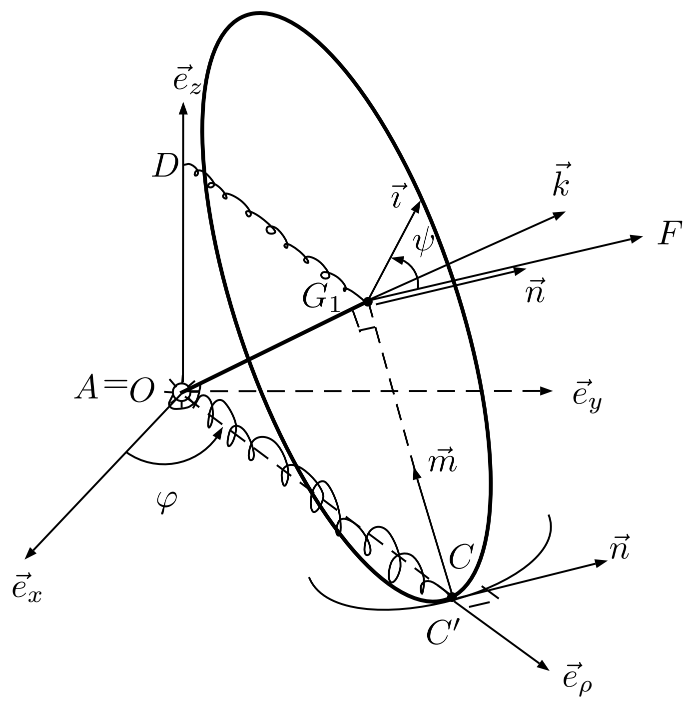
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 28 settembre 2020

(G. Tondo)



Un rigido è formato da un **disco** omogeneo, di massa $2m$ e raggio R, saldato nel suo centro G_1 ad un asta AG_1 di lunghezza d e massa m, il cui estremo A è vincolato ad un punto fisso O mediante una cerniera sferica. L'asta AG_1 è ortogonale al piano del disco, il quale rotola senza strisciare sul piano orizzontale scabro passante per O. Sul rigido agisce una forza $F > 0$ applicata in G_1 e parallela a $\vec{n}$, due molle lineari di costante elastica c, una fissata al disco in C e all'asta in A, l'altra fissata al disco in G_1 e nel punto D dell'asse $(O, \vec{e_z})$ alla stessa quota di G_1. Inoltre, sul rigido agisce una molla angolare fissata in O, la quale esercita un momento di richiamo $\vec{M}^{(molla)} = -b\,\varphi\,\vec{m}$, con $b > 0$. Si suppone che tutti i vincoli siano non dissipativi. Scelta come coordinata libera l'angolo φ della figura, si chiede di:

STATICA.

1) determinare le configurazioni di equilibrio del modello e la loro stabilità;

2) all'equilibrio, determinare la reazione vincolare esterna sul rigido nel punto C, supponendo che la sua componente lungo $\vec{e}_\rho$ sia nulla e trascurando l'attrito di rotolamento;

3) all'equilibrio, determinare la reazione vincolare esterna sul rigido nel punto A, nell' ipotesi del punto 2).

DINAMICA.

4) Trovare il moto del rigido $\varphi(t)$ con le condizioni iniziali $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$;

5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, calcolarne il valore per il moto ricavato al punto **4**).

Tema del 28/09/2020

Il modello è un rigido $\mathcal{R}$ con 1 g.l., come si può verificare con il metodo dei congelamenti meccanici. Infatti, se si congela la rotazione dell'asta AG intorno all'asse $\vec{e}_z$, poiché il disco non striscia sul piano scabro, il rigido è del tutto congelato. Dunque, ammette una sola coordinata libera, che scegliamo come

$$(1.1) \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Dunque, l'angolo di rotazione ψ del disco intorno al proprio asse, $\vec{K}$, deve poter esprimersi in funzione di φ. Per trovare tale equazione di vincolo, ricordiamo che, per ipotesi, il rigido rotola senza strisciare sul piano $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Tale vincolo di mobilità si esprime tramite l'equazione

$$(1.2) \qquad \vec{v}_c = 0 \qquad C \in \mathcal{R}$$

Dalle formule di Poisson, segue che

$$(1.3) \qquad \vec{v}_C = \cancel{\vec{v}_A} + \vec{\omega} \times (C - A) = \vec{\omega} \times (C - A)$$

poiché A è un punto fisso. La velocità angolare $\vec{\omega}$ del rigido vincolato con il solo appoggio sul piano, vale

$$(1.4) \qquad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z + \dot{\psi}\, \vec{K}$$

dal Teo di Frisi.

$$C - A = \sqrt{d^2 + R^2}\, \vec{e}_\rho$$

$$a := \sqrt{d^2 + R^2}$$

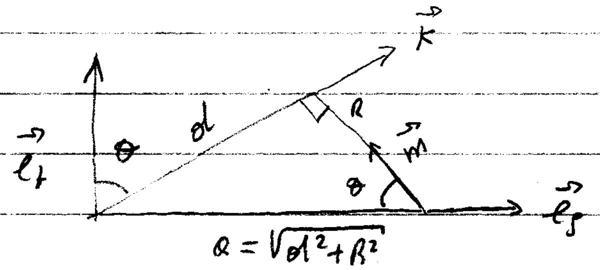
$$(1.5) \qquad \vec{V}_c = (\dot{\varphi}\, \vec{e}_z + \dot{\psi}\, \vec{K}) \times a\, \vec{e}_\rho = a(\dot{\varphi}\, \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho + \dot{\psi}\, \vec{K} \times \vec{e}_\rho) = a(\dot{\varphi}\, \vec{n} + \dot{\psi} \cos\theta\, \vec{n})$$

Nel seguito, utilizzeremo le seguenti basi ortonormali

$$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

$$\mathcal{B}' = (\vec{e}_\rho, \vec{n}, \vec{e}_z) \qquad \begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{n} = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'' = (\vec{n}, \vec{m}, \vec{k}) \qquad \begin{cases} \vec{n} = \vec{n} \\ \vec{m} = -\dfrac{R}{a}\vec{e}_\rho + \dfrac{d}{a}\vec{e}_z \\ \vec{k} = \dfrac{d}{a}\vec{e}_\rho + \dfrac{R}{a}\vec{e}_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{n} \\ \vec{e}_\rho = -\dfrac{R}{a}\vec{m} + \dfrac{d}{a}\vec{k} \\ \vec{e}_z = \dfrac{d}{a}\vec{m} + \dfrac{R}{a}\vec{k} \end{cases}$$



$$\cos\theta = \frac{R}{a}$$

$$\sin\theta = \frac{d}{a}$$

Allora, dal vincolo (1.2), segue che

$$(2.1) \qquad \dot{\varphi} + \dot{\psi}\,\frac{R}{a} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\dot{\psi} = -\frac{a}{R}\,\dot{\varphi}}$$

In questo caso, il vincolo di mobilità (2.1) è integrabile, cioè equivale al vincolo olonomo

$$(2.2) \qquad \psi = -\varphi\,\frac{a}{R} + \psi_0$$

Scegliamo la costante $\psi_0 = 0$, in modo che $\varphi = 0$ corrisponda a $\psi = 0$, cioè $\vec{i}_{|\varphi=0} = \vec{e}_y$. Dunque, l'eq. di vincolo fra i due angoli φ e ψ risulta

$$(2.3) \qquad \psi = -\frac{a}{R}\,\varphi$$

Inoltre, sostituendo la (2.1) nella (1.4), si trova l'espressione di $\vec{\omega}$ per il rigido in puro rotolamento sul piano

$$(2.4) \qquad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z - \frac{a}{R}\,\dot{\varphi}\,\vec{k} = \dot{\varphi}\left(\vec{e}_z - \frac{a}{R}\,\vec{k}\right) =$$

$$= \dot{\varphi}\left(\cancel{\vec{e}_z} - \frac{\cancel{a}}{R}\,\frac{1}{\cancel{a}}\left(d\,\vec{e}_\rho + \cancel{R\,\vec{e}_z}\right)\right) = -\frac{d}{R}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$$

Statica

2) La sollecitazione (posizionale) è conservativa poiché il modello è una macchina semplice. Calcoliamone la forza generalizzata, utilizzando il lavoro virtuale.

$$LV^{(\text{molla ang})} = \vec{M}^{(\text{molla ang})} \cdot \vec{\varepsilon} = \qquad \vec{\varepsilon} = \vec{\omega}\,\delta\tau = -\frac{d}{R}\,\delta\varphi\,\vec{e}_{\rho}$$

$$= -b\varphi\,\vec{m}\cdot\left(-\frac{d}{R}\vec{e}_{\rho}\right)\delta\varphi = \frac{bd}{R}\varphi\,\vec{m}\cdot\vec{e}_{\rho}\,\delta\varphi = \frac{bd}{\cancel{R}}\varphi\left(-\frac{\cancel{R}}{a}\right)\delta\varphi$$

$$= -\frac{bd}{a}\varphi\,\delta\varphi$$

Dunque,

$$Q^{(\text{molla ang})} = -\frac{bd}{a}\varphi \iff V^{(\text{molla ang})} = -\int -\frac{bd}{a}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\,b\,\frac{d}{a}\varphi^2$$

Analogamente per la forza $\vec{F}_{G_1} = F\vec{n}$

$$LV^{(\text{Roll})} = \vec{F}_{G_1}\cdot\cancel{\delta\vec{x}_A} + (G_1-A)\times\vec{F}_{G_1}\cdot\vec{\varepsilon} = (d\vec{k}\times F\vec{n})\cdot\left(-\frac{d}{R}\vec{e}_{\rho}\right)\delta\varphi$$

$$= -F\frac{d^2}{R}\left(\vec{k}\times\vec{n}\cdot\vec{e}_{\rho}\right)\delta\varphi = -F\frac{d^2}{R}\,\vec{m}\cdot\vec{e}_{\rho}\,\delta\varphi = -\frac{Fd^2}{\cancel{R}}\left(-\frac{\cancel{R}}{a}\right)\delta\varphi = \frac{Fd^2}{a}\delta\varphi$$

Quindi,

$$Q^{(\text{Roll})} = F\frac{d^2}{a}$$

$$V^{(\text{Roll})} = -\int F\frac{d^2}{a}\,d\varphi = -F\frac{d^2}{a}\varphi$$

$$V^{(\text{peso})} = -3m\vec{g}\cdot\vec{x}_G = 3mg\,\vec{e}_z\cdot\frac{\vec{x}_{G_1}+\vec{x}_{G_2}}{2} = \frac{3mg}{2}\left(R\frac{d}{a} + \frac{Rd}{2a}\right) = \text{cost}$$

$$V^{(\text{molla lin})} = \frac{1}{2}c\left(\overline{AC}^2 + \overline{G_1D}^2\right) = \frac{1}{2}c\left(a^2 + d^2\sin^2\theta\right) = \text{cost}$$

$$V^{(\text{tot})} = \frac{1}{2}\frac{bd}{a}\varphi^2 - F\frac{d^2}{a}\varphi + \text{cost}$$

$$Q^{(\text{tot})} = -\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{bd}{a}\varphi + F\frac{d^2}{a}$$

Quindi, l'equazione pura di equilibrio è

(4.1) $$-b\frac{\cancel{d}}{\cancel{a}}\varphi+F\frac{d}{\cancel{a}}=0 \iff \varphi_e=\frac{Fd}{b}$$

ed $\exists!$ la configurazione di equilibrio $\varphi_e=\frac{Fd}{ba}$.
$V''(\varphi)=b \Rightarrow V''(\varphi_e)>0 \Rightarrow$ equilibrio stabile.

3) Scriviamo le ECS, tenendo conto che i vincoli in A e in C esercitano l'insieme delle reazioni vincolari

$$\mathcal{S}=\{(A,\vec{\Phi}),(C,\vec{\Psi})\}$$

con $\vec{\Psi}_C$ che, per ipotesi, soddisfa la condizione

(4.2) $$\vec{\Psi}_C\cdot\vec{e}_\rho=0$$

Dunque, dobbiamo risolvere il sistema delle ECS

(4.3) $$\begin{cases}\vec{R}^{(a,t,ext)}+\vec{\Phi}_A+\vec{\Psi}_C=\vec{0}\\ \vec{M}_A^{(a,t,ext)}+(C-A)\times\vec{\Psi}_C=\vec{0}\end{cases}$$

insieme con la (4.2), tenendo conto della (4.1).
Come base di riferimento, conviene usare la base $\mathcal{B}'=(\vec{e}_\rho,\vec{n},\vec{e}_z)$ invece di quella fissa.
Su tale base, denotiamo con

(4.4) $$\vec{\Phi}_A=\Phi_\rho\vec{e}_\rho+\Phi_n\vec{n}+\Phi_z\vec{e}_z$$

(4.5) $$\vec{\Psi}_C\overset{(4.2)}{=}\cancel{\Psi_\rho\vec{e}_\rho}+\Psi_n\vec{n}+\Psi_z\vec{e}_z$$

Le soluzioni della II ECS (4.3) sono

$$(5.1)\quad \vec{\Psi}_C = \frac{C-A}{|C-A|^2} \times \vec{M}_A^{(est,ett)} + \frac{f}{|C-A|^2}(C-A)$$

dove f è nulla per l'ipotesi (4.2)

Quindi, calcoliamo

$$\vec{M}_A^{(est,ett)} = (G_1-A) \times (\vec{F} + 2m\vec{g}) + (G_2-A) \times m\vec{g} - b\varphi\,\vec{m} + (G_1-A) \times \vec{F}^{(molla)} =$$

$$= d\vec{K} \times (F\vec{n} - 2mg\vec{e}_z) + \frac{d}{2}\vec{k} \times m\vec{g} - b\varphi\,\vec{m} + d\vec{K} \times \left(-c\frac{d^2}{a}\vec{e}_z\right)$$

$$(5.2)\quad = F d\,\vec{m} + 2mg\frac{d^2}{a}\vec{n} + \frac{mgd^2}{2a}\vec{n} - b\varphi\,\vec{m} - c\frac{d^3}{a}\frac{R}{a}\vec{n}$$

$$=$$

$$= (Fd - b\varphi)\vec{m} + \left(\frac{5}{2}mg\frac{d^2}{a} - c\frac{d^3}{a^2}R\right)\vec{n}$$

e osserviamo che

$$(5.3)\quad \vec{M}_A^{(est,ett)}\Big|_{\vec{q}_e} = \left(\frac{5}{2}mg\frac{d^2}{a} - c\frac{d^3}{a^2}R\right)\vec{n} = \frac{d^2}{a}\left(\frac{5}{2}mg - c\frac{d}{a}R\right)\vec{n}$$

Allora

$$(5.4)\quad \vec{\Psi}_C\Big|_{\vec{q}_e} = \frac{\vec{e}_y}{a} \times \left(\frac{5}{2}mg\frac{d^2}{a} + \quad - c\frac{d^3}{a^2}R\right)\vec{n} =$$

$$= \frac{d^2}{a^2}\left(\frac{5}{2}mg - c\frac{d}{a}R\right)\vec{e}_z$$

Dalla I ECS (4.3) otteniamo

$$\vec{\phi}_A = -\vec{R}^{(est,att)} - \vec{\Psi}_G$$

$$\vec{R}^{(est,att)} = -3mg\,\vec{e}_z + F\vec{n} - c\,(G_1 - D)\,\vec{e}_\rho$$

(trascuriamo la molla interna // a C-A)

Dunque,

$$\vec{\phi}_\pi\Big|_{\vec{q}_e} = 3mg\,\vec{e}_z - F\vec{n} + c\frac{d^2}{a}\vec{e}_\rho - \frac{d^2}{a^2}\left(\frac{5}{2}mg - c\frac{dR}{a}\right)\vec{e}_z$$

$$= \left(3mg - \frac{d^2}{a^2}\left(\frac{5}{2}mg - c\frac{dR}{a}\right)\right)\vec{e}_z - F\vec{n} + c\frac{d^2}{a_2}\vec{e}_\rho$$

<u>Dinamica</u>

Poichè i vincoli sono olonomi e non dissipativi, nella configurazione di confine possiamo utilizzare la EL relativa a φ. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del rigido come

$$(7.1) \quad K = \frac{1}{2}\, \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_A^{(R)}(\vec{\omega}) \qquad \text{poichè } A \text{ è un punto fisso di } R$$

dove

$$(7.2) \quad \mathbb{I}_A^{(R)} = \mathbb{I}_A^{(a)} + \mathbb{I}_A^{(d)} \quad e \quad \vec{\omega} \overset{(2.1)}{=} -\frac{d}{R}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi = -\frac{d}{R}\dot{\varphi}\left(-\frac{R}{a}\vec{m} + \frac{d}{a}\vec{k}\right)$$

Come terna di riferimento per calcolare $\mathbb{I}_A^{(a)}$ e $\mathbb{I}_A^{(d)}$ conviene prendere la terna $(A; \vec{n}, \vec{m}, \vec{k})$. Essa è una TPI(A) sia per l'asta sia per il disco poichè è una terna traslata della terne principali centrali TPI(G_2) e TPI(G_1). Quindi,

$$(7.3) \quad \vec{n} \cdot \mathbb{I}_A^{(a)}(\vec{n}) = \frac{1}{12} m d^2 + m\frac{d^2}{4} = \frac{1}{3} m d^2$$

$$(7.4) \quad \vec{m} \cdot \mathbb{I}_A^{(a)}(\vec{m}) = \frac{1}{3} m d^2$$

$$(7.5) \quad \vec{k} \cdot \mathbb{I}_A^{(a)}(\vec{k}) = 0$$

Allora,

$$\left[\mathbb{I}_A^{(a)}\right] = m d^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Inoltre,

$$(7.6) \quad \vec{n} \cdot \mathbb{I}_A^{(d)}(\vec{n}) = \frac{1}{4} 2m R^2 + 2m d^2 = m\left(\frac{R^2}{2} + 2d^2\right)$$

$$(7.7) \quad \vec{m} \cdot \mathbb{I}_A^{(d)}(\vec{m}) = m\left(\frac{R^2}{2} + 2d^2\right)$$

$$(7.8) \quad \vec{k} \cdot \mathbb{I}_A^{(d)}(\vec{k}) = \frac{1}{2} 2m R^2 = m R^2$$

Quindi,

$$(8.1)\quad \left[\mathbb{I}_A^{(d)}\right] = m\begin{bmatrix} \frac{R^2}{2}+2d^2 & & \\ & \frac{R^2}{2}+2d^2 & \\ & & R^2 \end{bmatrix}$$

Dunque,

$$(8.2)\quad \mathbb{I}_A^{(a)} = m\begin{bmatrix} \frac{R^2}{2}+\frac{7}{3}d^2 & & \\ & \frac{R^2}{2}+\frac{7}{3}d^2 & \\ & & R^2 \end{bmatrix}$$

Allora,

$$K = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot m\begin{bmatrix} \frac{R^2}{2}+\frac{7}{3}d^2 & & \\ & \frac{R^2}{2}+\frac{7}{3}d^2 & \\ & & R^2 \end{bmatrix}\dot{\varphi}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d}{a} \\ -\frac{d^2}{Ra} \end{bmatrix}$$

$$(8.3)\quad = \frac{1}{2}\dot{\varphi}\left[0, \frac{d}{a}, \frac{-d^2}{aR}\right] m\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d}{a}\dot{\varphi}\left(\frac{R^2}{2}+\frac{7}{3}d^2\right) \\ -R^{\cancel{2}}\frac{d^2}{\cancel{R}}\frac{\dot{\varphi}}{a} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\left[\frac{d^2}{a^2}\left(\frac{R^2}{2}+\frac{7}{3}d^2\right)+\frac{d^4}{a^2}\right] = \frac{1}{2}\frac{md^2}{a^2}\left(\frac{R^2}{2}+\frac{10}{3}d^2\right)\dot{\varphi}^2$$

Posto $\gamma = m\frac{d^2}{a^2}\left(\frac{R^2}{2}+\frac{10}{3}d^2\right)$, calcoliamo $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial K}{\partial\varphi} = Q_\varphi$

Allora

$$(9.1)\quad \frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = \gamma\,\dot\varphi \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = \gamma\,\ddot\varphi \, , \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

L'eq. di Lagrange è

$$(9.2)\quad a\,\ddot\varphi = Q_\varphi \, ; \quad m\frac{d^2}{a^2}\left(\frac{R^2}{2} + \frac{10}{3}d^2\right)\ddot\varphi = \left(F d - b\varphi\right)\frac{d}{a}$$

Il problema di Cauchy associato è

$$(9.3)\quad \begin{cases} \frac{md}{a}\left(\frac{R^2}{2} + \frac{10}{3}d^2\right)\ddot\varphi + b\,\varphi = F d \\ \varphi(0) = \varphi_0 \\ \dot\varphi(0) = 0 \end{cases}$$

L'integrale generale è dato da

$$(9.4)\quad \varphi(t) = A\cos\left(\nu\, t + \sigma\right) + \frac{F d}{b} \qquad \nu := \sqrt{\frac{b}{\gamma}}$$

Imponendo le condizioni iniziali si determinano le costanti A e φ_0. Infatti

$$\begin{array}{ll} \varphi(0): & \\ \dot\varphi(0): & \end{array} \begin{cases} A\cos\sigma + \frac{F d}{b} = \varphi_0 \\ -A\,\nu\,\sin\sigma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{F d}{\gamma b} + \varphi_0 \\ \sigma = 0 \end{cases}$$

Quindi, l'unica soluzione di (10.3) è

$$(9.5)\quad \varphi(t) = \left(\varphi_0 - \frac{F d}{b}\right)\cos\nu t + \frac{F d}{b}$$

6) Il modello è una macchina semplice soggetta a vincoli olonomi, fissi e non dissipativi e sollecitazione posizionale. Quindi l'energia meccanica si conserva. Essa vale

$$(10.1)\quad E = K + V = \frac{1}{2} m \frac{d^2}{a^2}\left(\frac{R^2}{2} + \frac{10}{3} d^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} b \varphi^2 - F d \varphi + \frac{1}{2} c\left(a^2 + \frac{d^4}{a^2}\right)$$

$$= E|_{t=0} = \frac{1}{2} b \varphi_0^2 - F d \varphi_0 + \frac{1}{2} c\left(a^2 + \frac{d^4}{a^2}\right)$$