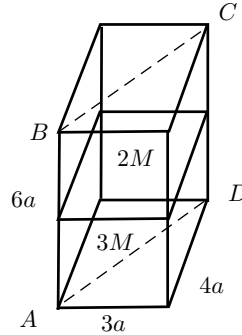


Compito di Meccanica Razionale

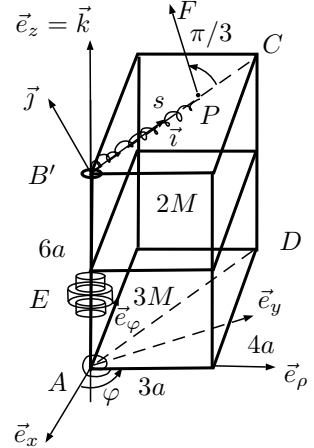
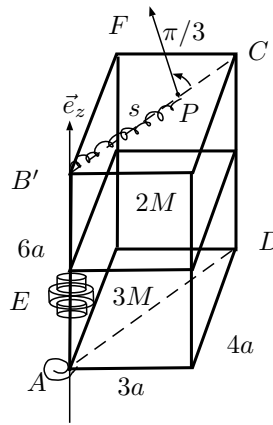
Trieste, 12 luglio 2021. (G. Tondo)

Si consideri un parallelepipedo retto, a base rettangolare composto da due blocchi di uguali dimensioni ma materiali diversi, di massa $2M$ e $3M$ come nella figura.

- 1) Si calcoli il baricentro G e il momento d'inerzia del parallelepipedo rispetto a una retta r passante per i vertici A e B .



Il parallelepipedo suddetto è vincolato a ruotare, come nella figura, attorno all'asse fisso verticale $(A, \vec{e}_z)$ passante per A e B , mediante una cerniera *cilindrica* fissata all'asse nel punto E dell'asse, a distanza $(27/10)a$ dal vertice A . Inoltre, un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito sulla faccia superiore del parallelepipedo, lungo la diagonale BC . La sollecitazione attiva sul parallelepipedo è data: da una molla *angolare* posta in A e di costante elastica μ e dal peso proprio. La sollecitazione attiva sul punto materiale P è data: dal peso proprio, da una forza $F > 0$ appartenente al piano della faccia superiore del parallelepipedo e formante un angolo di $\pi/3$ con il vettore $C - B$ e da una molla di costante elastica λ , fissata nel punto B' dell'asse coincidente geometricamente con B .



STATICA

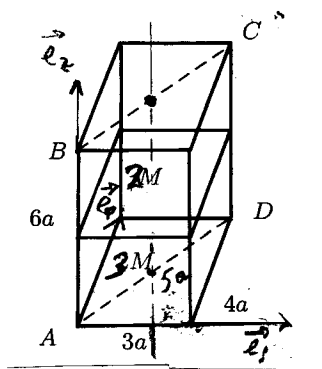
Determinare:

- 2) le configurazioni di equilibrio del modello costituito dal parallelepipedo e dal punto P ;
- 3) la sollecitazione reattiva sul parallelepipedo in E , B e sul punto materiale P , all'equilibrio.

DINAMICA

- 4) Scrivere un sistema di equazioni differenziali pure di moto per il modello;
- 5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e ricavare il moto del punto P relativo al parallelepipedo in corrispondenza delle condizioni iniziali $s(0) = s_e$, $\dot{s}(0) = v_0$;
- 6) dire se il parallelepipedo è bilanciato staticamente e/o dinamicamente e giustificare la risposta.

Il rigido è costituito da 2 blocchi di densità diverse, quindi non è omogeneo. Considerata la terna solidale al rigido $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e $(x_1, x_2, x_3 = z)$ le coordinate cartesiane dei punti del rigido rispetto a tale terna, si ha che



la densità $\rho(p) = \rho(z)$, cioè dipende solo della coordinata lungo l'asse $\vec{k}$. Dunque, i piani perpendicolari all'asse del parallelepipedo parallelo a $(0, \vec{k})$ e paralleli alle due facce, sono piani di simmetria materiale (ortogonali) ortogonali tra loro.

Quindi, il baricentro G appartiene a tali piani e quindi alla loro intersezione. Bisogna stabilire la sua quota. A tale scopo, utilizziamo la proprietà distributiva, sapendo che

$$(1.1) \quad G_2 - A = a \left(\frac{5}{2} \vec{i} + \frac{3}{2} \vec{k} \right)$$

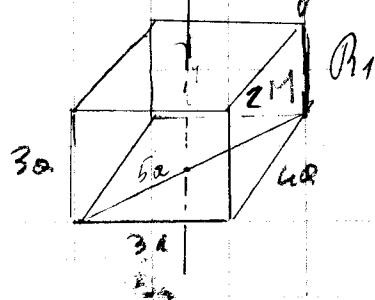
$$(1.2) \quad G_1 - A = a \left(\frac{5}{2} \vec{i} + \left(3 + \frac{3}{2} \right) \vec{k} \right)$$

Dunque,

$$(1.3) \quad G - A = \frac{3M(G_2 - A) + 2M(G_1 - A)}{5M} = \frac{3a \left(\frac{5}{2} \vec{i} + \frac{3}{2} \vec{k} \right) + 2a \left(\frac{5}{2} \vec{i} + \frac{9}{2} \vec{k} \right)}{5M} = \frac{5}{2} a \vec{i} + \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 2} a \vec{k} = a \left(\frac{5}{2} \vec{i} + \frac{27}{10} \vec{k} \right)$$

Per calcolare il momento d'inertia di R rispetto all'asse AB , divido il rigido nei 2 blocchi omogenei R_1, R_2 , quindi

$$I_z^{(R)} = I_z^{(R_1)} + I_z^{(R_2)}$$



Calcolo, primo, il momento d'inertia dei due blocchi rispetto all'asse $z' \parallel AB$ e passante per i due baricentri G_1, G_2 .

$$R_1: I_{z'}^{(R_1)} = \frac{1}{12} M_1 \left((3a)^2 + (3a)^2 \right) = \frac{25}{6} M a^2$$

$$R_2: I_{z'}^{(R_2)} = \frac{3}{2} I_{z'}^{(R_1)} = \frac{3}{2} \frac{25}{6} M a^2 = \frac{25}{4} M a^2$$

Quindi,

$$I_{z'} = \frac{25}{4} M a^2 + \frac{25}{6} M a^2 = \frac{25}{2} M a^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{125}{12} M a^2$$

dove abbiamo tenuto conto che $G \in G_1, G_2$.

Possiamo applicare il Teo di Huygens-Steiner per calcolare il momento d'inertia rispetto all'asse AB :

$$\begin{aligned} I_z &= I_{zG}^{(R)} + 5M d^2(z, z') = \frac{125}{12} M a^2 + \left(\frac{5a}{2} \right)^2 5M \\ &= M a^2 \left(\frac{125}{12} + \frac{125}{4} \right) = \frac{125}{3} M a^2 \end{aligned}$$

Analisi cinematica

3

Il modello è costituito dall'unione di un rigido R e un punto materiale P . Il rigido è vincolato ad avere un asse fisso (rotore), mentre il punto P è vincolato a scorrere ^{senza attrito} sulla faccia superiore del rigido, lungo la diagonale BC . Gli spostamenti virtuali indipendenti sono 2:

$$(3.1) \quad \vec{\epsilon} = \delta\varphi \vec{e}_z \quad \text{spostamento rotatorio di } R,$$

$$(3.2) \quad \delta\vec{x}_P = \delta s \vec{t} \quad \text{spostamento del punto } P.$$

Quindi, il modello ha 2 g.l. e scegliamo come coordinate libere $q = (s, \varphi)$. Inoltre, utilizziamo 3 basi:

$$B = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \quad \text{fissa} \quad (3.3) \quad \begin{aligned} \vec{e}_P &= \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_Q &= -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$B' = (\vec{e}_s, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z) \quad \text{solidale} \quad (3.4) \quad \begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos\varphi \vec{e}_P - \sin\varphi \vec{e}_Q \\ \vec{e}_y &= \sin\varphi \vec{e}_P + \cos\varphi \vec{e}_Q \end{aligned}$$

$$B'' = (\vec{t}, \vec{j}, \vec{k}) \quad \text{solidale} \quad (3.5) \quad \begin{aligned} \vec{t} &= \cos d \vec{e}_s + \sin d \vec{e}_\varphi \\ \vec{j} &= -\sin d \vec{e}_s + \cos d \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \vec{e}_s &= \frac{3}{5} \vec{t} - \frac{4}{5} \vec{j} \\ \vec{e}_\varphi &= \frac{4}{5} \vec{t} + \frac{3}{5} \vec{j} \end{aligned}$$

Statica

2. I vincoli sono non dissipativi, bilateri e olonomi, 4

Quindi, possiamo usare le equazioni pure di equilibrio. Allora, dobbiamo calcolare le forze generalizzate (Q_s, Q_φ) . A tale scopo, separiamo il contributo della sollecitazione conservativa da quello "follower".

$$Q_s = Q_s^{(con)} + Q_s^{(foll)} = \frac{\partial(-V)}{\partial s} + Q_s^{(foll)}$$

$$Q_\varphi = Q_\varphi^{(con)} + Q_\varphi^{(foll)} = \frac{\partial(-V)}{\partial \varphi} + Q_\varphi^{(foll)}$$

$$V(s, \varphi) = \frac{1}{2} \mu \varphi^2 + \frac{1}{2} \lambda s^2 - \cancel{5M \vec{g} \cdot \vec{x}_c} - \cancel{m \vec{g} \cdot \vec{x}_p}$$
$$\simeq \frac{1}{2} \mu \varphi^2 + \frac{1}{2} \lambda s^2$$

$$Q_s^{(foll)} = \vec{F}_p^{(foll)} \cdot \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial s}, \quad Q_\varphi^{(foll)} = \vec{F}^{(foll)} \cdot \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \varphi}$$

$$\vec{F}_p = \frac{F}{2} (\vec{i} + \sqrt{3} \vec{j})$$

$$\vec{x}_p = (P-B) + (B-A) = s \vec{l} + 6a \vec{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \vec{x}_p}{\partial s} = \vec{l} + \cancel{\frac{\partial \vec{l}}{\partial s}}, \quad \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \varphi} = s \frac{\partial \vec{l}}{\partial \varphi} = s \vec{j}$$

In fatti dalla (3.5) si trova

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial \varphi} = \frac{3}{5} \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \varphi} + \frac{4}{5} \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \varphi} = \frac{3}{5} \vec{e}_\varphi - \frac{4}{5} \vec{e}_\theta = \vec{j}$$

Donc que,

15

$$(5.1) \quad Q_s^{(pot)} = \frac{F}{2} (\vec{l} + \sqrt{3} \vec{j}) \cdot \vec{l} = \frac{F}{2}$$

$$Q_\varphi^{(pot)} = \frac{F}{2} (\vec{l} + \sqrt{3} \vec{j}) \cdot s \vec{j} = \frac{F}{2} \sqrt{3} s$$

Quindi

$$(5.2) \quad Q_s = -\lambda s + \frac{F}{2}$$

$$Q_\varphi = -\mu \varphi + F \frac{s}{2} \sqrt{3}$$

Le eq. pure di equilibrio sono

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\lambda s + \frac{F}{2} = 0 \end{array} \right.$$

$$(5.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\mu \varphi + F \frac{s}{2} \sqrt{3} = 0 \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow$

$$s_e = \frac{F}{\lambda 2}$$

$$\varphi_e = \frac{F \sqrt{3}}{\mu} \frac{s_e}{2} = \frac{F \sqrt{3}}{\mu} \frac{F}{4\lambda} = \frac{F^2 \sqrt{3}}{\lambda \mu 4}$$

Donc que, $\exists$! configuratione di equilibrio data da

$$(5.5) \quad q_e = (s_e, \varphi_e) = \left(\frac{F}{2\lambda}, \frac{F^2 \sqrt{3}}{\lambda \mu 4} \right)$$

3. Sollecitazione reattiva in E e in P

La cerniera cilindrica in E produce una sollecitazione reattiva equivalente a

$$I^{(reol)} = \{ (E, \vec{\Phi}), \vec{\Gamma} \} \text{ con } \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_2 = 0,$$

che calcoliamo grazie alle ECS

$$\begin{cases} \vec{R}^{(ext, ext)} + \vec{\Phi}_E = \vec{0} \\ \vec{M}_E^{(ext, ext)} + \vec{\Gamma} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{R}^{(ext, ext)} = (5M+m) \vec{g} + \frac{F}{2} (\vec{i} + \sqrt{3} \vec{j}) - \lambda s \vec{i}$$

Quindi, dalle II ECS otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_E = -\vec{R}^{(ext, ext)} &= (5M+m)g \vec{e}_2 - \frac{F}{2} (\vec{i} + \sqrt{3} \vec{j}) \Big|_{qe} + \lambda s \vec{i} = \\ &= (5M+m)g \vec{e}_2 - \frac{F}{2} (\vec{i} + \sqrt{3} \vec{j}) \Big|_{qe} + \lambda \frac{F}{2s} \vec{i} \Big|_{qe} = (5M+m)g \vec{e}_2 - \frac{F\sqrt{3}}{2} \vec{j} \Big|_{qe} \end{aligned}$$

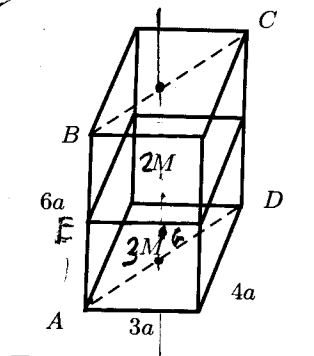
Dalle II ECS, otteniamo

$$\vec{\Gamma} = -\vec{M}_E^{(ext, ext)} \Big|_{qe}$$

dove

$$\vec{M}_E^{(ext, ext)} = -\mu \varphi \vec{e}_2 + (G-E) \times 5M \vec{g} + (P-E) \times \vec{F}_p$$

$$G-E = (G-A) + (A-E) \stackrel{(1.3)}{=} \frac{5}{2} a (\vec{i} + \vec{k}) - 3a \vec{k} = \frac{a}{2} (5\vec{i} - \vec{k})$$



$$(G-E) \times 5M\vec{g} = \frac{q}{2} (5\vec{L} - \vec{K}) \times (-5Mg\vec{K}) = \quad \quad \quad \boxed{7}$$

$$= -\frac{5Maq}{2} (-5\vec{j}) = \frac{25Maq}{2} \vec{j}$$

$$(P-E) = (P-B) + (B-E) = 5\vec{L} + \frac{33a}{10} \vec{K}$$

$$(P-E) \times \vec{F}_p = \left(5\vec{L} + \frac{33a}{10} \vec{K}\right) \times \left(\frac{F}{2} (\vec{L} + \sqrt{3}\vec{j}) - mg\vec{K} - \lambda 5\vec{L}\right)$$

$$= \frac{F\sqrt{3}5}{2} \vec{K} + mg5\vec{j} + \frac{33a}{10} \frac{F}{2} (\vec{j} - \sqrt{3}\vec{L}) - \frac{33a\lambda 5}{10} \vec{j}$$

$$= -\frac{33a}{20} F\sqrt{3}\vec{L} + \left(mg5 + \frac{33a}{10} \left(\frac{F}{2} - \lambda 5\right)\right) \vec{j} + \frac{F5\sqrt{3}}{2} \vec{K}$$

Quindi,

$$\vec{M}_E \xrightarrow{(est, ca)} = -\frac{1}{2} q \vec{K} + \frac{25}{2} Maq \vec{j} + \left(-\frac{3aq}{2} F\sqrt{3}\vec{L} + \left(mg5 + \frac{33a}{10} \left(\frac{F}{2} - \lambda 5\right)\right) \vec{j} + \frac{F5\sqrt{3}}{2} \vec{K}\right)$$

$$= -\frac{33a}{20} F\sqrt{3}\vec{L} + \left(\frac{25}{2} Maq + mg5 + \frac{33a}{10} \left(\frac{F}{2} - \lambda 5\right)\right) \vec{j} + \left(\frac{F5\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} q\right) \vec{K}$$

Dunque,

$$\vec{\Gamma} = \frac{33a}{20} F\sqrt{3}\vec{L} - \left(\frac{25}{2} Maq + \frac{mgF}{2\lambda} + \frac{33a}{10} \left(\frac{F}{2} - \lambda 5\right)\right) \vec{j} + \left(\frac{F5\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} q\right) \vec{K}$$

(5.3) (5.4)

$$= \frac{33a}{20} F\sqrt{3}\vec{L} - \left(\frac{25}{2} Maq + \frac{mgF}{2\lambda}\right) \vec{j}$$

Reazione nel punto P

L'equazione della statica del punto è

$$\vec{R}^{(att)} + \vec{\psi}_P = \vec{0}, \text{ dove } \vec{\psi}_P \cdot \vec{c} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{R}^{(att)} &= -\lambda (\vec{P} - \vec{B}) + m\vec{g} + \frac{F}{2} (\vec{c} + \sqrt{3}\vec{j}) \\ &= -\lambda s\vec{c} - mg\vec{k} + \frac{F}{2} (\vec{c} + \sqrt{3}\vec{j}) \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_P &= \lambda s\vec{c} + mg\vec{k} - \frac{F}{2} (\vec{c} + \sqrt{3}\vec{j}) = \\ &= \left(\lambda s - \frac{F}{2} \right) \vec{c} - \frac{F\sqrt{3}}{2} \vec{j} + mg\vec{k} \end{aligned}$$

(5.3)

Dinamica

8

4) Scriviamo le eq. di Lagrange (EL).

$$K = K^{(R)} + K^{(P)}$$

$$\begin{aligned} K^{(R)} &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_E(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \vec{\ell}_2 \cdot \mathbb{I}_E(\vec{\ell}_2) = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 I_z = \frac{1}{2} \frac{125}{3} M a^2 \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m |\vec{V}_P|^2$$

$$\vec{V}_P = \dot{\vec{x}}_P = \frac{d}{dt} (s \vec{\ell} + 6a \vec{\ell}_2) = \dot{s} \vec{\ell} + s \dot{\vec{\ell}}$$

Poichè,

$$\dot{\vec{\ell}} = \vec{\omega} \times \vec{\ell} = \dot{\varphi} \vec{k} \times \vec{\ell} = \dot{\varphi} \vec{j}$$

$$\vec{V}_P = \dot{s} \vec{\ell} + s \dot{\varphi} \vec{j}, \quad |\vec{V}_P|^2 = \dot{s}^2 + s^2 \dot{\varphi}^2$$

Quindi

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\varphi}^2)$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \left(\frac{125}{3} M a^2 \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{125}{3} M a^2 + m s^2 \right) \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2} [\dot{s}, \dot{\varphi}] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{125}{3} M a^2 + m s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Allora,

9

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = m \dot{s}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} \right) = m \ddot{s}, \quad \frac{\partial K}{\partial s} = m s \dot{\varphi}^2$$

$$EL_s: m \ddot{s} - m s \dot{\varphi}^2 = -\lambda s + \frac{F}{2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \left(\frac{125 M a^2}{3} + m s^2 \right) \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \left(\frac{125 M a^2}{3} + m s^2 \right) \ddot{\varphi} + 2 m s \dot{s} \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$EL_\varphi:$

$$\left(\frac{125 M a^2}{3} + m s^2 \right) \ddot{\varphi} + 2 m s \dot{s} \dot{\varphi} = -\mu \varphi + \frac{F s \sqrt{3}}{2}$$

5) Linearizzazione delle EL intorno a q_e

110

Poniamo $\underline{x} = \frac{q - q_e}{\varepsilon}$, le eq. linearizzate sono

$$(10.1) \quad A \ddot{\underline{x}} + B \dot{\underline{x}} + C \underline{x} = \underline{0} \quad \text{dove}$$

$$(10.2) \quad A = A(q_e) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{125}{3} M a^2 + m s_e^2 \end{bmatrix}, \quad B_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} \Big|_{q_e} = 0$$

$$(10.3) \quad C_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \Big|_{q_e} = - \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ \frac{F\sqrt{3}}{2} & -\mu \end{bmatrix}$$

Quindi,

$$(10.4) \quad m \ddot{x}_1 + \lambda x_1 = 0$$

$$(10.5) \quad \left(\frac{125}{3} M a^2 + m \frac{F^2}{4\lambda^2} \right) \ddot{x}_2 - \frac{F\sqrt{3}}{2} x_1 + \mu x_2 = 0$$

$$(10.6) \quad x_1(t) = c \sin \left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} t + \beta \right) \quad \text{integrale generale della (10.4)}$$

$$(10.7) \quad s - s_e = c' \sin \left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} t + \beta \right) \quad \text{" " nelle coord. } s$$

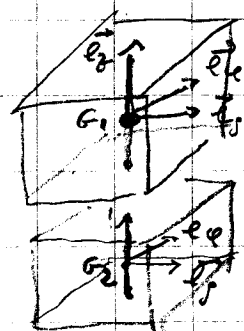
$$\begin{cases} s(0) - s_e = c' \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \beta = 0$$

$$\begin{cases} \dot{s}(0) = +c' \cos \left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} t + \beta \right) \Big|_{t=0} = c' \cos \beta \sqrt{\frac{\lambda}{m}} \Rightarrow c' = v_0 \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \end{cases}$$

$$s(t) = s_e + \sqrt{\frac{m}{\lambda}} v_0 \sin \left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} t \right)$$

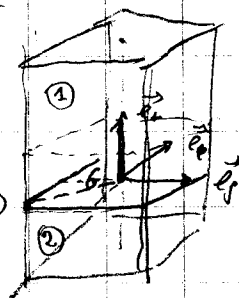
6) Il parallelepipedo non è bilanciato staticamente poiché $G \notin$ all'asse di rotazione z , ma è bilanciato dinamicamente, poiché $z \in API(E)$. Infatti, ragionando sul trasporto delle TPI centrali (vedi Prop. 12.8.1 degli Appunti) si può concludere che $z \in API$ per il punto $E = z \cap PPI(G)$, con $PPI(G) \perp z$.

È ovvio che $(G_1; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $(G_2; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sono TPI centrali per R_1 e R_2 , rispettivamente. Quindi, se vengono traslate lungo l'asse $\vec{e}_3$ fino al punto G , rimangono TPI(G) per entrambi i blocchi.



Quindi, la matrice di inerzia per G dell'unione dei due blocchi rispetto alla terna $(G; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è diagonale

$$[I_G] = [I_{G_1}]^{R_1} + [I_{G_2}]^{R_2} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$$



Dunque, la terna $(G; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è una TPI(G) anche per R . Allora, per il punto E della Prop. 12.8.1, se trasporto la terna centrale nel punto E del $PPI(G) \perp z$, dove $E = z \cap PPI(G)$, l'asse $(E, \vec{e}_3)$ è $API(E)$, mentre gli altri due assi $(E, \vec{e}_1)$ e $(E, \vec{e}_2)$ sono di inerzia.