

Capitolo 12

Operatore d'inerzia per un Rigido

Nel capitolo precedente abbiamo visto che nella II ECD e nel Teorema delle forze vive compaiono, rispettivamente, la derivata rispetto al tempo del momento angolare \vec{L}_O e la derivata dell'energia cinetica K . Vedremo, nelle prossime sezioni, qual è la forma assunta da \vec{L}_O e da K nel caso di un modello *rigido*.

12.1 Momento angolare per i rigidi

La definizione generale del momento angolare di un modello discreto, è

$$(12.1.1) \quad \vec{L}_O = \sum_{B \in \mathcal{B}} (B - O) \times m_B \vec{v}_B ,$$

mentre per un modello continuo è

$$(12.1.2) \quad \vec{L}_O = \int_{\mathcal{B}} (B - O) \times \sigma(B) \vec{v}_B d\mathcal{B} ,$$

dove $\sigma(B)$ indica la funzione densità di massa del continuo.

Se ora scegliamo il polo O appartenente a un rigido \mathcal{R} (o al suo spazio solidale), possiamo esprimere la velocità dei suoi punti mediante la formula di Poisson (4.6.1)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (B - O)$$

e sostituendo nella (12.1.1), otteniamo

$$(12.1.3) \quad \vec{L}_O = \sum_{B \in \mathcal{R}} (B - O) \times m_B (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times (B - O))$$

$$(12.1.4) \quad = \sum_{B \in \mathcal{R}} (B - O) \times m_B \vec{v}_O + \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (B - O) \times (\vec{\omega} \times (B - O))$$

Rielaborando la I sommatoria e denotando con G il centro di massa si ottiene

$$\sum_{B \in \mathcal{R}} (B - O) \times m_B \vec{v}_O = \left(\sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (B - O) \right) \times \vec{v}_O = M (G - O) \times \vec{v}_O .$$

Se introduciamo la seguente definizione

$$(12.1.5) \quad \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) := \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (B - O) \times (\vec{\omega} \times (B - O))$$

la (12.1.3) diventa

$$(12.1.6) \quad \vec{L}_O = (G - O) \times M\vec{v}_O + \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) \quad O \in \mathcal{R} .$$

Dunque, il momento angolare di un rigido, calcolato rispetto a un suo punto O , è costituito da due termini

$$\begin{aligned} (G - O) \times M\vec{v}_O &\longrightarrow \text{termine di traslazione} \\ \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) &\longrightarrow \text{termine polare} \end{aligned}$$

Osserviamo che il termine di traslazione si annulla se:

1. O è un punto fisso $\in \mathcal{R}$, oppure il campo di velocità di \mathcal{R} è rotatorio e $O \in AIR \forall t \in I$;
2. $O \equiv G$, O coincide con G .

Invece, se è necessario calcolare \vec{L} rispetto a un punto $A \notin \mathcal{R}$, si deve utilizzare la formula di trasporto dimostrata nella seguente

Proposizione 12.1.1. *Per ogni modello meccanico e per ogni coppia di punti geometrici $A, D \in \mathcal{E}_3$ vale*

$$(12.1.7) \quad \vec{L}_A = \vec{L}_D + (D - A) \times \vec{p}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \vec{L}_A &= \sum_{B \in \mathcal{R}} (B - A) \times m_B \vec{v}_B = \sum_{B \in \mathcal{R}} [(B - D) + (D - A)] \times m_B \vec{v}_B = \\ &= \sum_{B \in \mathcal{R}} (B - D) \times m_B \vec{v}_B + \sum_{B \in \mathcal{R}} (D - A) \times m_B \vec{v}_B \\ &= \vec{L}_D + (D - A) \times \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B \vec{v}_B \end{aligned}$$

Ricordando la definizione di quantità di moto totale di un modello, segue la tesi. \square

Per usare la (12.1.7) su un rigido, converrà scegliere come polo D del rigido il centro di massa G , o un suo punto fisso (se esiste) poiché, se D coincide con G o con un suo punto fisso, allora

$$\vec{L}_D = \mathbf{I}_D(\vec{\omega})$$

e quindi

$$(12.1.8) \quad \vec{L}_A = \mathbf{I}_D(\vec{\omega}) + (D - A) \times \vec{p}$$

12.2 Energia cinetica di un rigido

Determiniamo l'espressione dell'energia cinetica K per un rigido \mathcal{R} .

$$\begin{aligned}
 K &:= \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B |\vec{v}_B|^2 \quad \vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (B - O) \quad O, B \in \mathcal{R} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times (B - O)) \cdot (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times (B - O)) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B |\vec{v}_O|^2 + \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B \vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times (B - O)) + \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (\vec{\omega} \times (B - O)) \cdot (\vec{\omega} \times (B - O)) \\
 &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} M |\vec{v}_O|^2 + \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \times \left(\sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (B - O) \right) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (B - O) \times (\vec{\omega} \times (B - O)) \\
 &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} M |\vec{v}_O|^2 + M \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \times (G - O) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} M |\vec{v}_O|^2 + \vec{\omega} \cdot (G - O) \times M \vec{v}_O + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) ,
 \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato nel passaggio (1) la proprietà di scambio del prodotto vettore con il prodotto scalare nel prodotto misto e, al passaggio (2), la definizione di centro di massa G e di operatore d'inerzia (12.1.5).

Dunque, in generale, l'energia cinetica di un rigido consta di 3 termini: un termine di traslazione, un termine misto e un termine polare. Comunque, tale espressione si semplifica nei seguenti casi:

1. se $O \in \mathcal{R}$ è fisso, oppure se il campo di velocità è rotatorio e $O \in AIR$, allora la (12.2.1) si riduce al termine polare,

$$(12.2.1) \quad K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O ,$$

dove \vec{L}_O è il momento angolare di \mathcal{R} rispetto ad O ;

2. se $O \equiv G$. Allora, la (12.2.1) si riduce alla somma del termine di traslazione e del termine polare

$$(12.2.2) \quad K = \frac{1}{2} M |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I}_G(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} M |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_G ,$$

dove \vec{L}_G è il momento angolare di \mathcal{R} rispetto ad G .

Esercizio 12.2.1. Calcolare l'energia cinetica di un qualunque rigido in moto elicoidale.

12.3 Operatore d'inerzia per un rigido

Studiamo più in dettaglio il termine polare della (12.1.6) e in particolare l'applicazione definita da:

$$(12.3.1) \quad \mathbf{I} : \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3, (O, \vec{y}) \mapsto \mathbf{I}_O(\vec{y}) = \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (B - O) \times (\vec{y} \times (B - O))$$

Essa dipende dal punto O del rigido e dalla sua distribuzione di massa. Essa è un *campo* di operatori poiché, fissato il punto O , l'applicazione parziale

$$(12.3.2) \quad \mathbf{I}_O : E_3 \rightarrow E_3, \vec{y} \mapsto \mathbf{I}_O(\vec{y})$$

è un operatore; esso sarà detto *operatore d'inerzia* del rigido rispetto al punto O .

N.B. Per i modelli continui $\mathbf{I}_O(\vec{y}) := \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) (B - O) \times (\vec{y} \times (B - O)) d\mathcal{R}$; dove $\sigma(B)$ è la densità di massa nel punto B .

Teorema 12.3.1. *L'applicazione \mathbf{I}_O gode delle seguenti proprietà:*

1. è un operatore lineare (endomorfismo) in E_3

$$\mathbf{I}_O(\lambda\vec{y} + \mu\vec{z}) = \lambda\mathbf{I}_O(\vec{y}) + \mu\mathbf{I}_O(\vec{z}) \quad \forall \vec{y}, \vec{z} \in E_3 \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2. è un operatore simmetrico rispetto al prodotto scalare di E_3 (endomorfismo autoaggiunto), cioè soddisfa:

$$(12.3.3) \quad \mathbf{I}_O(\vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{y} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{z}) \quad \forall \vec{y}, \vec{z} \in E_3$$

3. è un operatore definito positivo, cioè soddisfa

$$(12.3.4) \quad \mathbf{I}_O(\vec{y}) \cdot \vec{y} > 0, \quad \text{se } \vec{y} \neq \vec{0}$$

per tutti i rigidi, tranne in un caso che chiameremo degenere e che sarà trattato a parte.

Dimostrazione. .

1. È ovvia dalla definizione (12.3.1), in cui l'argomento \vec{y} compare linearmente e le operazioni di prodotto vettoriale e somma di vettori sono lineari.
2. Dalla definizione segue che

$$(12.3.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{I}_O(\vec{y}) \cdot \vec{z} &= \left[\sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (B - O) \times (\vec{y} \times (B - O)) \right] \cdot \vec{z} \\ &= \left[\sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (|B - O|^2 \vec{y} - (B - O) \cdot \vec{y} (B - O)) \right] \cdot \vec{z} \\ &= \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (|B - O|^2 \vec{y} \cdot \vec{z} - (B - O) \cdot \vec{y} (B - O) \cdot \vec{z}) \end{aligned}$$

È evidente che l'espressione precedente è simmetrica rispetto a \vec{y} e \vec{z} e quindi la tesi.

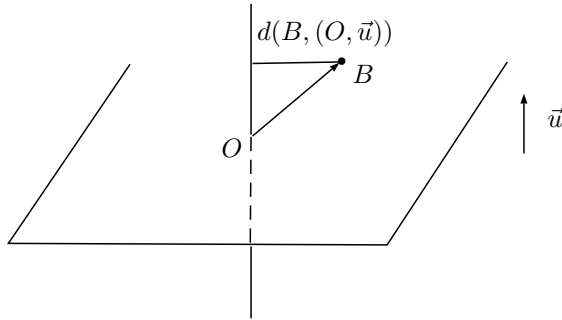
3. È sufficiente dimostrare che la 3. vale per un versore \vec{u} poiché, se è vera per \vec{u} , è vera anche per $\vec{y} = \lambda\vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, poiché dalla linearità segue che

$$\mathbf{I}_O(\vec{y}) \cdot \vec{y} = \mathbf{I}_O(\lambda\vec{u}) \cdot \lambda\vec{u} = \lambda^2 \mathbf{I}_O(\vec{u}) \cdot \vec{u}.$$

Sostituendo nella (12.3.5) a \vec{y} e \vec{z} il versore \vec{u} si ottiene

$$\mathbf{I}_O(\vec{u}) \cdot \vec{u} = \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B \left[|B - O|^2 - (\vec{u} \cdot (B - O))^2 \right]$$

Interpretiamo geometricamente il termine in parentesi quadra.



Esso è la differenza tra il quadrato dell'ipotenusa OB e il quadrato del cateto OH , quindi rappresenta il quadrato della distanza di B dall'asse passante per O e parallelo al vettore \vec{u} : $d(B, (O, \vec{u}))$. Pertanto,

$$(12.3.6) \quad \mathbf{I}_O(\vec{u}) \cdot \vec{u} = \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B d^2(B, (O, \vec{u}))$$

È immediato riconoscere nell'espressione precedente il *momento d'inerzia* (vedi Fisica I) del rigido rispetto all'asse (O, \vec{u}) e che tale momento è sempre positivo, tranne nel caso in cui i punti di \mathcal{R} sono tutti allineati lungo l'asse (O, \vec{u}) , cioè se \mathcal{R} è un'asta di sezione trascurabile (rigido unidimensionale). Tale caso sarà detto *degenere* e sarà studiato a parte. \square

Dal *Teorema* precedente seguono delle importanti conseguenze.

Corollario 12.3.1. _

1. Poiché \mathbf{I}_O è un operatore lineare, una volta fissato un riferimento cartesiano ortonormale $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ in \mathcal{E}_3 , \mathbf{I}_O si può rappresentare mediante una matrice $[\mathbf{I}_O]$ i cui elementi I_{jk} sono dati da

$$I_{jk} = \vec{e}_j \cdot \mathbf{I}_O(\vec{e}_k) .$$

2. Poiché \mathbf{I}_O è simmetrico, segue che la matrice rappresentativa $[\mathbf{I}_O]$ possiede solo 6 elementi indipendenti e, precisamente,

$$3 \text{ elementi diagonali} \quad I_{jj} = \vec{e}_j \cdot \mathbf{I}_O(\vec{e}_j) \quad j = 1, 2, 3$$

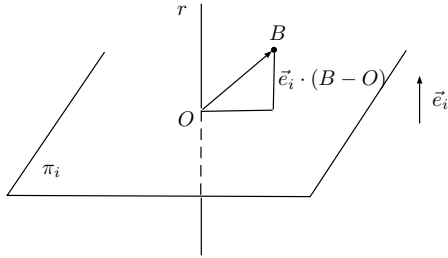
che, per la (12.3.6), rappresentano i momenti d'inerzia rispetto agli assi paralleli a \vec{e}_j , $j = 1, 2, 3$;

3 elementi fuori diagonale ($j \neq k$)

$$\begin{aligned} I_{jk} &= \vec{e}_j \cdot \mathbf{I}_O(\vec{e}_k) = \mathbf{I}_O(\vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k \stackrel{(12.3.5)}{=} \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B \left(|B - O|^2 \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k - \vec{e}_j \cdot (B - O)(B - O) \cdot \vec{e}_k \right) \\ &= - \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B [\vec{e}_j \cdot (B - O)(B - O) \cdot \vec{e}_k] \end{aligned}$$

Interpretiamo geometricamente gli elementi fuori diagonale I_{jk} ($j \neq k$). È facile concludere che il termine

$$d(B, \pi_i) := \vec{e}_i \cdot (B - O)$$



rappresenta la "distanza" orientata del punto B dal piano $\pi_i := \pi(O, \vec{e}_i)$ passante per O e ortogonale a \vec{e}_i .

Allora, i termini fuori diagonale si possono scrivere come

$$(12.3.7) \quad I_{jk} = - \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B d(B, \pi_j) d(B, \pi_k)$$

e sono chiamati *momenti deviatori* (o centrifughi) rispetto alla coppia di piani π_j e π_k , ortogonali, rispettivamente, ai versori \vec{e}_j ed \vec{e}_k .

Mentre i momenti deviatori possono avere sia segno positivo sia segno negativo (si ricordi che le "distanze" $d(B, \pi_j)$ hanno un segno), i momenti d'inerzia sono sempre positivi (tranne nel caso degenero dell'asta).

N.B. Si osservi che mentre l'operatore d'inerzia \mathbf{I}_O è definito in modo intrinseco dalla (12.7) la sua rappresentazione matriciale dipende dalla scelta della terna $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Per questo motivo, in dinamica, conviene sempre scegliere una terna *solidale* al rigido, in modo che, sia i momenti d'inerzia, sia i momenti deviatori rispetto a quella terna non dipendano dal tempo!

Ricapitolando, scelta una terna ortonormale solidale al rigido e centrata in O , $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la matrice d'inerzia rispetto ad O ha la forma

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix},$$

dove

$$(12.3.8) \quad I_{jj} = \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) (x_i^2 + x_k^2) dx_i dx_j dx_k \quad i \neq j \neq k \neq i = 1, 2, 3$$

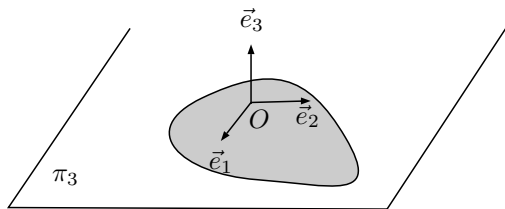
$$(12.3.9) \quad I_{jk} = - \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) x_j x_k dx_i dx_j dx_k \quad i \neq j = 1, 2, 3$$

sono rispettivamente le espressioni dei momenti d'inerzia e dei momenti deviatori di \mathcal{R} , (x_1, x_2, x_3) le coordinate cartesiane dei punti del rigido e $\sigma(B)$ la sua densità di massa nel generico punto B .

12.4 Matrice d'inerzia nel caso piano

Nel caso di un rigido piano (lamina), la matrice d'inerzia rispetto a un punto O della lamina si può semplificare notevolmente scegliendo come terna ortonormale una terna che abbia un piano

coordinato coincidente con il piano del rigido. Per esempio, se scegliamo gli assi \vec{e}_1, \vec{e}_2 nel piano π , la coordinata $x_3(B)$ di tutti i punti di \mathcal{R} sarà nulla.



$$x_3(B) = 0 \quad \forall B \in \mathcal{R}$$

Pertanto, vale la seguente

Proposizione 12.4.1. *La matrice d'inerzia assumerà la forma*

$$(12.4.1) \quad [\mathbf{I}_O] = \left[\begin{array}{cc|c} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{array} \right] \quad 3 \text{ elementi indipendenti: } I_{11}, I_{22}, I_{12}$$

Dimostrazione. Si basa sul fatto che i momenti deviatori $I_{13} = I_{31}$ e $I_{23} = I_{32}$ saranno nulli, mentre il momento d'inerzia I_{33} sarà uguale alla somma degli altri due. Infatti

$$I_{13} = - \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) x_1(B) x_3(B) d\mathcal{R} = 0$$

$$I_{23} = - \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) x_2(B) x_3(B) d\mathcal{R} = 0$$

$$\begin{aligned} I_{33} &= \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) (x_1^2(B) + x_2^2(B)) d\mathcal{R} = \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) x_1^2(B) d\mathcal{R} + \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) x_2^2(B) d\mathcal{R} = \\ &= \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) (x_1^2(B) + x_3^2(B)) d\mathcal{R} + \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) (x_2^2(B) + x_3^2(B)) d\mathcal{R} = I_{11} + I_{22} \end{aligned}$$

□

12.5 Ellissoide d'inerzia

Accanto alla rappresentazione algebrica dell'operatore \mathbf{I}_O mediante la matrice $[\mathbf{I}_O]$, calcolata rispetto ad un riferimento fissato $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, si può darne una rappresentazione geometrica (e quindi intrinseca) mediante il cosiddetto ellissoide d'inerzia, $EI(O)$. Consideriamo la funzione a valori scalari

$$\hat{f}_O : E_3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{y} \mapsto \vec{y} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{y}) .$$

Poichè \mathbf{I}_O è un operatore simmetrico, essa è una forma quadratica ed è definita positiva come abbiamo già dimostrato nel teorema 12.3.1. Inoltre, \hat{f}_O induce una funzione $f_O : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto f_O(P) = \hat{f}_O(P - O)$, data esplicitamente da

$$(12.5.1) \quad f_O(P) = (P - O) \cdot \mathbf{I}_O(P - O) = |P - O|^2 \text{vers}(P - O) \cdot \mathbf{I}_O(\text{vers}(P - O)) = |P - O|^2 I_{r(P)} ,$$

dove $I_{r(P)}$ indica il momento d'inerzia del rigido rispetto alla retta passante per i punti O e P . Gli insiemi di livello S_λ di f_O sono, per definizione, il luogo geometrico dei punti P dello spazio \mathcal{E}_3 nei quali la f_O assume valori costanti

$$S_\lambda = \{P \in \mathcal{E}_3 \mid f_O(P) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}\} = f_O^{-1}(\lambda),$$

quindi una famiglia ad un parametro di superfici in \mathcal{E}_3 . Tenendo conto della (12.5.1), tali insiemi si possono caratterizzare come l'insieme dei punti $P \in \mathcal{E}_3$ che soddisfano l'equazione dei *semi-diametri*

$$(12.5.2) \quad |P - O| = \sqrt{\frac{\lambda}{I_{r(P)}}},$$

È chiaro che, dalla positività di $I_{r(P)}$, segue che

$$\begin{aligned} \text{se } \lambda < 0 & \quad S_\lambda = \emptyset \\ \text{se } \lambda = 0 & \quad S_\lambda = \{O\} \end{aligned}$$

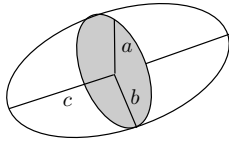
Se invece $\lambda > 0$, segue dalla (12.5.2) che S_λ è una superficie simmetrica rispetto al punto O e che tutti i suoi punti sono a distanza finita. Inoltre, dalla (12.5.1) segue che la sua equazione, nelle coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3) del generico punto $P \in \mathcal{E}_3$, si trova calcolando l'espressione

$$f_O(P) = \hat{f}_O(P - O) = \sum_{i,j=1}^3 x_i I_{ij} x_j = \lambda$$

cioè

$$(12.5.3) \quad I_{11}x_1^2 + I_{22}x_2^2 + I_{33}x_3^2 + 2I_{12}x_1x_2 + 2I_{13}x_1x_3 + 2I_{23}x_2x_3 = \lambda \quad \lambda > 0$$

Quindi, la superficie S_λ è l'insieme di livello λ di un polinomio omogeneo di secondo grado in 3 variabili, definito positivo, cioè la superficie di un ellissoide centrato nel punto $O \in \mathcal{R}$.



N.B. Di solito, il valore di λ , che è una costante avente le dimensioni $[\lambda] = [M][L^4]$, è fissato uguale a 1 in opportune unità di misura.

Come è noto, un ellissoide ha almeno 3 assi di simmetria ortogonali, cioè 3 assi ortogonali attorno ai quali l'ellissoide è invariante per rotazione di un angolo pari a π ed ha 3 piani di simmetria ortogonale rispetto ai quali è invariante per riflessione. Se si sceglie la terna di riferimento $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ parallela ai 3 assi, l'equazione cartesiana di un ellissoide si riduce alla forma canonica

$$(12.5.4) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

dove (x, y, z) sono le coordinate di P rispetto alla terna $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e (a, b, c) sono le lunghezze dei semi-assi di simmetria. Quindi, posto da ora in poi $\lambda = 1$, l'equazione (12.5.3) diventa

$$(12.5.5) \quad J_1x^2 + J_2y^2 + J_3z^2 = 1$$

dove J_1, J_2, J_3 sono i momenti d'inerzia rispetto agli assi paralleli a $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e passanti per O , cioè agli assi di simmetria. È evidente che, rispetto a tale terna, la matrice d'inerzia assume una forma diagonale

$$(12.5.6) \quad [\mathbf{I}_O] = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix}$$

Pertanto, si ha che:

1. $\mathbf{I}_O(\vec{i}) = J_1\vec{i}$, $\mathbf{I}_O(\vec{j}) = J_2\vec{j}$, $\mathbf{I}_O(\vec{k}) = J_3\vec{k}$, cioè i versori della terna sono *autovettori* dell'operatore d'inerzia \mathbf{I}_O , e hanno come **autovalori** i corrispondenti **momenti d'inerzia**. Inoltre, dall'equazione dei semi-diametri si ricava immediatamente la relazione tra i momenti d'inerzia J_i e la lunghezza dei semiassi di $EI(O)$:

$$(12.5.7) \quad a_i = \frac{1}{\sqrt{J_i}} \quad i = 1, 2, 3,$$

dove $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$.

2. Gli elementi fuori diagonale della matrice d'inerzia $[\mathbf{I}_O]$, cioè i momenti deviatori rispetto alle coppie dei piani di simmetria dell' $EI(O)$ sono nulli.

Abbiamo visto come costruire l'ellissoide d'inerzia di un rigido, a partire dalla conoscenza dell'operatore d'inerzia. Vediamo ora come si risolve il problema inverso, cioè quello di ricostruire l'operatore d'inerzia noto l'ellissoide.

Proposizione 12.5.1. (*Costruzione di Poinsot*). *L'operatore d'inerzia $\mathbf{I}_O : E_3 \rightarrow E_3$ trasforma un qualsiasi vettore \vec{y} nel vettore $\mathbf{I}_O(\vec{y})$ che ha:*

1. *la direzione coniugata a \vec{y} , cioè la direzione ortogonale all' $EI(O)$ nell'estremo P del semidiametro parallelo a \vec{y} ;*
2. *il verso che forma un angolo acuto con \vec{y} ;*
3. *il modulo pari a $|\mathbf{I}_O(\vec{y})| = \frac{|\vec{y}|}{OP \cdot OH}$.*

Dimostrazione. .

1. Poichè sappiamo dall'Analisi che il gradiente di una funzione scalare, calcolato nei punti di una superficie di livello della funzione, è ortogonale alla superficie stessa, basta dimostrare che $\mathbf{I}_O(\vec{y})$ è parallelo al *gradiente* di $f_O(P)$, dove P è l'estremo del semidiametro parallelo a \vec{y} . A tale scopo, posto $\vec{x} := P - O$, calcoliamo l'incremento finito della funzione $f_O(P)$

$$\begin{aligned} \Delta f_O(P) &= f_O(P + \vec{h}) - f_O(P) = \hat{f}_O(P + \vec{h} - O) - \hat{f}_O(P - O) \\ &= \hat{f}_O(\vec{x} + \vec{h}) - \hat{f}_O(\vec{x}) = (\vec{x} + \vec{h}) \cdot \mathbf{I}_O(\vec{x} + \vec{h}) - \vec{x} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{x}) \\ &= (\vec{x} + \vec{h}) \cdot (\mathbf{I}_O(\vec{x}) + \mathbf{I}_O(\vec{h})) - \vec{x} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{x}) \\ &= \vec{x} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{x}) + \vec{h} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{x}) + \vec{x} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{h}) + \vec{h} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{h}) - \vec{x} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{x}) \\ &\stackrel{(12.3.3)}{=} 2\mathbf{I}_O(\vec{x}) \cdot \vec{h} + \mathbf{I}_O(\text{vers}(\vec{h})) \cdot \text{vers}(\vec{h})|\vec{h}|^2 \end{aligned}$$

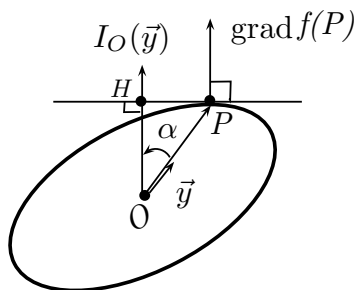


Figura 12.5.1: Costruzione di Poinsot

e osserviamo che la parte lineare in \vec{h} , cioè il gradiente della funzione $f_O(P)$ è

$$\text{grad } f_O(P) = 2\mathbf{I}_O(\vec{x}) = 2\mathbf{I}_O(P - O) .$$

Pertanto, poichè i vettori \vec{y} e $(P - O)$ sono paralleli, anche i loro trasformati $\mathbf{I}_O(\vec{y})$ e $\mathbf{I}_O(P - O)$ lo sono, quindi

$$\mathbf{I}_O(\vec{y}) \parallel \text{grad } f_O(P) .$$

2. Dalla positività di \mathbf{I}_O segue che se $\vec{y} \neq \vec{0}$, allora

$$(12.5.8) \quad 0 < \vec{y} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{y}) = |\vec{y}| |\mathbf{I}_O(\vec{y})| \cos \alpha ,$$

quindi α è acuto.

3. Denotando con $I_{r(P)}$ il momento d'inerzia del rigido rispetto all'asse passante per i punti O e P , la (12.5.8) si può scrivere

$$|\vec{y}|^2 I_{r(P)} = \vec{y} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{y}) = |\vec{y}| |\mathbf{I}_O(\vec{y})| \cos \alpha ,$$

da cui segue che

$$|\mathbf{I}_O(\vec{y})| = \frac{|\vec{y}| I_{r(P)}}{\cos \alpha} .$$

Dall'equazione dei semidiametri (12.5.2) segue che

$$I_{r(P)} = \frac{1}{OP^2} ,$$

pertanto

$$|\mathbf{I}_O(\vec{y})| = \frac{|\vec{y}|}{OP^2 \cos \alpha} ,$$

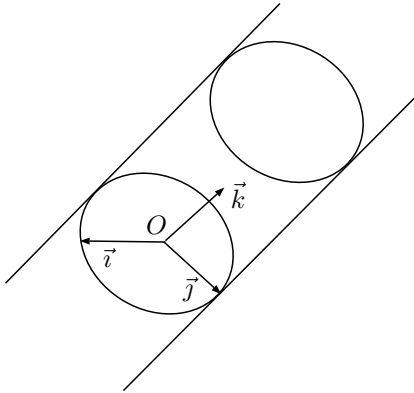
da cui la tesi. □

N.B. Rigido degenere: asta

Se il rigido \mathcal{R} è un'asta, sappiamo che \mathbf{I}_O non è definito positivo poiché il momento d'inerzia di \mathcal{R} rispetto al suo asse è nullo. In tal caso, scelta una terna $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ con il versore \vec{k} lungo l'asta, l'equazione (12.5.5) dell' $EI(O)$ si riduce a

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{J}, \quad J = J_1 = J_2$$

Questa è l'equazione di un cilindro (ellissoide degenere) circolare retto con asse parallelo a \vec{k} e passante per O .



12.6 Assi principali d'inerzia

Vista la discussione precedente, introduciamo 3 definizioni equivalenti per gli *assi principali d'inerzia* rispetto ad un punto O . Essi saranno denotati con $API(O)$.

Definizione 12.6.1 (geometrica). *Un $API(O)$ è un asse di simmetria dell' $EI(O)$.*

Definizione 12.6.2 (algebraica). *Un $API(O)$ è un asse parallelo a un autovettore dell'operatore \mathbf{I}_O .*

Definizione 12.6.3 (meccanica). *Un $API(O)$ è una retta per O , per la quale passa una coppia di piani ortogonali (π, π') , rispetto ai quali si annulla il momento deviatore del rigido $\mathbf{I}_{\pi, \pi'}$.*

Chiameremo piani principali d'inerzia per O , $PPI(O)$, i piani ortogonali agli $API(O)$ e terne principali d'inerzia per O , $TPI(O)$, le terne ortonormali di $API(O)$.

Ricerca delle $TPI(O)$

Dalle definizioni precedenti discendono i metodi per la ricerca degli $API(O)$. In particolare, dalla Def. 2 segue che possiamo utilizzare il metodo per la ricerca degli autovalori e autovettori visti in Algebra Lineare (vedi [Abate, Cap. 14]). Si tratta, cioè di

1. determinare gli autovalori di \mathbf{I}_O , cioè le radici μ dell'equazione caratteristica

$$\det(\mathbf{I}_O - \mu \mathbb{1}_3),$$

dove $\mathbb{1}_3$ è l'operatore identità in E_3 . Il Teorema di diagonalizzazione degli operatori simmetrici, o *Teorema Spettrale*, garantisce che le radici dell'equazione caratteristica sono tutte e tre reali (vedi [Abate, Cap. 15]).

2. determinare gli autovettori di \mathbf{I}_O corrispondenti agli autovalori μ_i ($i = 1, 2, 3$) trovati al passo 1. Lo stesso *Teorema di diagonalizzazione* garantisce l'esistenza di almeno una base ortogonale di autovettori di \mathbf{I}_O .

Richiamiamo un altro risultato di algebra lineare che ci permetterà di classificare tutte le situazioni possibili in \mathcal{E}_3 .

Proposizione 12.6.1. *Sia $\mathbf{I} : E_n \rightarrow E_n$ un operatore simmetrico in uno spazio vettoriale euclideo n -dimensionale. Due autovettori di \mathbf{I} , corrispondenti ad autovalori diversi, cioè appartenenti ad autospazi diversi, sono ortogonali. Viceversa, a due autovettori non ortogonali corrisponde lo stesso autovalore, cioè essi appartengono allo stesso autospazio.*

Dimostrazione. Siano \vec{u} e \vec{v} due autovettori di \mathbf{I} , cioè

$$\mathbf{I}_O(\vec{u}) = \mu_1 \vec{u} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_O(\vec{v}) = \mu_2 \vec{v}$$

Moltiplicando scalarmente la prima per \vec{v} , la seconda per \vec{u} e sottraendo, per la simmetria di \mathbf{I}_O segue che

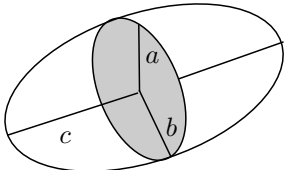
$$0 = \vec{v} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{u}) - \vec{u} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{v}) = (\mu_1 - \mu_2) \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Pertanto:

1. se $\mu_1 \neq \mu_2$, allora \vec{u} e \vec{v} sono ortogonali;
2. se \vec{u} e \vec{v} non sono ortogonali, allora $\mu_1 \equiv \mu_2$.

□

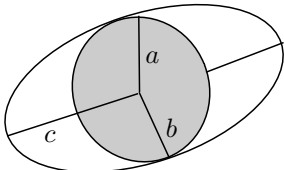
Per l'operatore d'inerzia, che agisce sui vettori dello spazio tridimensionale E_3 , si possono verificare i seguenti casi:

$$1. \quad \begin{array}{cccc} J_1 \neq J_2 \neq J_3 \\ 0 & J_3 & J_2 & J_1 \end{array}$$


$$\begin{array}{cccc} 0 & a & b & c \end{array}$$

ellissoide triassiale.

In tal caso, esiste un'unica TPI(O) composta dai versori paralleli agli assi di simmetria dell'EI(O). Su tale base la matrice d'inerzia ha la forma diagonale (12.5.6).

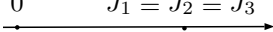
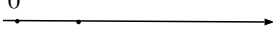
$$2. \quad \begin{array}{ccc} J_1 \equiv J_2 \neq J_3 \\ 0 & J_3 & J_2 \equiv J_1 \end{array}$$


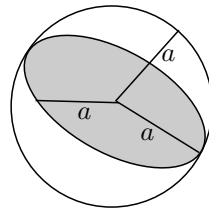
$$\begin{array}{ccc} 0 & a \equiv b & c \end{array}$$

ellissoide rotondo

In tal caso, l'asse parallelo all'autospazio V_{J_3} è detto *asse di figura*. Inoltre, l'autospazio V_{J_1} ha dimensione 2 ed è parallelo al piano per O ortogonale all'asse di figura. Tale piano è detto *piano equatoriale*. Essendo $a \equiv b$, l'intersezione dell' $EI(O)$ con il piano equatoriale è una circonferenza di raggio $R = a \equiv b$ e quindi l' $EI(O)$ è un ellissoide di rotazione intorno all'asse di figura. Dunque, una $TPI(O)$ è formata da un versore, \vec{k} , parallelo all'asse di figura e da una qualunque coppia di versori ortogonali, scelti nel piano equatoriale. Su tali terne, la matrice d'inerzia si scrive

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}.$$

3. $J_1 = J_2 = J_3 = J$
 $0 \quad J_1 \equiv J_2 \equiv J_3$

 0

 $a \equiv b \equiv c$



sfera

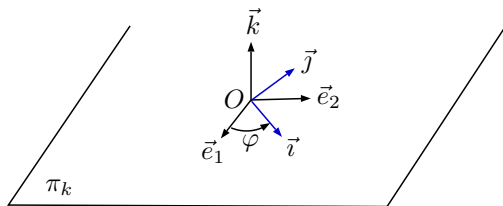
In questo caso l'autospazio V_J ha dimensione 3 e quindi coincide con E_3 . Essendo $a \equiv b \equiv c$, l' $EI(O)$ diventa una sfera. Dunque, una $TPI(O)$ è una qualunque terna ortonormale centrata in O . Si osservi che la matrice d'inerzia diventa

$$[\mathbf{I}_O] = J\mathbb{1}_3$$

Ribadendo che la soluzione del problema degli autovalori è il metodo più generale per la ricerca di una $TPI(O)$ e garantisce sempre il successo, vedremo ora alcuni metodi che si possono usare in casi particolari.

Ricerca di una $TPI(O)$ noto un $API(O)$

Se un $API(O)$ è già noto, possiamo utilizzare in una maniera molto efficace il metodo che discende dalla Def. 3. Chiamiamo \vec{k} il versore dell' $API(O)$ noto e consideriamo π_k , il $PPI(O)$ ortogonale a \vec{k} .



Scegliamo su tale piano una qualunque coppia di assi ortogonali ($O; \vec{e}_1, \vec{e}_2$) e calcoliamo la matrice d'inerzia $[\mathbf{I}_O]$ rispetto alla terna $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}.$$

La matrice $[\mathbf{I}_O]$ ha la forma precedente poiché la terza colonna è data dalle componenti del vettore trasformato di \vec{k}

$$\mathbf{I}_O(\vec{k}) = J_3 \vec{k},$$

che è autovettore di \mathbf{I}_O con autovalore J_3 .

Si possono verificare due casi:

1. $I_{12} = 0 \Rightarrow (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$ è una $TPI(O)$;
2. $I_{12} \neq 0$, allora consideriamo le coppie $(O; \vec{i}, \vec{j})$ di assi ortogonali su π_k . Tali coppie sono parametrizzate dall'angolo φ compreso tra \vec{e}_1 e \vec{i} . Fra tali coppie cerchiamo una coppia di $API(O)$ richiedendo che il momento deviatore J_{12} , rispetto alla coppia di piani, π_i, π_j si annulli. Tale momento deviatore ha l'espressione

$$\begin{aligned} J_{12} &= \vec{i} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{j}) = [\cos \varphi, \sin \varphi, 0] \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= [\cos \varphi, \sin \varphi] \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} = \\ &= -(I_{11} - I_{22}) \sin \varphi \cos \varphi + I_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \\ &= -\frac{I_{11} - I_{22}}{2} \sin 2\varphi + I_{12} \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Pertanto, richiedendo, che J_{12} si annulli si trova che l'angolo φ è soluzione dell'equazione

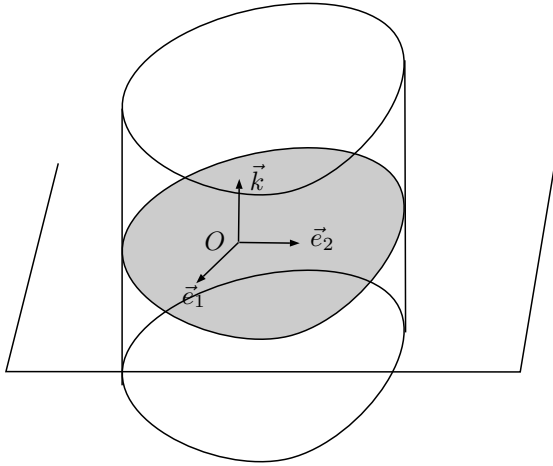
$$\cotg(2\varphi) = \frac{I_{11} - I_{22}}{2I_{12}}.$$

Tale equazione ammette 4 soluzioni nell'intervallo $]0, 2\pi[$, ognuna delle quali differisce di $\pi/2$ da quelle adiacenti. Quindi, individua entrambe le direzioni principali.

Proprietà di simmetria materiale

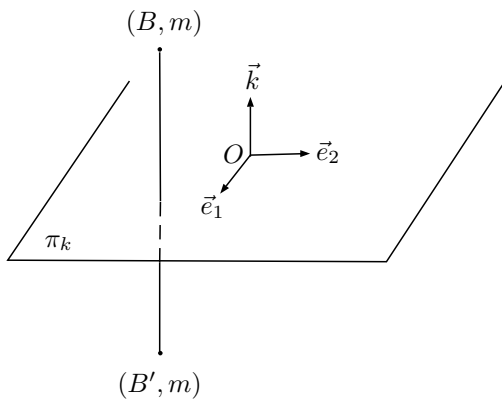
Se il rigido \mathcal{R} gode di alcune proprietà di simmetria materiale, la ricerca di una $TPI(O)$ è notevolmente semplificata.

Definizione 12.6.4. Si dice piano di simmetria materiale ortogonale per \mathcal{R} un piano rispetto al quale \mathcal{R} è invariante per riflessione (vedi Cap. 2, Esercizio 2.2.2 e 2.3.1).



In modo equivalente, un piano di simmetria materiale è definito come un piano:

1. di simmetria geometrica ortogonale;
2. tale che punti (o parti) simmetrici abbiano la stessa massa (o densità).



N.B. Per i rigidi omogenei i piani di simmetria geometrica sono automaticamente piani di simmetria materiale.

Proposizione 12.6.2. *Un piano di simmetria materiale per un rigido è un PPI per ogni suo punto O . In maniera equivalente, ogni retta ortogonale al piano è API rispetto al suo punto di intersezione con il piano*

Dimostrazione. Sia π un piano di simmetria materiale per un rigido \mathcal{R} . Consideriamo un suo generico punto O e chiamiamo \vec{k} il versore dell'asse per O e ortogonale a π . Presa una qualunque coppia di assi ortogonali su π , calcoliamo il trasformato di \vec{k}

$$I_O(\vec{k}) = I_{13}\vec{e}_1 + I_{23}\vec{e}_2 + I_{33}\vec{k}$$

e dimostriamo che $I_{13} = I_{23} = 0$. Infatti

$$(12.6.1) \quad I_{13} = - \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) x_1(B) x_3(B) dx_1 dx_2 dx_3 = - \int_{\mathcal{R}_0} \sigma(B) x_1(B) x_3(B) dx_1 dx_2 dx_3 + \\ - \int_{\mathcal{R}_1} \sigma(B) x_1(B) x_3(B) dx_1 dx_2 dx_3 - \int_{\mathcal{R}_2} \sigma(B') x_1(B') x_3(B') dx_1 dx_2 dx_3 ,$$

dove $\mathcal{R}_0 := \{B \in \mathcal{R} \mid x_3(B) = 0\}$, $\mathcal{R}_1 := \{B \in \mathcal{R} \mid x_3(B) > 0\}$ e $\mathcal{R}_2 := \{B \in \mathcal{R} \mid x_3(B) < 0\}$ sono i tre sottoinsiemi in cui il rigido \mathcal{R} è ripartito dal piano π . È immediato osservare che, essendo π di simmetria materiale per \mathcal{R} , $\forall B \in \mathcal{R}_1 \quad \exists B' \in \mathcal{R}_2$ tale che

\mathcal{R}_1		\mathcal{R}_2
B		B'
$\sigma(B)$	=	$\sigma(B')$
$x_1(B)$	=	$x_1(B')$
$x_2(B)$	=	$x_2(B')$
$x_3(B)$	= -	$x_3(B')$

e quindi la somma degli ultimi due integrali in I_{13} si annulla. Analogamente accade per I_{23} , quindi

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

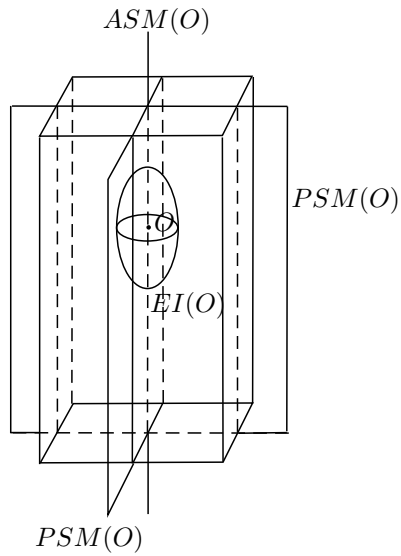
Allora, segue che

$$\mathbf{I}_O(\vec{k}) = I_{33}\vec{k} = J_3\vec{k} ,$$

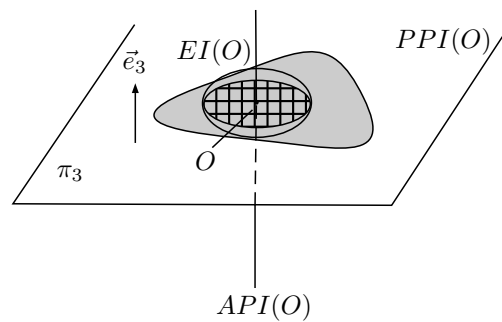
cioè \vec{k} è autovettore di \mathbf{I}_O e quindi $API(O)$. □

Concludendo, se un rigido ha un piano π di simmetria materiale, $\forall O \in \pi$ è già noto un $API(O)$. Quindi si può applicare il metodo della pagina precedente per la ricerca degli altri due. È evidente che tale discorso si può fare per i solidi omogenei, geometricamente simmetrici, quali cubi, parallelepipedi, poliedri regolari, etc.

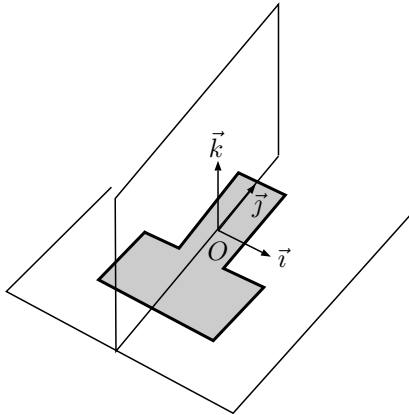
Esempio 12.6.1. *Parallelepipedo omogeneo*



Esempio 12.6.2. In generale, la proprietà di simmetria materiale si applica sempre al caso di un qualsiasi rigido \mathcal{R} piano. Infatti, il piano π di \mathcal{R} è un piano di simmetria materiale per \mathcal{R} . Pertanto, ogni asse ortogonale a π è $API(O)$, per ogni $O \in \mathcal{R}$. L'intersezione dell' $EI(O)$ con il piano π si dice ellisse d'inerzia per O .



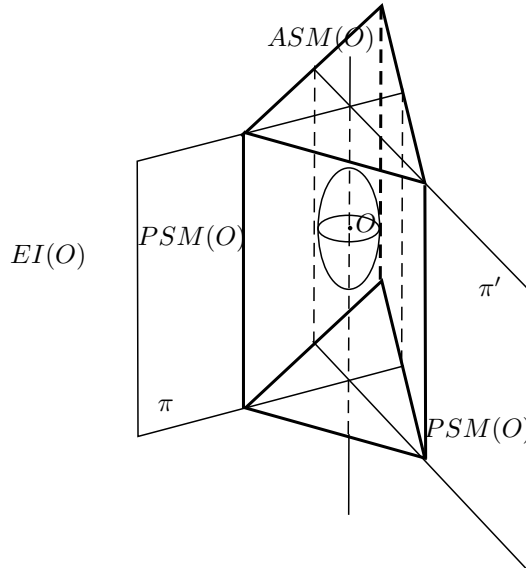
Esempio 12.6.3. Sezione di un profilo a T



Proposizione 12.6.3. *Se un rigido ammette 2 piani di simmetria materiale, non ortogonali, allora l'asse $r = \pi \cap \pi'$ è $API(O)$, per ogni $O \in r$ e l' $EI(O)$ è rotondo intorno a r .*

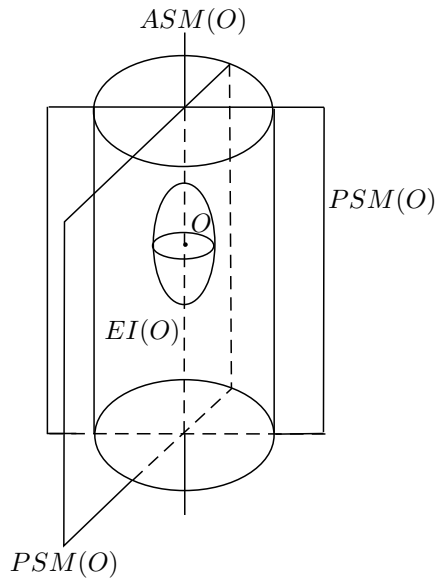
Dimostrazione. Preso $O \in r$, i 2 assi per O ortogonali, rispettivamente, a π e π' sono $API(O)$ per la Prop. 12.6.2 e non sono ortogonali tra loro. Quindi, i vettori paralleli a tali assi, per il punto b) della Prop. 12.6.1 appartengono allo stesso autospazio, che avrà almeno dimensione pari a 2. Da qui segue la tesi. \square

Esempio 12.6.4. *Prisma retto omogeneo a sezione triangolare equilatera*

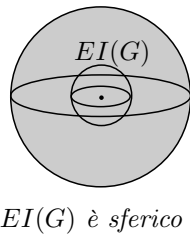


$EI(O)$ è rotondo intorno ad r poiché π non è \perp a π' .

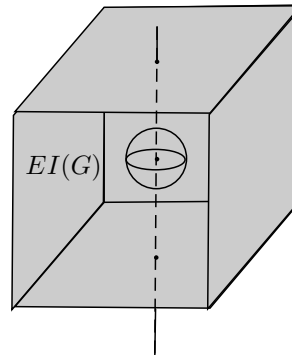
Esempio 12.6.5. *Cilindro circolare retto omogeneo*



Esempio 12.6.6. sfera e cubo omogenei



$EI(G)$ è sferico



$EI(G)$ è sferico

12.7 Variazione con il polo dell'operatore d'inerzia

Finora abbiamo studiato l'operatore d'inerzia dopo aver fissato il polo O . Interessante è anche lo studio di I_O al variare di O , cioè lo studio del campo di operatori

$$I : \mathcal{E}_3 \times E_3 \rightarrow E_3, (O, \vec{y}) \mapsto I_O(\vec{y}) = \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (B - O) \times (\vec{y} \times (B - O))$$

Ad esempio, per i momenti d'inerzia vale la formula Huygens-Steiner (vedi Fisica I)

$$(12.7.1) \quad I_{r(O)} = I_{r(G)} + Md^2(r(O), r(G)),$$

dove G è il centro di massa di \mathcal{R} , $O \in \mathcal{R}$, $r(O)$ e $r(G)$ sono assi paralleli passanti per O e per G , rispettivamente, M la massa totale di \mathcal{R} e $d(r(O), r(G))$ la distanza tra i due assi.

Proposizione 12.7.1. *Dato un fascio di rette parallele, il minimo momento d'inerzia è quello rispetto alla retta del fascio passante per il centro di massa G .*

Dimostrazione. Discende dal fatto che nella (12.7.1) tutti i termini sono strettamente positivi. \square

La formula (12.7.1) si può ricavare dalla più generale formula di trasporto per l'operatore d'inerzia

Teorema 12.7.1. (*Huygens & Steiner*) *In un rigido \mathcal{R} , per ogni vettore \vec{y} e per ogni punto $O \in \mathcal{R}$, vale*

$$(12.7.2) \quad \mathbf{I}_O(\vec{y}) = \mathbf{I}_G(\vec{y}) + M(G - O) \times (\vec{y} \times (G - O)) .$$

Dimostrazione. Dalla definizione segue che

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O(\vec{y}) &= \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B ((B - G) + (G - O)) \times \left(\vec{y} \times ((B - G) + (G - O)) \right) = \\ &= \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (B - G) \times (\vec{y} \times (B - G)) + \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (B - G) \times (\vec{y} \times (G - O)) + \\ &\quad + \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (G - O) \times (\vec{y} \times (B - G)) + \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (G - O) \times (\vec{y} \times (G - O)) = \\ &= \mathbf{I}_G(\vec{y}) + \left(\sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (B - G) \right) \times (\vec{y} \times (G - O)) + (G - O) \times \left(\vec{y} \times \left(\sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (B - G) \right) \right) \\ &\quad + M(G - O) \times (\vec{y} \times (G - O)) = \\ &= \mathbf{I}_G(\vec{y}) + M(G - O) \times (\vec{y} \times (G - O)) = \\ &= \mathbf{I}_G(\vec{y}) + M \left(|G - O|^2 \vec{y} - ((G - O) \cdot \vec{y})(G - O) \right) , \end{aligned}$$

dove i termini barrati si annullano separatamente per la definizione del centro di massa. \square

Scegliendo come \vec{y} un versore \vec{u} e moltiplicando scalarmente per \vec{u} entrambi i termini della precedente identità, si ottiene la (12.7.1). Analogamente, se si moltiplica la (12.7.2) scalarmente per un versore \vec{v} ortogonale a \vec{u} si ottiene la formula di Huygens-Steiner per i momenti deviatori

$$(12.7.3) \quad I_{\pi(O, \vec{u})\pi(O, \vec{v})} = I_{\pi(G, \vec{u})\pi(G, \vec{v})} - M d(G, \pi(O, \vec{u})) d(G, \pi(O, \vec{v})) ,$$

dove $\pi(O, \vec{u})$ e $\pi(O, \vec{v})$ sono i piani passanti per O e ortogonali ai versori \vec{u} e \vec{v} rispettivamente, $\pi(G, \vec{u})$ e $\pi(G, \vec{v})$ sono i piani paralleli ai precedenti ma passanti per il centro di massa del rigido G , $d(G, \pi(O, \vec{u}))$ e $d(G, \pi(O, \vec{v}))$ indicano le distanze orientate di G dai piani $\pi(O, \vec{u})$ e $\pi(O, \vec{v})$ rispettivamente (vedi la Fig. 12.7). Il segno delle distanze sarà positivo se G vede la faccia positiva del piano rispetto al versore ortogonale al piano, negativo se G vede la faccia negativa. Scelte due terne ortonormali con assi paralleli $(G; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e posto $G - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, la (12.7.2) diventa

$$(12.7.4) \quad [\mathbf{I}_O] = [\mathbf{I}_G] + M \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} ,$$

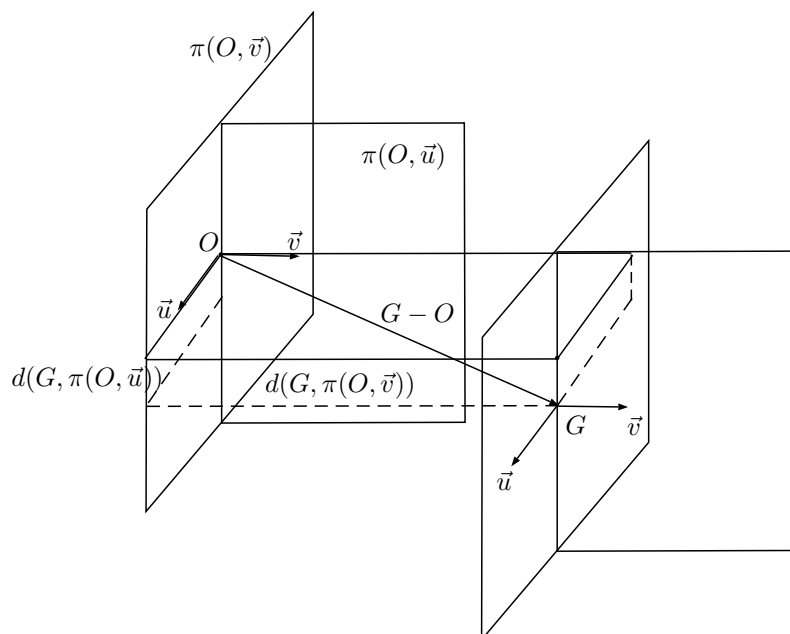


Figura 12.7.1: Teorema di Huygens & Steiner

dove $[I_G]$ è la matrice d'inerzia rispetto alla terna $(G; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ed è detta matrice centrale d'inerzia.

N.B. Poiché la matrice di trasporto dipende in maniera quadratica dalle coordinate del punto G rispetto a O , essa è invariante se alle coordinate (x, y, z) di G rispetto a O si sostituiscono le coordinate $(-x, -y, -z)$ di O rispetto a G sulla stessa base dei versori $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

12.8 Assi principali d'inerzia centrali

Così si chiamano gli assi principali d'inerzia passanti per il centro di massa G del rigido \mathcal{R} . Consideriamo una terna principale d'inerzia per G $(G; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e un punto O , che nella detta terna abbia coordinate (x, y, z) . Allora, per la (12.7.4), la matrice d'inerzia rispetto al punto O è data da

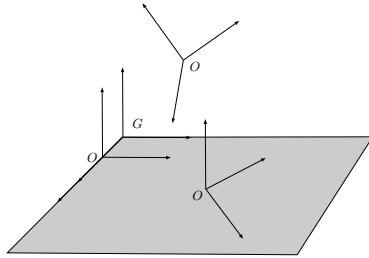
$$[I_O] = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

Segue subito la seguente

Proposizione 12.8.1. *Proprietà di traslazione delle terne principali centrali.*

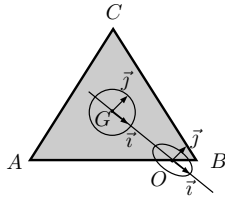
1. se $O \in API(G)$ allora una TPI(O) è parallela alla terna centrale $(G; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, poiché due delle coordinate di O sono nulle e quindi sono nulli tutti e 3 i termini fuori diagonale della matrice di trasporto.

2. se $O \in PPI(G)$ et $\notin API(G)$, allora l'asse per O ortogonale al suddetto piano principale è $API(O)$, poiché la coordinata di O lungo tale asse è nulla e quindi sono nulli i termini di trasporto che la contengono. Invece, gli altri 2 $API(O)$ non sono paralleli a quelli per G poiché le altre due coordinate di O sono non nulle e quindi sono non nulli i termini di trasporto fuori diagonale che ne contengono il prodotto.
3. se $O \notin PPI(G)$, allora gli $API(O)$ non sono paralleli agli $API(G)$, poiché le 3 coordinate di O sono tutte non nulle e quindi sono non nulli i 3 termini di trasporto fuori diagonale.



Esempi di rigidi omogenei

1. Lamina triangolare equilatera: determiniamo una TPI per un generico punto O appartenente a un lato della lamina.

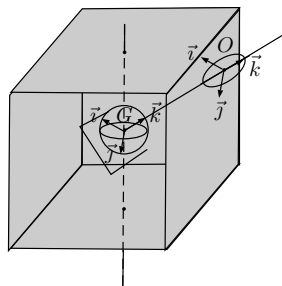


La lamina ha le mediane come assi di simmetria materiale non ortogonali per il centro di massa G . Quindi, l'ellisse d'inerzia per G è una circonferenza e tutti gli assi per G appartenenti al piano sono $API(G)$.

Al fine di determinare una $TPI(O)$, consideriamo l'asse passante per G e per O e chiamiamo \vec{i} il suo versore. Tale asse è $API(G)$ per quanto detto sopra. Poi consideriamo un asse ortogonale a \vec{i} e denotiamo il suo versore con \vec{j} . La terna $(G; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è una $TPI(G)$.

Trasliamo tale terna lungo l'asse OG . Allora, la terna $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è una $TPI(O)$ per la Prop. 12.8.1. Inoltre, l'ellissoide d'inerzia per O ha lo stesso asse di quello per G nella direzione di \vec{i} , ma ha un asse più corto di quello per G nella direzione di \vec{j} , per la Prop. 12.7.1 e l'equazione dei semiassi (12.5.7).

2. Cubo: determiniamo una TPI per un generico punto O appartenente a una faccia del cubo.



Per ogni asse di simmetria del cubo passante per il centro di una delle sue facce, passa almeno una coppia di piani di simmetria materiale, non ortogonali tra loro e passanti per G . Quindi, l' $EI(G)$ è una sfera e qualunque terna ortonormale per G è una $TPI(G)$.

Al fine di determinare una $TPI(O)$, scelgo una $TPI(G)$ con un asse parallelo al segmento OG , il versore del quale chiamo \vec{k} . Poi scelgo una qualunque coppia di assi ortogonali sul piano ortogonale a \vec{k} , i cui versori chiamo \vec{i} e \vec{j} . Allora, $(G; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è una $TPI(G)$ e quindi $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è una $TPI(O)$. Inoltre, l' $EI(O)$ è di rotazione intorno all'asse di figura OG .