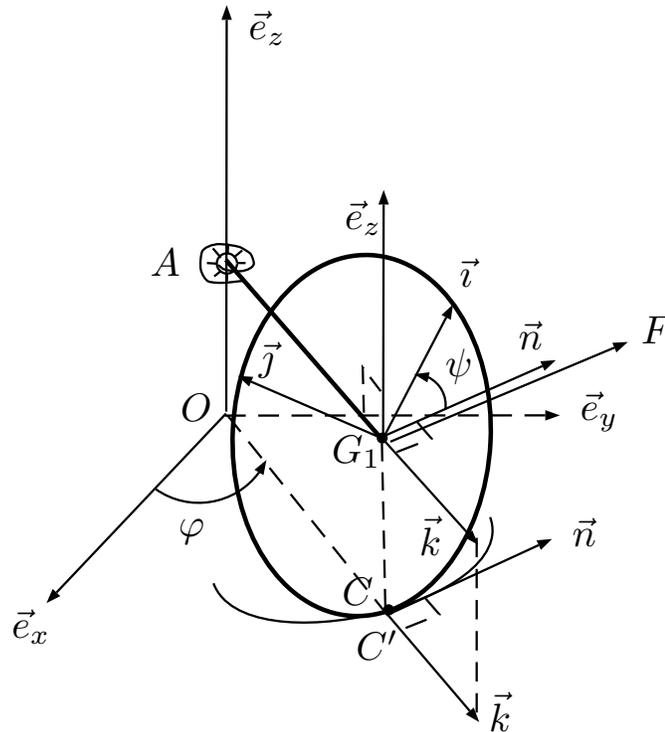


# Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 14 settembre 2020

(G. Tondo)



Un rigido è formato da un **disco** omogeneo, di massa  $m$  e raggio  $R$ , saldato nel suo centro  $G_1$  ad un'asta  $AG_1$  di massa  $m$  e lunghezza  $d$ , il cui estremo  $A$  è vincolato ad un asse fisso verticale  $(O, \vec{e}_z)$  mediante una cerniera sferica posta a quota  $R$  sull'asse  $(O, \vec{e}_z)$ . L'asta  $AG_1$  è ortogonale al piano del disco, il quale rotola senza strisciare sul piano orizzontale scabro passante per  $O$ . Sul rigido agisce una molla angolare fissata in  $A$  che esercita un momento di richiamo  $M^{(molla)} = -b\varphi \vec{e}_z$  ( $b > 0$ ) e una forza  $F > 0$  applicata in  $G_1$  e parallela a  $\vec{n}$ . Tutti i vincoli sono supposti non dissipativi. Scelta come coordinata libera l'angolo  $\varphi$  della figura, si chiede di:

## STATICA.

Determinare:

- 1) le configurazioni di equilibrio del modello e la loro stabilità;
- 2) la reazione vincolare esterna sul rigido nel punto  $C$  all'equilibrio, supponendo che la sua componente lungo  $\vec{k}$  sia nulla e trascurando l'attrito di rotolamento;
- 3) la reazione vincolare esterna sul rigido nel punto  $A$  all'equilibrio, nell'ipotesi del punto 2).

## DINAMICA.

- 4) Trovare il moto del rigido  $\varphi(t)$  con le condizioni iniziali  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ;
- 5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, calcolarne il valore per il moto ricavato al punto 4);

(1)

Tema del 14/09/2020

Il modello è un rigido  $R$  con 1 g.l., come si può verificare con il metodo dei congelamenti meccanici. Infatti, se si congela la rotazione dell'asta  $AB$  intorno all'asse  $\vec{e}_z$ , poiché il disco non striscia sul piano scabro, il rigido è del tutto congelato. Dunque, ammette una sola coordinata libera, che scegliamo come

$$(1.1) \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Dunque, l'angolo di rotazione  $\psi$  del disco intorno al proprio asse,  $K$ , deve poter esprimersi in funzione di  $\varphi$ . Per trovare tale equazione di vincolo, ricordiamo che, per ipotesi, il rigido rotola senza strisciare sul piano  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ . Tale vincolo di mobilità si esprime tramite l'equazione

$$(1.2) \quad \vec{v}_C = 0 \quad C \in R$$

Dalle formule di Poisson, segue che

$$(1.3) \quad \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (C-A) = \vec{\omega} \times (C-A)$$

poiché  $A$  è un punto fisso, la velocità angolare  $\vec{\omega}$  del rigido vincolato con il ruolo appoggio sul piano, vale

$$(1.4) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\psi} \vec{K}$$

del Teo. di Frenet.

$$(1.5) \quad \vec{v}_C = (\dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\psi} \vec{K}) \times (d \vec{K} - R \vec{e}_z) = d \dot{\varphi} \vec{n} - R \dot{\psi} (-\vec{n}) = (d \dot{\varphi} + R \dot{\psi}) \vec{n}$$

Allora, dal vincolo (1.2), segue che

$$(2.1) \quad d\dot{\varphi} + \dot{\varphi} R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\dot{\varphi} = -\frac{d}{R} \dot{\varphi}}$$

In questo caso, il vincolo di mobilità (2.1) è integrabile, cioè equivale al vincolo olonomo

$$(2.2) \quad \varphi = -\varphi \frac{d}{R} + \varphi_0$$

Scegliamo la costante  $\varphi_0 = 0$ , in modo che  $\varphi = 0$  corrisponda a  $\varphi = 0$ , cioè  $\vec{t}_{\varphi=0} = \vec{e}_y$ . Dunque, l'eq. di vincolo fra i due angoli  $\varphi$  e  $\psi$  risulta

$$(2.3) \quad \psi = -\frac{d}{R} \varphi$$

Inoltre, sostituendo la (2.1) nella (1.4), si trova l'espressione di  $\vec{\omega}$  per il rigido in puro rotolamento sul piano

$$(2.4) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z - \frac{d}{R} \dot{\varphi} \vec{k} = \dot{\varphi} \left( \vec{e}_z - \frac{d}{R} \vec{k} \right)$$

## Statica (posizionale)

2) La sollecitazione è conservativa poiché il modello è una macchina semplice. Calcoliamone la forza generalizzata, utilizzando il lavoro virtuale.

$$\begin{aligned}
 LV^{(molla)} &= M \cdot \vec{\varepsilon} = \dots & \vec{\varepsilon} &= \vec{\omega} \delta \vec{c} = \delta \varphi \left( \vec{e}_2 - \frac{d}{R} \vec{k} \right) \\
 &= -b \varphi \vec{e}_2 \cdot \left( \vec{e}_2 - \frac{d}{R} \vec{k} \right) \delta \varphi = \\
 &= -b \varphi \delta \varphi
 \end{aligned}$$

Dunque,

$$Q^{(molla)} = -b \varphi \Leftrightarrow V^{(molla)} = - \int -b \varphi d\varphi = \frac{1}{2} b \varphi^2$$

Analogamente per la forza  $\vec{F}_G = F \vec{n}$

$$\begin{aligned}
 LV^{(pole)} &= \vec{F}_G \cdot \delta \vec{x}_G + (G-A) \times \vec{F}_G \cdot \vec{\varepsilon} = (d \vec{k} \times F \vec{n}) \cdot \left( \vec{e}_2 - \frac{d}{R} \vec{k} \right) \delta \varphi \\
 &= F d \delta \varphi \vec{k} \times \vec{n} \cdot \vec{e}_2 - F \frac{d^2}{R} \vec{k} \times \vec{k} \cdot \delta \varphi = F d \delta \varphi \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = F d \delta \varphi
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$Q^{(pole)} = F d$$

$$V^{(pole)} = - \int F d d\varphi = -F d \varphi$$

$$V^{(peso)} = -m \vec{g} \cdot \vec{x}_G = m g \vec{e}_2 \cdot \vec{x}_G = 2mg h \Rightarrow Q^{(peso)} = 0$$

$$V^{(tot)} = \frac{1}{2} b \varphi^2 - F d \varphi$$

$$Q^{(tot)} = \frac{dV}{d\varphi} = -b \varphi + F d$$

Quindi, l'equazione pura di equilibrio è

$$(4.1) \quad -b \varphi + Fd = 0 \Leftrightarrow \varphi_e = \frac{Fd}{b}$$

ed  $\exists!$  la configurazione di equilibrio  $\varphi_e = \frac{Fd}{b}$ .  
 $V''(\varphi) = b \Rightarrow V''(\varphi_e) > 0 \Rightarrow$  equilibrio stabile.

3) Scriviamo le ECS, tenendo conto che i vincoli in A e in C esercitano l'insieme delle reazioni vincolari

$$L = \{ (A, \vec{\Phi}), (C, \vec{\Psi}) \}$$

con  $\vec{\Psi}_C$  che, per ipotesi, soddisfa la condizione

$$(4.2) \quad \vec{\Psi}_C \cdot \vec{k} = 0$$

Dunque, dobbiamo risolvere il sistema delle ECS

$$(4.3) \quad \begin{cases} \vec{R} \begin{matrix} (x, z) \\ \end{matrix} + \vec{\Phi}_A + \vec{\Psi}_C = \vec{0} \\ \vec{M}_A \begin{matrix} (x, z) \\ \end{matrix} + (C-A) \times \vec{\Psi}_C = \vec{0} \end{cases}$$

insieme con la (4.2), tenendo conto della (4.1).

Come base di riferimento, conviene usare la base

$$B' = (\vec{k}, \vec{n}, \vec{e}_z) \text{ invece di quella fissa.}$$

Con tale base, denotiamo con

$$(4.4) \quad \vec{\Phi}_A = \phi_k \vec{k} + \phi_n \vec{n} + \phi_z \vec{e}_z$$

$$(4.5) \quad \vec{\Psi}_C \stackrel{(4.2)}{=} \psi_k \vec{k} + \psi_n \vec{n} + \psi_z \vec{e}_z$$

Le soluzioni della II ECS (4.3) sono

$$(5.1) \vec{\psi}_c = \frac{C-A}{|C-A|^2} \times M_A^{(c, c)} + \frac{f}{|C-A|^2} (C-A)$$

dove  $f$  è una funzione da determinare

Intanto, calcoliamo

$$(5.2) \begin{aligned} M_A^{(c, c)} &= (G_1 - A) \times (\vec{F} + m\vec{g}) + (G_2 - A) \times m\vec{g} - b\varphi \vec{e}_2 = d\vec{k} \times (\vec{F}\vec{n} - mg\vec{e}_2) - b\varphi \vec{e}_2 + \\ &+ \frac{d}{2} \vec{k} \times (-mg\vec{e}_2) = \\ &= F d \vec{e}_2 + mg d \vec{n} - b\varphi \vec{e}_2 + mg \frac{d}{2} \vec{n} \\ &= (F d - b\varphi) \vec{e}_2 + \frac{3mgd}{2} \vec{n} \end{aligned}$$

e osserviamo che

$$(5.3) M_A^{(c, c)} / \varphi^2 = \frac{3mgd}{2} \vec{n}$$

Allora

$$(5.4) \begin{aligned} \vec{\psi}_{c/\varphi^2} &= \frac{d\vec{k} - R\vec{e}_2}{d^2 + R^2} \times \frac{3mgd}{2} \vec{n} + f \frac{d\vec{k} - R\vec{e}_2}{d^2 + R^2} = \\ &= \frac{1}{d^2 + R^2} \left[ \frac{3mgd}{2} (d\vec{e}_2 + R\vec{k}) + f (d\vec{k} - R\vec{e}_2) \right] \\ &= \frac{1}{d^2 + R^2} \left[ \left( \frac{3}{2} mgd^2 - fR \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{3}{2} mgR + f \right) d \vec{k} \right] \end{aligned}$$

Le condizioni (4.2)  $\Rightarrow f = -\frac{3}{2} mgR$ , dunque

$$(5.5) \vec{\psi}_{c/\varphi^2} = \frac{1}{d^2 + R^2} \left( \frac{3}{2} mg (d^2 + R^2) \right) = \frac{3}{2} mg \vec{e}_2$$

Dalle I ECS (4.3) otteniamo

$$\vec{\Phi}_A = -R^{(ext, ext)} - \vec{\Psi}_c$$

$$\vec{R}^{(ext, ext)} = -2mg\vec{e}_2 + F\vec{n}$$

Da qui,

$$\vec{\Phi}_A|_{\vec{q}_c} = 2mg\vec{e}_2 - F\vec{n} - \frac{3}{2}mg\vec{e}_2 = \frac{mg}{2}\vec{e}_2 - F\vec{n}$$

Poiché i vincoli sono olonomi e non dissipativi, nella configurazione di confine possiamo utilizzare la EL relativa a  $\mathcal{Q}$ . A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del rigido come

$$(7.1) \quad K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_A^{(R)}(\vec{\omega}) \quad \text{poiché } A \text{ è un punto fisso di } \mathcal{R}$$

dove

$$(7.2) \quad \mathbb{I}_A^{(R)} = \mathbb{I}_A^{(e)} + \mathbb{I}_A^{(d)} \quad \text{e} \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} (\vec{e}_2 - \frac{d}{R} \vec{k})$$

Cometerna di riferimento per calcolare  $\mathbb{I}_A^{(e)}$  e  $\mathbb{I}_A^{(d)}$  conviene prendere la terma  $(A; \vec{n}, \vec{e}_2, \vec{k})$ . Essa è una TPI(A) sia per l'asta sia per il disco poiché è una terma barlata della terma principali centrali TPI( $G_2$ ) e TPI( $G_1$ ). Quindi,

$$(7.3) \quad \vec{n} \cdot \mathbb{I}_A^{(e)}(\vec{n}) = \frac{1}{12} m d^2 + m \frac{d^2}{4} = \frac{1}{3} m d^2$$

$$(7.4) \quad \vec{e}_2 \cdot \mathbb{I}_A^{(e)}(\vec{e}_2) = \frac{1}{3} m d^2$$

$$(7.5) \quad \vec{k} \cdot \mathbb{I}_A^{(e)}(\vec{k}) = 0$$

Allora,

$$\mathbb{I}_A^{(e)} = m d^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Inoltre,

$$(7.6) \quad \vec{n} \cdot \mathbb{I}_A^{(d)}(\vec{n}) = \frac{1}{4} m R^2 + m d^2 = m \left( \frac{R^2}{4} + m d^2 \right)$$

$$(7.7) \quad \vec{e}_2 \cdot \mathbb{I}_A^{(d)}(\vec{e}_2) = m \left( \frac{R^2}{4} + m d^2 \right)$$

$$(7.8) \quad \vec{k} \cdot \mathbb{I}_A^{(d)}(\vec{k}) = \frac{1}{2} m R^2$$

Quindi,

68

$$(8.1) \left[ \begin{array}{c} \mathbb{I}_A \\ \mathbb{I}_B \end{array} \right] = m \left[ \begin{array}{c} \frac{R^2}{4} + d^2 \\ \frac{R^2}{4} + d^2 \\ \frac{1}{2} R^2 \end{array} \right]$$

Dunque,

$$(8.2) \mathbb{I}_A^{(R)} = m \left[ \begin{array}{c} \frac{R^2}{4} + \frac{4}{3} d^2 \\ \frac{R^2}{4} + \frac{4}{3} d^2 \\ \frac{R^2}{2} \end{array} \right]$$

Allora,

$$K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot m \left[ \begin{array}{c} \frac{R^2}{4} + \frac{4}{3} d^2 \\ \frac{R^2}{4} + \frac{4}{3} d^2 \\ \frac{R^2}{2} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\varphi} \\ -\frac{d}{R} \dot{\varphi} \end{array} \right]$$

$$(8.3) = \frac{1}{2} \dot{\varphi} \left[ 0, 1, -\frac{d}{R} \right] m \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\varphi} \left( \frac{R^2}{4} + \frac{4}{3} d^2 \right) \\ -\frac{R^2}{2} \frac{d}{R} \dot{\varphi} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 \left( \frac{R^2}{4} + \frac{4}{3} d^2 + \frac{d^2}{2} \right) = \frac{1}{2} m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{11}{6} d^2 \right) \dot{\varphi}^2$$

Posto  $\alpha := m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{11}{6} d^2 \right)$ , calcoliamo  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \varphi} = Q_\varphi$

In alternative, si poteva usare la rappresentazione (8) (8)

$$(9.1) \quad K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I_C^{(a)}(\vec{\omega})$$

scegliendo la terna  $(C; \vec{n}, \vec{e}_2, \vec{k})$  che è ancora una TPI(C) per il disco, ma non lo è più per l'asta.  
Allora,

$$(9.1) \quad \vec{n} \cdot I_C^{(a)}(\vec{n}) = \frac{1}{4} m R^2 + m R^2 = \frac{5}{4} m R^2$$

$$(9.3) \quad \vec{e}_2 \cdot I_C^{(a)}(\vec{e}_2) = \frac{1}{4} m R^2$$

$$(9.4) \quad \vec{e}_2 \cdot I_C^{(a)}(\vec{e}_2) = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

$$\Rightarrow I_C^{(a)} = m R^2 \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

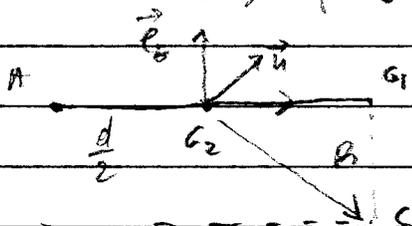
Calcoliamo  $I_C^{(e)}$  utilizzando il teo di H-S

$$(9.5) \quad [I_C^{(e)}] = [I_{G_2}^{(e)}] + m \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

$$x = (C-G_2) \cdot \vec{n} = 0$$

$$y = (C-G_2) \cdot \vec{e}_2 = -R$$

$$z = (C-G_2) \cdot \vec{k} = \frac{d}{2}$$



Allora

$$[I_C^{(e)}] = m \begin{bmatrix} \frac{d^2}{12} & & \\ & \frac{d^2}{12} & \\ & & 0 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} R^2 + \frac{d^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{4} & \frac{dR}{2} \\ 0 & \frac{dR}{2} & R^2 \end{bmatrix} =$$

$$(9.6) = m \begin{bmatrix} \frac{d^2}{3} + R^2 & & \\ & \frac{d^2}{3} & \frac{dR}{2} \\ & \frac{dR}{2} & R^2 \end{bmatrix}$$

Dunque  $I_C^{(e)} = m$  (9.7)

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{4} R^2 + \frac{d^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2 + d^2}{4} & \frac{dR}{2} \\ 0 & \frac{dR}{2} & \frac{5}{2} R^2 \end{bmatrix}$$

Calcolando la (9.1) si ricattiene il risultato (8.3)

Allora

$$(10.1) \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = a \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = a \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

L'eq. di Lagrange è

$$(10.2) \quad a \ddot{\varphi} = Q_{\varphi} \Leftrightarrow \left( \frac{R^2}{4} + \frac{11}{6} d^2 \right) \ddot{\varphi} = Fd - b\varphi$$

Il problema di Cauchy associato è

$$(10.3) \quad \begin{cases} \left( \frac{R^2}{4} + \frac{11}{6} d^2 \right) \ddot{\varphi} + b\varphi = Fd \\ \varphi(0) = 0 \\ \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases}$$

L'integrale generale è dato da

$$(10.4) \quad \varphi(t) = A \cos(\gamma t + \varphi_0) + \frac{Fd}{b} \quad \gamma := \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Imponendo le condizioni iniziali si determinano le costanti  $A$  e  $\varphi_0$ . In fatti

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cos \varphi_0 + \frac{Fd}{b} = 0 \\ -A \gamma \sin \varphi_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{Fd}{b} \\ \varphi_0 = 0 \end{cases}$$

Quindi, l'unica soluzione di (10.3) è

$$(10.5) \quad \varphi(t) = \frac{Fd}{b} (1 - \cos \gamma t)$$

11

6) Il modello è una macchina semplice soggetta a vincoli olonami, fissi e non dissipativi e sollecitazione potenziale. Quindi l'energia meccanica si conserva. È un velo

$$(11.1) \quad E = K + V = \frac{1}{2} m \left( \frac{B^2}{4} + \frac{11}{6} d^2 \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} b \varphi^2 - F d \varphi = E_{t=0} = 0$$