

# Capitolo 11

## Equazioni Cardinali della Dinamica

In questo capitolo ricaveremo le equazioni cardinali della dinamica (ECD) dei modelli meccanici. Il nome deriva dal fatto che esse valgono per un qualunque modello meccanico soggetto a una qualsiasi sollecitazione e vincolato in modo qualunque. Per lo scopo suddetto, utilizzeremo il Principio di D'Alembert.

### 11.1 Principio di D'Alembert

**Principio di D'Alembert:** un problema di Dinamica può essere ridotto ad un problema di Statica aggiungendo, alla forza fisica (o effettiva)  $\vec{F}_B^{(eff)}$  agente su ogni punto  $B$  del sistema, la forza d'inerzia, definita da

$$(11.1.1) \quad \vec{F}_B^{(in)} := -\frac{d\vec{p}_B}{dt},$$

dove  $\vec{p}_B$  è la quantità di moto del punto  $B$ , definita, in meccanica classica, da  $\vec{p}_B := m_B \vec{v}_B$ . Tale principio è una reinterpretazione della II legge di Newton

$$(11.1.2) \quad \vec{F}_B^{(eff)} = \frac{d\vec{p}_B}{dt},$$

ottenuta riscrivendo la (1.1.2) come una condizione di "equilibrio" dinamico. Esso sarà riutilizzato nel Cap. 14 per ricavare le equazioni di Lagrange per un modello olonomo.

**N.B.** Naturalmente, tra le forze effettive bisogna tener conto anche delle eventuali sollecitazioni dipendenti dalla velocità, che si annullano in Statica ma non in Dinamica.

#### 11.1.1 I Equazione Cardinale della Dinamica

Utilizzando la I ECS per un osservatore inerziale e il Principio di D'Alembert ricaviamo immediatamente la I ECD

$$\vec{R}^{(est)} = \vec{0} \text{ et } \vec{R}^{(in)} = \sum_{B \in \mathcal{B}} \left( -\frac{d\vec{p}_B}{dt} \right) \Rightarrow \vec{R}^{(est)} + \sum_{B \in \mathcal{B}} \left( -\frac{d\vec{p}_B}{dt} \right) = \vec{0}.$$

Rielaborando la I ECD si ottiene

$$(11.1.3) \quad \vec{R}^{(est)} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

dove si è utilizzata la definizione di quantità di moto totale del sistema

$$(11.1.4) \quad \vec{p} = \sum_{B \in \mathcal{B}} \vec{p}_B = \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \vec{v}_B$$

La (1.1.3) può essere scritta in modo equivalente

$$(11.1.5) \quad \vec{R}^{(est)} = M \vec{a}_G$$

utilizzando il seguente

**Teorema 11.1.1.** *(del centro di massa). La quantità di moto totale di un qualunque modello meccanico è pari al prodotto della massa totale per la velocità del centro di massa.*

$$(11.1.6) \quad \vec{p} = \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \vec{v}_B = M \vec{v}_G$$

*Dimostrazione.* Dalla definizione di centro di massa di un sistema

$$G - O = \frac{\sum m_B (B - O)}{M} \quad M := \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B$$

segue, derivando rispetto al tempo, che

$$(11.1.7) \quad \vec{v}_G = \frac{\sum m_B \vec{v}_B}{M} .$$

Allora, combinando la (1.1.4) e la (1.1.7) segue la tesi. □

## 11.1.2 II Equazione Cardinale della Dinamica

Utilizzando il Principio di D'Alembert e la II ECS si ottiene la II ECD

$$\vec{M}_O^{(est)} = \vec{0} \text{ et } \vec{M}_O^{(in)} = \sum_{B \in \mathcal{B}} (B - O) \times \left( -\frac{d\vec{p}_B}{dt} \right) \Rightarrow \vec{M}_O^{(est)} + \sum_{B \in \mathcal{B}} (B - O) \times \left( -\frac{d\vec{p}_B}{dt} \right) = \vec{0}$$

Rielaborando la II ECD si trova

$$\vec{M}_O^{(est)} = \sum_{B \in \mathcal{B}} (B - O) \times \frac{d\vec{p}_B}{dt} .$$

Il secondo termine dell'equazione precedente si può scrivere:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{B \in \mathcal{B}} (B - O) \times \vec{p}_B \right) - \sum_{B \in \mathcal{B}} \frac{d}{dt} (B - O) \times \vec{p}_B = \frac{d}{dt} \vec{L}_O - \sum_{B \in \mathcal{B}} (\vec{v}_B - \vec{v}_O) \times m_B \vec{v}_B ,$$

dove abbiamo introdotto il *momento angolare* o momento risultante della quantità di moto del modello, definito da

$$(11.1.8) \quad \vec{L}_O := \sum_{B \in \mathcal{B}} (B - O) \times \vec{p}_B .$$

Allora, tenuto conto della (1.1.6), la II ECD diventa

$$(11.1.9) \quad \vec{M}_O^{(est)} = \frac{d}{dt} \vec{L}_O + \vec{v}_O \times \vec{p} .$$

Osserviamo che il polo  $O$ , detto anche centro di riduzione, è un qualunque punto dello spazio  $\mathcal{E}_3$ , eventualmente mobile. Riutilizzando la (1.1.6), l'equazione (1.1.9) si può riscrivere come

$$(11.1.10) \quad \vec{M}_O^{(est)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} + \vec{v}_O \times M\vec{v}_G .$$

Si noti che la (1.1.10) si riduce all'equazione

$$(11.1.11) \quad \vec{M}_O^{(est)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} ,$$

detta II ECD *ridotta*, in uno dei casi seguenti:  $\forall t \in I$

1.  $\vec{v}_O = \vec{0}$ ,  $\Leftrightarrow O$  è fisso;
2.  $\vec{v}_O \parallel \vec{v}_G$ , cioè la velocità di  $O$  è parallela a quella di  $G$ ;
3.  $O \equiv G$ , scelgo  $G$  come centro di riduzione.

## 11.2 Equazione dell'energia cinetica

Lo stesso livello di generalità delle ECD è goduto dall'equazione dell'energia cinetica, che è anche detta III ECD.

**Teorema 11.2.1.** (*delle forze vive*). *In un qualunque modello meccanico vale*

$$(11.2.1) \quad \frac{dK}{dt} = \Pi ,$$

dove  $K$  è l'energia cinetica del modello data da

$$(11.2.2) \quad K := \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B |\vec{v}_B|^2 .$$

e  $\Pi$  la potenza di tutte le forze, attive e reattive, esterne e interne, agenti sul modello

$$(11.2.3) \quad \Pi := \sum_{B \in \mathcal{B}} \vec{F}_B \cdot \vec{v}_B .$$

*Dimostrazione.* Derivando rispetto al tempo la (1.2.2) si ottiene

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \vec{a}_B \cdot \vec{v}_B$$

e quindi la tesi, tenuto conto della II legge di Newton per il generico punto materiale  $B$ .  $\square$

Ricapitolando, le ECD, che sono soddisfatte durante il moto di un qualunque sistema materiale, si possono scrivere come

$$(11.2.4) \quad \vec{R}^{(est)} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$(11.2.5) \quad \vec{M}_O^{(est)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} + \vec{v}_O \times \vec{p}.$$

$$(11.2.6) \quad \Pi = \frac{dK}{dt}.$$

### 11.3 Statica e Dinamica relativa del punto materiale

Le equazioni cardinali della Dinamica ricavate nella sezione precedente, valgono per un osservatore *inerziale*. In questa sezione vedremo come si generalizzano ad un osservatore *non* inerziale, cioè un osservatore che si muove di moto rigido qualunque rispetto ad un osservatore inerziale. Con le notazioni della sezione 4.7, consideriamo un osservatore inerziale  $\Sigma := (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  ed un osservatore non inerziale  $\Sigma' := (O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  che osservano il moto di un punto materiale  $(B, m)$ , libero o vincolato. Per l'osservatore inerziale  $\Sigma$ , il moto di  $B$  è governato dalla seconda legge di Newton della dinamica

$$(11.3.1) \quad \vec{F}_B^{(eff)} = m \vec{a}_B^{(ass)},$$

dove con  $\vec{F}_B^{(eff)}$  abbiamo indicato il risultante di tutte le forze cosiddette effettive (o fisiche), attive e reattive, agenti su  $B$ . Sostituendo alla  $\vec{a}_B^{(ass)}$  la (4.7.10) si ottiene

$$(11.3.2) \quad m \vec{a}_B^{(rel)} = \vec{F}_B^{(eff)} - m(\vec{a}_B^{(tr)} + \vec{a}_B^{(Cor)}),$$

che si può riscrivere come

$$(11.3.3) \quad m \vec{a}_B^{(rel)} = \vec{F}_B^{(eff)} + \vec{F}_B^{(tr)} + \vec{F}_B^{(Cor)},$$

avendo introdotto le forze d'*inerzia* (o forze apparenti) su  $B$  date da

$$(11.3.4) \quad \vec{F}_B^{(tr)} = -m \vec{a}_B^{(tr)} = -m(\vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times (B - O') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (B - O')))$$

$$(11.3.5) \quad \vec{F}_B^{(Cor)} = -m \vec{a}_B^{(Cor)} = -m(2\vec{\omega} \times \vec{v}_B^{(rel)}).$$

Dunque, abbiamo dimostrato la seguente

**Proposizione 11.3.1.** *Per l'osservatore non inerziale  $\Sigma'$  vale ancora la seconda legge di Newton della dinamica del punto materiale, a patto di aggiungere alle forze effettive attive e reattive, le forze d'inerzia, cioè la forza di trascinamento e quella di Coriolis.*

**N.B.** Una conseguenza importante della Proposizione suddetta è che per un osservatore non inerziale non vale il principio d'inerzia per un punto materiale isolato, cioè in assenza di forze effettive.

### Proprietà delle forze d'inerzia su di un punto materiale

- Sono proporzionali alla massa (da qui il nome);
- sono *non* stazionarie, cioè possono dipendere esplicitamente dal tempo, tramite la  $\vec{a}_{O'}$  e la  $\vec{\omega}$ ;
- la forza di trascinamento è anche posizionale;
- la forza di Coriolis dipende anche dalla velocità del punto  $B$ . Inoltre, ha potenza effettiva nulla, poiché

$$(11.3.6) \quad \pi^{(Cor)} = \vec{F}_B^{(Cor)} \cdot \vec{v}_B^{(rel)} = -m (2\vec{\omega} \times \vec{v}_B^{(rel)}) \cdot \vec{v}_B^{(rel)} = 0 .$$

Vediamo come si scrive l'equazione dell'energia cinetica per l'osservatore  $\Sigma'$ . L'energia cinetica di  $B$  valutata da  $\Sigma'$  è pari a

$$K^{(rel)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B^{(rel)}|^2 .$$

Derivando rispetto al tempo il secondo termine e tenendo conto delle (1.3.3) e (1.3.6), otteniamo

$$m \vec{a}_B^{(rel)} \cdot \vec{v}_B^{(rel)} = (\vec{F}_B^{(eff)} + \vec{F}_B^{(tr)} + \vec{F}_B^{(Cor)}) \cdot \vec{v}_B^{(rel)} = \pi^{(eff)} + \pi^{(tr)} ,$$

dove abbiamo denotato con

$$(11.3.7) \quad \pi^{(eff)} = \vec{F}_B^{(eff)} \cdot \vec{v}_B^{(rel)} \quad \text{potenza effettiva delle forze fisiche}$$

$$(11.3.8) \quad \pi^{(tr)} = \vec{F}_B^{(tr)} \cdot \vec{v}_B^{(rel)} \quad \text{potenza delle forze di trascinamento}$$

Dunque, in un riferimento non inerziale, l'equazione dell'energia cinetica si scrive

$$(11.3.9) \quad \frac{dK^{(rel)}}{dt} = \pi^{(eff)} + \pi^{(tr)} .$$

**N.B.** Dal teorema di Galileo di addizione delle velocità, non segue un teorema di addizione dell'energia cinetica, visto che l'energia cinetica è una forma quadratica nella velocità. Infatti

$$K^{(ass)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B^{(ass)}|^2 = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B^{(rel)} + \vec{v}_B^{(tr)}|^2 = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B^{(rel)}|^2 + \frac{1}{2} m |\vec{v}_B^{(tr)}|^2 + m \vec{v}_B^{(rel)} \cdot \vec{v}_B^{(tr)}$$

### Esempio 11.3.1. Moto traslatorio.

Se l'osservatore  $\Sigma'$  è in moto traslatorio rispetto a  $\Sigma$ , cioè  $\vec{\omega} = \vec{0}$ , quindi le forze d'inerzia si riducono alla sola forza di trascinamento pari a

$$(11.3.10) \quad \vec{F}_B^{(tr)} = -m \vec{a}_{O'} ,$$

che è indipendente dalla posizione del punto  $B$  (ma può dipendere dal tempo). Inoltre, se l'accelerazione è indipendente dal tempo (moto rettilineo uniformemente accelerato), la forza di trascinamento è conservativa e ammette l'energia potenziale data da

$$V(B) = m \vec{a}_{O'} \cdot (B - O')$$

**Esempio 11.3.2.** Moto rotatorio.

Se l'osservatore  $\Sigma'$  è in moto rotatorio rispetto a  $\Sigma$ , preso  $O \equiv O'$  sull'asse di rotazione, denotato con  $(O, \vec{k})$ , la forza di trascinamento e quella di Coriolis sul punto  $B$  si riducono a

$$(11.3.11) \quad \vec{F}_B^{(tr)} = -m \ddot{\varphi} \vec{k} \times (B - O') + m \dot{\varphi}^2 (B - O')_{\perp}$$

$$(11.3.12) \quad \vec{F}_B^{(Cor)} = -2m \dot{\varphi} \vec{k} \times \vec{v}_B^{(rel)} .$$

Dunque, appartengono entrambe al piano passante per  $B$  e ortogonale all'asse di rotazione. Se, in particolare, il moto rotatorio è uniforme  $\dot{\varphi} = \omega$ , la forza di trascinamento si riduce a

$$(11.3.13) \quad \vec{F}_B^{(tr)} = \vec{F}_B^{(cf)} := m \omega^2 (B - O)_{\perp} .$$

Esso è un campo di forze a simmetria cilindrica, diretto ortogonalmente all'asse di rotazione in modo che le sue rette d'azione intersecano tale l'asse, e ha modulo proporzionale alla distanza dall'asse (vedi Fig.1.3.1). Tale campo, detto delle forze centrifughe è, in realtà, un campo di forze assifughe ed è conservativo, con energia potenziale

$$(11.3.14) \quad V(B)^{(cf)} = -\frac{1}{2} m \omega^2 \rho^2(B) ,$$

dove  $\rho(B)$  indica la distanza di  $B$  dall'asse di rotazione. Infatti, il lavoro virtuale del campo è

$$(11.3.15) \quad LV^{(cf)} = \vec{F}^{(cf)} \cdot \delta \vec{x}_B = m \omega^2 (B - O)_{\perp} \cdot \delta \vec{x}_B \quad \forall \delta B \text{ virtuale} .$$

Scelto un sistema di coordinate cilindriche  $(\rho, \varphi', z)$  relative a  $\Sigma'$ , con asse polare coincidente con  $(O, \vec{k})$ , la forza centrifuga su  $B$  e lo spostamento virtuale del punto  $B$  sono dati da

$$(11.3.16) \quad \vec{F}^{(cf)} = m \omega^2 \rho \vec{e}_{\rho} ,$$

$$(11.3.17) \quad \delta \vec{x}_B = \delta(B - O) = \delta(\rho \vec{e}_{\rho} + z \vec{e}_z) = \delta \rho \vec{e}_{\rho} + \rho \delta \varphi' \vec{e}_{\varphi'} + \delta z \vec{e}_z .$$

Quindi,

$$LV^{(cf)} = m \omega^2 \rho \delta \rho = \delta \left( \frac{1}{2} m \omega^2 \rho^2 \right) ,$$

da cui segue la (1.3.14).

La forza di Coriolis è ortogonale all'asse di rotazione e si annulla se  $\vec{v}_B^{(rel)}$  è parallela allo stesso asse.

**Esercizio 11.3.1.** Si consideri il pendolo della Figura 1.3.2, vincolato ad un piano verticale, scorrevole lungo una guida orizzontale liscia, che si muove con accelerazione costante  $\vec{a}$ . Si trovino le configurazioni di equilibrio relativo.

Soluzione:  $[\theta_e = \arctan \frac{a}{g}]$ .

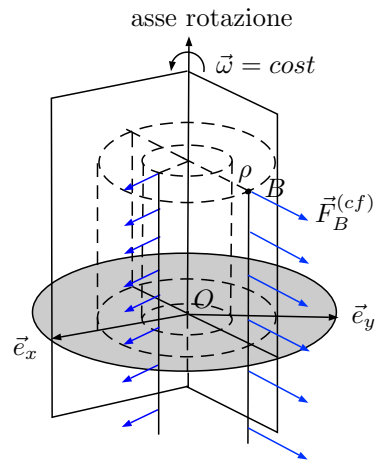


Figura 11.3.1: Campo delle forze centrifughe

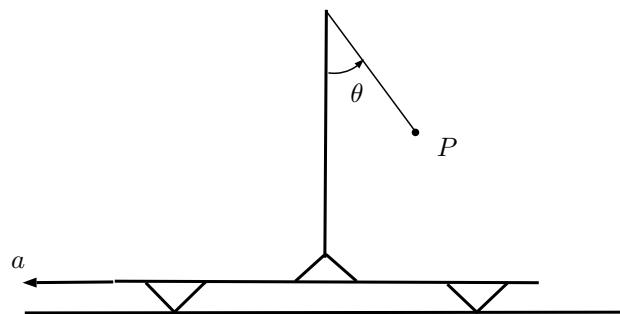


Figura 11.3.2: Pendolo traslante

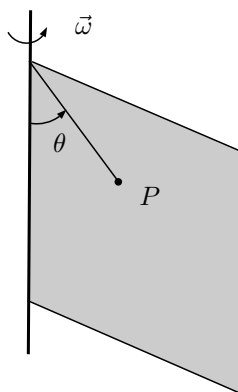


Figura 11.3.3: Pendolo rotante

**Esercizio 11.3.2.** Si consideri lo stesso pendolo dell'esercizio precedente, questa volta vincolato (tramite una cerniera cilindrica) su un piano verticale rotante uniformemente con velocità angolare  $\vec{\omega}$  intorno ad un asse verticale passante per il punto di sospensione, come nella Figura 1.3.3. Si trovino le configurazioni di equilibrio relativo.

Soluzioni:  $[\theta_e^{(1)} = 0, \theta_e^{(2)} = \arccos \frac{g}{\omega^2 L}]$  se  $g \leq \omega^2 L$

## 11.4 Statica e Dinamica relativa dei modelli meccanici

È facile ricavare le ECD soddisfatte dal più generale modello meccanico in un riferimento non inerziale  $\Sigma'$ . Con le notazioni della sezione precedente, sommando vettorialmente le forze d'inerzia agenti su ogni punto del modello, si ottengono

$$(11.4.1) \quad \vec{R}^{(est,eff)} + \vec{R}^{(tr)} + \vec{R}^{(Cor)} = \frac{d\vec{p}^{(rel)}}{dt}$$

$$(11.4.2) \quad \vec{M}_O^{(est,eff)} + \vec{M}_O^{(tr)} + \vec{M}_O^{(Cor)} = \frac{d\vec{L}_O^{(rel)}}{dt} + \vec{v}_O^{(rel)} \times \vec{p}^{(rel)}$$

$$(11.4.3) \quad \pi^{(eff)} + \pi^{(tr)} = \frac{dK^{(rel)}}{dt},$$

dove  $\vec{R}^{(tr)}$ ,  $\vec{M}_O^{(tr)}$ , rispettivamente,  $\vec{R}^{(Cor)}$ ,  $\vec{M}_O^{(Cor)}$ , indicano il risultante e il momento risultante delle forze di trascinamento, rispettivamente, di Coriolis. Inoltre, con  $\pi^{(tr)}$  abbiamo indicato la potenza complessiva delle forze di trascinamento.

Dimostriamo, ora, una proprietà del risultante delle forze di trascinamento e di quelle di Coriolis,



utile per abbreviarne il calcolo. Per un sistema discreto, vale

$$\begin{aligned}
 \vec{R}^{(tr)} &= \sum_B \vec{F}_B^{(tr)} = - \sum_B \left( m_B \vec{a}_{O'} + m_B \dot{\vec{\omega}} \times (B - O') + m_B \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (B - O')) \right) = \\
 (11.4.4) \quad &= -M \vec{a}_{O'} - \dot{\vec{\omega}} \times \sum_B m_B (B - O') - \vec{\omega} \times \left( \vec{\omega} \times \sum_B m_B (B - O') \right) = \\
 &= -M \vec{a}_{O'} - M \dot{\vec{\omega}} \times (G - O') - M \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (G - O')) \\
 &= -M \vec{a}_G^{(tr)} .
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 \vec{R}^{(Cor)} &= \sum_B \vec{F}_B^{(Cor)} = - \sum_B \left( m_B (2 \vec{\omega} \times \vec{v}_B^{(rel)}) \right) = -2 \vec{\omega} \times \sum_B (m_B \vec{v}_B^{(rel)}) = \\
 (11.4.5) \quad &= -2 \vec{\omega} \times \vec{p}^{(rel)} = -2 \vec{\omega} \times M \vec{v}_G^{(rel)} = -M \vec{a}_G^{(Cor)} .
 \end{aligned}$$

Dunque, vale la seguente

**Proposizione 11.4.1.** *Il risultante delle forze di trascinamento, rispettivamente di Coriolis, agente su un qualunque modello meccanico è pari alla forza di trascinamento, rispettivamente di Coriolis, agente sul punto materiale  $(G, M)$ , cioè su di un punto materiale di massa pari alla massa totale  $M$  del modello e coincidente con il suo centro di massa  $G$ . In formule,*

$$(11.4.6) \quad \vec{R}^{(tr)} = -M \vec{a}_G^{(tr)} ,$$

$$(11.4.7) \quad \vec{R}^{(Cor)} = -M \vec{a}_G^{(Cor)} = -2 \vec{\omega} \times M \vec{v}_G^{(rel)} = -2 \vec{\omega} \times \vec{p}^{(rel)} .$$

### Modello rigido

Se il corpo è rigido, il campo delle forze di trascinamento e il campo delle forze di Coriolis, sono in generale equivalenti, ciascuno, ad un torsore, cioè al vettore risultante applicato in un punto dei rispettivi assi centrali, più una coppia di momento parallelo a ciascun asse centrale. In alcuni casi particolari, ma notevoli, il torsore degenera in una sola coppia o nel solo vettore risultante applicato all'asse centrale, il quale, tuttavia, non passa necessariamente per il centro di massa.

**Esempio 11.4.1.** *Moto traslatorio ed osservatore baricentrale.*

Consideriamo il moto di un rigido rispetto ad un osservatore non inerziale in moto traslatorio. In questo caso, sappiamo (vedi Es. 1.3.1) che le forze d'inerzia si riducono al solo campo delle forze di trascinamento (1.3.10). Tale campo è un campo di forze parallele all'accelerazione  $\vec{a}_{O'} = a_{O'}(t) \vec{u}(t)$  e d'intensità proporzionale alla massa del punto. Dunque, ammette un centro  $C(t)$  del campo, che, sulla base della (7.4.1), risulta essere

$$C - O = \frac{- \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) \vec{a}_{O'}(B - O) d\mathcal{R}}{- \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) \vec{a}_{O'} d\mathcal{R}} ,$$

dove abbiamo indicato con  $\sigma(B)$  la densità di massa del rigido. È evidente che  $C$  coincide con il centro di massa del rigido. Pertanto, in questo caso, il campo delle forze di trascinamento è

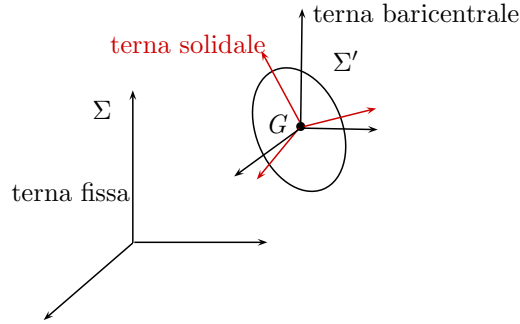


Figura 11.4.1: Osservatore Baricentrale

equivalente al vettore risultante applicato in  $G$ . Dunque, valgono le equazioni

$$(11.4.8) \quad \vec{R}^{(tr)} = -M\vec{a}_G^{(tr)}$$

$$(11.4.9) \quad \vec{M}_G^{(tr)} = \vec{0}$$

$$(11.4.10) \quad \pi^{(tr)} = \vec{R}^{(tr)} \cdot \vec{v}_G^{(rel)} + \vec{M}_G^{(tr)} \cdot \vec{\omega}^{(rel)} = -M\vec{a}_G^{(tr)} \cdot \vec{v}_G^{(rel)}$$

Questo è il caso, ad esempio, dell'osservatore baricentrale di un rigido (vedi Fig.1.4.1), definito come l'osservatore  $\Sigma'$  con origine coincidente con  $G$  e che si muove di moto traslatorio rispetto a un osservatore inerziale  $\Sigma$ . Per l'osservatore baricentrale, il centro di massa rimane in quiete, quindi  $\vec{a}_G^{(rel)} = \vec{0}$  e le ECD (1.4.1)-(1.4.3) si riducono a

$$(11.4.11) \quad \vec{R}^{(est,eff)} - M\vec{a}_G^{(tr)} = \vec{0}$$

$$(11.4.12) \quad \vec{M}_G^{(est,eff)} = \frac{d\vec{L}_G^{(rel)}}{dt}$$

$$(11.4.13) \quad \pi^{(eff)} = \frac{dK^{(rel)}}{dt},$$

Dunque, per l'osservatore baricentrale, la I ECD (1.4.11) esprime la condizione di equilibrio del centro di massa, mentre la II ECD (1.4.12) e la III (1.4.13), rimangono invariate in forma, visto che non contengono le forze d'inerzia.

#### Esempio 11.4.2. Moto rotatorio.

Se l'osservatore  $\Sigma'$  è in moto rotatorio rispetto a  $\Sigma$ , la forza di Coriolis su di un generico punto del rigido, essendo sempre ortogonale a  $\vec{\omega}$ , appartiene al piano passante per il punto e ortogonale all'asse di rotazione. Inoltre, se il centro di massa  $G$  appartiene all'asse di rotazione, per le (1.4.6) e (1.4.7), i risultanti delle forze di trascinamento e di Coriolis sono nulli. Dunque, i rispettivi torsori, degenerano in coppie.

Se, in particolare, il moto è uniforme, le forze di trascinamento si riducono al campo delle forze centrifughe (1.3.13). Tale campo, è conservativo anche quando agisce su un qualunque modello meccanico  $\mathcal{B}$  (anche non rigido), avendo energia potenziale

$$(11.4.14) \quad V^{(cf)} = -\frac{1}{2}I_r\omega^2,$$

dove  $I_r := \sum_B m_B d^2(B, r)$  indica il momento d'inerzia del modello rispetto all'asse di rotazione  $r$ . Infatti, il lavoro virtuale del campo è

$$(11.4.15) \quad LV^{(cf)} = \sum_{B \in \mathcal{B}} \vec{F}_B^{(cf)} \cdot \delta \vec{x}_B = \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \omega^2 (B - O)_\perp \cdot \delta \vec{x}_B = \omega^2 \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \rho(B) \vec{e}_\rho \cdot \delta \vec{x}_B \quad ,$$

per ogni  $\delta \vec{x}_B$  virtuale. Quindi, tenuto conto della (1.3.17), si ottiene

$$LV^{(cf)} = \omega^2 \sum_B m_B \rho(B) \delta \rho(B) = \delta \left( \frac{1}{2} I_r \omega^2 \right) \quad ,$$

dove  $I_r := \sum_B m_B \rho^2(B) = \sum_B m_B d^2(B, r)$  è il momento d'inerzia del modello rispetto all'asse di rotazione di  $\Sigma'$ .

Nel caso che il rigido sia piano (lamina), esaminiamo due sottocasi notevoli.

- Se la lamina appartiene ad un piano contenente l'asse di rotazione (moto piano relativo), l'insieme delle forze centrifughe sulla lamina costituisce un campo di forze parallele e concordi. Allora, se il centro di massa non appartiene all'asse di rotazione,  $\vec{R}^{(cf)} \neq \vec{0}$ , quindi il campo ammette un centro che, in generale, non coincide con il baricentro del modello, ma può essere determinato di volta in volta. Lo stesso discorso vale per rigidi unidimensionali vincolati ad un piano contenente l'asse di rotazione, come nell'asta della Fig. 1.4.2.
- Se la lamina appartiene ad un piano  $\pi$  ortogonale all'asse di rotazione, l'insieme delle forze centrifughe sulla lamina costituisce un campo di forze complanari e anche concorrenti nel punto  $O$  d'intersezione della lamina con l'asse (da qui il termine forze centrifughe). Dunque, se il centro di massa non appartiene all'asse di rotazione, il campo di forze è a risultante equivalente, quindi equivale al vettore risultante applicato in un punto dell'asse centrale. Tale asse passa per il punto di concorrenza poiché  $\vec{M}_O^{(cf)} = \vec{0}$ . Inoltre, essendo parallelo al risultante, che ha la direzione di  $(G - O)$ , passa anche per il centro di massa  $G$ . In questo caso, dunque, il campo delle forze centrifughe sulla lamina equivale al vettore risultante applicato nel centro di massa.

Infine, poichè anche le forze di Coriolis appartengono al piano  $\pi$ , essendo un insieme di forze complanari, anch'esse sono a risultante equivalente, se hanno risultante non nullo. In questo caso, tuttavia, non è detto che l'asse centrale delle forze di Coriolis passi sempre per  $G$ .

**Esercizio 11.4.1.** Il sistema biella-manovella della Fig. 1.4.4 è vincolato a stare in un piano verticale ruotante uniformemente con velocità angolare  $\omega$ .

1. Determinare il valore della costante elastica della molla affinché il modello sia in equilibrio relativo, con le aste formanti un angolo di  $\pi/6$  con la verticale (problema inverso);
2. calcolare le reazioni vincolari delle cerniere sferiche in  $O$  e in  $B$  sul modello, nella configurazione di equilibrio relativo;
3. calcolare le reazioni vincolari interne della cerniera sferica in  $A$ , nella configurazione di equilibrio relativo.

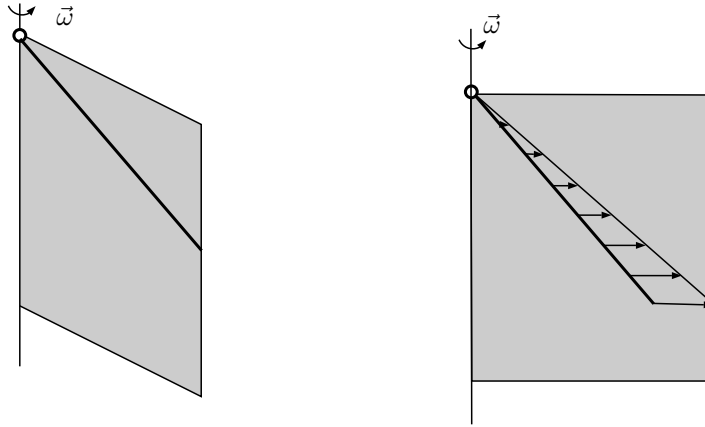


Figura 11.4.2: Asta rotante

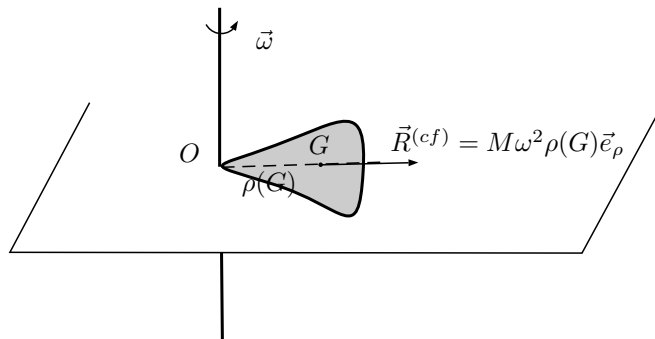


Figura 11.4.3: Lamina rotante

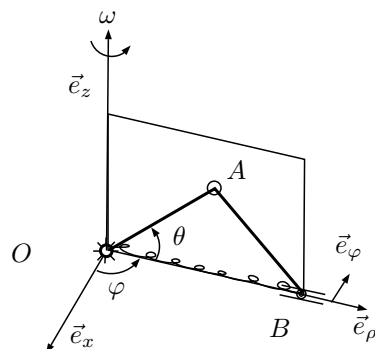


Figura 11.4.4: Biella-Manovella rotante

Nel sistema di riferimento rotante con velocità angolare  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ , il problema diventa un problema inverso di statica e il modello ha 1 grado di libertà. Scegliamo come coordinata libera l'angolo  $\theta$  fra il piano orizzontale e le aste e come base  $\mathcal{B} = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ , cioè quella adattata alle coordinate cilindriche in  $\mathcal{E}_3$ . In tale riferimento non inerziale compaiono le forze di trascinamento che si riducono alle sole forze centrifughe.

1. Calcoliamo l'energia potenziale di tutta la sollecitazione attiva, tenendo conto anche del contributo delle forze centrifughe

$$V := V^{(peso)} + V^{(molla)} + V^{(cf)} .$$

L'energia potenziale delle forze peso è

$$V^{(peso)} = -m\vec{g} \cdot (G_1 - O) - m\vec{g} \cdot (G_2 - O) , \quad V^{(molla)} = \frac{1}{2}c|B - O|^2 , \quad V^{(cf)} = -\frac{1}{2}I_z(\theta)\omega^2$$

$$G_1 - O = \frac{L}{2}(\cos\theta\vec{e}_\rho + \sin\theta\vec{e}_z) , \quad G_2 - O = \frac{L}{2}(3\cos\theta\vec{e}_\rho + \sin\theta\vec{e}_z) , \quad B - O = 2L\cos\theta\vec{e}_\rho .$$

Il momento d'inerzia del modello rispetto all'asse di rotazione vale

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = \frac{8}{3}mL^2 \cos^2(\theta) ,$$

poiché

$$I_z^{(1)} = \frac{1}{3}mL^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{3}mL^2 \cos^2(\theta) , \quad I_z^{(2)} = \frac{1}{12}mL^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + m\rho^2(G_2) = \frac{7}{3}mL^2 \cos^2(\theta) .$$

Allora

$$V^{(peso)} = mgL \sin\theta , \quad V^{(molla)} = \frac{1}{2}c(2L\cos\theta)^2 , \quad V^{(cf)} = -\frac{4}{3}mL^2\omega^2 \cos^2\theta ,$$

quindi

$$V(\theta) = mgL \sin \theta + (2c - \frac{4}{3}m\omega^2)L^2 \cos^2 \theta .$$

Richiediamo che la configurazione  $\theta = \pi/3$  sia un punto stazionario della funzione  $V(\theta)$ , quindi di equilibrio per il modello. A tale scopo calcoliamo

$$V'(\theta) = mgl \cos \theta - 2(2c - \frac{4}{3}m\omega^2)L^2 \cos \theta \sin \theta$$

e richiediamo che  $V'_{|\theta=\pi/3} = 0$ , cioè

$$(11.4.16) \quad mg\frac{L}{2} - 2(2c - \frac{4}{3}m\omega^2)L^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 0 .$$

Risolvendo tale equazione rispetto a  $c$  si trova

$$(11.4.17) \quad c = m(\frac{2}{3}\omega^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{g}{L}) ,$$

cioè il valore della costante elastica che realizza l'equilibrio relativo nella configurazione assegnata  $\theta = \pi/3$ .

2. La sollecitazione reattiva delle cerniere sferiche in  $O$  e in  $B$ , può essere ridotta a

$$\mathcal{S}^{(reatt)} = \{(O, \vec{\phi}), (B, \vec{\psi})\} .$$

Poiché i vincoli sono non dissipativi e bilateri,

$$\vec{\psi}_B \cdot \vec{e}_\rho = 0 ,$$

inoltre, poiché tutte le sollecitazioni attive, *comprese quelle d'inerzia*, sono complanari al piano rotante, possiamo concludere a priori che

$$(11.4.18) \quad \vec{\phi}_O = \phi_\rho \vec{e}_\rho + \phi_z \vec{e}_z$$

$$(11.4.19) \quad \vec{\psi}_B = \psi_z \vec{e}_z .$$

A posteriori, verificheremo, la suddetta ipotesi, alla fine del punto 2.

Per calcolare le 3 incognite  $(\phi_\rho, \phi_z, \psi)$ , utilizziamo la I ECS su tutto il modello

$$(11.4.20) \quad \vec{R}^{(att,eff)} + \vec{R}^{(cf)} + \vec{\phi}_O + \vec{\psi}_B = \vec{0}$$

Il risultante delle forze esterne su *tutto* il modello è pari al peso totale

$$\vec{R}^{(att,eff)} = 2m\vec{g} = -2mg\vec{e}_z .$$

Il risultante delle forze centrifughe può essere calcolato come

$$\vec{R}^{(cf)} = \vec{R}^{(cf \rightarrow \mathcal{R}_1)} + \vec{R}^{(cf \rightarrow \mathcal{R}_2)} .$$

Sulla base della (1.4.6) si ottiene

$$(11.4.21) \quad \vec{R}^{(cf \rightarrow \mathcal{R}_1)} = m\omega^2(G_1 - O)_\perp = m\omega^2\rho(G_1)\vec{e}_\rho = m\omega^2\frac{L}{2}\cos\frac{\pi}{3}\vec{e}_\rho$$

$$(11.4.22) \quad \vec{R}^{(cf \rightarrow \mathcal{R}_2)} = m\omega^2(G_2 - O)_\perp = m\omega^2\rho(G_2)\vec{e}_\rho = m\omega^2\frac{3}{2}L\cos\frac{\pi}{3}\vec{e}_\rho ,$$

quindi

$$\vec{R}^{(cf)} = m\omega^2L\vec{e}_\rho .$$

Dunque, proiettando la I ECS sulla base  $\mathcal{B}$  si ottiene

$$(11.4.23) \quad m\omega^2L + \phi_\rho = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi_\rho = -m\omega^2L$$

$$(11.4.24) \quad -2mg + \phi_z + \psi_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi_z = 2mg - \psi_z$$

Rimane da calcolare l'incognita  $\psi$ . A tale scopo, usiamo la II ECS applicata alla sola biella,

$$(11.4.25) \quad \vec{M}_A^{(att,eff \rightarrow \mathcal{R}_2)} + \vec{M}_A^{(cf \rightarrow \mathcal{R}_2)} + (B - A) \times \vec{\psi}_B = \vec{0} .$$

Il momento risultante delle forze attive effettive è dato da

$$\vec{M}_A^{(att,eff \rightarrow \mathcal{R}_2)} = (G_2 - A) \times (-m\vec{g}) + (B - A) \times (-c(B - O))$$

Tenendo conto che

$$(11.4.26) \quad G_2 - A = \frac{L}{2}(\cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_z) ,$$

$$(11.4.27) \quad B - A = L(\cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_z) ,$$

$$(11.4.28) \quad B - O = 2L\cos\theta\vec{e}_\rho ,$$

esso risulta

$$\vec{M}_A^{(att,eff \rightarrow \mathcal{R}_2)} = -mg\frac{L}{2}\cos\theta\vec{e}_\rho \times \vec{e}_z + 2cL^2\sin\theta\cos\theta\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \cos\theta(mg\frac{L}{2} + 2cL^2\sin\theta)\vec{e}_\varphi .$$

Calcoliamo il momento risultante delle forze centrifughe, ricordando che esse sono forze distribuite,

$$(11.4.29) \quad \vec{M}_A^{(cf \rightarrow \mathcal{R}_2)} = \int_{\mathcal{R}_2} (P - A) \times \vec{f}_P^{(cf)} d\mathcal{R}_2 .$$

Tenendo conto che

$$(11.4.30) \quad P - A = s \text{ vers}(P - A) = s(\cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_z)$$

$$(11.4.31) \quad \vec{f}_P^{(cf)} d\mathcal{R}_2 = \frac{m}{L} ds \omega^2 \rho(P) \vec{e}_\rho$$

$$(11.4.32) \quad \rho(P) = L\cos\theta + s\cos\theta = (L + s)\cos\theta ,$$

il momento specifico delle forze centrifughe risulta

$$(P - A) \times \vec{f}_P^{(cf)} d\mathcal{R}_2 = -\frac{m}{L} \omega^2 \sin \theta \cos \theta s(L + s) ds \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho$$

quindi

$$(11.4.33) \quad \vec{M}_A^{(cf \rightarrow \mathcal{R}_2)} = -\frac{m}{L} \omega^2 \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\varphi \int_0^L s(L + s) ds = -\frac{5}{6} mL^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\varphi$$

Il momento risultante delle forze reattive esterne sulla biella risulta

$$(11.4.34) \quad \vec{M}_A^{(est, reatt \rightarrow \mathcal{R}_2)} = (B - A) \times \vec{\psi}_B = L(\cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_z) \times \psi_z \vec{e}_z = -\psi_z L \cos \theta \vec{e}_\varphi .$$

Dunque, in questo caso, la II ECS (1.4.25) equivale all'equazione scalare

$$(11.4.35) \quad \cos \theta \left( mg \frac{L}{2} + 2cL^2 \sin \theta \right) - \frac{5}{6} mL^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta - \psi_z L \cos \theta = 0 ,$$

che valutata in  $\theta = \pi/3$  e  $c$  pari al valore in (1.4.17) fornisce la soluzione

$$(11.4.36) \quad \psi_z = m \left( g + \frac{\sqrt{3}}{4} \omega^2 L \right) ,$$

Dunque, dalla segue che

$$(11.4.37) \quad \phi_z = m \left( g - \frac{\sqrt{3}}{4} \omega^2 L \right) .$$

Si osservi, che, in questo problema, tutta la sollecitazione attiva è complanare al piano rotante, quindi il momento risultante è ortogonale allo stesso piano. Allora, la II ECS sulla sola biella implica che l'ipotesi a priori (1.4.19) è soddisfatta.

3. Introduciamo la reazione che la biella esercita sulla manovella nel punto  $A$ .

$$\vec{\zeta}_A = \zeta_\rho \vec{e}_\rho + \zeta_z \vec{e}_z .$$

Utilizziamo la I ECS applicata alla sola manovella.

$$(11.4.38) \quad \vec{R}^{(est, att \rightarrow \mathcal{R}_1)} + \vec{R}^{(cf \rightarrow \mathcal{R}_1)} + \vec{\phi}_O + \vec{\zeta}_A = \vec{0}$$

Il risultante delle forze attive esterne sulla sola manovella, tenuto conto della (1.4.21), è

$$\vec{R}^{(est, att \rightarrow \mathcal{R}_1)} + \vec{R}^{(cf \rightarrow \mathcal{R}_1)} = m\vec{g} + c(B - O) + \vec{R}^{(cf \rightarrow \mathcal{R}_1)} = -mg\vec{e}_z + 2cL \cos \theta \vec{e}_\rho + m\omega^2 \frac{L}{2} \cos \theta \vec{e}_\rho .$$

Dunque, proiettando l'equazione sulla base si ottengono le equazioni

$$(11.4.39) \quad 2cL \cos \theta + m\omega^2 \frac{L}{2} \cos \theta + \phi_\rho + \zeta_\rho = 0$$

$$(11.4.40) \quad -mg + \phi_z + \zeta_z = 0$$

Risolvendole rispetto alle incognite  $(\zeta_\rho, \zeta_z)$  e tenendo conto delle (1.4.17), (1.4.23), (1.4.24), si ottiene la reazione interna in  $A$

$$(11.4.41) \quad \zeta_\rho = -(cL + \frac{1}{4}m\omega^2 L + \phi_\rho) = -m \left( -\frac{\omega^2 L}{12} + \frac{g}{2\sqrt{3}} \right) ,$$

$$(11.4.42) \quad \zeta_z = mg - \phi_z = m \frac{\sqrt{3}}{4} L \omega^2 .$$