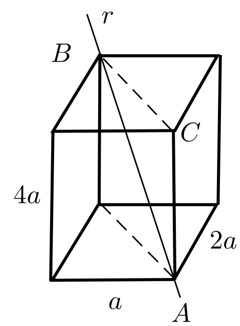
Compito di Meccanica Razionale

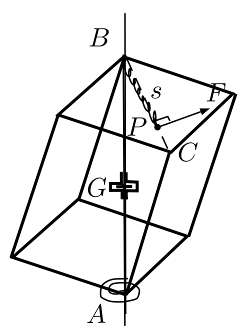
Trieste, 8 febbraio 2021. (G. Tondo)

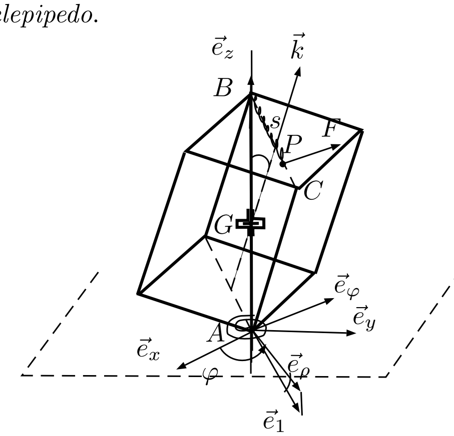
Si consideri un parallelepipedo retto, omogeneo, a base rettangolare e di massa M.

1) Si calcoli il momento d'inerzia del parallelepipedo rispetto a una retta r passante per i vertici A e B.



Il parallelepipedo suddetto è vincolato a ruotare, come in figura, attorno all'asse fisso verticale $(A, \vec{e}_z)$ passante per A e B, mediante una cerniera cilindrica fissata all'asse nel baricentro G. Inoltre, un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito sulla faccia superiore del parallelepipedo, lungo la diagonale BC. La sollecitazione attiva sul parallelepipedo è data: da una molla *angolare* posta in A e di costante elastica μ e dal peso proprio. La sollecitazione attiva sul punto materiale P è data: dal peso proprio, da una forza $F > 0$ appartenente al piano della faccia superiore del parallelepipedo e diretta ortogonalmente alla diagonale BC e da una molla di costante elastica λ, fissata nel punto B del *parallelepipedo*.





STATICA

Determinare:

2) le configurazioni di equilibrio del modello costituito dal parallelepipedo e dal punto P;

3) la sollecitazione reattiva sul parallelepipedo in G e sul punto P, all'equilibrio.

DINAMICA

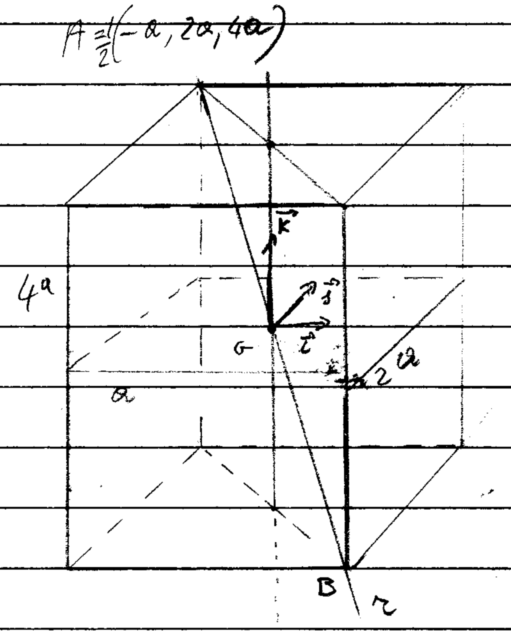
4) Scrivere un sistema di equazioni differenziali pure di moto per il modello;

5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e ricavare il moto del punto P relativo al parallelepipedo in corrispondenza delle condizioni iniziali
$s(0) = s_0 \ (0 < s_0 < \overline{BC}), \quad \dot{s}(0) = 0;$

6) scrivere l'equazione cartesiana dell'ellissoide d'inerzia del parallelepipedo rispetto a G, nelle coordinate che si preferiscono.

Tema del 8/02/2021

1- Geometria delle masse



La retta r contiene il baricentro G
Per calcolare il momento d'inerzia
rs. ad r, calcoliamo la matrice
d'inerzia rs. alla terna

$(G; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ che è una TPG
per ragioni di simmetria materiale
Dunque

(1.1) $$[I_G] = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{1}{12} M \left((2a)^2 + (4a)^2\right) = \frac{\cancel{20}^{5}}{\cancel{12}_{3}} M a^2$$

$$I_2 = I_1 = \frac{1}{12} M \left(a^2 + (4a)^2\right) = \frac{17}{12} M a^2$$

$$I_3 = \frac{1}{12} M \left(a^2 + (2a)^2\right) = \frac{5}{12} M a^2$$

Determiniamo un versore di r, in particolare

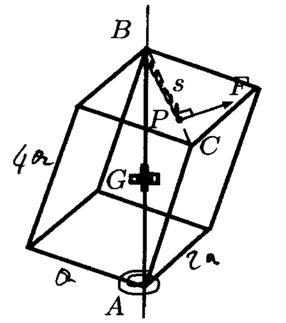
(1.2) $$\frac{A-G}{|A-G|} = \frac{\left(-\frac{a}{2}\vec{i} + a\vec{j} + 2a\vec{k}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (2a)^2 + (4a)^2}} = \frac{2}{\sqrt{21}\,\cancel{a}} \left(-\frac{\cancel{a}}{2}\vec{i} + \cancel{a}\vec{j} + 2\cancel{a}\vec{k}\right)$$

Allora,

(1.3) $$I_r = \frac{2}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}, & 1, & 2 \end{bmatrix} \frac{M a^2}{12} \begin{bmatrix} 20 & & \\ & 17 & \\ & & 5 \end{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

(1.4) $$= \frac{M a^2}{63} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}, & 1, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 17 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{M a^2}{63}(5 + 17 + 20) = \frac{\cancel{42}^{14}}{\cancel{63}_{21}} M a^2 = \frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{21}_{3}} M a^2$$

Il parallelepipedo è vincolato ad avere 2 punti fissi A e B e quindi un asse che contiene il baricentro G.



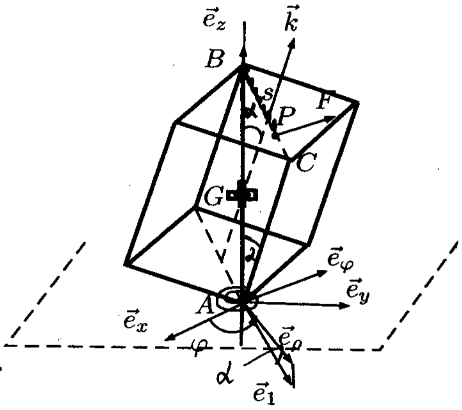
Dunque, il parallelepipedo ha 1 g. l. e come coordinata libera prendiamo l'angolo di rotazione $\varphi \in \mathbb{R}$, misurato tra 2 piani, uno fisso e uno solidale al parallelepipedo, che fisseremo qui sotto.
Il punto P ha un altro grado di libertà: $0 \leq s \leq a\sqrt{5}$ è la seconda coordinata libera

Consideriamo le seguenti terne di versori

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: terna "fissa"

$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: terna "intermedia"

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: terna "solidale"



Il versore $\vec{e}_z$ è scelto parallelo a un asse verticale ed $\vec{e}_x$ è scelto nel piano ortogonale ad $\vec{e}_z$, in modo che per $\varphi = 0$ la molla angolare sia a riposo.
Il versore $\vec{e}_3$ è parallelo all'asse di simmetria del parallelepipedo
$\vec{e}_1$ è parallelo alla diagonale BC ed $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$
Il versore $\vec{e}_\rho$ è parallelo alla retta d'intersezione del piano (verticale) passante per i 2 assi $(A, \vec{e}_z)$, $(A, \vec{e}_1)$ ed il piano orizzontale per A.
L'angolo di rotazione φ sarà quello compreso tra l'asse fisso $(A, \vec{e}_x)$ e l'asse solidale $(A, \vec{e}_\rho)$. Infine, $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho$.

Ricaviamo le leggi di trasformazione tra le suddette terne e le loro inverse.

(3.1)
$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y \qquad \vec{e}_x = \cos\varphi\,\vec{e}_\rho - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \qquad \vec{e}_y = \sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi$$
$$\vec{e}_z = \vec{e}_z \qquad \vec{e}_z = \vec{e}_z$$

(3.2)
$$\vec{e}_1 = \cos\alpha\,\vec{e}_\rho - \sin\alpha\,\vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{21}}\left(4\,\vec{e}_\rho - \sqrt{5}\,\vec{e}_z\right)$$
$$\vec{e}_2 = \vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \left(\cos\alpha\,\vec{e}_z + \sin\alpha\,\vec{e}_\rho\right)\times\left(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho - \sin\alpha\,\vec{e}_z\right) = \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi$$
$$\vec{e}_3 = \cos\alpha\,\vec{e}_z + \sin\alpha\,\vec{e}_\rho = \frac{1}{\sqrt{21}}\left(4\,\vec{e}_z + \sqrt{5}\,\vec{e}_\rho\right)$$

$$\vec{e}_\rho = \cos\alpha\,\vec{e}_1 + \sin\alpha\,\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{21}}\left(4\,\vec{e}_1 + \sqrt{5}\,\vec{e}_3\right); \quad \sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\cancel{a}\sqrt{5}}{\cancel{a}\sqrt{21}}$$
$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_2$$
$$\vec{e}_z = -\sin\alpha\,\vec{e}_1 + \cos\alpha\,\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{21}}\left(-\sqrt{5}\,\vec{e}_1 + 4\,\vec{e}_3\right); \quad \cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\cancel{a}\,4}{\cancel{a}\sqrt{21}}$$

Componendo le (3.1) con le (3.2) si trova

(3.3)
$$\vec{e}_1 = \cos\alpha\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right) - \sin\alpha\,\vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{21}}\left(4\cos\varphi\,\vec{e}_x + 4\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sqrt{5}\,\vec{e}_z\right)$$
$$\vec{e}_2 = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_3 = \sin\alpha\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right) + \cos\alpha\,\vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{21}}\left(\sqrt{5}\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sqrt{5}\sin\varphi\,\vec{e}_y + 4\,\vec{e}_z\right)$$

e la sua inversa

(3.4)
$$\vec{e}_x = \frac{4}{\sqrt{21}}\cos\varphi\,\vec{e}_1 - \sin\varphi\,\vec{e}_2 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}\cos\varphi\,\vec{e}_3$$
$$\vec{e}_y = \frac{4}{\sqrt{21}}\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}\sin\varphi\,\vec{e}_3$$
$$\vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{21}}\left(-\sqrt{5}\,\vec{e}_1 + 4\,\vec{e}_3\right)$$

Statica

I vincoli sono olonomi, non dissipativi, bilateri e fissi. Scriviamo le equazioni pure di equilibrio

(4.1) $Q_\varphi^{(att)} = 0, \quad Q_s^{(att)} = 0$

A tale scopo, calcoliamo l'energia potenziale della sollecitazione attiva

(4.2) $V(\varphi, s) = \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2 - M\vec{g}\cdot\vec{x}_G - m\vec{g}\cdot\vec{x}_P$

(4.3) $\vec{x}_G = G - A = \frac{\sqrt{21}}{2} a\, \vec{e}_2$

(4.4) $\vec{x}_P = P - A = (P-B) + (B-A) = s\vec{e}_1 + \sqrt{21}\, a\, \vec{e}_2 \Rightarrow \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = s\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \varphi} \overset{(3.2)}{=} s\frac{4}{\sqrt{21}}\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \varphi}$

Quindi $\qquad \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial s} = \vec{e}_1$

(4.5) $V(\varphi, s) = \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2 + Mg\,\vec{e}_2\cdot\frac{\sqrt{21}}{2}a\vec{e}_2 + mg\,\vec{e}_2\cdot(s\vec{e}_1 + \sqrt{21}\,a\,\vec{e}_2)$

$= \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2 + \cancel{Mg\frac{\sqrt{21}}{2}a} + mgs\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 + \cancel{mg\sqrt{21}\,a}$

a meno di termini costanti $= \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2 - mgs\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$

Allora,

(4.6) $Q_\varphi^{(cons)} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\mu\varphi$

(4.7) $Q_s^{(cons)} = -\frac{\partial V}{\partial s} = -\lambda s + mg\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$

Ora, calcoliamo le componenti lagrangiane del carico follower agente su P:

$$(5.1)\quad Q_{\varphi}^{(foll)} = \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = F\vec{e}_2 \cdot \frac{s\,4}{\sqrt{21}} \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \varphi} = F\frac{s\,4}{\sqrt{21}}\, \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_{\varphi} = \frac{4Fs}{\sqrt{21}}$$

$$(5.2)\quad Q_{s}^{(foll)} = \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial s} = F\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q_{\varphi}}{\partial s} \neq \frac{\partial Q_s}{\partial \varphi}$$

Dunque,

$$(5.3)\quad Q_{\varphi} = -\mu\varphi + \frac{4}{\sqrt{21}} F s$$

$$(5.4)\quad Q_{s} = -\lambda s + \frac{mg\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$$

Le eq. pure di equilibrio sono:

$$\begin{cases} (5.5)\quad -\mu\varphi + \frac{4}{\sqrt{21}} F s = 0 \\ (5.6)\quad -\lambda s + \frac{mg\sqrt{5}}{\sqrt{21}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_e = \frac{4}{\mu\sqrt{21}} F s_e = \frac{4}{\mu\lambda} F mg \frac{\sqrt{5}}{21} \\ s_e = \frac{mg\sqrt{5}}{\lambda\sqrt{21}} \end{cases}$$

Quindi, il modello ammette la sola configurazione di equilibrio

$$(5.7)\quad \vec{q}_e = \left(\frac{F}{\lambda\mu} mg \frac{4\sqrt{5}}{21},\ \frac{mg}{\lambda}\sqrt{\frac{5}{21}} \right) = (\varphi_e, s_e)$$

3) Reazioni vincolari all'equilibrio in G sul parallelepipedo e sul pto P

La cerniera cilindrica in G esercita, sul rigido, una sollecitazione reattiva

$$(6.1) \qquad \mathcal{L}^{(reatt)} = \{(G, \vec{\Psi}), \vec{\Gamma}\} \qquad \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_2 = 0$$

mentre il vincolo liscio in P una reazione ϕ_P posta nel piano ortogonale a $\vec{e}_1$

$$(6.2) \qquad \vec{\phi}_P = \phi_2 \vec{e}_2 + \phi_3 \vec{e}_3$$

Quindi, dobbiamo trovare $(5+2)$ incognite.
A tale scopo, scriviamo le ECS su tutto il modello:

$$(6.3) \qquad \vec{R}^{(est, att)} + \vec{R}^{(est, reatt)} = \vec{0} \iff \vec{R}^{(est, att)} + \vec{\Psi}_G = 0$$

$$(6.4) \qquad \vec{M}_G^{(est, att)} + \vec{M}_G^{(est, reatt)} = \vec{0} \qquad \vec{M}_G^{(est, att)} + \vec{\Gamma} = \vec{0}$$

Dalla (6.3), ricaviamo immediatamente $\vec{\Psi}_G$

$$\vec{\Psi}_G = -\vec{R}^{(est, att)}$$

$$\vec{R}^{(est, att)} = (M+m)\vec{g} + \vec{F}_P = -(M+m) g \vec{e}_2 + F \vec{e}_2$$

Quindi,

(7.1) $$\vec{\Psi}_G = (M+m)\, g\, \vec{e}_2 - F\, \vec{e}_2\big|_{\vec{q}_e} = (M+m)\, g\, \vec{e}_2 - F\, \vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e}$$

Dalle (8 5) ricaviamo

(7.2) $$\vec{\Gamma} = -\vec{M}_G^{(est,att)}$$

$$\vec{M}_G^{(est,att)} = -\mu\varphi\, \vec{e}_2 + (P-G)\times(\vec{F}+m\vec{g}) = -\mu\varphi\, \vec{e}_2 + ((P-B)+(B-G))\times(F\vec{e}_2 - mg\vec{e}_2)$$

$$= -\mu\varphi\,\vec{e}_2 + \left(s\,\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{21}}{2}a\,\vec{e}_2\right)\times(F\vec{e}_2 - mg\,\vec{e}_2) =$$

(7.3) $$= -\mu\varphi\,\vec{e}_2 + Fs\,\vec{e}_3 - mgs\,\vec{e}_1\times\vec{e}_2 + \frac{F\sqrt{21}}{2}a\,\vec{e}_2\times\vec{e}_2 =$$

$$= -\mu\varphi\,\vec{e}_2 + Fs\frac{1}{\sqrt{21}}(4\vec{e}_2+\sqrt{5}\,\vec{e}_\varsigma) + \vec{e}_2\times\left[\frac{mgs}{\sqrt{21}}(4\vec{e}_\varsigma - \sqrt{5}\,\vec{e}_2) + \frac{F\sqrt{21}}{2}a\,\vec{e}_\varphi\right]$$

$$= \cancel{-\mu\varphi_e\,\vec{e}_2} + \frac{Fs_e}{\sqrt{21}}(\cancel{4\vec{e}_2}+\sqrt{5}\,\vec{e}_\varsigma) + \frac{mgs_e}{\sqrt{21}}4\vec{e}_\varphi - F\frac{\sqrt{21}}{2}a\,\vec{e}_\varsigma =$$

$$= F\left(\sqrt{\frac{5}{21}}\,s_e - \sqrt{\frac{21}{2}}\,a\right)\vec{e}_\varsigma + \frac{mg4}{\sqrt{21}}\,s_e\,\vec{e}_\varphi =$$

$$= F\left(\frac{5}{21}\frac{mg}{\lambda} - \frac{\sqrt{21}}{2}a\right)\vec{e}_\varsigma\big|_{\vec{q}_e} + \frac{4\sqrt{5}}{21}\frac{(mg)^2}{\lambda}\,\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e}$$

Quindi,

(7.4) $$\vec{\Gamma} = F\left(-\frac{5}{21}\frac{mg}{\lambda} + \frac{\sqrt{21}}{2}a\right)\vec{e}_\varsigma\big|_{\vec{q}_e} - \frac{4\sqrt{5}}{21}\frac{(mg)^2}{\lambda}\,\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e}$$

Dall'equaz. $\vec{R}_P + \vec{\Phi}_P = \vec{0} \iff \vec{\Phi}_P = -\vec{R}_P$

(7.5) $$\vec{\Phi}_P = -(m\vec{g} - \lambda s\,\vec{e}_1 + F\vec{e}_2) = mg\,\vec{e}_2 + \lambda s_e\,\vec{e}_1\big|_{\vec{q}_e} - F\,\vec{e}_2\big|_{\vec{q}_e} = \cdots$$

Dunque, proiettando la $\vec{\Phi}_P$ nella terna $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ si trova

(7.6) $$\vec{\Phi}_P\big|_{\vec{q}_e} = \frac{mg}{\sqrt{21}}(\cancel{-\sqrt{5}\,\vec{e}_1} + 4\vec{e}_3) + \cancel{\lambda\frac{mg}{\lambda}\sqrt{\frac{5}{21}}\,\vec{e}_1} - F\,\vec{e}_2 =$$

$$= \frac{mg}{\sqrt{21}}\,4\,\vec{e}_3\big|_{\vec{q}_e} - F\,\vec{e}_2\big|_{\vec{q}_e}$$

Dinamica

4) Scriviamo le equazioni di Lagrange relative a (φ, s).
A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello.

$$K = K^{(rig)} + K^{(P)}$$

(8.1)
$$K^{(rig)} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot \mathbb{I}_G(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\dot\varphi\,\vec{e}_2 \cdot \mathbb{I}_G(\dot\varphi\,\vec{e}_2) = \frac{1}{2}\dot\varphi^2\,\vec{e}_2\cdot \mathbb{I}_G(\vec{e}_2)$$

Lo scalare $\vec{e}_2 \cdot \mathbb{I}_G(\vec{e}_2)$ è il momento d'inerzia del parallelepipedo rs. all'asse di rotazione per G e A, quindi

(8.2)
$$\vec{e}_2 \cdot \mathbb{I}_G(\vec{e}_2) = I_{rr} \overset{(1.4)}{=} \frac{2}{3} M a^2$$

Dunque

(8.3)
$$K^{(rig)} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} M a^2\right)\dot\varphi^2$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(P-A) = \frac{d}{dt}\Big((P-B)+(B-A)\Big) = \frac{d}{dt}(P-B) = \frac{d}{dt}(s\,\vec{e}_1) = \dot s\,\vec{e}_1\ s\dot{\vec{e}}_1$$

(8.4)
$$\dot{\vec{e}}_1 = \vec{\omega}\times\vec{e}_1 = \dot\varphi\,\vec{e}_2\times\vec{e}_1 = \dot\varphi\,\frac{1}{\sqrt{21}}\left(-\sqrt{5}\,\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3\right)\times\vec{e}_1 = \frac{4}{\sqrt{21}}\dot\varphi\,\vec{e}_2$$

(8.5)
$$\vec{v}_P = \dot s\,\vec{e}_1 + \frac{4}{\sqrt{21}} s\dot\varphi\,\vec{e}_2 \quad\Rightarrow\quad |\vec{v}_P|^2 = \dot s^2 + \frac{16}{21} s^2\dot\varphi^2$$

Allora

$$K^{(p)} = \frac{1}{2} m \left(\dot{s}^2 + \frac{16}{21} s^2 \dot{\varphi}^2 \right) \qquad (9.1)$$

e

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} M a^2 \dot{\varphi}^2 + m \dot{s}^2 + \frac{16}{21} m s^2 \dot{\varphi}^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[m \dot{s}^2 + \frac{2}{3}\left(M a^2 + \frac{8}{7} m s^2 \right) \dot{\varphi}^2 \right] \qquad (9.2)$$

Scriviamo le EL

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2}{3}\left(M a^2 + \frac{8}{7} s^2 m \right) \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2}{3}\left(M a^2 + \frac{8}{7} s^2 m \right) \ddot{\varphi} + \frac{32}{21} m s \dot{s} \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$EL_\varphi : \frac{2}{3}\left(M a^2 + \frac{8}{7} m s^2 \right) \ddot{\varphi} + \frac{32}{21} m s \dot{s} \dot{\varphi} = -\mu \varphi + \frac{4}{\sqrt{21}} F s \qquad (9.3)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = m \dot{s} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = m \ddot{s}$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = \frac{16}{21} m s \dot{\varphi}^2$$

$$EL_s : m\left(\ddot{s} - \frac{16}{21} s \dot{\varphi}^2 \right) = -\lambda_1 + m g \sqrt{\frac{5}{21}} \qquad (9.4)$$

5) Linearizzazione

$$K = \frac{1}{2}\left[\dot\varphi, \dot s\right]\begin{bmatrix} \frac{2}{3}\left(Ma^2 + \frac{8}{7}ms^2\right) & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\varphi \\ \dot s\end{bmatrix} - \tag{10.1}$$

Le EL linearizzate sono della forma

$$A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0 \qquad \vec{x} = \frac{\vec{q} - \vec{q}_e}{\varepsilon} \tag{10.2}$$

$$A = A(q_e) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\left(Ma^2 + \frac{8}{7}ms_e^2\right) & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad B_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \dot q_j}\Big|_{\vec{q}_e} = 0 \tag{10.3}$$

$$C_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\Big|_{q_e} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\varphi}{\partial s} \\ \frac{\partial Q_s}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_s}{\partial s} \end{bmatrix}_{\vec{q}_e} = \begin{bmatrix} \mu & -\frac{4}{\sqrt{21}}F \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{10.4}$$

Dunque, il sistema (10.2) si scrive

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}\left(Ma^2 + \frac{8}{7}ms_e^2\right) & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot x_1 \\ \ddot x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu & -\frac{4}{\sqrt{21}}F \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.5}$$

cioè

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\left(Ma^2 + \frac{40}{147}\frac{(mg)^2}{\lambda^2}m\right)\ddot x_1 + \mu x_1 - \frac{4}{\sqrt{21}}F x_2 = 0 \\ m\ddot x_2 + \lambda x_2 = 0 \end{cases} \tag{10.6}$$

Per trovare il moto linearizzato del punto P rs. al rigido, prima risolviamo la seconda EDO del sistema (10.6)

$$(11.1) \qquad \ddot{x}_2 + \frac{\lambda}{m} x_2 = 0 \iff x_2(t) = \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \beta\right) \qquad \alpha, \beta \text{ costanti arbitrarie}$$

Poi ricordiamo che

$$(11.2) \qquad x_2 = \frac{s - s_e}{\varepsilon}.$$

Quindi, sostituendo la (11.2) nell'integrale generale della (11.1) si trova

$$(11.3) \qquad \frac{s - s_e}{\varepsilon} = \frac{\alpha'}{\varepsilon} \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \beta\right)$$

Dunque

$$(11.4) \qquad s(t) = s_e + \alpha' \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \beta\right)$$

Ora, imponiamo nella (11.4) le condizioni iniziali

$$(11.5) \qquad s(0) = s_0, \quad \dot{s}(0) = 0$$

$$(11.6) \qquad \begin{cases} s_e + \alpha' \cos\beta = s_0 \\ -\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, \alpha' \sin\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha' = s_0 - s_e \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Quindi, la soluzione particolare che soddisfa la (11.5) è

$$(11.7) \qquad s(t) = \frac{mg}{\lambda}\sqrt{\frac{5}{21}} + \left(s_0 - \frac{mg}{\lambda}\sqrt{\frac{5}{21}}\right) \cos\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t$$

6) Scriviamo l'eq. dell' EI(G) del parallelepipedo.

Scelto un riferimento cartesiano con origine in G e coordinate denotate con (x_1, x_2, x_3), tale equazione si scrive come

$$1 = [x_1, x_2, x_3]\,[I_G]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \sum_{j,k=1}^{3} I_{jk}\, x_j\, x_k$$

Se, in particolare, scegliamo una TPI(G), quindi la terna $(G; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la matrice $[I_G]$ si diagonalizza e l'equazione cartesiana si riduce a

$$1 = [x, y, z]\,\frac{Ma^2}{12}\begin{bmatrix} 20 & & \\ & 17 & \\ & & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{12}\left(20x^2 + 17y^2 + 5z^2\right)$$