrt{1+\frac{d^2}{R^2}}\,\dot\varphi\,\vec{k} = \dot\varphi\left(\vec{e_z} - \frac{a}{R}\vec{k}\right)$

Possiamo ora rispondere alla domanda 1).
Poichè durante il moto si conserva l'angolo fra l'asse fisso $(O,\vec{e_z})$ e l'asse $(A,\vec{k})$ che è solidale a R, il moto del rigido è un caso particolare ($l=1$) di moto di precessione. Inoltre, poichè A è un punto fisso, l'invariante scalare statico $\vec{v_A}\cdot\vec\omega = 0$, quindi il campo è rotatorio. Dunque, l'asse di Mozzi degenera nell' AIR che sicuramente passa per A ma anche per C, dato che $\vec{v_C} = 0$. Quindi, l' AIR è l'unica retta passante per A e C. Dunque, $\vec\omega \,//\, (A-C)$ ed è diretta come vers$(A-C)$. Infatti,

(2.5) $\vec\omega = \dot\varphi\left(\vec{e_z} - \frac{a}{R}\vec{k}\right) = \dot\varphi\left(\cancel{\vec{e_z}} - \frac{a}{R}\left(\frac{d}{a}\vec{e_\rho} + \cancel{\frac{R}{a}\vec{e_z}}\right)\right) = -\frac{d}{R}\dot\varphi\,\vec{e_\rho}$

Statica

2) Per verificare se la sollecitazione della molla angolare è conservativa, calcoliamone la forza generalizzata, utilizzando il lavoro virtuale.

$$LV^{(molla)} = \vec{M}^{(molla)} \cdot \vec{\mathcal{E}} = \qquad \vec{\mathcal{E}} = \vec{\omega}\,\delta\tau = -\frac{d}{R}\,\delta\varphi\,\vec{e}_f$$

$$= -b\varphi\,\vec{m}\cdot\left(-\frac{d}{R}\vec{e}_f\right)\delta\varphi = \delta\varphi\left(\frac{bd}{R}\varphi\,\vec{m}\cdot\vec{e}_f\right) = \frac{bd}{\cancel{R}}\varphi\left(-\frac{\cancel{R}}{a}\right)\delta\varphi =$$

$$= -\frac{bd}{a}\varphi\,\delta\varphi$$

Dunque,

$$Q^{(molla)} = -\frac{bd}{a}\varphi \iff V^{(molla)} = -\int -\frac{bd}{a}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\frac{bd}{a}\varphi^2$$

Analogamente per la forza $\vec{F}_G = F\vec{n}$

$$LV^{(foll)} = \vec{F}_G\cdot\cancel{\delta x_A} + (G-A)\times\vec{F}_G\cdot\vec{\mathcal{E}} = (d\vec{k}\times F\vec{n})\cdot\left(-\frac{d}{R}\delta\varphi\,\vec{e}_f\right)$$

$$= Fd\,\vec{m}\cdot\left(-\frac{d}{R}\delta\varphi\,\vec{e}_f\right) = -\frac{Fd^2}{\cancel{R}}\delta\varphi\left(-\frac{\cancel{R}}{a}\right) = F\frac{d^2}{a}\delta\varphi$$

Quindi,

$$Q^{(foll)} = F\frac{d^2}{a}$$

$$V^{(foll)} = -\int F\frac{d^2}{a}\,d\varphi = -F\frac{d^2}{a}\varphi$$

Dunque

$$V^{(tot)} = \frac{1}{2}b\frac{d}{a}\varphi^2 - F\frac{d^2}{a}\varphi + \cancel{mg\,\vec{e}_z\cdot d\vec{K}}$$

$$Q^{(tot)} = -b\frac{d}{a}\varphi + F\frac{d^2}{a}$$

Quindi, l'equazione pura di equilibrio è

(4.1) $$-\frac{b\cancel{d}}{\cancel{a}}\varphi + F\frac{d^{\cancel{2}}}{\cancel{a}} = 0 \iff \varphi_e = \frac{Fd}{b}$$

ed $\exists!$ la configurazione di equilibrio $\varphi_e = \frac{Fd}{b}$.
$V''(\varphi) = \frac{bd}{a} \Rightarrow V''(\varphi_e) > 0 \Rightarrow$ equilibrio stabile.

3) Scriviamo le ECS, tenendo conto che i vincoli in A e in C esercitano l'insieme delle reazioni vincolari

$$\mathcal{L} = \{(A, \vec{\phi}), (C, \vec{\Psi})\}$$

con $\vec{\Psi}_C$ che, per ipotesi, soddisfa la condizione

(4.2) $$\vec{\Psi}_C \cdot \vec{e}_\rho = 0$$

Dunque, dobbiamo risolvere il sistema delle ECS

(4.3) $$\begin{cases} \vec{R}^{(ext,att)} + \vec{\phi}_A + \vec{\Psi}_C = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(ext,att)} + (C-A)\times\vec{\Psi}_C = \vec{0} \end{cases}$$

insieme con la (4.2), tenendo conto della (4.1).
Come base di riferimento, conviene usare la base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_\rho, \vec{n}, \vec{e}_z)$ invece di quella fissa.
Su tale base, denotiamo con

(4.4) $$\vec{\phi}_A = \phi_\rho \vec{e}_\rho + \phi_n \vec{n} + \phi_z \vec{e}_z$$

(4.5) $$\vec{\Psi}_C \overset{(4.2)}{=} \cancel{\Psi_\rho \vec{e}_\rho} + \Psi_n \vec{n} + \Psi_z \vec{e}_z$$

Le soluzioni della II ECS (4.3) sono

$$(5.1)\quad \vec{\Psi}_C = \frac{C-A}{|C-A|^2} \times M_A^{(est,att)} + \frac{f}{|C-A|^2}(C-A)$$

dove f, in questo caso è nullo per l'ipotesi (4.2).

Intanto, calcoliamo

$$\vec{M}_A^{(est,att)} = (G-A)\times(\vec{F}+m\vec{g}) - b\varphi\,\vec{m} = d\vec{k}\times(F\vec{n}-mg\vec{e}_z) - b\varphi\vec{m} =$$

$$(5.2)\quad = Fd\,\vec{m} + mgd\frac{d}{a}\vec{n} - b\varphi\,\vec{m}$$

$$= (Fd - b\varphi)\vec{m} + mg\frac{d^2}{a}\vec{n}$$

e osserviamo che

$$(5.3)\quad \vec{M}_A^{(est,att)}\Big|_{q_e} = mg\frac{d^2}{a}\vec{n}$$

Allora

$$(5.4)\quad \vec{\Psi}_{C|q_e} = \frac{\vec{e}_\rho}{a}\times mg\frac{d^2}{a}\vec{n} = \frac{mgd^2}{a^2}\vec{e}_\rho\times\vec{n} = mg\frac{d^2}{a^2}\vec{e}_z$$

Dalla I ECS ricaviamo $\vec{\Phi}_A$

$$\vec{\Phi}_A = -\vec{R}^{(est,att)} - \vec{\Psi}_C = -(F\vec{n}-mg\vec{e}_z) - mg\frac{d^2}{a^2}\vec{e}_z =$$

$$= -F\vec{n} + mg\left(1-\frac{d^2}{d^2+R^2}\right)\vec{e}_z$$

$$= -F\vec{n} + mg\frac{R^2}{d^2+R^2}\vec{e}_z$$

Dinamica

5) Poichè i vincoli sono olonomi e non dissipativi, nella configurazione di confine possiamo utilizzare la EL relativa a φ. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del rigido come

$$(9.1)\qquad K = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot \mathbb{I}_C(\vec{\omega}) \qquad\qquad C \in AIR$$

Come terna di riferimento per calcolare la matrice d'inerzia $\mathbb{I}_C$, possiamo scegliere la terna $(C; \vec{n}, \vec{m}, \vec{K})$. Essa non è una terna solidale a R, come invece $(C; \vec{i}, \vec{j}, \vec{K})$. Tuttavia è una terna principale d'inerzia poiché $(C, \vec{K})$ e $(C, \vec{m})$ sono assi di simmetria materiale per R. Inoltre, i momenti d'inerzia rispetto agli assi di tale terna sono indipendenti dal tempo per ragioni di simmetria materiale. Infatti, utilizzando il Teo. di Huygens-Steiner si trova

$$\vec{n}\cdot \mathbb{I}_C(\vec{n}) = I + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

$$(9.2)\qquad \vec{m}\cdot \mathbb{I}_C(\vec{m}) = I = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\vec{K}\cdot \mathbb{I}_C(\vec{K}) = 2I + mR^2 = 2mR^2.$$

$$\vec{\omega} = -\frac{d}{R}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi = -\frac{d}{R}\dot{\varphi}\,\frac{1}{a}\left(-R\vec{m} + d\vec{K}\right) = \frac{d}{a}\dot{\varphi}\left(+\vec{m} - \frac{d}{R}\vec{K}\right)$$

$$(9.3)\qquad K = \frac{1}{2}\frac{d}{a}\dot{\varphi}\left[0,\ 1,\ -\frac{d}{R}\right] mR^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{d}{a}\dot{\varphi} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{d}{R} \end{bmatrix} = \frac{mR^2}{2}\frac{d^2}{a^2}\dot{\varphi}^2 \left[0, 1, -\frac{d}{R}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{2d}{R} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} mR^2 \frac{d^2}{a^2}\dot{\varphi}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2d^2}{R^2}\right)$$

Allora

(10.1) $$\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = m\frac{R^2 d^2}{a^2}\left(\frac{1}{2}+2\frac{d^2}{R^2}\right)\dot\varphi \ , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = m\frac{R^2 d^2}{a^2}\left(\frac{1}{2}+2\frac{d^2}{R^2}\right)\ddot\varphi, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi}=0$$

L'eq. di Lagrange è

(10.2) $$m\frac{R^2 d^2}{a^2}\left(\frac{1}{2}+2\frac{d^2}{R^2}\right)\ddot\varphi = -b\frac{d}{a}\varphi + F\frac{d^2}{a}$$

Il problema di Cauchy associato è

(10.3) $$\begin{cases} m\frac{R^2 d^2}{a^2}\left(\frac{1}{2}+2\frac{d^2}{R^2}\right)\ddot\varphi + \frac{bd}{a}\varphi = F\frac{d^2}{a} \\ \varphi(0)=0 \\ \dot\varphi(0)=0 \end{cases}$$

L'integrale generale è dato da

(10.4) $$\varphi(t) = A\cos(\gamma t+\varphi_0) + \frac{Fd}{b} \qquad \gamma := \sqrt{\frac{b\,a}{m R^2 d\left(\frac{1}{2}+2\frac{d^2}{R^2}\right)}}$$

Imponendo le condizioni iniziali si determinano le costanti A e φ_0. Infatti

$$\begin{matrix}\varphi(0) : \\ \dot\varphi(0) :\end{matrix} \begin{cases} A\cos\varphi_0 + \frac{Fd}{b} = 0 \\ -A\gamma\sin\varphi_0 = 0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{Fd}{b} \\ \varphi_0 = 0\end{cases}$$

Quindi, l'unica soluzione di (8.3) è

(10.5) $$\varphi(t) = \frac{Fd}{b}\left(1-\cos\gamma t\right)$$