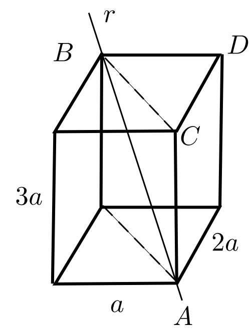
Compito di Meccanica Razionale

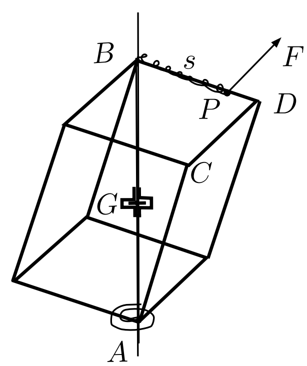
Trieste, 22 febbraio 2021. (G. Tondo)

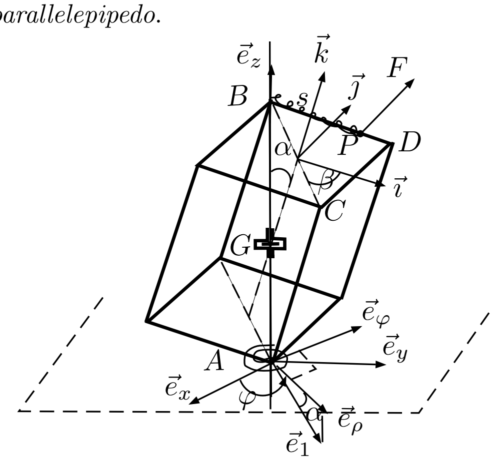
Si consideri un parallelepipedo retto, omogeneo, a base rettangolare e di massa M.

1) Si calcoli il momento d'inerzia del parallelepipedo rispetto a una retta r passante per i vertici A e B.



Il parallelepipedo suddetto è vincolato a ruotare, come in figura, attorno all'asse fisso verticale $(A, \vec{e}_z)$ passante per A e B, mediante una cerniera cilindrica fissata all'asse nel baricentro G. Inoltre, un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito sulla faccia superiore del parallelepipedo, lungo il lato BD. La sollecitazione attiva sul parallelepipedo è data: da una molla *angolare* di costante elastica μ, posta in A e dal peso proprio. La sollecitazione attiva sul punto materiale P è data: dal peso proprio, da una forza $F > 0$ diretta lungo il lato CD e da una molla di costante elastica λ, fissata nel punto B del *parallelepipedo*.





STATICA

Determinare:

2) le configurazioni di equilibrio del modello costituito dal parallelepipedo e dal punto P;

3) la sollecitazione reattiva sul parallelepipedo in G e sul punto P, all'equilibrio.

DINAMICA

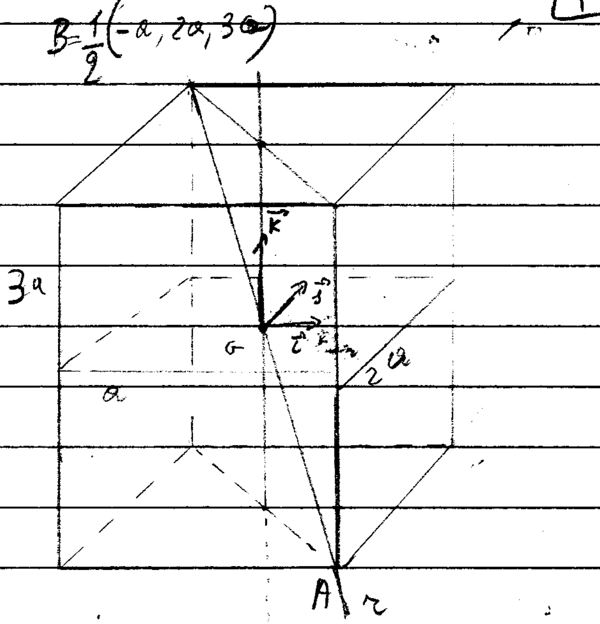
4) Scrivere un sistema di equazioni differenziali pure di moto per il modello;

5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e ricavare il moto del punto P relativo al parallelepipedo in corrispondenza delle condizioni iniziali
$s(0) = s_e, \quad \dot{s}(0) = v_0$;

6) determinare gli angoli di Eulero $(\tilde{\varphi}, \theta, \psi)$ della terna $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ rispetto alla terna $(A; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ e le loro relazioni con gli angoli (φ, α, β) della figura.

Tema del 22/02/2021

1- Geometria delle masse



La retta r contiene il baricentro G. Per calcolare il momento d'inerzia rs. ad r, calcoliamo la matrice d'inerzia rs. alla terna

$(G; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ che è una TPG per ragioni di simmetria materiale. Dunque

$$(1.1)\quad [I_G] = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{1}{12} M \left((2a)^2 + (3a)^2\right) = \frac{13}{12} M a^2$$

$$I_2 = I_1 = \frac{1}{12} M \left(a^2 + (3a)^2\right) = \frac{10}{12} M a^2 = \frac{5}{6} M a^2$$

$$I_3 = \frac{1}{12} M \left(a^2 + (2a)^2\right) = \frac{5}{12} M a^2$$

Determiniamo un versore di r, in particolare

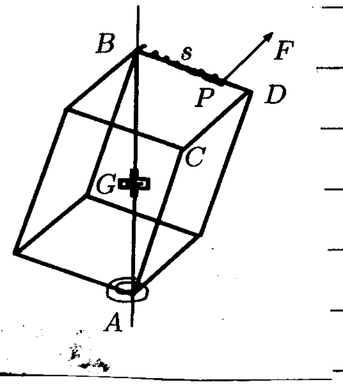
$$(1.2)\quad \frac{A-G}{|A-G|} = \frac{\left(-\frac{a}{2}\vec{i} + a\vec{j} + \frac{3a}{2}\vec{k}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (2a)^2 + (3a)^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}\,a}\left(-\frac{a}{2}\vec{i} + 2a\vec{j} + \frac{3a}{2}\vec{k}\right)$$

Allora,

$$(1.3)\quad I_r = \frac{1}{\sqrt{14}}\,[-1, 2, 3]\,\frac{Ma^2}{12}\begin{bmatrix} 13 & & \\ & 10 & \\ & & 5 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$(1.4)\quad = \frac{M a^2}{14 \cdot 12}\,[-1, 2, 3]\begin{bmatrix} -13 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} = \frac{M a^2}{7 \cdot 24}(13 + 40 + 45) = \frac{\cancel{98}^{\,7}}{\cancel{7 \cdot 24}_{\,12}} M a^2 = \frac{7}{12} M a^2$$

Il parallelepipedo è vincolato ad avere 2 punti fissi A e B e quindi un asse che contiene il baricentro G.



Dunque, il parallelepipedo ha 1 g.l. e come coordinata libera prendiamo l'angolo di rotazione $\varphi \in \mathbb{R}$, misurato tra 2 piani, uno fisso e uno solidale al parallelepipedo, che fisseremo qui sotto. Il punto P ha un altro grado di libertà: $0 \le s \le a\sqrt{5}$ è la seconda coordinata libera.

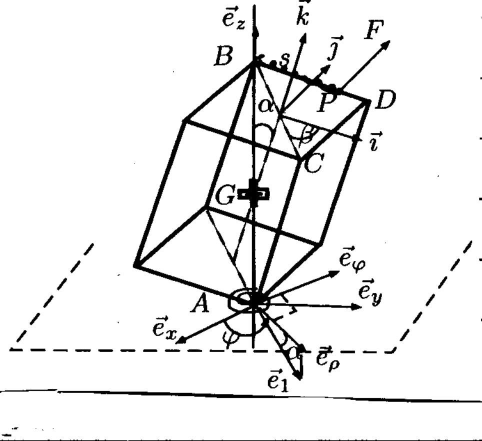
Consideriamo le seguenti terne di versori

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: terna "fissa"

$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: terna "intermedia"

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: terna "solidale"

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: terna "solidale"



Il versore $\vec{e}_z$ è scelto parallelo a un asse verticale ed $\vec{e}_x$ è scelto nel piano ortogonale ad $\vec{e}_z$, in modo che per $\varphi = 0$ la molla angolare sia a riposo.

Il versore $\vec{e}_3$ è parallelo all'asse di simmetria del parallelepipedo, $\vec{e}_1$ è parallelo alla diagonale BC ed $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$.

Il versore $\vec{e}_\rho$ è parallelo alla retta d'intersezione del piano (verticale) passante per i 2 assi $(A, \vec{e}_z)$, $(A, \vec{e}_1)$ ed il piano orizzontale per A.

L'angolo di rotazione φ sarà quello compreso tra l'asse fisso $(A, \vec{e}_x)$ e l'asse solidale $(A, \vec{e}_\rho)$. Infine, $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho$.

Ricaviamo le leggi di trasformazione tra le suddette terne e le loro inverse.

$$(3.1)\quad \begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos\varphi\,\vec{e}_\rho - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y &= \sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$(3.2)\quad \begin{aligned} \vec{e}_1 &= \cos\alpha\,\vec{e}_\rho - \sin\alpha\,\vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(3\,\vec{e}_\rho - \sqrt{5}\,\vec{e}_z\right) \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \left(\cos\alpha\,\vec{e}_z + \sin\alpha\,\vec{e}_\rho\right)\times\left(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho - \sin\alpha\,\vec{e}_z\right) = \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_3 &= \cos\alpha\,\vec{e}_z + \sin\alpha\,\vec{e}_\rho = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(3\,\vec{e}_z + \sqrt{5}\,\vec{e}_\rho\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos\alpha\,\vec{e}_1 + \sin\alpha\,\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(3\,\vec{e}_1 + \sqrt{5}\,\vec{e}_3\right); \quad \sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}}\sqrt{\frac{5}{14}} \\ \vec{e}_\varphi &= \vec{e}_2 \\ \vec{e}_z &= -\sin\alpha\,\vec{e}_1 + \cos\alpha\,\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(-\sqrt{5}\,\vec{e}_1 + 3\,\vec{e}_3\right); \quad \cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\cancel{a}\,3}{\cancel{a}\sqrt{14}} \end{aligned}$$

Componendo le (3.1) con le (3.2) si trova

$$(3.3)\quad \begin{aligned} \vec{e}_1 &= \cos\alpha\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right) - \sin\alpha\,\vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(3\cos\varphi\,\vec{e}_x + 3\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sqrt{5}\,\vec{e}_z\right) \\ \vec{e}_2 &= -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_3 &= \sin\alpha\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right) + \cos\alpha\,\vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(\sqrt{5}\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sqrt{5}\sin\varphi\,\vec{e}_y + 3\,\vec{e}_z\right) \end{aligned}$$

e le sue inverse

$$(3.4)\quad \begin{aligned} \vec{e}_x &= \frac{3}{\sqrt{14}}\cos\varphi\,\vec{e}_1 - \sin\varphi\,\vec{e}_2 + \sqrt{\frac{5}{14}}\cos\varphi\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_y &= \frac{3}{\sqrt{14}}\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2 + \sqrt{\frac{5}{14}}\sin\varphi\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_z &= \frac{1}{\sqrt{14}}\left(-\sqrt{5}\,\vec{e}_1 + 3\,\vec{e}_3\right) \end{aligned}$$

$$(3.5)\quad \begin{aligned} \vec{i} &= \cos\beta\, \vec{e}_1 + \sin\beta\, \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt5}\left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2\right) \\ \vec{j} &= -\sin\beta\, \vec{e}_1 + \cos\beta\, \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt5}\left(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) \\ \vec{k} &= \vec{e}_3 \end{aligned} \qquad \cos\beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\alpha}{\alpha\sqrt5} \quad \sin\beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{2\alpha}{\alpha\sqrt5}$$

e la sua inversa:

$$(3.6)\quad \begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt5}\left(\vec{i} - 2\vec{j}\right) \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt2}\left(2\vec{i} + \vec{j}\right) \\ \vec{e}_3 &= \vec{k} \end{aligned}$$

Componendo la (3.5) con la (3.2) si ottiene

$$(3.7)\quad \begin{aligned} \vec{i} &= \frac{1}{\sqrt5\,\sqrt{14}}\left(3\vec{e}_\rho - \sqrt5\,\vec{e}_z\right) + \frac{2}{\sqrt5}\vec{e}_\varphi \;; & \vec{e}_\rho &= \frac{3}{\sqrt{70}}\vec{i} - \frac{6}{\sqrt{70}}\vec{j} + \sqrt{\frac{5}{14}}\,\vec{k} \\ \vec{j} &= \frac{-2}{\sqrt5\,\sqrt{14}}\left(3\vec{e}_\rho - \sqrt5\,\vec{e}_z\right) + \frac{1}{\sqrt5}\vec{e}_\varphi \;; & \vec{e}_\varphi &= \frac{2}{\sqrt5}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt5}\vec{j} \\ \vec{k} &= \frac{1}{\sqrt{14}}\left(3\vec{e}_z + \sqrt5\,\vec{e}_\rho\right) \;; & \vec{e}_z &= -\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k} \end{aligned}$$

Dunque

$$(3.8)\quad \frac{\partial \vec{i}}{\partial\varphi} = \frac{3}{\sqrt{70}}\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial\varphi} + \frac{2}{\sqrt5}\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} \overset{(3.1)}{=} \frac{3}{\sqrt{70}}\vec{e}_\varphi - \frac{2}{\sqrt5}\vec{e}_\rho$$

$$(3.10)\quad \begin{aligned} \vec{e}_z \times \vec{i} &= \vec{e}_z \times \left(\frac{3}{\sqrt{70}}\vec{e}_\rho - \cancel{\frac{\sqrt5}{\sqrt{70}}\vec{e}_z} + \frac{2}{\sqrt5}\vec{e}_\varphi\right) = \frac{3}{\sqrt{70}}\vec{e}_\varphi - \frac{2}{\sqrt5}\vec{e}_\rho \\ \vec{e}_z \times \vec{j} &= \vec{e}_z \times \left(\frac{-6}{\sqrt{70}}\vec{e}_\rho + \cancel{\frac{2}{\sqrt{14}}\vec{e}_z} + \frac{1}{\sqrt5}\vec{e}_\varphi\right) = -\left(\frac{6}{\sqrt{70}}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\sqrt5}\vec{e}_\rho\right) \end{aligned}$$

Statica

I vincoli sono olonomi, non dissipativi, bilateri e fissi. Scriviamo le equazioni pure di equilibrio

$$(4.1)\quad Q_\varphi^{(att)} = 0, \qquad Q_s^{(att)} = 0$$

A tale scopo, calcoliamo l'energia potenziale della sollecitazione attiva

$$(4.2)\quad V(\varphi, s) = \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2 - M\vec{g}\cdot\vec{x}_G - m\vec{g}\cdot\vec{x}_P$$

$$(4.3)\quad \vec{x}_G = G - A = \frac{\sqrt{14}}{2}\, a\, \vec{e}_z$$

$$(4.4)\quad \vec{x}_P = P - A = (P-B) + (B-A) = s\vec{\iota} + \sqrt{14}\, a\, \vec{e}_z \Rightarrow \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = s\frac{\partial \vec{\iota}}{\partial \varphi} \overset{(3.7)}{=} \left(\frac{3}{\sqrt{70}}\vec{e}_\varphi - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_\rho\right)s$$

Quindi $\qquad \dfrac{\partial \vec{x}_P}{\partial s} = \vec{\iota}$

$$(4.5)\quad V(\varphi, s) = \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2 + Mg\,\vec{e}_z\cdot\frac{\sqrt{14}}{2}a\vec{e}_z + mg\,\vec{e}_z\cdot\left(s\vec{\iota} + \sqrt{14}\,a\vec{e}_z\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2 + \cancel{Mg\frac{\sqrt{14}}{2}a} + mgs\,\vec{e}_z\cdot\vec{\iota} + \cancel{mg\sqrt{14}\,a}$$

a meno di termini costanti $\displaystyle = \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2 - mgs\frac{1}{\sqrt{14}}$

Allora,

$$(4.6)\quad Q_\varphi^{(cons)} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\mu\varphi$$

$$(4.7)\quad Q_s^{(cons)} = -\frac{\partial V}{\partial s} = -\lambda s + mg\frac{1}{\sqrt{14}}$$

Ora, calcoliamo le componenti lagrangiane del carico "follower" agente su P:

$$(5.1)\quad Q_\varphi^{(foll)} = \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = F\vec{j} \cdot s\left(\frac{3}{\sqrt{70}}\vec{e}_\varphi - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_s\right) = Fs\left(\frac{3}{\sqrt{70}}\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{6}{\sqrt{70}}\right),$$

$$(5.2)\quad Q_s^{(foll)} = \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial s} = F\vec{j} \cdot \vec{i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q_\varphi}{\partial s} \neq \frac{\partial Q_s}{\partial \varphi}$$

Dunque,

$$(5.3)\quad Q_\varphi = -\mu\varphi + Fs\frac{3}{\sqrt{14}} \quad \Leftarrow \quad \frac{3}{\sqrt{350}} + \frac{12}{\sqrt{350}} = \frac{15}{\sqrt{350}} = \frac{15}{5\sqrt{14}}\, 3$$

$$(5.4)\quad Q_s = -\lambda s + mg\frac{1}{\sqrt{14}}$$

Le eq. pure di equilibrio sono:

$$\begin{cases} (5.5)\quad -\mu\varphi + Fs\dfrac{3}{\sqrt{14}} = 0 \\ (5.6)\quad -\lambda s + \dfrac{mg}{\sqrt{14}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi_e = \dfrac{F s_e}{\mu}\dfrac{3}{\sqrt{14}} = \dfrac{F mg}{\lambda\mu}\dfrac{3}{14} \\ s_e = \dfrac{mg}{\lambda}\dfrac{1}{\sqrt{14}} \end{cases}$$

Quindi, il modello ammette la sola configurazione di equilibrio

$$(5.7)\quad \vec{q}_e = \left(\frac{F}{\lambda\mu}mg\frac{3}{14},\ \frac{mg}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = (\varphi_e, s_e)$$

3) Reazioni vincolari all'equilibrio in G sul parallelepipedo e sul pto P

La cerniera cilindrica in G esercita, sul rigido, una sollecitazione reattiva

$$(6.1)\qquad \mathcal{L}^{(reatt)} = \{(G, \vec{\Psi}), \vec{\Gamma}\} \qquad \vec{\Gamma}\cdot \vec{e}_z = 0$$

mentre il vincolo liscio in P una reazione ϕ_P posta nel piano ortogonale a $\vec{\imath}$

$$(6.2)\qquad \vec{\Phi}_P = \phi_2 \vec{j} + \phi_3 \vec{k}$$

Quindi, dobbiamo trovare (5+2) incognite.
A tale scopo, scriviamo le ECS su tutto il modello:

$$(6.3)\qquad \vec{R}^{(est,att)} + \vec{R}^{(est,reatt)} = \vec{0} \iff \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\Psi}_G = 0$$

$$(6.4)\qquad \vec{M}_G^{(est,att)} + \vec{M}_G^{(est,reatt)} = \vec{0} \qquad \vec{M}_G^{(est,att)} + \vec{\Gamma} = \vec{0}$$

Dalla (6.3), ricaviamo immediatamente $\vec{\Psi}_G$

$$\vec{\Psi}_G = -\vec{R}^{(est,att)}$$

$$\vec{R}^{(est,att)} = (M+m)\vec{g} + \vec{F}_P = -(M+m) g \vec{e}_z + F\vec{j}$$

Quindi,

(7.1) $$\vec{\Psi}_G = (M+m) g \vec{e}_z - F \vec{j}_{|q_e} = (M+m) g \vec{e}_t - F\left(-\frac{6}{\sqrt{70}}\vec{e}_\xi + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{e}_t + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= \left((M+m) g - \frac{2F}{\sqrt{14}}\right)\vec{e}_t + \frac{6F}{\sqrt{70}}\vec{e}_\xi - \frac{F}{\sqrt{5}}\vec{e}_\varphi$$

Dalle (6.4) ricaviamo

(7.2) $$\vec{\Gamma} = -\vec{M}_G^{(est,att)}$$

$$\vec{M}_G^{(est,att)} = -\mu\varphi\vec{e}_z + (P-G)\times(\vec{F}+m\vec{g}) = -\mu\varphi\vec{e}_t + ((P-B)+(B-G))\times(F\vec{j} - mg\vec{e}_z)$$

$$= -\mu\varphi\vec{e}_z + \left(s\vec{i} + \frac{\sqrt{14}}{2}a\vec{e}_t\right)\times(F\vec{j} - mg\vec{e}_z) =$$

(7.3) $$= -\mu\varphi\vec{e}_z + Fs\vec{k} - mgs\,\vec{i}\times\vec{e}_z + \frac{F\sqrt{14}}{2}a\,\vec{e}_z\times\vec{j} =$$

$$= -\mu\varphi\vec{e}_t + Fs\frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{e}_t + \sqrt{5}\vec{e}_\xi) + \vec{e}_z\times\left[mgs\vec{i} + \frac{F\sqrt{14}}{2}a\vec{j}\right]$$

(5.5) et (3.10)
$$= -\cancel{\mu\varphi_e\vec{e}_t} + \frac{Fs_e}{\sqrt{14}}(3\vec{e}_t + \sqrt{5}\vec{e}_\xi) + mgs_e\left(\frac{3}{\sqrt{70}}\vec{e}_\varphi - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_\xi\right) - \frac{F\sqrt{14}}{2}a\left(\frac{6}{\sqrt{70}}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_\xi\right)$$

$$= \left[\left(\sqrt{\frac{5}{14}}F - \frac{2}{\sqrt{5}}mg\right)s_e - \frac{F}{2}a\sqrt{\frac{14}{5}}\right]\vec{e}_\xi + \frac{3}{\sqrt{70}}\left(mgs_e - Fa\sqrt{14}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$= \left[F\left(\frac{\sqrt{5}}{14}\frac{mg}{\lambda} - \sqrt{\frac{14}{5}}\frac{a}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{70}}\frac{(mg)^2}{\lambda}\right]\vec{e}_{\xi|q_e} + \frac{3}{\sqrt{70}}\left(\frac{(mg)^2}{\lambda\sqrt{14}} - Fa\sqrt{14}\right)\vec{e}_{\varphi|q_e}$$

Quindi

(7.4) $$\vec{\Gamma} = -\left[F\left(\frac{\sqrt{5}}{14}\frac{mg}{\lambda} - \sqrt{\frac{14}{5}}\frac{a}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{70}}\frac{(mg)^2}{\lambda}\right]\vec{e}_{\xi|q_e} - \frac{3}{\sqrt{5}}\left(\frac{(mg)^2}{\lambda\cdot 14} - Fa\right)\vec{e}_{\varphi|q_e}$$

Dall'equaz. $\vec{R}_P + \vec{\Phi}_P = \vec{0} \iff \vec{\Phi}_P = -\vec{R}_P$

(7.5) $$\vec{\Phi}_P = -(m\vec{g} - \lambda s\vec{i} + F\vec{j}) = mg\vec{e}_z + \lambda s_e\vec{i}_{|q_e} - F\vec{j}_{|q_e}$$

Dunque, proiettando la Φ_P sulla terna $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ si trova

(7.6) $$\vec{\Phi}_{P|q_e} = \frac{mg}{\sqrt{14}}(-\cancel{\vec{i}} + 2\vec{j} + 3\vec{k})_{|q_e} + \cancel{\lambda}\frac{mg}{\cancel{\lambda}\sqrt{14}}\cancel{\vec{i}} - F\vec{j}_{|q_e} =$$

$$= \left(\frac{2mg}{\sqrt{14}} - F\right)\vec{j}_{|q_e} + \frac{3mg}{\sqrt{14}}\vec{k}_{|q_e}$$

Dinamica

4) Scriviamo le equazioni di Lagrange relative a (φ, s)
A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello.

$$K = K^{(rig)} + K^{(P)}$$

(8.1)
$$K^{(rig)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot \mathbb{I}_G(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_2 \cdot \mathbb{I}_G(\dot{\varphi}\,\vec{e}_2) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_2 \cdot \mathbb{I}_G(\vec{e}_2)$$

Lo scalare $\vec{e}_2 \cdot \mathbb{I}_G(\vec{e}_2)$ è il momento d'inerzia del parallelepipedo rs. all'asse di rotazione per G e A, quindi

$$(8.2)\qquad \vec{e}_2 \cdot \mathbb{I}_G(\vec{e}_2) = I_{ee} \overset{(1.4)}{=} \frac{7}{12} M a^2$$

Dunque

$$(8.3)\qquad K^{(rig)} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{12} M a^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m \left|\vec{v}_P\right|^2$$

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(P-A) = \frac{d}{dt}\Big((P-B)+(B-A)\Big) = \frac{d}{dt}(P-B) = \frac{d}{dt}(s\,\vec{i}) = \dot{s}\,\vec{i} + s\,\dot{\vec{i}}$$

$$(8.4)\qquad \dot{\vec{i}} = \vec{\omega}\times\vec{i} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_2\times\vec{i} = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{14}}\left(-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}\right)\times\vec{i} = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{14}}\left(-2\vec{k}+3\vec{j}\right)$$

$$(8.5)\qquad \vec{v}_P = \dot{s}\,\vec{i} + \frac{s\dot{\varphi}}{\sqrt{14}}\left(3\vec{j}-2\vec{k}\right) \Rightarrow \left|\vec{v}_P\right|^2 = \dot{s}^2 + \frac{13}{14}\,s^2\dot{\varphi}^2$$

Allora

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m \left(\dot{s}^2 + \frac{13}{14} s^2 \dot{\varphi}^2 \right) \qquad (9.1)$$

e

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{12} Ma^2 \dot{\varphi}^2 + m \dot{s}^2 + \frac{13}{14} m s^2 \dot{\varphi}^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[m \dot{s}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6} M a^2 + \frac{13}{7} m s^2 \right) \dot{\varphi}^2 \right] \qquad (9.2)$$

Scriviamo le EL

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6} Ma^2 + \frac{13}{7} m s^2 \right) \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6} Ma^2 + \frac{13}{7} m s^2 \right) \ddot{\varphi} + \frac{13}{7} m s \dot{s} \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$EL_{\varphi} : \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6} Ma^2 + \frac{13}{7} m s^2 \right) \ddot{\varphi} + \frac{13}{7} m s \dot{s} \dot{\varphi} = -\mu \varphi + \frac{3}{\sqrt{14}} F s \qquad (9.3)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = m \dot{s} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = m \ddot{s}$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = \frac{13}{14} m s \dot{\varphi}^2$$

$$EL_s : m\left(\ddot{s} - \frac{13}{14} s \dot{\varphi}^2 \right) = -\lambda s + \frac{mg}{\sqrt{14}} \qquad (9.4)$$

5) linearizzazione

$$K = \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}, \dot{s}\right]\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}Ma^2 + \frac{13}{7}ms^2\right) & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi} \\ \dot{s}\end{bmatrix} \qquad (10.1)$$

le EL linearizzate sono della forma

$$(10.2) \qquad A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0 \qquad \vec{x} = \frac{\vec{q} - \vec{q}_e}{\varepsilon}$$

$$(10.3) \quad A = A(q_e) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}Ma^2 + \frac{13}{7}ms_e^2\right) & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad B_{ij} = \left.\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j}\right|_{\vec{q}_e} = 0$$

$$(10.4) \quad C_{ij} = -\left.\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right|_{q_e} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\varphi}{\partial s} \\ \frac{\partial Q_s}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_s}{\partial s} \end{bmatrix}_{\vec{q}_e} = \begin{bmatrix} \mu & -\frac{3}{\sqrt{14}}F \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Dunque, il sistema (10.2) si scrive

$$(10.5) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}Ma^2 + \frac{13}{7}ms_e^2\right) & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu & -\frac{3}{\sqrt{14}}F \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}$$

cioè

$$(10.6) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}Ma^2 + \frac{13}{98}\frac{m^3 g^2}{\lambda^2}\right)\ddot{x}_1 + \mu x_1 - \frac{3}{\sqrt{14}}F x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

Per trovare il moto linearizzato del punto P rs. al rigido, prima risolviamo la seconda EDO del sistema (10.6)

(11.1) $\ddot{x}_2 + \frac{\lambda}{m} x_2 = 0 \iff x_2(t) = a \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \gamma\right)$ a, γ costanti arbitrarie

Poi ricordiamo che

(11.2) $x_2 = \frac{s - s_e}{\varepsilon}$.

Quindi, sostituendo la (11.2) nell'integrale generale della (11.1) si trova

(11.3) $\frac{s - s_e}{\varepsilon} = \frac{a'}{\varepsilon} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \gamma\right)$

Dunque

(11.4) $s(t) = s_e + a' \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \gamma\right)$

Ora, imponiamo alla (11.4) le condizioni iniziali

(11.5) $s(0) = s_e, \quad \dot{s}(0) = v_0$

(11.6) $\begin{cases} \cancel{s_e} + a' \sin\gamma = \cancel{s_e} \\ \sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, a' \cos\gamma = v_0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ a' = \sqrt{\frac{m}{\lambda}}\, v_0 \end{cases}$

Quindi, la soluzione particolare che soddisfa le (11.5) è

(11.7) $s(t) = \frac{mg}{\lambda \sqrt{14}} + \sqrt{\frac{m}{\lambda}}\, v_0 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t\right)$

6) Angoli di Eulero di $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{K})$ rs. ad $(A;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$

Il versore dei nodi è dato da

$$\vec{n}=\frac{\vec{e}_z\times\vec{K}}{|\vec{e}_z\times\vec{K}|}=\frac{1}{\sin\alpha}\,\vec{e}_z\times\frac{1}{\sqrt{14}}\left(3\vec{e}_z+\sqrt{5}\,\vec{e}_\varphi\right)=\frac{\cancel{1}}{\cancel{\sin\alpha}}\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{14}}}\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi=\vec{e}_\varphi$$

Quindi, l'angolo di precessione $\tilde{\varphi}$ di Eulero è:

$$\tilde{\varphi}(t)=\varphi(t)+\frac{\pi}{2}$$

L'angolo di nutazione è:

$$\theta=\alpha \quad \text{(indipendente dal tempo)}$$

L'angolo di rotazione propria ψ, compreso tra $\vec{n}=\vec{e}_\varphi=\vec{e}_2$ ed $\vec{i}$ è:

$$\psi=\frac{3}{2}\pi+\beta \quad \text{(indipendente dal tempo)}$$

visto che β è l'angolo compreso tra $\vec{e}_1$ ed $\vec{i}$.