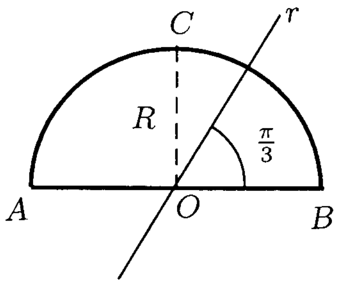
Compito di Meccanica Razionale

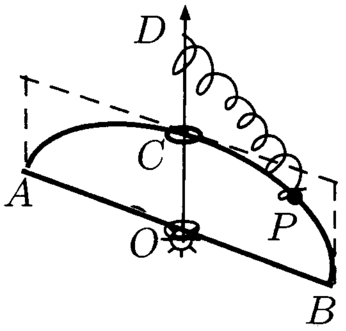
Trieste, 24 gennaio 2022

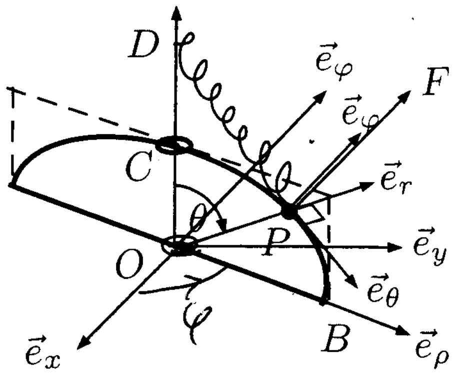
(G. Tondo)



È dato un telaio rigido formato da un semianello omogeneo, di massa $4m$ e raggio R e da un'asta omogenea di massa m saldata al semianello lungo il diametro AB.

1) Determinarne il baricentro e il momento d'inerzia rispetto all'asse r passante per il punto O e inclinato di $\frac{\pi}{3}$ rispetto al vettore $B - O$.





Il telaio è vincolato ad un asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$ mediante una cerniera sferica liscia fissata in O e un anellino liscio fissato in C. Sul semianello, è vincolato a scorrere senza attrito un punto materiale P, di massa m, collegato a una molla, di costante elastica c, che ha l'altro estremo fissato nel punto D dell'asse fisso posto a distanza $2R$ da O. Inoltre, su P agisce una forza $F\vec{e}_\varphi$. Sul telaio agisce una molla angolare di richiamo fissata in O e di costante elastica b. Scelte come coordinate libere gli angoli di figura, $\varphi \in \mathbb{R}$ e $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, si chiede di:

STATICA.

2) determinare le configurazioni di equilibrio del modello in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{2cR}$;

3) determinare l'insieme delle reazioni vincolari esterne sul telaio nei punti O e C, all'equilibrio;

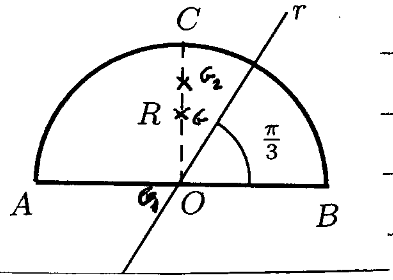
DINAMICA.

4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e calcolare l'integrale generale intorno a una sola configurazione di equilibrio (a propria scelta);

6) calcolare le reazioni vincolari del telaio sul punto materiale P durante il moto.

Tema del 24/01/2022



Calcolo del baricentro del telaio

Dalla proprietà distributiva

(1.1) $\vec{x}_G = G-O = \cancel{\frac{m(G_1-O)+4m(G_2-O)}{5m}} = \frac{4}{5}(G_2-O) = \frac{4}{5}\frac{2}{\pi}R\vec{e}_z = \frac{8}{5\pi}R\vec{e}_z$

Calcolo del momento d'inerzia del telaio rs. all'asse r.

(1.2) $I_r = \vec{u}\cdot\mathbb{I}_O(\vec{u})$ $\qquad \vec{u}$ = versore di r

Dunque, ci serve la matrice d'inerzia rs. al punto O.
Per calcolarla, fissiamo la base $\mathcal{B}''' = (\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho, \vec{e}_2 = \vec{e}_z, \vec{e}_3 = -\vec{e}_\varphi)$ e osserviamo che la terna $(O, \mathcal{B}''')$ è una TPI(O) per simmetrie mat.

(1.3) $[\mathbb{I}_O]^{\mathcal{B}'''} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{bmatrix}$

$I_{11} = I_{11}^{(sa)} + I_{11}^{(asta)} = \frac{1}{2}(4m)R^2 = 2mR^2$

$I_{22} = I_{22}^{(sa)} + I_{22}^{(asta)} =$

$= \frac{1}{2}(4m)R^2 + \frac{1}{12}m(2R)^2 = \frac{7}{3}mR^2$

Dunque,

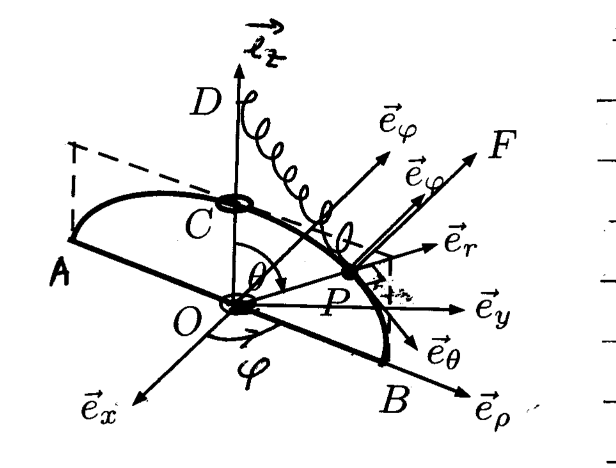
$[\mathbb{I}_O]^{\mathcal{B}'''} = mR^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} \end{bmatrix}$

Allora, poichè il versore di r è $\vec{u} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_\xi + \sqrt{3}\right)\vec{e}_z$, risulta

$$I_r = \frac{1}{2}\left[1, \sqrt{3}, 0\right] mR^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} mR^2 \left[1, \sqrt{3}, 0\right] \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} mR^2 (2+7) = \frac{9}{4} mR^2$$

Il modello è formato da un rigido, il telaio con asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$, e il punto materiale P vincolato al telaio. Con il metodo dei congelamenti successivi si deduce che il modello ha 2 g.l. Quindi può essere descritto dalle coordinate lagrangiane della figura



$$\varphi \in \mathbb{R} \quad , -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Consideriamo le 3 basi:

$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: "fissa"

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: "intermedia" (solidale all'anello)

$\mathcal{B}'' = (\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$: solidale al punto P

$$(2.1) \begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad (2.2) \begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(2.3) \begin{cases} \vec{e}_\theta = \cos\theta\, \vec{e}_\rho - \sin\theta\, \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_r = \sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z \end{cases} \qquad (2.4) \begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\, \vec{e}_\theta + \sin\theta\, \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = -\sin\theta\, \vec{e}_\theta + \cos\theta\, \vec{e}_r \end{cases}$$

Quindi,

$$P - O = R\, \vec{e}_r = R(\sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z)$$

$P-O = R\,\vec{e}_r$

$P-D = (P-O)+(O-D) = R\vec{e}_r - 2R\vec{e}_z = R\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta - 2)\,\vec{e}_z\right)$

$|P-D|^2 = R^2\left[\sin^2\theta + (\cos\theta-2)^2\right] = R^2(5-4\cos\theta)$

$\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial\varphi} = R\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = R\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right) = R\left(\sin\theta\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi}\right) = R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$

$\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\theta} = R\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = R\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right) = R\left(\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_z\right) = R\,\vec{e}_\theta$

La sollecitazione dovuta al peso e alle molle è conservativa, quindi ammette energia potenziale

$V(\varphi,\theta) = -3m\vec{g}\cdot\vec{x}_G - m\vec{g}\cdot\vec{x}_P + \frac{1}{2}b\varphi^2 + \frac{1}{2}c\,\overline{PD}^2$

$= 5mg\vec{e}_z\cdot\frac{4R}{3\pi}\vec{e}_z + mg\vec{e}_z\cdot R\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right) + \frac{1}{2}b\varphi^2 + \frac{1}{2}cR^2(5-4\cos\theta)$

$\simeq (mgR - 2cR^2)\cos\theta + \frac{1}{2}b\varphi^2$

Calcoliamo le componenti lagrangiane della forza F in P.

$Q_\varphi^{(NC)} = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\varphi} = F\vec{e}_\varphi\cdot R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi = FR\sin\theta$

$Q_\theta^{(NC)} = F\vec{e}_\varphi\cdot\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\theta} = F\vec{e}_\varphi\cdot R\,\vec{e}_\theta = 0$

Dunque

$\frac{\partial Q_\varphi^{(NC)}}{\partial\theta} \neq \frac{\partial Q_\theta^{(NC)}}{\partial\varphi} \Rightarrow$ sollecitazione <u>non</u> conservativa

Inoltre

$Q_\varphi^{(con)} = \frac{\partial(-V)}{\partial\varphi} = -b\varphi$

$Q_\theta^{(con)} = \frac{\partial(-V)}{\partial\theta} = R(mg-2cR)\sin\theta$

Allora

(4.1) $Q_\varphi = -b\varphi + FR\sin\theta$

(4.2) $Q_\theta = R(mg-2cR)\sin\theta$

e le equazioni pure di equilibrio sono

$$\begin{cases} -b\varphi + FR\sin\theta = 0 \\ (mg-2cR)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

La II eq. pura di equilibrio ha soluzioni, posto $\lambda = \frac{mg}{2cR}$,

$\theta = 0 \quad \forall\lambda$, $\quad \forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ se $\lambda = 1$.

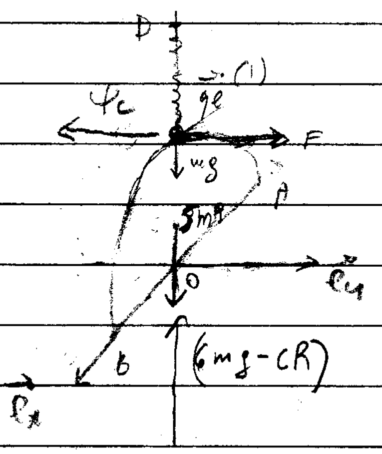
Sostituendolo nella I eq. pura di equilibrio si trova

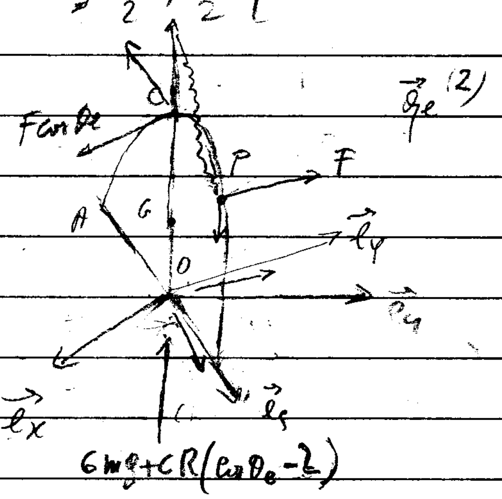
$$\varphi_e = \frac{FR}{b}\sin\theta_e$$

Dunque, le configurazioni di equilibrio $\vec{q}_e = (\varphi_e, \theta_e)$ sono

$\forall\lambda \quad \vec{q}_e^{(1)} = (0, 0)$

se $\lambda = 1 \quad \vec{q}_e^{(2)} = \left(\frac{FR}{b}\sin\theta_e, \theta_e\right) \quad \forall\theta_e \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$





2) Reazioni esterne sul telaio in O e C all'equilibrio.

Sappiamo, poiché i vincoli sono non dissipativi e bilateri, che la cerniera sferica in O e l'anellino in C esercitano le reazioni vincolari

$$(5.1) \qquad \mathcal{L} = \{(O, \phi), (C, \psi)\} \quad \text{con}$$

$$(5.2) \qquad \vec{\psi}_C \cdot \vec{e}_z = 0$$

Quindi, abbiamo 5 incognite scalari. Scriviamo le ECS su tutto il modello

$$(5.3) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(ext, eff)} + \vec{\phi}_O + \vec{\psi}_C = \vec{O} \\ \vec{M}_O^{(ext, eff)} + (C-O) \times \vec{\psi}_C = \vec{O} \end{cases}$$

Dalla II ECS ricaviamo

$$\vec{\psi}_C = \frac{(C-O)}{|C-O|^2} \times \vec{M}_O^{(ext, eff)} + \cancel{\xi \vec{e}_z} \quad (5.2)$$

che, sostituita nella I ECS, fornisce

$$\vec{\phi}_O = -\vec{R}^{(ext, eff)} - \frac{\vec{e}_z}{R} \times \vec{M}_O^{(ext, eff)}$$

Calcolions $\vec{M}_O^{(est,est)}$

$$\vec{M}_O^{(est,est)} = (G-O)\times\left(-5mg\,\vec{e}_z\right) + (P-O)\times\left(-c(P-D) + \vec{F}^{(poll)} - mg\,\vec{e}_z\right) - b\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= R\vec{e}_z\times\left(-cR\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta-2)\vec{e}_z\right) + F\vec{e}_\varphi - mg\,\vec{e}_z\right) - b\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= -cR^2\sin\theta\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho - cR^2(\cos\theta-2)\,\vec{e}_z\times\vec{e}_z + FR\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi - mgR\,\vec{e}_z\times\vec{e}_z - b\varphi\,\vec{e}_z$$

(6.1) $$= -cR^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_\varphi + cR^2(\cos\theta-2)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - FR\,\vec{e}_\theta + mgR\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - b\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= R(mg-2cR)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - FR\,\vec{e}_\theta - b\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= R(mg-2cR)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - FR\left(\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_z\right) - b\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= -FR\cos\theta\,\vec{e}_\rho + R(mg-2cR)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \left(FR\sin\theta - b\varphi\right)\vec{e}_z$$

Dunque,

(6.2) $$\vec{\Psi}_c = \frac{\vec{e}_z}{R}\times\left[-FR\cos\theta\,\vec{e}_\rho + R(mg-2cR)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \left(FR\sin\theta - b\varphi\right)\vec{e}_z\right]$$

Allora,

(6.3) $$\vec{\Psi}_c = -F\cos\theta\,\vec{e}_\varphi - (mg-2cR)\sin\theta\,\vec{e}_\rho$$

Quindi,

(6.4) $$\vec{\Psi}_c\big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = -F\,\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = -F\,\vec{e}_y$$

(6.5) $$\vec{\Psi}_c\big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = -F\cos\theta_e\,\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e^{(2)}} - \underbrace{\cancel{(mg-2cR)}}_{\lambda=1}\sin\theta_e\,\vec{e}_\rho$$

Calcoliamo $\vec{R}^{(est,ot)}$

(7.1) $$\vec{R}^{(est,ot)} = 5m\vec{g} - c(P-D) + F^{(...)} + m\vec{g} = 6m\vec{g} + F\vec{e}_\varphi - cR(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta-2)\vec{e}_z)$$

$$= -6mg\,\vec{e}_z + F\vec{e}_\varphi - cR\sin\theta\,\vec{e}_\rho - cR(\cos\theta-2)\vec{e}_z$$

$$= -cR\sin\theta\,\vec{e}_\rho + F\vec{e}_\varphi - \left(6mg + cR(\cos\theta-2)\right)\vec{e}_z$$

Quindi

$$\vec{\Phi}_0 = \left(cR\sin\theta\,\vec{e}_\rho - F\vec{e}_\varphi + \left(6mg + cR(\cos\theta-2)\right)\vec{e}_z\right)\Big|_{\vec{q}_e} - \vec{\Psi}_e$$

Dunque,

$$\vec{\Phi}_{0|\vec{q}_e^{(1)}} = -\cancel{F\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e^{(1)}}} + (6mg - cR)\vec{e}_z + \cancel{F\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e^{(1)}}} = (6mg - cR)\vec{e}_z$$

$$\vec{\Phi}_{0|\vec{q}_e^{(2)}} = cR\sin\theta_e\,\vec{e}_{\rho|\vec{q}_e^{(2)}} - F\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e^{(2)}} + \left(6mg + cR(\cos\theta_e-2)\right)\vec{e}_z +$$

$$+ F\cos\theta_e\,\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e^{(2)}} + (mg - 2cR)\sin\theta_e\,\vec{e}_{\rho|\vec{q}_e^{(2)}} =$$

$$= (mg - cR)\sin\theta_e\,\vec{e}_{\rho|\vec{q}_e^{(2)}} + F(\cos\theta_e - 1)\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e^{(2)}} + \left(6mg + cR(\cos\theta_e - 2)\right)\vec{e}_z$$

4) Scriviamo le eq. di Lagrange non conservative. A tale scopo calcoliamo

$$K = K^{(telaio)} + K^{(P)} \qquad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$K^{(telaio)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot I_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\cdot I_O(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z\cdot I_O(\vec{e}_z)$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 I_{Oz}$$

dove

$$I_{Oz} \overset{(1.4)}{=} I_{zz} = \frac{7}{3}\,mR^2$$ (momento d'inerzia del telaio risp. all'asse $(O,\vec{e}_z)$)

$$K^{(P)} = \frac{1}{2}m|\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \vec{\omega}\times(P-O) = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z\times R\vec{e}_r$$
$$= R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + R\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$
$$= R(\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi)$$

$$|\vec{v}_P|^2 = R^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$

Quindi

$$K = \frac{7}{6}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$
$$= \frac{1}{2}mR^2\left[\left(\frac{7}{3}+\sin^2\theta\right)\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}[\dot{\varphi}\ \ \dot{\theta}]^T\, mR^2\begin{bmatrix}\frac{7}{3}+\sin^2\theta & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$$

EL_φ : $\dfrac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = mR^2\left(\dfrac{7}{3} + \sin^2\theta\right)\dot\varphi$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = mR^2\left[\left(\dfrac{7}{3}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right]$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$mR^2\left[\left(\frac{7}{3} + \sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\ \dot\theta\dot\varphi\right] \overset{(4.1)}{=} -b\varphi + FR\sin\theta$$

EL_θ : $\dfrac{\partial K}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) = mR^2\ddot\theta$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{mR^2}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2$$

$$mR^2\left(\ddot\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\ \dot\varphi^2\right) \overset{(4.2)}{=} R\,(mg - 2cR)\sin\theta$$

Donque, le 2 EL sont

$$(3.1)\quad \begin{cases} EL_\varphi & mR^2\left[\left(\dfrac{7}{3} + \sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right] = -b\varphi + FR\sin\theta \\ EL_\theta & m R^{\cancel{2}}\left(\ddot\theta - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2\right) = \cancel{R}\,(mg - 2cR)\sin\theta \end{cases}$$

5) Linearizzazione delle EL intorno agli equilibri

Poiché la sollecitazione è non-conservativa, dobbiamo usare la formula

(10.1) $A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0$, dove $\vec{x} = \dfrac{\vec{q}(t) - \vec{q}_e}{\varepsilon}$

$$A = A(\vec{q}_e) = mR^2 \begin{bmatrix} \frac{7}{3} + \sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$C_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \Rightarrow \quad C = -\begin{bmatrix} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Q_\theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{\vec{q}_e} = -\begin{bmatrix} -b & FR\cos\theta_e \\ 0 & R(mg-2cR)\cos\theta_e \end{bmatrix}$$

Allora, la (10.1) si scrive

$$mR^2 \begin{bmatrix} \frac{7}{3} + \sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -FR\cos\theta_e \\ 0 & -R(mg-2cR)\cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cioè,

$$\begin{cases} mR^2\left(\frac{7}{3} + \sin^2\theta_e\right)\ddot{x}_1 + b\,x_1 - FR\cos\theta_e\,x_2 = 0 \\ mR^2\ddot{x}_2 - R(mg-2cR)\cos\theta_e\,x_2 = 0 \end{cases}$$

Dunque,

(11.1) $\underline{q}_e^{(1)} = (0,0)$

$$\begin{cases} \frac{7}{3}\, mR^2 \ddot{x}_1 + b\, x_1 - FR\, x_2 = 0 \\ mR\, \ddot{x}_2 - (mg - 2cR)\, x_2 = 0 \end{cases}$$

se $\lambda = 1$

(11.2) $\underline{q}_e^{(2)} = \left(\frac{FR}{b} \sin\theta_e , \theta_e\right)$

$\forall\, \theta_e \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\begin{cases} mR^2\left(\frac{7}{3} + \sin^2\theta_e\right)\ddot{x}_1 + b\, x_1 - FR\cos\theta_e\, x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo l'integrale generale del sistema (11.2).
La II eq (11.2) fornisce

$$x_2(t) = c_1 t + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Consideriamo l'omogenea associata alla I eq. (11.2)

$$mR^2\left(\frac{7}{3} + \sin^2\theta_e\right)\ddot{x}_1 + b\,x_1 = 0$$

Il suo integrale generale è

$$\bar{x}_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2\left(\frac{7}{3}+\sin^2\theta_e\right)}}\,t + \alpha_1\right)$$

Cerchiamo una soluzione particolare della (11.2) del tipo

$$x_1^{(p)} = c_3 t + c_4$$

Sostituendo nella (11) troviamo

$$b\,(c_3 t + c_4) = FR\cos\theta_e\,(c_1 t + c_2)$$

Dunque, le costanti soddisfano il sistema

$$\begin{cases} b\,c_3 = FR\cos\theta_e\, c_1 \\ b\,c_4 = FR\cos\theta_e\, c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_3 = \dfrac{FR\cos\theta_e}{b}\, c_1 \\ c_4 = \dfrac{FR\cos\theta_e}{b}\, c_2 \end{cases}$$

Dunque,

$$x_1^{(p)} = \frac{FR\cos\theta_e}{b}(c_1 t + c_2) = \frac{FR\cos\theta_e}{b}\, x_2$$

e

$$x_1(t) = a_1\cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2\left(\frac{7}{3}\sin^2\theta_e\right)}}\,t + \alpha_1\right) + \frac{FR\cos\theta_e}{b}(c_1 t + c_2)$$

Dunque, l'integrale generale del sistema (11.2) è

$$x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{mR^2\left(\frac{7}{3} + \sin^2\theta_e\right)}}\, t + \alpha_1 \right) + \frac{FR\cos\theta_e}{b}(c_1 t + c_2)$$

$$x_2(t) = c_1 t + c_2$$

$a_1, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$\alpha_1 \in [0, 2\pi]$

6) Reazioni vincolari del telaio nel punto P, in dinamica

Scriviamo l'equazione di Newton per il punto P

$$\vec{F}_P^{(att)} + \vec{\psi}_P = m\,\vec{a}_P$$

$$\vec{F}_P = \vec{F}_P^{(el)} + \vec{F}_P^{(foll)} + m\vec{g} \overset{(7.2)}{=} -cR\sin\theta\,\vec{e}_\rho + F\vec{e}_\varphi - \left(mg + cR(\cos\theta - 2)\right)\vec{e}_z$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^{(rel)} + \vec{a}_P^{(tr)} + \vec{a}_P^{(cor)}$$

$\vec{a}_P^{(rel)}$: accelerazione di P risp al semidisco

$$\vec{a}_P^{(rel)} = \left(\cancel{\ddot{R}} - R\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(\cancel{2\dot{R}\dot{\theta}} + R\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

accelerazione di P in coord polari (R,θ)

$$\vec{a}_P^{(tr)} = \cancel{\vec{a}_O} + \dot{\vec{\omega}} \times (P-O) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P-O))$$

$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$ velocità angolare del semidisco

$$= \ddot{\varphi}\,\vec{e}_z \times R\,\vec{e}_r + \dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \vec{e}_r)$$

$$\overset{(2.4)}{=} R\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi}^2\sin\theta\,(\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi)$$

$$= R\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\sin\theta\,\vec{e}_\rho$$

$$= R\left(\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\theta\left(\cos\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\vec{e}_r\right)\right)$$

$$\vec{a}_P^{(cor)} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_P^{(rel)} = 2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times (R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta) = 2R\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}_P = -R\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + R\left(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\theta + R\left(\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi$$

Donque,

$$\vec{\eta}_P = -\vec{F}_P^{(ext)} + m\,\vec{a}_P$$

$$= cR\sin\theta\,\vec{e}_\rho - F\vec{e}_\varphi + \big(mg + cR(\cos\theta - 2)\big)\vec{e}_z +$$

$$+ mR\Big[\big(-\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\big)\vec{e}_r + \big(\ddot\theta - \sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2\big)\vec{e}_\theta + \big(\ddot\varphi\sin\theta + 2\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\big)\vec{e}_\varphi\Big]$$

$$\overset{(2.4)}{=} cR\sin\theta\big(\cos\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\vec{e}_r\big) - F\vec{e}_\varphi + \big[mg + cR(\cos\theta - 2)\big]\big(-\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\theta\,\vec{e}_r\big) +$$

$$+ mR\Big[\big(-\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\big)\vec{e}_r + \Big(\ddot\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\dot\varphi^2\Big)\vec{e}_\theta + \big(\ddot\varphi\sin\theta + 2\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\big)\vec{e}_\varphi\Big]$$

$$= \Big[cR\cancel{\sin\theta\cos\theta} - \sin\theta\big(mg + cR(\cancel{\cos\theta} - 2)\big) + mR\Big(\ddot\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\dot\varphi^2\Big)\Big]\vec{e}_\theta +$$

$$+ \Big[cR\sin^2\theta + \cos\theta\big(mg + cR(\cos\theta - 2)\big) - mR\big(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\big)\Big]\vec{e}_r +$$

$$+ \Big[-F + mR\big(\sin\theta\,\ddot\varphi + 2\cos\theta\,\dot\varphi\dot\theta\big)\Big]\vec{e}_\varphi$$

(8.1)

$$= \cancel{-\sin\theta\big(mg - 2cR\big)} + mR\Big(\ddot\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\dot\varphi^2\Big)\vec{e}_\theta +$$

$$+ \Big[cR\sin^2\theta + \cos\theta\big(mg + cR(\cos\theta - 3)\big) - mR\big(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\big)\Big]\vec{e}_r +$$

$$+ \Big[-F + mR\big(\sin\theta\,\ddot\varphi + 2\cos\theta\,\dot\varphi\dot\theta\big)\Big]\vec{e}_\varphi$$

$$= \Big[cR(1 - 3\cos\theta) + mg\cos\theta - mR\big(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\big)\Big]\vec{e}_r$$

$$+ \Big[-F + mR\big(\sin\theta\,\ddot\varphi + 2\cos\theta\,\dot\varphi\dot\theta\big)\Big]\vec{e}_\varphi$$