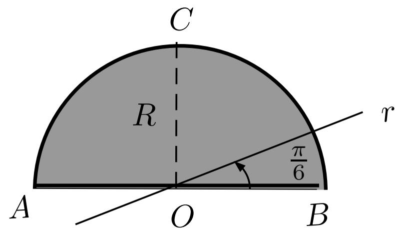
Compito di Meccanica Razionale

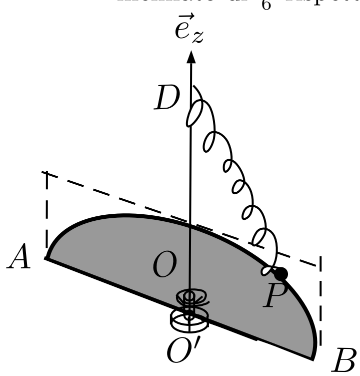
Trieste, 11 gennaio 2022

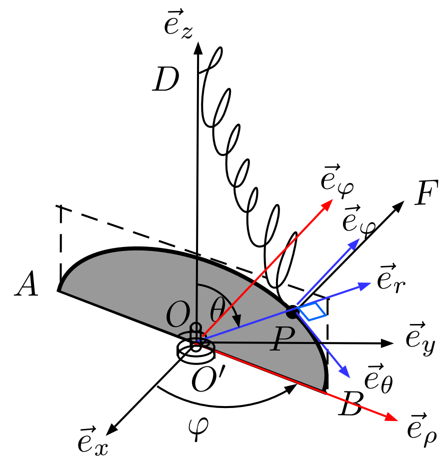
(G. Tondo)



È dato un semidisco rigido omogeneo, di massa $3\,m$ e raggio R .

1) Determinarne il baricentro e il momento d'inerzia rispetto all'asse r passante per il punto O e inclinato di $\frac{\pi}{6}$ rispetto al vettore $B - O$.





Il semidisco è vincolato ad un asse fisso verticale $(O', \vec{e}_z)$ mediante una cerniera cilindrica liscia fissata in $O \equiv O'$. Sul bordo del semidisco, è vincolato a scorrere senza attrito un punto materiale P, di massa m, collegato a una molla, di costante elastica c, che ha l'altro estremo fissato nel punto D dell'asse $(O', \vec{e}_z)$, posto a distanza $3R$ da O'. Inoltre, su P agisce una forza $F\vec{e}_\varphi$. Infine, sul semidisco agisce una molla angolare di richiamo fissata in O e di costante elastica b. Scelte come coordinate libere gli angoli di figura, $\varphi \in \mathbb{R}$ e $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, si chiede di:

STATICA.

2) determinare le configurazioni di equilibrio del modello in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{3cR}$;

3) determinare l'insieme delle reazioni vincolari esterne sul semidisco, all'equilibrio;

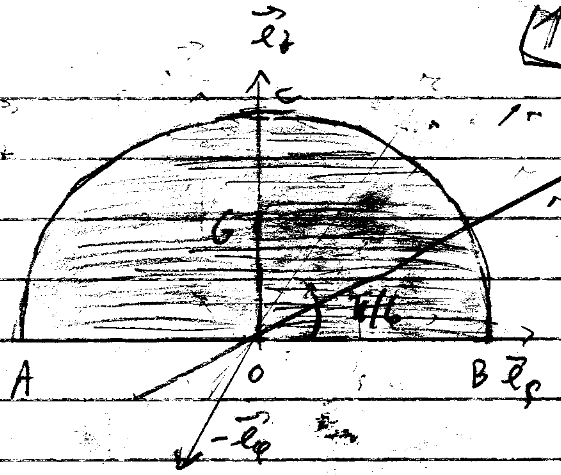
DINAMICA.

4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e calcolare l'integrale generale intorno a una sola configurazione di equilibrio (a propria scelta);

6) determinare le reazioni vincolari sul punto P, in dinamica.

Tema del 1/07/2020



Dal II Teorema di Guldino segue che:

(1.1) $\vec{x}_G = G - O = \frac{4}{3\pi} R\, \vec{e}_z$

1) Il momento d'inerzia del semidisco rispetto all'asse r si può calcolare come

(1.3) $I_r = \vec{u} \cdot I_O(\vec{u})$ $\vec{u}$: versore di r

Dunque, ci serve la matrice d'inerzia rispetto al punto O.
Per calcolarla, fissiamo la base $\mathcal{B}''' = (\vec{l}_1 = \vec{e}_\rho, \vec{l}_2 = \vec{e}_z, \vec{l}_3 = -\vec{e}_\varphi)$ e osserviamo che $(O, \mathcal{B}''')$ è una TPI(O) per ragioni di simmetria materiale.

(1.4) $$[I_O]^{\mathcal{B}'''} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{bmatrix}$$

$I_{11} = \frac{1}{4}(3m)R^2$

$I_{22} = I_{11} = \frac{3}{4} m R^2$

$I_{33} = I_{11} + I_{22} = 2 I_{11} = \frac{3}{2} m R^2$

Dunque,

(1.5) $$[I_O]^{\mathcal{B}'''} = mR^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = 3mR^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

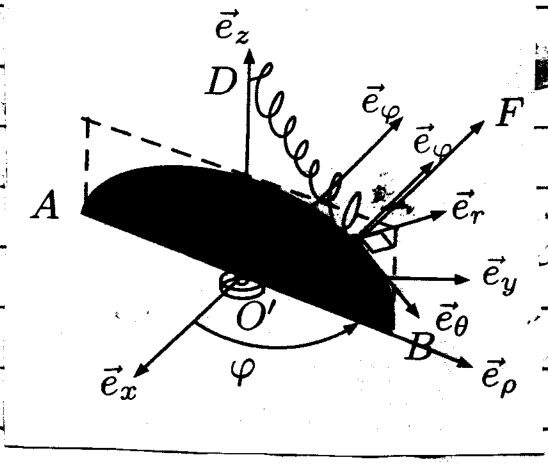
Allora, poiché il versore di r è $\vec{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{e_y} + \vec{e_z})$, risulta

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3},\ 1,\ 0\right] 3mR^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{3}{4} mR^2 \left[\sqrt{3},\ 1,\ 0\right] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{3}{4} mR^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} mR^2$$

Il modello è formato da un rigido, il semidisco con asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$, e il punto materiale P vincolato al semidisco. Con il metodo dei congelamenti successivi si deduce che il modello ha 2 g.l. Quindi può essere descritto dalle coordinate lagrangiane della figura



$$\varphi \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Consideriamo le 3 basi:

$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: "fissa"

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: "intermedia" (solidale all'anello)

$\mathcal{B}'' = (\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$: solidale al punto P

$$(2.1)\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad (2.2)\begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(2.3)\begin{cases} \vec{e}_\theta = \cos\theta\, \vec{e}_\rho - \sin\theta\, \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_r = \sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z \end{cases} \qquad (2.4)\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\, \vec{e}_\theta + \sin\theta\, \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = -\sin\theta\, \vec{e}_\theta + \cos\theta\, \vec{e}_r \end{cases}$$

Quindi,

$$P - O = R\,\vec{e}_r = R\left(\sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z\right)$$

$$P - O = R\,\vec{e}_r$$

$$P - D = (P-O) + (O-D) = R\vec{e}_r - 3R\,\vec{e}_z = R\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta - 3)\,\vec{e}_z\right)$$

$$|P-D|^2 = R^2\left[\sin^2\theta + (\cos\theta - 3)^2\right] = R^2\left(10 - 6\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = R\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = R\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right) = R\left(\sin\theta\,\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}\right) = R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \theta} = R\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = R\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right) = R\left(\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_z\right) = R\,\vec{e}_\theta$$

La sollecitazione dovuta al peso e alla molla è conservativa, quindi ammette energia potenziale

$$V(\varphi, \theta) = -3m\vec{g}\cdot\vec{x}_G - m\vec{g}\cdot\vec{x}_P + \frac{1}{2}b\varphi^2 + \frac{1}{2}c\,\overrightarrow{PD}^2$$

$$= \cancel{3mg\,\vec{e}_z\cdot\frac{4R}{3\pi}\vec{e}_z} + mg\,\vec{e}_z\cdot R\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right) + \frac{1}{2}b\varphi^2 + \frac{1}{2}cR^2\left(\cancel{10} - 6\cos\theta\right)$$

$$\simeq \left(mgR - 3cR^2\right)\cos\theta + \frac{1}{2}b\varphi^2$$

Calcoliamo le componenti lagrangiane della forza $\vec{F}$ in P.

$$Q_\varphi^{(F)} = \vec{F}_P^{(F)}\cdot\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = F\,\vec{e}_\varphi\cdot R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi = FR\sin\theta$$

$$Q_\theta^{(F)} = F\,\vec{e}_\varphi\cdot\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \theta} = F\,\vec{e}_\varphi\cdot R\,\vec{e}_\theta = 0$$

Dunque

$$\frac{\partial Q_\varphi^{(F)}}{\partial \theta} \neq \frac{\partial Q_\theta^{(F)}}{\partial \varphi} \Rightarrow \text{sollecitazione } \underline{\text{non}} \text{ conservativa}$$

Inoltre

$$Q_\varphi^{(con)} = \frac{\partial(-V)}{\partial \varphi} = -b\varphi$$

$$Q_\theta^{(con)} = \frac{\partial(-V)}{\partial \theta} = R\left(mg - 3cR\right)\sin\theta$$

Allora

(4.1) $Q_\varphi = -b\varphi + FR\sin\theta$

(4.2) $Q_\theta = R(mg - 3cR)\sin\theta$

e le equazioni pure di equilibrio sono

$$\begin{cases} -b\varphi + FR\sin\theta = 0 \\ (mg - 3cR)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

La II eq. pura di equilibrio ha soluzioni, posto $\lambda = \frac{mg}{3cR}$,

$\theta = 0 \qquad \forall\lambda$, $\qquad \forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ se $\lambda = 1$.

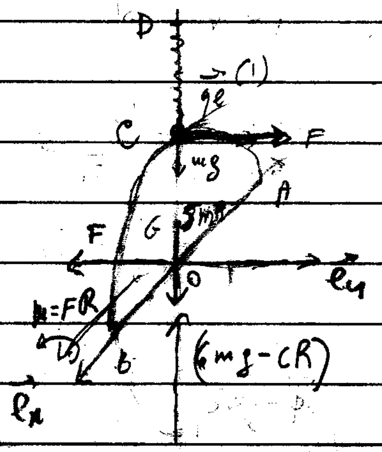
Sostituendo nella I eq. pura di equilibrio si trova

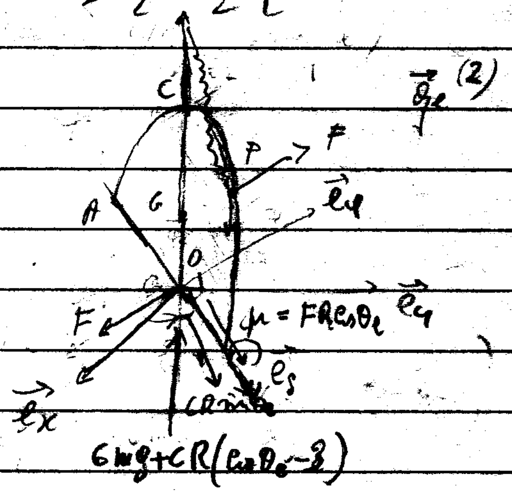
$$\varphi_e = \frac{FR}{b}\sin\theta_e$$

Dunque, le configurazioni di equilibrio $\vec{q}_e = (\varphi_e, \theta_e)$ sono

$\forall\lambda \quad \vec{q}_e^{\,(1)} = (0, 0)$

se $\lambda = 1 \quad \vec{q}_e^{\,(2)} = \left(\frac{FR}{b}\sin\theta_e, \theta_e\right) \qquad \forall\theta_e \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$





2) Reazioni esterne sul semidisco in O ~~e~~ all'equilibrio.

Sappiamo, poiché i vincoli sono non dissipativi e bilateri, che la cerniera cilindrica in O esercita le reazioni vincolari

$$(5.1) \qquad \mathcal{L} = \{(O, \phi), \vec{\mu}\} \qquad \text{con}$$

$$(5.2) \qquad \vec{\mu} \cdot \vec{e}_z = 0$$

Quindi, abbiamo 5 incognite scalari. Scriviamo le ECS su tutto il modello

$$(5.3) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(est, att)} + \vec{\phi}_0 = \vec{0} \\ \vec{M}_0^{(est, att)} + \vec{\mu} = \vec{0} \end{cases}$$

Dalla I ECS troviamo la ϕ_0:

(7.1) $\vec{\phi}_0 = -\vec{R}^{(ext,att)}$

(7.2) $\vec{R}^{(ext,att)} = 3m\vec{g} - c(P-D) + \vec{F}^{(pol)} + m\vec{g} = 4m\vec{g} + F\vec{e}_\varphi - cR(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta-3)\vec{e}_z)$

$= -4mg\vec{e}_z + F\vec{e}_\varphi - cR\sin\theta\,\vec{e}_\rho - cR(\cos\theta-3)\vec{e}_z$

$= -cR\sin\theta\,\vec{e}_\rho + F\vec{e}_\varphi - \left(4mg + cR(\cos\theta-3)\right)\vec{e}_z$

Quindi

$$\vec{\phi}_0 = \left(cR\sin\theta\,\vec{e}_\rho - F\vec{e}_\varphi + \left(4mg + cR(\cos\theta-3)\right)\vec{e}_z\right)\Big|_{\vec{q}_e}$$

Dunque,

$$\vec{\phi}_0\big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = -F\,\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e^{(1)}} + (4mg-2cR)\,\vec{e}_z\big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = -F\vec{e}_\varphi + (4mg-2cR)\vec{e}_z$$

$$\vec{\phi}_0\big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = cR\sin\theta_e\,\vec{e}_\rho\big|_{\vec{q}_e^{(2)}} - F\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e^{(2)}} + \left(4mg + cR(\cos\theta_e-3)\right)\vec{e}_z\big|_{\vec{q}_e^{(2)}}$$

Dalla II ECD (5.3) calcoliamo

$$\vec{\mu} = -\vec{M}_{O}^{\,ext,at}\Big|_{\vec{q}_e}$$

$$\vec{M}_O^{(ext,att)} = \cancel{(G-O)\times(-3mg\vec{e}_z)} + (P-O)\times\left(-c(P-D)+\vec{F}^{(foll)} - mg\vec{e}_z\right) - b\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= R\vec{e}_z\times\left(-cR(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta-3)\vec{e}_z) + F\vec{e}_\varphi - mg\vec{e}_z\right) - b\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= -cR^2\sin\theta\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho - cR^2(\cos\theta-3)\,\vec{e}_z\times\vec{e}_z + FR\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi - mgR\,\vec{e}_z\times\vec{e}_z - b\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= \cancel{-cR^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_\varphi} + \cancel{cR^2(\cos\theta-3)}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - FR\,\vec{e}_\theta + mgR\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - b\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= R(mg-3cR)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - FR\,\vec{e}_\theta - b\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= R(mg-3cR)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - FR\left(\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_z\right) - b\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= -FR\cos\theta\,\vec{e}_\rho + R(mg-3cR)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + (FR\sin\theta - b\varphi)\,\vec{e}_z$$

Dunque,

$$\vec{\mu} = -\vec{M}_O^{(ext,at)}\Big|_{\vec{q}_e}$$

Allora,

$$\vec{\mu}\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = FR\,\vec{e}_\rho\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = FR\,\vec{e}_x$$

$$\vec{\mu}\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = +FR\cos\theta_e\,\vec{e}_\rho\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} - \cancel{R(mg-3cR)}\sin\theta_e\,\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} + \cancel{(FR\sin\theta_e - b\varphi_e)\vec{e}_z}$$

$\lambda = 1$

4) Scriviamo le eq. di Lagrange non conservative. A tale segno calcoliamo

$$K = K^{(semid)} + K^{(P)} \qquad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$$

$$K^{(semid)} = \frac{1}{2}\, \vec{\omega} \cdot I_o(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}\, \vec{e}_z \cdot I_o(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\, \vec{e}_z \cdot I_o(\vec{e}_z)$$
$$= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 I_{oz}$$

dove

$$I_{oz} \overset{(1.4)}{=} I_{zz} = \frac{3}{4}\, m R^2 \qquad \text{(momento d'inerzia del semidisco risp. all'asse } (O, \vec{e}_z))$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2}\, m |\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \vec{\omega}\times(P-O) = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times R\,\vec{e}_r$$
$$= R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + R\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$
$$= R\left(\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$|\vec{v}_P|^2 = R^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

Quindi

$$K = \frac{3}{8}\, m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\, m R^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\, m R^2\left[\left(\frac{3}{4} + \sin^2\theta\right)\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}\ \ \dot{\theta}\right] m R^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

EL_φ : $\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = mR^2\left(\frac{3}{4}+\sin^2\theta\right)\dot\varphi$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = mR^2\left[\left(\frac{3}{4}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right]$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$mR^2\left[\left(\frac{3}{4}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\;\dot\theta\dot\varphi\right] \overset{(4.1)}{=} -b\varphi + FR\sin\theta$$

EL_θ : $\frac{\partial K}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) = mR^2\ddot\theta$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{mR^2}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2$$

$$mR^2\left(\ddot\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\;\dot\varphi^2\right) \overset{(4.2)}{=} R\,(mg-3cR)\sin\theta$$

Dunque, le 2 EL sono

$$(9.1)\quad \begin{cases} EL_\varphi & mR^2\left[\left(\frac{3}{4}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right] = -b\varphi + FR\sin\theta \\ EL_\theta & mR^{2}\left(\ddot\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2\right) = R\,(mg-3cR)\sin\theta \end{cases}$$

5) Linearizzazione delle EL intorno agli equilibri

Poichè la sollecitazione è non conservativa, dobbiamo usare la formula

$$(10.1) \quad A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0 \,, \quad \text{dove} \quad \vec{x} = \underbrace{\vec{q}(t) - \vec{q}_e}_{\varepsilon}$$

$$A = A(\vec{q}_e) = mR^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + \sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$C_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \Rightarrow \qquad C = -\begin{bmatrix} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Q_\theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{|\vec{q}_e} = -\begin{bmatrix} -b & FR\cos\theta_e \\ 0 & R(mg-3cR)\cos\theta_e \end{bmatrix}$$

Allora, la (10.1) si scrive

$$mR^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + \sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -FR\cos\theta_e \\ 0 & -R(mg-3cR)\cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cioè,

$$\begin{cases} mR^2\left(\frac{3}{4} + \sin^2\theta_e\right)\ddot{x}_1 + b\,x_1 - FR\cos\theta_e\, x_2 = 0 \\ mR^2\ddot{x}_2 - R(mg-3cR)\cos\theta_e\, x_2 = 0 \end{cases}$$

Dunque,

(11.1) $\underline{q_e}^{(1)} = (0,0)$

$$\begin{cases} \frac{3}{4} m R^2 \ddot{x}_1 + b x_1 - F R x_2 = 0 \\ m R \ddot{x}_2 - (mg - 3cR) x_2 = 0 \end{cases}$$

se $\lambda = 1$

(11.2) $\underline{q_e}^{(2)} = \left(\frac{FR}{b} \sin\theta_e , \theta_e\right)$

$\forall \theta_e \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\begin{cases} m R^2 \left(\frac{3}{4} + \sin^2\theta_e\right) \ddot{x}_1 + b x_1 - F R \cos\theta_e \, x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo l'integrale generale del sistema (11.2).
La II eq. (11.2) fornisce

$$x_2(t) = c_1 t + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Consideriamo l'omogenea associata alla I eq. (11.2)

$$m R^2 \left(\frac{3}{4} + \sin^2\theta_e\right) \ddot{x}_1 + b\, x_1 = 0$$

Il suo integrale generale è

$$\bar{x}_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{m R^2\left(\frac{3}{4} + \sin^2\theta_e\right)}}\, t + \alpha_1\right)$$

Cerchiamo una soluzione particolare della (11.2) del tipo

$$x_1^{(P)} = c_3 t + c_4$$

Sostituendo nella (11.) troviamo

$$b(c_3 t + c_4) = F R \cos\theta_e (c_1 t + c_2)$$

Dunque, le costanti soddisfano il sistema

$$\begin{cases} b c_3 = F R \cos\theta_e\, c_1 \\ b c_4 = F R \cos\theta_e\, c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_3 = \dfrac{F R \cos\theta_e}{b} c_1 \\ c_4 = \dfrac{F R \cos\theta_e}{b} c_2 \end{cases}$$

Dunque,

$$x_1^{(P)} = \frac{F R \cos\theta_e}{b}(c_1 t + c_2) = \frac{F R \cos\theta_e}{b} x_2$$

e

$$x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{m R^2\left(\frac{3}{4} + \sin^2\theta_e\right)}}\, t + \alpha_1\right) + \frac{F R \cos\theta_e}{b}(c_1 t + c_2)$$

Dunque, l'integrale generale del sistema (11.2) è

$$x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2\left(\frac{3}{4}+\sin^2\theta_e\right)}}\,t + \alpha_1\right) + \frac{FR\cos\theta_e}{b}(c_1 t + c_2)$$

$$x_2(t) = c_1 t + c_2$$

$a_1, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$\alpha_1 \in [0, 2\pi]$

6) Reazioni vincolari del semidisco nel punto P, in dinamica

Scriviamo l'equazione di Newton per il punto P

$$\vec F_P^{(att)} + \vec\Psi_P = m\,\vec a_P$$

$$\vec F_P = \vec F_P^{(el)} + \vec F_P^{(foll)} + m\vec g \overset{(2.2)}{=} -cR\sin\theta\,\vec e_\rho + F\,\vec e_\varphi - \big(mg + cR(\cos\theta-3)\big)\vec e_z$$

$$\vec a_P = \vec a_P^{(rel)} + \vec a_P^{(tr)} + \vec a_P^{(cor)}$$ $\vec a_P^{(rel)}$: accelerazione di P risp. al semidisco.

$$\vec a_P^{(rel)} = \big(\cancel{\ddot R} - R\dot\theta^2\big)\vec e_r + \big(\cancel{2\dot R\dot\theta} + R\ddot\theta\big)\vec e_\theta$$ accelerazion di P in coord polari (R,θ)

$$\vec a_P^{(tr)} = \cancel{\vec a_O} + \dot{\vec\omega}\times(P-O) + \vec\omega\times\big(\vec\omega\times(P-O)\big)$$ $\vec\omega = \dot\varphi\,\vec e_z$ velocità angolare del semidisco

$$= \ddot\varphi\,\vec e_z\times R\,\vec e_r + \dot\varphi^2\,\vec e_z\times\big(\vec e_z\times\vec e_r\big)$$

$$\overset{(2.4)}{=} R\ddot\varphi\sin\theta\,\vec e_\varphi + R\dot\varphi^2\sin\theta\big(\vec e_z\times\vec e_\varphi\big)$$

$$= R\ddot\varphi\sin\theta\,\vec e_\varphi - R\dot\varphi^2\sin\theta\,\vec e_\rho$$

$$= R\Big(\ddot\varphi\sin\theta\,\vec e_\varphi - \dot\varphi^2\sin\theta\big(\cos\theta\,\vec e_\theta + \sin\theta\,\vec e_r\big)\Big)$$

$$\vec a_P^{(cor)} = 2\vec\omega\times\vec v_P^{(rel)} = 2\dot\varphi\,\vec e_z\times\big(R\dot\theta\,\vec e_\theta\big) = 2R\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\,\vec e_\varphi$$

$$\vec a_P = -R\big(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\big)\vec e_r + \big(R\ddot\theta - \sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2\big)\vec e_\theta + R\big(\ddot\varphi\sin\theta + 2\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\big)\vec e_\varphi$$

Dunque,

$$\vec{\Psi}_P = -\vec{F}_P^{(at)} + m\,\vec{a}_P$$

$$= cR\sin\theta\,\vec{e}_\rho - F\,\vec{e}_\varphi + \left(mg + cR(\cos\theta - 3)\right)\vec{e}_z +$$

$$+\, mR\left[\left(-\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right)\vec{e}_r + \left(\ddot\theta - \sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2\right)\vec{e}_\theta + \left(\ddot\varphi\sin\theta + 2\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi\right]$$

$$\overset{(2.4)}{=} cR\sin\theta\left(\cos\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\vec{e}_r\right) - F\,\vec{e}_\varphi + \left[mg + cR(\cos\theta - 3)\right]\left(-\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\theta\,\vec{e}_r\right) +$$

$$+\, mR\left[\left(-\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right)\vec{e}_r + \left(\ddot\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\dot\varphi^2\right)\vec{e}_\theta + \left(\ddot\varphi\sin\theta + 2\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi\right]$$

$$= \left[cR\,\cancel{\sin\theta\cos\theta} - \sin\theta\left(mg + cR(\cancel{\cos\theta} - 3)\right) + mR\left(\ddot\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\dot\varphi^2\right)\right]\vec{e}_\theta +$$

$$+ \left[cR\sin^2\theta + \cos\theta\left(mg + cR(\cos\theta - 3)\right) - mR\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right)\right]\vec{e}_r +$$

$$+ \left[-F + mR\left(\sin\theta\,\ddot\varphi + 2\cos\theta\,\dot\varphi\dot\theta\right)\right]\vec{e}_\varphi$$

(8.1)

$$= -\sin\theta\left(mg - 3cR\right) + mR\left(\ddot\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\dot\varphi^2\right)\vec{e}_\theta +$$

$$+ \left[cR\sin^2\theta + \cos\theta\left(mg + cR(\cos\theta - 3)\right) - mR\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right)\right]\vec{e}_r +$$

$$+ \left[-F + mR\left(\sin\theta\,\ddot\varphi + 2\cos\theta\,\dot\varphi\dot\theta\right)\right]\vec{e}_\varphi$$