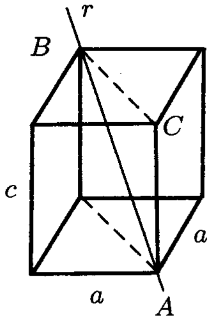
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

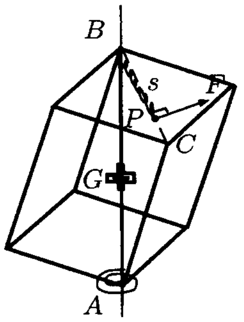
Trieste, 18 gennaio 2021. (G. Tondo)

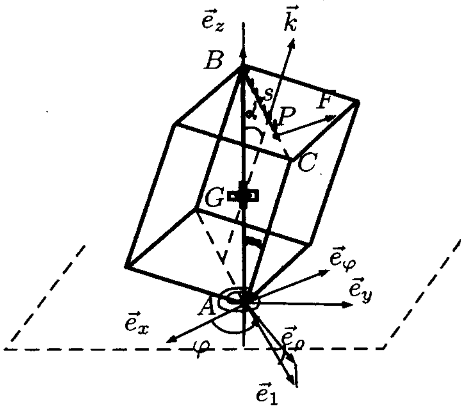
Si consideri un parallelepipedo retto, omogeneo, a base quadrata e di massa M.

1) Si calcoli il momento d'inerzia del parallelepipedo rispetto a una retta r passante per i vertici A e B.



Il parallelepipedo suddetto è vincolato a ruotare, come in figura, attorno all'asse fisso verticale $(A, \vec{e}_z)$ passante per A e B, mediante una cerniera cilindrica fissata all'asse nel baricentro G. Inoltre, un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito sulla faccia superiore del parallelepipedo, lungo la diagonale BC. La sollecitazione attiva sul parallelepipedo è data: da una molla *angolare* posta in A e di costante elastica μ e dal peso proprio. La sollecitazione attiva sul punto materiale P è data: dal peso proprio, da una forza $F > 0$ appartenente al piano della faccia superiore del parallelepipedo e diretta ortogonalmente alla diagonale BC e da una molla di costante elastica λ, fissata nel punto B del *parallelepipedo*.





STATICA

Determinare:

2) le configurazioni di equilibrio del modello costituito dal parallelepipedo e dal punto P;

3) la sollecitazione reattiva sul parallelepipedo in G e sul punto P, all'equilibrio.

DINAMICA

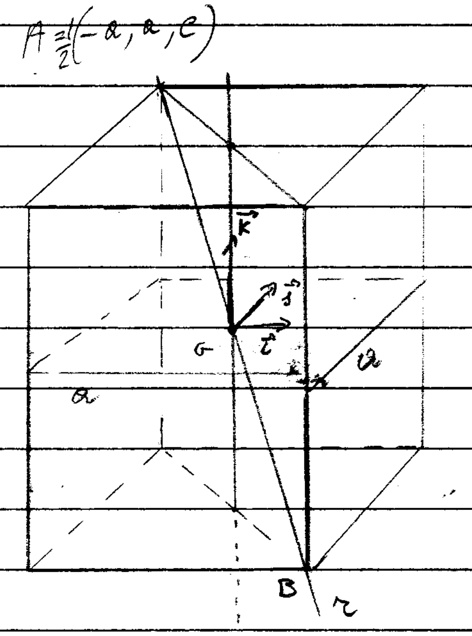
4) Scrivere un sistema di equazioni differenziali pure di moto per il modello;

5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e ricavare il moto del punto P relativo al parallelepipedo in corrispondenza delle condizioni iniziali $s(0) = s_0 \; (0 < s_0 < \overline{BC})$, $\quad \dot{s}(0) = 0$;

6) dire se il parallelepipedo è bilanciato staticamente e/o dinamicamente.

Tema del 18/01/2021

1- Geometria delle masse



La retta r contiene il baricentro G.
Per calcolare il momento d'inerzia rs. ad r, calcoliamo la matrice d'inerzia rs. alla terna

$(G; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ che è una TPG per ragioni di simmetria materiale.
Dunque

$$(1.1)\quad [I_G] = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{1}{12} M (a^2 + c^2)$$

$$I_2 = I_1 = \frac{1}{12} M (a^2 + c^2)$$

$$I_3 = \frac{1}{12} M (2a^2)$$

Determiniamo un versore di r, in particolare

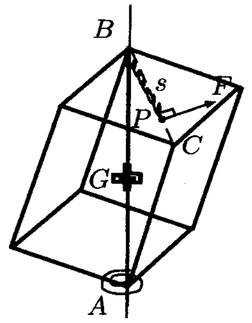
$$(1.2)\quad \frac{A-G}{|A-G|} = \frac{\left(-\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j} + \frac{c}{2}\vec{k}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2a^2+c^2}}\left(-a\vec{i} + a\vec{j} + c\vec{k}\right)$$

Allora,

$$(1.3)\quad I_r = \frac{1}{\sqrt{2a^2+c^2}} [-a, a, c] \frac{M}{12} \begin{bmatrix} a^2+c^2 & & \\ & a^2+c^2 & \\ & & 2a^2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2a^2+c^2}} \begin{bmatrix} -a \\ a \\ c \end{bmatrix} =$$

$$(1.4)\quad = \frac{M}{12(2a^2+c^2)} [-a, a, c] \begin{bmatrix} -a(a^2+c^2) \\ a(a^2+c^2) \\ 2a^2c \end{bmatrix} = \frac{M}{(2a^2+c^2)12}\left(2a^2(a^2+c^2) + 2a^2c^2\right) = \frac{M\cancel{2}a^2}{\cancel{12}_6}\,\frac{a^2+2c^2}{2a^2+c^2}$$

Il parallelepipedo è vincolato ad avere 2 punti fissi A e B e quindi un asse che contiene il baricentro G.



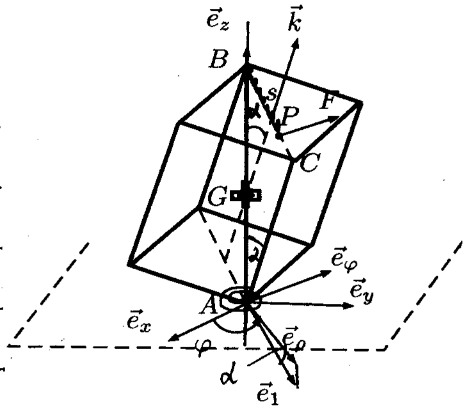
Dunque, il parallelepipedo ha 1 g.l. e come coordinata libera prendiamo l'angolo di rotazione $\varphi \in \mathbb{R}$, misurato tra 2 piani, uno fisso e uno solidale al parallelepipedo, che fisseremo qui sotto. Il punto P ha un altro grado di libertà: $0 \le s \le a\sqrt{2}$ è la seconda coordinata libera.

Consideriamo le seguenti terne di versori

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: terna "fissa"

$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: terna "intermedia"

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: terna "solidale"



Il versore $\vec{e}_z$ è scelto parallelo a un asse verticale ed $\vec{e}_x$ è scelto nel piano ortogonale ad $\vec{e}_z$, in modo che per $\varphi = 0$ la molla angolare sia a riposo.
Il versore $\vec{e}_3$ è parallelo all'asse di simmetria del parallelepipedo, $\vec{e}_1$ è parallelo alla diagonale BC ed $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$
Il versore $\vec{e}_\rho$ è parallelo alla retta di intersezione del piano (verticale) passante per i 2 assi $(A, \vec{e}_z)$, $(A, \vec{e}_1)$ ed il piano orizzontale per A.
L'angolo di rotazione φ sarà quello compreso tra l'asse fisso $(A, \vec{e}_x)$ e l'asse solidale $(A, \vec{e}_\rho)$. Infine, $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho$.

Ricaviamo le leggi di trasformazione tra le suddette terne e le loro inverse.

$$(3.1)\quad \begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y &= \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$(3.2)\quad \begin{aligned} \vec{e}_1 &= \cos\alpha\, \vec{e}_\rho - \sin\alpha\, \vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{2a^2+c^2}}\left(c\, \vec{e}_\rho - a\sqrt{2}\, \vec{e}_z\right) \\ \vec{e}_2 &= \vec{k} \times \vec{i} = \left(\cos\alpha\, \vec{e}_z + \sin\alpha\, \vec{e}_\rho\right) \times \left(\cos\alpha\, \vec{e}_\rho - \sin\alpha\, \vec{e}_z\right) = \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_3 &= \cos\alpha\, \vec{e}_z + \sin\alpha\, \vec{e}_\rho = \frac{1}{\sqrt{2a^2+c^2}}\left(c\, \vec{e}_z + a\sqrt{2}\, \vec{e}_\rho\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos\alpha\, \vec{e}_1 + \sin\alpha\, \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2a^2+c^2}}\left(c\, \vec{e}_1 + a\sqrt{2}\, \vec{e}_3\right); \quad \sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+c^2}} \\ \vec{e}_\varphi &= \vec{e}_2 \\ \vec{e}_z &= -\sin\alpha\, \vec{e}_1 + \cos\alpha\, \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2a^2+c^2}}\left(-a\sqrt{2}\, \vec{e}_1 + c\, \vec{e}_3\right); \quad \cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{c}{\sqrt{2a^2+c^2}} \end{aligned}$$

Componendo le (3.1) con le (3.2) si trova

$$(3.3)\quad \begin{aligned} \vec{e}_1 &= \cos\alpha\left(\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y\right) - \sin\alpha\, \vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{2a^2+c^2}}\left(c\cos\varphi\, \vec{e}_x + c\sin\varphi\, \vec{e}_y - a\sqrt{2}\, \vec{e}_z\right) \\ \vec{e}_2 &= -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_3 &= \sin\alpha\left(\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y\right) + \cos\alpha\, \vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{2a^2+c^2}}\left(a\sqrt{2}\cos\varphi\, \vec{e}_x + a\sqrt{2}\sin\varphi\, \vec{e}_y + c\, \vec{e}_z\right) \end{aligned}$$

e la sua inversa

$$(3.4)\quad \begin{aligned} \vec{e}_x &= \frac{c}{\sqrt{2a^2+c^2}} \cos\varphi\, \vec{e}_1 - \sin\varphi\, \vec{e}_2 + \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+c^2}} \cos\varphi\, \vec{e}_3 \\ \vec{e}_y &= \frac{c}{\sqrt{2a^2+c^2}} \sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2 + \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+c^2}} \sin\varphi\, \vec{e}_3 \\ \vec{e}_z &= \frac{1}{\sqrt{2a^2+c^2}}\left(-a\sqrt{2}\, \vec{e}_1 + c\, \vec{e}_3\right) \end{aligned}$$

Statica

I vincoli sono olonomi, non dissipativi, bilateri e fissi. Scriviamo le equazioni pure di equilibrio

(4.1) $Q_\varphi^{(att)} = 0, \quad Q_s^{(att)} = 0$

A tale scopo, calcoliamo l'energia potenziale della sollecitazione attiva

(4.2) $V(\varphi, s) = \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2 - M\vec{g}\cdot\vec{x}_G - m\vec{g}\cdot\vec{x}_P$

(4.3) $\vec{x}_G = G - A = \frac{\sqrt{2a^2+c^2}}{2}\,\vec{e}_2$

(4.4) $\vec{x}_P = P - A = (P-B)+(B-A) = s\vec{e}_1 + \sqrt{2a^2+c^2}\,\vec{e}_2 \Rightarrow \frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\varphi} = s\frac{\partial\vec{e}_1}{\partial\varphi} \overset{(3.2)}{=} s\frac{c}{\sqrt{2a^2+c^2}}\frac{\partial\vec{e}_1}{\partial\varphi}$

Quindi $\quad \frac{\partial\vec{x}_P}{\partial s} = \vec{e}_1$

(4.5) $V(\varphi, s) = \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2 + Mg\,\vec{e}_2\cdot\frac{\sqrt{2a^2+c^2}}{2}\vec{e}_2 + mg\,\vec{e}_2\cdot\left(s\vec{e}_1 + \sqrt{2a^2+c^2}\,\vec{e}_2\right)$

$= \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2 + \cancel{Mg\frac{\sqrt{2a^2+c^2}}{2}} + mgs\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 + \cancel{mg\sqrt{2a^2+c^2}}$

a meno di termini costanti $= \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2 - mgs\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+c^2}}$

Allora,

(4.6) $Q_\varphi^{(cons)} = -\frac{\partial V}{\partial\varphi} = -\mu\varphi$

(4.7) $Q_s^{(cons)} = -\frac{\partial V}{\partial s} = -\lambda s + mg\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+c^2}}$

Ora, calcoliamo le componenti lagrangiane del carico follower agente su P:

$$(5.1)\quad Q_\varphi^{(foll)} = \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = F\vec{e}_2 \cdot \frac{s\,c}{\sqrt{2a^2+c^2}} \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \varphi} = F\frac{s\,c}{\sqrt{2a^2+c^2}}\, \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{c\,F s}{\sqrt{2a^2+c^2}}$$

$$(5.2)\quad Q_s^{(foll)} = \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial s} = F\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q_\varphi}{\partial s} \neq \frac{\partial Q_s}{\partial \varphi}$$

Dunque,

$$(5.3)\quad Q_\varphi = -\mu\varphi + \frac{c}{\sqrt{2a^2+c^2}} F s$$

$$(5.4)\quad Q_s = -\lambda s + mg\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+c^2}}$$

Le eq. pure di equilibrio sono:

$$\begin{cases} (5.5)\quad -\mu\varphi + \dfrac{c}{\sqrt{2a^2+c^2}} F s = 0 \\ (5.6)\quad -\lambda s + \dfrac{mg\,a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+c^2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_e = \dfrac{c\,F}{\mu\sqrt{2a^2+c^2}} s_e = \dfrac{c}{\mu\lambda} F \dfrac{mg\,a\sqrt{2}}{2a^2+c^2} \\ s_e = \dfrac{mg\,a\sqrt{2}}{\lambda\sqrt{2a^2+c^2}} \end{cases}$$

Quindi, il modello ammette la sola configurazione di equilibrio

$$(5.7)\quad \vec{q}_e = \left(\frac{F}{\lambda\mu} mg \frac{a c\sqrt{2}}{2a^2+c^2},\ \frac{mg}{\lambda}\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+c^2}}\right) = (\varphi_e, s_e)$$

3) Reazioni vincolari all'equilibrio in G sul parallelepipedo e sul pto P

La cerniera cilindrica in G esercita, sul rigido, una sollecitazione reattiva

(6.1) $$\mathcal{L}^{(reatt)} = \left\{ \left(G, \vec{\Psi}\right), \vec{\Gamma} \right\} \qquad \vec{\Gamma} \cdot \vec{e_z} = 0$$

mentre il vincolo liscio in P una reazione ϕ_P posta nel piano ortogonale a $\vec{e_1}$

(6.2) $$\vec{\phi}_P = \phi_2 \vec{e_2} + \phi_3 \vec{e_3}$$

Quindi, dobbiamo trovare (5+2) incognite.
A tale scopo, scriviamo le ECS su tutto il modello:

(6.3) $$\vec{R}^{(est,att)} + \vec{R}^{(est,reatt)} = \vec{0} \iff \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\Psi}_G = 0$$

(6.4) $$\vec{M}_G^{(est,att)} + \vec{M}_G^{(est,reatt)} = \vec{0} \qquad \vec{M}_G^{(est,att)} + \vec{\Gamma} = \vec{0}$$

Dalla (6.3), ricaviamo immediatamente $\vec{\Psi}_G$

$$\vec{\Psi}_G = - \vec{R}^{(est,att)}$$

$$\vec{R}^{(est,att)} = (M+m)\,\vec{g} + \vec{F}_p = -(M+m)\,g\,\vec{e_z} + F\,\vec{e_2}$$

Quindi,

(7.1) $$\vec{\Psi}_G = (M+m)\, g\, \vec{e}_2 - F\, \vec{e}_2 \big|_{\vec{q}_e}$$

Dalle (8.5) ricaviamo

(7.2) $$\vec{\Gamma} = -\vec{M}_G^{(est,att)}$$

$$\vec{M}_G^{(est,att)} = -\mu\varphi\,\vec{e}_2 + (P-G)\times(\vec{F}+m\vec{g}) = -\mu\varphi\,\vec{e}_2 + ((P-B)+(B-G))\times(F\vec{e}_2 - mg\vec{e}_2)$$

$$= -\mu\varphi\,\vec{e}_2 + \left(s\,\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2a^2+c^2}}{2}\,\vec{e}_2\right)\times\left(F\vec{e}_2 - mg\,\vec{e}_2\right) =$$

(7.3) $$= -\mu\varphi\,\vec{e}_2 + Fs\,\vec{e}_3 - mgs\,\vec{e}_1\times\vec{e}_2 + \frac{F\sqrt{2a^2+c^2}}{2}\,\vec{e}_2\times\vec{e}_2 =$$

$$= -\mu\varphi\,\vec{e}_2 + Fs\frac{1}{\sqrt{2a^2+c^2}}\left(c\,\vec{e}_2 + a\sqrt{2}\,\vec{e}_\rho\right) + \vec{e}_2\times\left[\frac{mgs}{\sqrt{2a^2+c^2}}\left(c\,\vec{e}_\rho - a\sqrt{2}\,\vec{e}_2\right) + \frac{F\sqrt{2a^2+c^2}}{2}\,\vec{e}_\varphi\right]$$

$$= \cancel{-\mu\varphi_e\,\vec{e}_2} + \frac{Fs_e}{\sqrt{2a^2+c^2}}\left(\cancel{c\,\vec{e}_2} + a\sqrt{2}\,\vec{e}_\rho\right) + \frac{mg\,s_e\,c}{\sqrt{2a^2+c^2}}\,\vec{e}_\varphi - F\frac{\sqrt{2a^2+c^2}}{2}\,\vec{e}_\rho =$$

$$= F\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+c^2}}\,s_e - \frac{\sqrt{2a^2+c^2}}{2}\right)\vec{e}_\rho + \frac{mgc}{\sqrt{2a^2+c^2}}\,s_e\,\vec{e}_\varphi =$$

$$= F\left(\frac{2a^2}{2a^2+c^2}\,\frac{mg}{\lambda} - \frac{\sqrt{2a^2+c^2}}{2}\right)\vec{e}_\rho\Big|_{\vec{q}_e} + \frac{ac\sqrt{2}}{2a^2+c^2}\,\frac{(mg)^2}{\lambda}\,\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e}$$

Quindi,

(7.4) $$\vec{\Gamma} = -F\left(\frac{2a^2}{2a^2+c^2}\,\frac{mg}{\lambda} - \frac{\sqrt{2a^2+c^2}}{2}\right)\vec{e}_\rho - \frac{ac\sqrt{2}}{2a^2+c^2}\,\frac{(mg)^2}{\lambda}\,\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e}$$

Dall'equaz. $\vec{R}_P + \vec{\Phi}_P = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\Phi}_P = -\vec{R}_P$

(7.5) $$\vec{\Phi}_P = -\left(m\vec{g} - \lambda s\,\vec{e}_1 + F\vec{e}_2\right) = mg\,\vec{e}_2 + \lambda s_e\,\vec{e}_1\Big|_{\vec{q}_e} - F\,\vec{e}_2\Big|_{\vec{q}_e}$$

Dunque, proiettando la Φ_P sulla terna $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ si trova

(7.6) $$\vec{\Phi}_P\Big|_{\vec{q}_e} = \frac{mg}{\sqrt{2a^2+c^2}}\left(\cancel{-a\sqrt{2}\,\vec{e}_1} + c\,\vec{e}_3\right) + \cancel{\lambda\,\frac{mg}{\lambda}\,\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+c^2}}\,\vec{e}_1} - F\,\vec{e}_2 =$$

$$= \frac{mg}{\sqrt{2a^2+c^2}}\,c\,\vec{e}_3\Big|_{\vec{q}_e} - F\,\vec{e}_2\Big|_{\vec{q}_e}$$

Dinamica

4) Scriviamo le equazioni di Lagrange
A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello.

$$K = K^{(rig)} + K^{(P)}$$

(8.1)
$$K^{(rig)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot \mathbb{I}_G(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_2\cdot \mathbb{I}_G(\dot{\varphi}\,\vec{e}_2) = $$
$$= \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_2\cdot \mathbb{I}_G(\vec{e}_2)$$

Lo scalare $\vec{e}_2\cdot \mathbb{I}_G(\vec{e}_2)$ è il momento d'inerzia del parallelepipedo rs. all'asse di rotazione per G e A, quindi

(8.2)
$$\vec{e}_2\cdot \mathbb{I}_G(\vec{e}_2) = I_{r2} \overset{(1.4)}{=} \frac{a^2+2c^2}{2a^2+c^2}\,\frac{Ma^2}{6}$$

Dunque

(8.3)
$$K^{(rig)} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+2c^2}{2a^2+c^2}\,\frac{Ma^2}{6}\right)\dot{\varphi}^2$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2}\,m\,|\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(P-A) = \frac{d}{dt}\Big((P-B)+(B-A)\Big) = \frac{d}{dt}(P-B) = \frac{d}{dt}(s\,\vec{e}_1) = \dot{s}\,\vec{e}_1 + s\,\dot{\vec{e}}_1$$

(8.4)
$$\dot{\vec{e}}_1 = \vec{\omega}\times\vec{e}_1 = \dot{\varphi}\,\vec{e}_2\times\vec{e}_1 = \dot{\varphi}\,\frac{1}{\sqrt{2a^2+c^2}}\left(-a\sqrt{2}\,\vec{e}_1 + c\,\vec{e}_3\right)\times\vec{e}_1 = \frac{c}{\sqrt{2a^2+c^2}}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_2$$

(8.5)
$$\vec{v}_P = \dot{s}\,\vec{e}_1 + \frac{c}{\sqrt{2a^2+c^2}}\,s\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_2 \;\Rightarrow\; |\vec{v}_P|^2 = \dot{s}^2 + \frac{c^2}{2a^2+c^2}\,s^2\,\dot{\varphi}^2$$

Allora

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m \left(\dot{s}^2 + \frac{c^2}{2a^2+c^2} s^2 \dot{\varphi}^2 \right) \quad (9.1)$$

e

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+2c^2}{2a^2+c^2} \frac{M a^2}{6} \dot{\varphi}^2 + m \dot{s}^2 + \frac{m c^2 s^2 \dot{\varphi}^2}{2a^2+c^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[m \dot{s}^2 + \left(\underbrace{\frac{a^2}{6} \frac{a^2+2c^2}{2a^2+c^2} M}_{I_z} + \frac{m c^2}{2a^2+c^2} s^2 \right) \dot{\varphi}^2 \right] \quad (9.2)$$

Scriviamo le EL

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \left(I_z + \frac{m c^2 s^2}{2a^2+c^2} \right) \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \left(I_z + \frac{m c^2}{2a^2+c^2} s^2 \right) \ddot{\varphi} + \frac{2 m c^2}{2a^2+c^2} s \dot{s} \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$EL_\varphi : \left(I_z + \frac{m c^2}{2a^2+c^2} s^2 \right) \ddot{\varphi} + \frac{m c^2}{2a^2+c^2} 2 s \dot{s} \dot{\varphi} = -\mu \varphi + \frac{c F}{\sqrt{2a^2+c^2}} s \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = m \dot{s} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = m \ddot{s}$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = \frac{m c^2}{2a^2+c^2} s \dot{\varphi}^2$$

$$EL_s : m \left(\ddot{s} - \frac{c^2}{2a^2+c^2} s \dot{\varphi}^2 \right) = -\lambda s + \frac{m g a \sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+c^2}} \quad (9.4)$$

5) linearizzazione

(10.1)
$$K = \frac{1}{2}[\dot\varphi, \dot s]\begin{bmatrix} I_2 + \frac{mc^2}{2a^2+c^2}s^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\varphi \\ \dot s\end{bmatrix} -$$

Le EL linearizzate sono della forma

(10.2)
$$A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0 \qquad \vec{x} = \frac{\vec{q} - \vec{q}_e}{\varepsilon}$$

(10.3)
$$A = A(q_e) = \begin{bmatrix} I_2 + \frac{mc^2}{2a^2+c^2}s^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \qquad B_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \dot q_j}\Big|_{\vec{q}_e} = 0$$

(10.4)
$$C_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\Big|_{q_e} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\varphi}{\partial s} \\ \frac{\partial Q_s}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_s}{\partial s}\end{bmatrix}\Bigg|_{\vec{q}_e} = \begin{bmatrix} \mu & -\frac{cF}{\sqrt{2a^2+c^2}} \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Dunque, il sistema (10.2) si scrive

(10.5)
$$\begin{bmatrix} I_2 + \frac{mc^2}{2a^2+c^2}s_e^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot x_1 \\ \ddot x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu & -\frac{cF}{\sqrt{2a^2+c^2}} \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}$$

cioè

(10.6)
$$\begin{cases} \left(I_2 + \frac{m^2 g\, a c^2\sqrt{2}}{\lambda\,(2a^2+c^2)^{3/2}}\right)\ddot x_1 + \mu x_1 - \frac{cF}{\sqrt{2a^2+c^2}}x_2 = 0 \\ m\,\ddot x_2 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

Per trovare il moto linearizzato del punto P rispetto al rigido, prima risolviamo la seconda EDO del sistema (10.6)

(11.1) $$\ddot{x}_2 + \frac{\lambda}{m} x_2 = 0 \iff x_2(t) = \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \beta\right)$$ α, β costanti arbitrarie

Poi ricordiamo che

(11.2) $$x_2 = \frac{s - s_e}{\varepsilon}.$$

Quindi, sostituendo la (11.2) nell'integrale generale della (11.1) si trova

(11.3) $$\frac{s - s_e}{\varepsilon} = \frac{\alpha'}{\varepsilon} \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \beta\right)$$

Dunque

(11.4) $$s(t) = s_e + \alpha' \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \beta\right)$$

Ora, imponiamo nella (11.4) le condizioni iniziali

(11.5) $$s(0) = s_0, \quad \dot{s}(0) = 0$$

(11.6) $$\begin{cases} s_e + \alpha' \cos\beta = s_0 \\ -\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, \alpha' \sin\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha' = s_0 - s_e \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Quindi, la soluzione particolare che soddisfa le (11.5) è

(11.7) $$s(t) = \frac{m g a \sqrt{2}}{\lambda \sqrt{2a^2 + c^2}} + \left(s_0 - \frac{m g a \sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+c^2}}\right) \cos \sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t$$

6) Bilanciamento statico e dinamico.

Il parallelepipedo è bilanciato staticamente poichè il suo baricentro appartiene all'asse di rotazione. Invece non è bilanciato dinamicamente poichè l'asse di rotazione non è un API. Infatti,

$$\mathbb{I}_G(B-A) = [\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}]\ \frac{M}{12}\begin{bmatrix} a^2+c^2 & & \\ & a^2+c^2 & \\ & & 2a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -a \\ a \\ c \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{M}{12}[\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}]\begin{bmatrix} -a(a^2+c^2) \\ a(a^2+c^2) \\ 2a^2(c) \end{bmatrix} = \frac{Ma}{12}\left[-(a^2+c^2)\vec{i}+(a^2+c^2)\vec{j}+2a^2c\vec{k}\right]$$

Dunque

$$(B-A)\times\mathbb{I}_G(B-A) = \frac{Ma}{12}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & a & c \\ -(a^2+c^2) & (a^2+c^2) & 2a^2c \end{vmatrix} \neq \vec{0}$$

cioè $B-A$ non è parallelo a $\mathbb{I}_G(B-A)$.