

# Appunti delle lezioni di Meccanica Razionale

Giorgio S. Tondo

a.a. 2020-2021  
versione del 31/03/2021

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore; pertanto, essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Calcolo Vettoriale</b>	<b>3</b>
2.1	Richiami di algebra vettoriale . . . . .	3
2.2	Spazio affine euclideo $\mathcal{E}_3$ . . . . .	11
2.2.1	Applicazioni affini in $\mathcal{E}_3$ . . . . .	12
2.3	Riferimento cartesiano in $\mathcal{E}_3$ . . . . .	13
2.4	Riferimento polare in $\mathcal{E}_2$ . . . . .	15
2.5	Riferimento cilindrico in $\mathcal{E}_3$ . . . . .	17
2.6	Riferimento sferico in $\mathcal{E}_3$ . . . . .	19
2.7	Momenti di vettori applicati . . . . .	23
2.8	Soluzione dell'Es. 2.2.2 . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Vincoli e gradi di libertà di un sistema meccanico</b>	<b>29</b>
3.1	Spazio delle configurazioni . . . . .	29
3.2	Vincoli e loro classificazione . . . . .	30
3.3	Gradi di libertà di un rigido . . . . .	33
3.4	Grado di un vincolo . . . . .	38
3.5	Sovrapposizione di più vincoli . . . . .	45
3.6	Modelli articolati . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Cinematica dei Rigidi</b>	<b>55</b>
4.1	Cenni di Cinematica dei Modelli Continui . . . . .	55
4.2	Moti rigidi . . . . .	57
4.2.1	Esempi di Moto rigido . . . . .	60
4.3	Angoli di Eulero . . . . .	71
4.4	Angoli nautici (di Blagoveščenskij) . . . . .	76
4.5	Moto rigido generale . . . . .	78
4.5.1	Teorema di Poisson . . . . .	79
4.6	Applicazioni del teorema di Poisson . . . . .	81
4.6.1	Campo di velocità di un rigido . . . . .	82
4.6.2	Campo delle accelerazioni di un rigido . . . . .	86
4.7	Cinematica Relativa . . . . .	86
4.7.1	Formula di derivazione cinematica . . . . .	87
4.7.2	Composizione delle velocità . . . . .	88

4.7.3	Composizione delle accelerazioni . . . . .	90
4.7.4	Composizione delle velocità angolari . . . . .	92
4.8	Moto di precessione . . . . .	93
4.9	Moto rigido piano . . . . .	97
4.9.1	Accelerazioni del moto piano . . . . .	105
4.9.2	Disco appoggiato su di una guida rettilinea . . . . .	105
4.9.3	Vincolo di puro rotolamento . . . . .	108
4.10	Disco appoggiato su un piano . . . . .	113
4.10.1	Puro rotolamento . . . . .	116
4.11	Classificazione dei moti rigidi . . . . .	118
4.12	Soluzione degli esercizi . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Principio dei lavori virtuali</b> . . . . .	<b>123</b>
5.1	Moti possibili e moti virtuali . . . . .	123
5.2	Spostamenti possibili e virtuali . . . . .	124
5.3	Vincoli unilateri e spostamenti virtuali irreversibili . . . . .	126
5.4	Campo degli spostamenti virtuali di un rigido . . . . .	127
5.5	Gradi di mobilità di un modello meccanico . . . . .	127
5.6	Vincoli piani . . . . .	129
5.7	Vincoli nello spazio . . . . .	131
5.8	Lavoro virtuale . . . . .	133
5.8.1	Lavoro virtuale su un rigido . . . . .	135
5.9	Equilibrio dei sistemi materiali . . . . .	135
5.10	Principio dei lavori virtuali . . . . .	136
5.11	PLV per un sistema olonomo . . . . .	143
5.12	Soluzioni degli esercizi . . . . .	151
<b>6</b>	<b>Sollecitazioni conservative</b> . . . . .	<b>149</b>
6.1	Richiami sui campi di forze conservative . . . . .	149
6.2	Sollecitazione conservativa . . . . .	152
6.3	Energia potenziale di una molla . . . . .	156
6.3.1	Molle lineari interne . . . . .	156
6.3.2	Molle lineari esterne . . . . .	156
6.3.3	Molle Angolari . . . . .	158
6.4	Energia potenziale ed equilibri . . . . .	159
6.5	Criterio statico di stabilità . . . . .	160
6.6	Soluzione degli esercizi . . . . .	169
<b>7</b>	<b>Forze applicate su un rigido</b> . . . . .	<b>173</b>
7.1	Insiemi di forze equivalenti su un rigido . . . . .	173
7.2	Insiemi elementari di forze su un rigido . . . . .	174
7.2.1	Singola forza . . . . .	174
7.2.2	Coppia . . . . .	175
7.2.3	Torsore . . . . .	175
7.2.4	Insieme nullo o equilibrato . . . . .	176
7.3	Caso generale . . . . .	176
7.4	Insiemi di forze a risultante equivalente . . . . .	178

7.4.1	Forze complanari. . . . .	178
7.4.2	Forze concorrenti . . . . .	179
7.4.3	Forze parallele . . . . .	180
7.5	Proprietà del centro $G$ delle forze parallele . . . . .	182
<b>8</b>	<b>Equazioni cardinali della statica</b>	<b>191</b>
8.1	Classificazione delle sollecitazioni . . . . .	191
8.2	Sollecitazioni interne . . . . .	193
8.2.1	Sollecitazione interne in un rigido . . . . .	193
8.3	Equazioni cardinali della statica dei sistemi . . . . .	194
8.4	Sollecitazione reattiva su un rigido . . . . .	196
8.4.1	Vincoli piani . . . . .	197
8.4.2	Vincoli spaziali . . . . .	201
8.5	Problemi della statica dei modelli . . . . .	203
<b>9</b>	<b>Sollecitazioni interne in un rigido in equilibrio</b>	<b>211</b>
9.1	Azioni interne in un rigido 3D in equilibrio . . . . .	211
9.2	Azioni interne in un rigido 2D in equilibrio . . . . .	213
9.3	Azioni interne in rigido 1D in equilibrio . . . . .	215
9.4	Azioni interne in archi e aste “scariche” in equilibrio . . . . .	216
9.5	Osservazioni sui fili . . . . .	217
9.6	Calcolo di azioni interne in un rigido monodimensionale . . . . .	218
9.6.1	Approfondimento: diagrammi delle azioni interne . . . . .	220
<b>10</b>	<b>Modelli articolati</b>	<b>223</b>
10.1	Biella-manovella . . . . .	223
10.2	Arco a 3 cerniere . . . . .	227
10.3	Esempio di problema inverso . . . . .	231
10.3.1	Equazioni Cardinali della Statica . . . . .	231
10.3.2	Equazione pura di equilibrio . . . . .	235
10.4	Soluzione del Quiz 7.1 . . . . .	236
<b>11</b>	<b>Equazioni Cardinali della Dinamica</b>	<b>237</b>
11.1	Principio di D’Alembert . . . . .	237
11.1.1	I Equazione Cardinale della Dinamica . . . . .	237
11.1.2	II Equazione Cardinale della Dinamica . . . . .	238
11.2	Equazione dell’energia cinetica . . . . .	239
11.3	Statica e Dinamica relativa del punto materiale . . . . .	240
11.4	Statica e Dinamica relativa dei modelli meccanici . . . . .	244
<b>12</b>	<b>Operatore d’inerzia per un Rigido</b>	<b>253</b>
12.1	Momento angolare per i rigidi . . . . .	253
12.2	Energia cinetica di un rigido . . . . .	255
12.3	Operatore d’inerzia per un rigido . . . . .	255
12.4	Matrice d’inerzia nel caso piano . . . . .	258
12.5	Ellissoide d’inerzia . . . . .	259
12.6	Assi principali d’inerzia . . . . .	263

12.7	Variazione con il polo dell'operatore d'inerzia . . . . .	271
12.8	Assi principali d'inerzia centrali . . . . .	273
<b>13</b>	<b>Statica e Dinamica dei Rigidi</b>	<b>277</b>
13.1	Equazioni Cardinali della Statica per un Rigido . . . . .	277
13.2	Equazioni Cardinali della Dinamica per un Rigido . . . . .	279
13.3	Moto rigido piano . . . . .	281
13.4	Rigido con asse fisso . . . . .	282
13.5	Moti particolari di un rotore . . . . .	287
13.6	Rigido con punto fisso . . . . .	290
13.6.1	Moto per inerzia . . . . .	292
13.6.2	Effetti giroscopici elementari . . . . .	299
13.6.3	Tendenza al parallelismo . . . . .	301
13.6.4	Tenacia dell'asse giroscopico . . . . .	301
13.7	Disco appoggiato su una guida fissa . . . . .	302
<b>14</b>	<b>Equazioni di Lagrange</b>	<b>313</b>
14.1	Equazioni di Lagrange non conservative . . . . .	313
14.2	Equazioni di Lagrange conservative . . . . .	316
14.3	Equazioni di Lagrange in forma mista . . . . .	316
14.4	Struttura dell'energia cinetica di un sistema olonomo . . . . .	320
14.5	Struttura delle equazioni di Lagrange . . . . .	323
14.6	Integrali primi per i sistemi olonomi . . . . .	325
14.7	Macchine semplici . . . . .	327
<b>15</b>	<b>Linearizzazione delle equazioni di Lagrange</b>	<b>329</b>
15.1	Modelli con un grado di libertà . . . . .	329
15.2	Modelli con $l$ gradi di libertà . . . . .	333
15.3	Sistemi di eq. di Lagrange lineari . . . . .	336
15.3.1	Modelli lineari con $l$ gradi di libertà . . . . .	338
15.4	Costruzione delle coordinate normali . . . . .	345
<b>16</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>353</b>



## Capitolo 5

# Principio dei lavori virtuali

In questo capitolo presenteremo un metodo molto generale per determinare le condizioni di equilibrio di un modello meccanico soggetto a vincoli “lisci”. Tale metodo viene utilizzato anche in Scienza delle Costruzioni e in altri rami dell’Ingegneria. Premettiamo alcune considerazioni cinematiche.

### 5.1 Moti possibili e moti virtuali

Consideriamo un punto materiale  $P$  soggetto a  $r$  vincoli semplici, compatibili ed efficaci, eventualmente dipendenti dal tempo

$$(5.1.1) \quad f_\nu(P, \vec{v}_P, t) = 0 \quad \nu = 1, \dots, r .$$

Definiremo moti *possibili* di  $P$  tutti i moti *compatibili* con i vincoli, cioè le applicazioni regolari  $\gamma$  da un intervallo di tempo  $I \subset \mathbb{R}$  a valori in  $\mathcal{E}_3$

$$\gamma : I \rightarrow \mathcal{E}_3, t \mapsto P(t)$$

le quali soddisfano le (5.1.1)

$$f_\nu(P(t), \dot{P}(t), t) = 0 \quad \nu = 1, \dots, r, \quad \forall t \in I .$$

E’ chiaro che tra tutti i moti possibili è incluso il moto effettivo di  $P$  individuato univocamente dalla sollecitazione attiva su  $P$  e dalle sue condizioni iniziali  $(P(t_0), \dot{P}(t_0))$ . Accanto alla classe dei moti possibili, considereremo un’altra classe di moti, quella dei moti *virtuali* che indicheremo con

$$\beta : I \rightarrow \mathcal{E}_3, \tau \mapsto P(\tau) .$$

In questo caso, per evitare confusione, il moto del modello sarà parametrizzato dal parametro  $\tau$  invece di  $t$ . Tali moti sono definiti come tutti quelli *compatibili* con i vincoli, immaginati fissi ad un istante di tempo fissato  $\tau_0$ , quindi come i moti che soddisfano le equazioni

$$f_\nu(P(\tau), \dot{P}(\tau), \tau_0) = 0 \quad \nu = 1, \dots, r, \quad \tau_0 \in I .$$

È ovvio che, se tutti i vincoli sono indipendenti dal tempo, l’insieme dei moti virtuali coincide con quello dei moti possibili. Ma, se c’è qualche vincolo dipendente dal tempo, i due insiemi non coincidono. Osserviamo che le definizioni precedenti hanno esclusivamente carattere cinematico, cioè prescindono da qualunque sollecitazione attiva applicata al punto  $P$ .

## 5.2 Spostamenti possibili e virtuali

Consideriamo le posizioni del punto  $P$  lungo un moto possibile, al tempo  $t_0$  e al tempo  $t_0 + \Delta t$ . Il vettore applicato  $(P, \overrightarrow{\Delta P})$ , con

$$\overrightarrow{\Delta P} = P(t_0 + \Delta t) - P(t_0) ,$$

è detto spostamento finito di  $P$  nell'intervallo  $\Delta t$ , a partire dalla posizione  $P(t_0)$ . Sviluppiamo in serie di Taylor rispetto a  $\Delta t$  l'applicazione differenziabile a valori vettoriali  $P(t)$  e prendiamone la parte lineare che indicheremo con

$$(5.2.1) \quad \overrightarrow{\partial P} := \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t} \Delta t .$$

Chiameremo il vettore applicato  $(P, \overrightarrow{\partial P})$  spostamento *possibile* linearizzato (o infinitesimo) del punto  $P$  all'istante  $t_0$ . Tra tutti gli spostamenti possibili linearizzati ci sarà lo spostamento effettivo (linearizzato) che indicheremo con  $(P, \overrightarrow{dP})$ , dove

$$\overrightarrow{dP} := \overrightarrow{\dot{P}(t_0)} dt$$

e  $P(t)$  denoterà il moto effettivo di  $P$ .

**N.B.** Il secondo membro della (5.2.1) rappresenta la parte lineare in  $\Delta t$  dell'incremento della applicazione  $P(t)$ . Esso è detto differenziale dell'applicazione.

Introduciamo ora un altro tipo di spostamento linearizzato che si rivelerà di grande utilità sia in Statica sia in Dinamica e che, al contrario degli spostamenti possibili, prescinde dall'eventuale moto dei vincoli. Consideriamo lo spostamento di  $P$  lungo un generico moto virtuale

$$P(\tau_0 + \Delta\tau) - P(\tau_0)$$

e prendiamone la parte lineare che indicheremo con

$$\overrightarrow{\delta P} := \frac{\delta \overrightarrow{P}}{\delta \tau} \delta \tau .$$

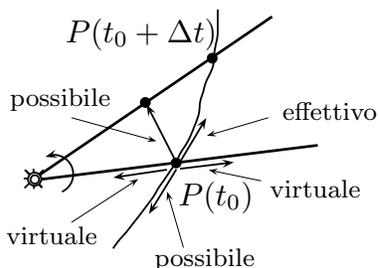
Il vettore applicato  $(P, \overrightarrow{\delta P})$  è detto spostamento *virtuale* del punto  $P$  all'istante  $\tau_0$ . Il simbolo  $\delta$  viene usato per non confondere il differenziale *virtuale* (o a tempo bloccato) con il differenziale usuale (5.2.1).

**N.B.** La differenza tra gli spostamenti virtuali e quelli possibili è che i primi non tengono conto del moto di eventuali vincoli mobili. In altri termini, per gli spostamenti virtuali, la variazione della posizione di  $P$  è fatta con i vincoli "congelati" al tempo  $\tau_0$ . È, quindi, una variazione immaginata a titolo di prova e per questo merita l'aggettivo di virtuale.

**N.B.** Dalla definizione segue che gli spostamenti virtuali dipendono esclusivamente dal sistema materiale e dalla geometria del vincolo mentre non hanno niente a che fare con eventuali forze attive agenti sul sistema, né con il moto dei vincoli. Invece, gli spostamenti possibili dipendono anche dal moto dei vincoli (ma non dipendono dalla sollecitazione attiva).

**Esempio 5.2.1.** *Vincolo mobile: asta rotante in un piano.*

Consideriamo il modello dato da un punto materiale  $P$  scorrevole lungo l'asta, rotante con un moto assegnato, intorno a un asse fisso passante per il suo estremo  $O$  e ortogonale all'asta. Tale modello ha 1 grado di libertà poiché il vincolo è un appoggio semplice.



$(P, \overrightarrow{\partial P})$ : spostamento possibile  
 $(P, \overrightarrow{dP})$ : spostamento effettivo  
 $(P, \overrightarrow{\delta P})$ : spostamento virtuale

Indichiamo con  $(\rho, \varphi)$  le coordinate (sovrabbondanti) di  $P$  rispetto a un riferimento polare piano  $(O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ . Il moto assegnato del vincolo sarà dato da:

$$(5.2.2) \quad \varphi = \varphi(t)$$

I moti possibili possono essere scritti

$$(5.2.3) \quad P(t) = O + \vec{x}_P(t) = O + \rho(t)\vec{e}_\rho(t) \quad \forall t \in I,$$

dove  $\rho(t)$  è una funzione arbitraria di  $t$ , mentre  $\vec{e}_\rho(t)$  è determinato dalla (5.2.2). Invece, i moti virtuali sono dati da

$$(5.2.4) \quad P(\tau) = O + \vec{x}_P(\tau) = O + \rho(\tau)\vec{e}_\rho(\tau_0) \quad \forall \tau \in I,$$

dove  $\rho(\tau)$  è una funzione arbitraria di  $\tau$ , mentre  $\vec{e}_\rho(\tau_0)$  è il versore  $\vec{e}_\rho$  all'istante  $\tau_0$ . Dunque, tenendo conto delle (2.4.5), gli spostamenti possibili saranno dati da

$$(5.2.5) \quad \overrightarrow{\partial P} = \partial \vec{x}_P = (\dot{\rho}\vec{e}_\rho(t) + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi(t)) \partial t = \partial \rho \vec{e}_\rho(t) + \rho \partial \varphi \vec{e}_\varphi(t) \quad \forall \partial \rho$$

mentre quelli virtuali da

$$(5.2.6) \quad \overrightarrow{\delta P} = \delta \vec{x}_P = \dot{\rho}\vec{e}_\rho(\tau_0)\delta\tau = \delta\rho \vec{e}_\rho(\tau_0), \quad \forall \delta\rho$$

poiché il versore  $\vec{e}_\rho$ , che è parallelo all'asta, è congelato insieme al vincolo.

Dalla (5.2.6) segue immediatamente che  $\delta \vec{x}_P$  è un vettore parallelo a  $\vec{e}_\rho$  e di modulo arbitrario; dalla (5.2.5) segue che gli spostamenti possibili hanno una componente arbitraria lungo  $\vec{e}_\rho$ , mentre hanno una componente lungo  $\vec{e}_\varphi$  pari a  $\rho \partial \varphi$ , determinata dalla (5.2.2).

Ora, studieremo un modello più complesso del semplice punto materiale. Consideriamo un insieme di punti  $\mathcal{B}$ , le configurazioni del quale indicheremo sinteticamente con  $\mathcal{P}$ .

**Definizione 5.2.1.** Si dice insieme (o campo) degli spostamenti possibili del modello  $\mathcal{B}$ , in breve spostamento possibile di  $\mathcal{B}$ , a partire da una configurazione iniziale  $\mathcal{P}(t_0)$ , l'insieme di tutti gli spostamenti possibili dei punti  $P \in \mathcal{B}$ . Esso sarà denotato con

$$(\mathcal{P}, \overrightarrow{\delta\mathcal{P}}) = \{(P, \delta\vec{x}_P)\}_{P \in \mathcal{B}}$$

**N.B.** L'insieme degli spostamenti possibili di  $\mathcal{B}$  dipende esclusivamente dal modello stesso e dai vincoli a cui esso è soggetto. Invece, non ha niente a che fare con le forze attive agenti su di esso.

**Definizione 5.2.2.** Si dice insieme degli spostamenti virtuali di un modello  $\mathcal{B}$ , in breve spostamento virtuale di  $\mathcal{B}$ , a partire da una configurazione di riferimento  $\mathcal{P}(\tau_0)$ , l'insieme di tutti gli spostamenti virtuali dei punti  $P \in \mathcal{B}$ . Esso sarà denotato con

$$(\mathcal{P}, \overrightarrow{\delta\mathcal{P}}) = \{(P, \delta\vec{x}_P)\}_{P \in \mathcal{B}}$$

**N.B.** Se tutti i vincoli sono indipendenti dal tempo, o come si dice in breve sono “fissi”, ogni spostamento virtuale di  $\mathcal{B}$  è anche uno spostamento possibile e viceversa. Quindi, in Statica gli spostamenti virtuali coincidono con gli spostamenti possibili.

### 5.3 Vincoli unilateri e spostamenti virtuali irreversibili

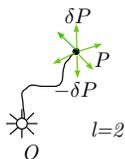
Diamo qui un cenno agli spostamenti virtuali permessi da vincoli olonomi (o di posizione) unilateri. Premettiamo la seguente

**Definizione 5.3.1.** Diremo che il campo degli spostamenti virtuali  $\overrightarrow{\delta\mathcal{P}}$  di un sistema meccanico è reversibile se anche il suo opposto,  $(-\overrightarrow{\delta\mathcal{P}})$ , è virtuale; altrimenti diremo che è irreversibile.

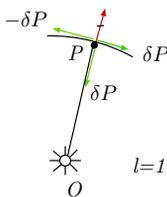
Come nell'esempio del pendolo a filo di pag. 28, un vincolo semplice unilatero è espresso matematicamente da una disequazione

$$(5.3.1) \quad f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) \leq 0$$

È intuitivo che la situazione è molto diversa nelle configurazioni ordinarie, in cui la relazione (5.3.1) è soddisfatta come disuguaglianza stretta da quelle di confine, in cui la (5.3.1) è soddisfatta come eguaglianza. Infatti, per quanto riguarda gli spostamenti virtuali, nelle configurazioni ordinarie il vincolo è come se non esistesse; quindi gli spostamenti virtuali sono tutti quelli concessi al sistema privo del vincolo, dunque sono tutti reversibili. Invece, nelle configurazioni di confine, il vincolo limita gli spostamenti virtuali concessi al sistema e ne permette alcuni che sono irreversibili (quelli che portano il sistema da una configurazione di confine ad una ordinaria) impedendo gli spostamenti opposti.



Configurazione ordinaria



Configurazione di confine

In generale, si può dimostrare che

**Proposizione 5.3.1.** *In un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi e bilateri ogni campo di spostamenti virtuali è reversibile.*

*Dimostrazione.* I punti del modello  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$  devono soddisfare le relazioni (5.3.1) come equazioni, quindi

$$(5.3.2) \quad 0 = f(\vec{x}_1 + \delta\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N + \delta\vec{x}_N, \tau) = \overbrace{f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \tau)} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta f}{\delta \vec{x}_i} \cdot \delta \vec{x}_i .$$

Allora, se lo spostamento  $(\delta\vec{x}_1, \dots, \delta\vec{x}_N)$  soddisfa la (5.3.2), quindi è virtuale, anche lo spostamento opposto  $(-\delta\vec{x}_1, \dots, -\delta\vec{x}_N)$  la soddisfa, quindi è virtuale anch'esso.  $\square$

## 5.4 Campo degli spostamenti virtuali di un rigido

Se consideriamo un moto rigido virtuale  $\vec{x}(\tau, P)$ , cioè un moto compatibile con eventuali vincoli e parametrizzato dal parametro  $\tau$ , se nella (4.5.6) moltiplichiamo ambo i membri per  $\delta\tau$ , otteniamo

$$\delta\vec{x}_P = \delta\vec{x}_O + \vec{\omega}^{(vir)} \delta\tau \times (\vec{x}_P - \vec{x}_O) \quad \forall O, P \in \mathcal{R}$$

Introducendo il vettore spostamento virtuale polare  $\vec{\epsilon} := \vec{\omega}^{(vir)} \delta\tau$ , si può scrivere

$$(5.4.1) \quad \delta\vec{x}_P = \delta\vec{x}_O + \vec{\epsilon} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_O) \quad \forall O, P \in \mathcal{R}$$

Il vettore  $\vec{\epsilon}$  è parallelo a  $\vec{\omega}^{(vir)}$  e si può esprimere, nel caso più generale, tramite gli angoli di Eulero, osservando che,

$$\dot{\varphi} \delta\tau = \delta\varphi, \quad \dot{\theta} \delta\tau = \delta\theta, \quad \dot{\psi} \delta\tau = \delta\psi .$$

Così, dalle (4.6.3), (4.6.4), (4.7.25) si ottengono le espressioni di  $\vec{\epsilon}$  sulla terna fissa, su quella solidale e su quella intermedia, rispettivamente

$$(5.4.2) \quad \begin{aligned} \vec{\epsilon} &= (\delta\theta \cos \varphi + \delta\psi \sin \varphi \sin \theta) \vec{e}_1(0) + (\delta\theta \sin \varphi - \delta\psi \sin \theta \cos \varphi) \vec{e}_2(0) + (\delta\varphi + \delta\psi \cos \theta) \vec{e}_3(0) = \\ &= (\delta\theta \cos \psi + \delta\varphi \sin \psi \sin \theta) \vec{e}_1(t) + (-\delta\theta \sin \psi + \delta\varphi \sin \theta \cos \psi) \vec{e}_2(t) + (\delta\psi + \delta\varphi \cos \theta) \vec{e}_3(t) = \\ &= \delta\varphi \vec{e}_3(0) + \delta\theta \vec{n}(t) + \delta\psi \vec{e}_3(t) . \end{aligned}$$

## 5.5 Gradi di mobilità di un modello meccanico

Introduciamo ora il nuovo concetto di gradi di *mobilità* e vediamo qual è la sua relazione con il concetto di gradi di *libertà*.

**Definizione 5.5.1.** *Diremo gradi di mobilità  $m$  il numero degli spostamenti virtuali reversibili e indipendenti concessi dai vincoli a un qualunque modello meccanico.*

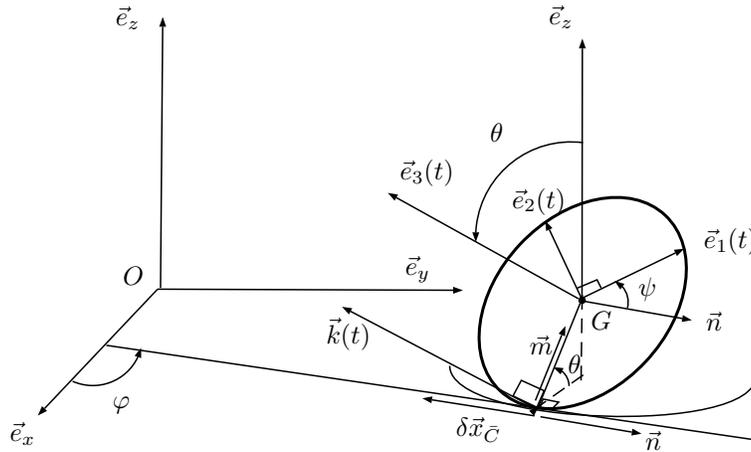
È chiaro che per un sistema meccanico libero, il numero dei gradi di mobilità coincide con quello dei gradi di libertà. Inoltre, per i sistemi vincolati con vincoli olonomi, il numero dei gradi di vincolo effettivo  $r$  coincide con il numero degli spostamenti *impediti* dai vincoli; quindi, il numero

degli spostamenti virtuali reversibili e indipendenti coincide con il numero dei gradi di libertà del sistema.

Non è così in presenza di vincoli anolonomi. Riprendiamo l'esempio del disco in puro rotolamento su un piano (vedi la Sez. 4.10). In questo caso, moltiplicando per  $\delta\tau$  le equazioni (4.10.13) e (4.10.14) segue che

$$(5.5.1) \quad \delta x_{\bar{C}} = -a \cos \varphi \delta\psi, \quad \delta y_{\bar{C}} = -a \sin \varphi \delta\psi,$$

quindi il numero degli spostamenti virtuali indipendenti è pari a 3 ed è minore di  $l = 5$ . Ciò è dovuto al fatto che il vincolo è anolonomo.



Dunque, nel caso di sistemi anolonomi, i vincoli di mobilità non integrabili riducono il numero dei gradi di mobilità del sistema senza ridurre quello dei gradi di libertà.

Infine, le configurazioni a vincoli inefficaci, come nell'esempio 3.5.2, corrispondono al fatto che il sistema ammette più spostamenti virtuali che gradi di libertà. Dunque, ricapitolando la situazione, si ha

Gradi di mobilità	Vincoli
$m < l$	anolonomi
$m = l$	olonomi
$m > l$	inefficaci

Questa osservazione suggerisce un nuovo metodo per il calcolo dei gradi di libertà di un modello olonomo: il metodo dei *congelamenti successivi*. Esso permette di contare facilmente il numero dei gradi di mobilità del modello. Tale metodo consiste nel congelare successivamente tutti i suoi spostamenti virtuali *reversibili*; il minimo numero di spostamenti virtuali congelati, necessari affinché il modello non ammetta più alcun spostamento virtuale, coincide con il numero dei gradi di libertà del modello.

## 5.6 Vincoli piani

Presentiamo alcuni esempi di vincoli unilateri e bilateri agenti su un sistema rigido piano. Poiché  $\vec{\omega}^{(vir)} = \dot{\varphi} \vec{E}_3$ , il vettore  $\vec{e}$  è pari a  $\vec{e} = \vec{\omega}^{(vir)} \delta \tau = \dot{\varphi} \delta \tau \vec{E}_3 = \delta \varphi \vec{E}_3$  ed è uno spostamento rotatorio ortogonale al piano del moto. Nella figura è rappresentato da un arco orientato nel verso della rotazione.

Cerniera bucata o anellino (bilatero)		$v = 1, l = 2$
Appoggio su un piolo (unilatero)		configurazione di confine
Cerniera scorrevole (bilatero)		$v = 1, l = 2$
Carrello con cerniera (unilatero)		configurazione di confine
Semicerniera scorrevole (unilatero)		configurazione di confine
Cerniera fissa (bilatero)		$v = 2, l = 1$
Pattino (bilatero)		$v = 2, l = 1$
Incastro		$v = 3, l = 0$

## 5.7 Vincoli nello spazio

I gradi di libertà di un rigido libero sono  $g = 6$ , il suo spazio delle configurazioni:  $\mathcal{C}_L = \{(x_A, y_A, z_A, \theta_1, \theta_2, \theta_3)\}$ . Sotto elencheremo gli spostamenti impediti e quelli virtuali residui.

- Appoggio su una superficie  
 $\theta_1 = \varphi, \theta_2 = \theta, \theta_3 = \psi$

Spostamenti impediti:

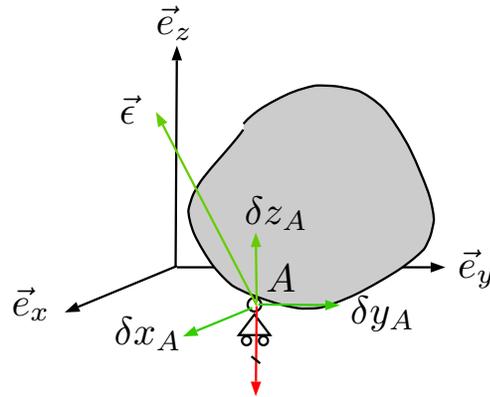
$$\delta z_A \vec{e}_z, \quad \delta z_A < 0$$

$$v = 1$$

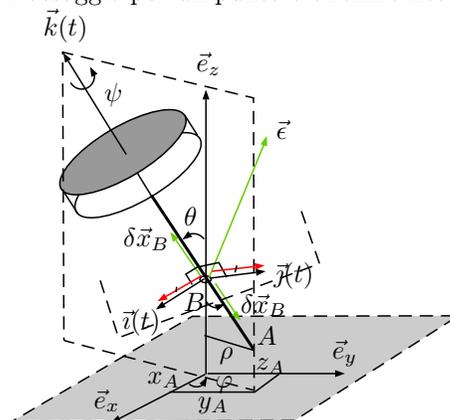
Spostamenti virtuali indipendenti:

$$(\delta x_A \vec{e}_x, \delta y_A \vec{e}_y, \vec{\epsilon} = \delta\varphi \vec{e}_z + \delta\theta \vec{n}(t) + \delta\psi \vec{e}_3(t))$$

$$l = 5$$



- Passaggio per un punto o anellino fisso o cerniera sferica bucata fissa



$$\theta_1 = \varphi, \theta_2 = \theta, \theta_3 = \psi$$

Spostamenti impediti:

$$(\delta x_B \vec{i}, \delta x_B \vec{j})$$

$$v = 2$$

Spostamenti virtuali indipendenti:

$$(\delta x_B \vec{k}, \vec{\epsilon} = \delta\varphi \vec{e}_z + \delta\theta \vec{n}(t) + \delta\psi \vec{k}(t))$$

$$l = 4$$

- Cerniera sferica scorrevole lungo un asse fisso  
 $\theta_1 = \varphi, \theta_2 = \theta, \theta_3 = \psi$

Spostamenti impediti:

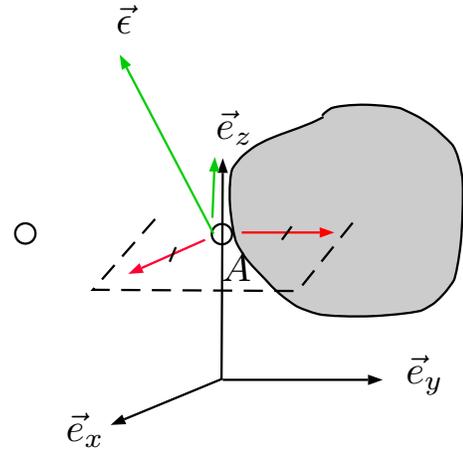
$$(\delta x_A \vec{e}_x, \delta y_A \vec{e}_y)$$

$$v = 2$$

Spostamenti virtuali indipendenti:

$$(\delta z_A \vec{e}_z, \vec{\epsilon} = \delta\varphi e_z \vec{z} + \delta\theta \vec{n}(t) + \delta\psi \vec{e}_3(t))$$

$$l = 4$$



- Cerniera sferica fissa  
 $\theta_1 = \varphi, \theta_2 = \theta, \theta_3 = \psi$

Spostamenti impediti:

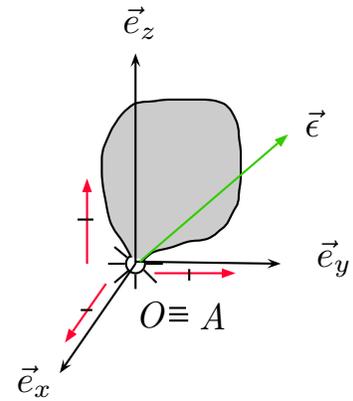
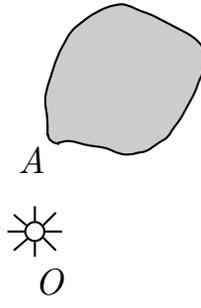
$$(\delta x_A \vec{e}_x, \delta y_A \vec{e}_y, \delta z_A \vec{e}_z)$$

$$v = 3$$

Spostamenti virtuali indipendenti:

$$\vec{\epsilon} = \delta\varphi \vec{e}_z + \delta\theta \vec{n}(t) + \delta\psi \vec{e}_3(t)$$

$$l = 3$$



- Cerniera cilindrica scorrevole lungo un asse fisso o collare cilindrico

Spostamenti impediti:

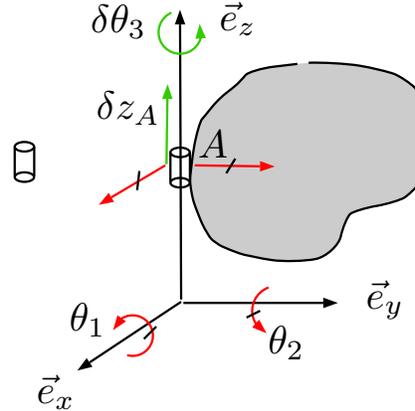
$$(\delta x_A \vec{e}_x, \delta y_A \vec{e}_y, \delta\theta_1 \vec{e}_x, \delta\theta_2 \vec{e}_y)$$

$$v = 4$$

Spostamenti virtuali indipendenti:

$$(\delta z_A \vec{e}_z, \vec{\epsilon} = \delta\theta_3 \vec{e}_z)$$

$$l = 2$$



- Cerniera cilindrica fissa

Spostamenti impediti:

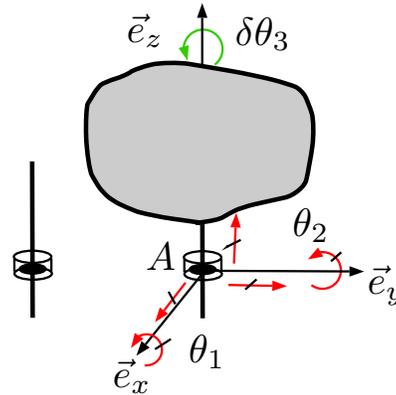
$$(\delta x_A \vec{e}_x, \delta y_A \vec{e}_y, \delta z_A \vec{e}_z, \delta \theta_1 \vec{e}_x, \delta \theta_2 \vec{e}_y)$$

$$v = 5$$

Spostamenti virtuali indipendenti:

$$\vec{\epsilon} = \delta \theta_3 \vec{e}_z$$

$$l = 1$$



- Incastro scorrevole lungo un asse fisso o pattino

Spostamenti impediti:

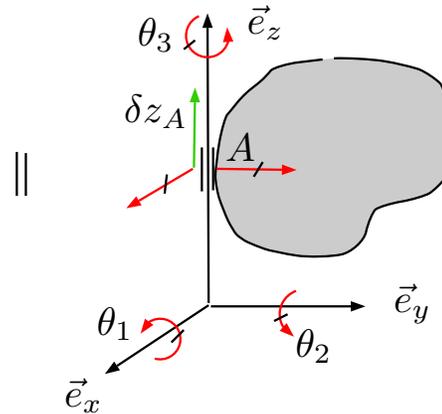
$$(\delta x_A \vec{e}_x, \delta y_A \vec{e}_y, \vec{\epsilon})$$

$$v = 5$$

Spostamenti virtuali indipendenti:

$$\delta z_A \vec{e}_z$$

$$l = 1$$



- Incastro

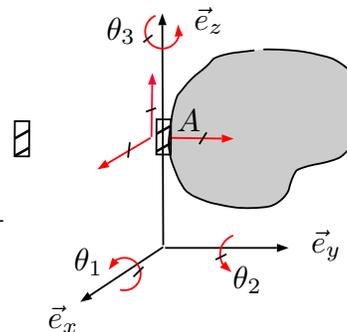
Spostamenti impediti:

$$(\delta x_A \vec{e}_x, \delta y_A \vec{e}_y, \delta z_A \vec{e}_z, \vec{\epsilon})$$

$$v = 6$$

Spostamenti virtuali indipendenti: nessuno.

$$l = 0$$



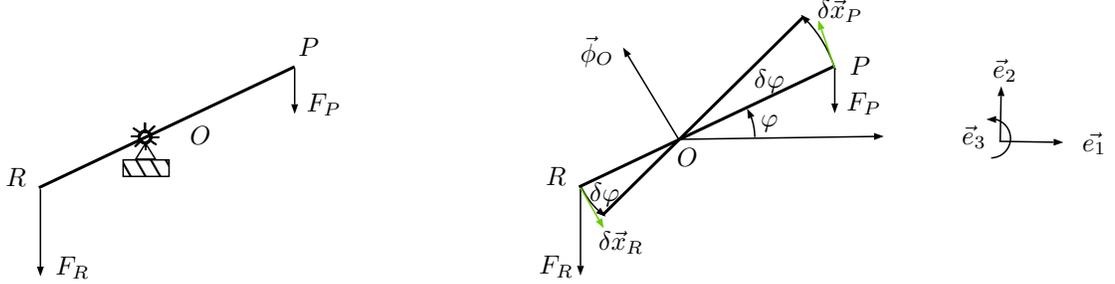
## 5.8 Lavoro virtuale

**Definizione 5.8.1.** Si dice lavoro virtuale infinitesimo (o linearizzato) di un insieme di forze agenti su un sistema materiale  $\mathcal{B}$  la grandezza scalare definita da

$$(5.8.1) \quad LV = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \delta \vec{x}_P ,$$

dove  $\{\delta \vec{x}_P\}_{P \in \mathcal{B}}$  è un insieme di spostamenti virtuali dei punti del modello  $\mathcal{B}$ .

**Esempio 5.8.1.** Leva soggetta a due forze parallele applicate agli estremi.



In questo caso il lavoro virtuale è dato da

$$(5.8.2) \quad LV = \vec{F}_P \cdot \delta \vec{x}_P + \vec{F}_R \cdot \delta \vec{x}_R + \vec{\phi}_O \cdot \delta \vec{x}_O$$

**N.B.** Nella formula precedente la reazione vincolare è incognita ma il suo lavoro virtuale è nullo poiché è nullo  $\delta \vec{x}_O$  (essendo  $O$  fisso).

Calcoliamo ora gli spostamenti virtuali  $\delta \vec{x}_P$  e  $\delta \vec{x}_R$  in funzione delle coordinate libere del sistema. La leva, con fulcro in  $O$ , ha 1 grado di libertà (nel piano). Scegliendo come coordinata libera l'angolo  $\varphi$  di figura,  $\vec{x}_P(\varphi + \delta\varphi)$  denoterà il vettore posizione del punto  $P$  in una configurazione variata. Quindi, lo spostamento virtuale del punto  $P$  (rispettivamente  $R$ ) è dato dal differenziale del vettore posizione di  $P$  (rispettivamente  $R$ ) rispetto alla coordinata libera  $\varphi$  poiché

$$\Delta \vec{x}_P = \vec{x}_P(\varphi + \delta\varphi) - \vec{x}_P(\varphi) = \frac{\delta \vec{x}_P}{\delta\varphi} \delta\varphi + \vec{o}(\delta\varphi) ,$$

dove  $\vec{o}(\delta\varphi)$  indica i termini dello sviluppo in serie di Taylor, di grado superiore al primo in  $\delta\varphi$ . Allora,

$$\begin{aligned} \vec{x}_P &= d_P (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) , & \delta \vec{x}_P &= d_P (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) \delta\varphi \\ \vec{x}_R &= -d_R (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) , & \delta \vec{x}_R &= -d_R (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) \delta\varphi \end{aligned}$$

**N.B.** In questo caso il vincolo  $\begin{cases} x_O = 0 \\ y_O = 0 \end{cases}$  è indipendente dal tempo e quindi il differenziale virtuale coincide con il differenziale usuale.

Ora possiamo calcolare il lavoro virtuale. Tenuto conto che  $\vec{F}_P = -F_P \vec{e}_2$ ,  $\vec{F}_R = -F_R \vec{e}_2$ , si ottiene

$$(5.8.3) \quad \begin{aligned} LV &= -F_P \vec{e}_2 \cdot d_P (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) \delta\varphi - F_R \vec{e}_2 \cdot d_R (\sin \varphi \vec{e}_1 - \cos \varphi \vec{e}_2) \delta\varphi \\ &= -F_P d_P \cos \varphi \delta\varphi + F_R d_R \cos \varphi \delta\varphi \\ &= \cos \varphi (F_R d_R - F_P d_P) \delta\varphi \end{aligned}$$

**Esercizio 5.8.1.** Calcolare gli spostamenti virtuali di  $P$  ed  $R$  tramite la (5.4.1).

### 5.8.1 Lavoro virtuale su un rigido

Un'altra conseguenza del teorema di Poisson è che il lavoro virtuale della sollecitazione agente su un rigido assume una particolare forma

**Proposizione 5.8.1.** *Il lavoro virtuale delle forze agenti su un rigido assume la forma*

$$(5.8.4) \quad LV = \vec{R} \cdot \delta \vec{x}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\epsilon} \quad \forall O \in \mathcal{R},$$

dove  $\vec{R}$  è il vettore risultante di tali forze e  $\vec{M}_O$  il momento risultante rispetto al polo  $O$ .

*Dimostrazione.* Sostituendo nella formula generale l'espressione (5.4.1) si trova

$$\begin{aligned} LV &= \sum_{P \in \mathcal{R}} \vec{F}_P \cdot (\delta \vec{x}_O + \vec{\epsilon} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_O)) \\ &= \sum_{P \in \mathcal{R}} \vec{F}_P \cdot \delta \vec{x}_O + \sum_{P \in \mathcal{R}} \vec{F}_P \cdot \vec{\epsilon} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_O) \\ &= \left( \sum_{P \in \mathcal{R}} \vec{F}_P \right) \cdot \delta \vec{x}_O + \sum_{P \in \mathcal{R}} \vec{\epsilon} \cdot (\vec{x}_P - \vec{x}_O) \times \vec{F}_P \\ &= \vec{R} \cdot \delta \vec{x}_O + \vec{\epsilon} \cdot \sum_{P \in \mathcal{R}} (\vec{x}_P - \vec{x}_O) \times \vec{F}_P \end{aligned}$$

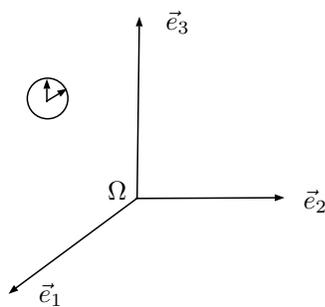
e quindi la tesi. □

**Esercizio 5.8.2.** *Ritrovare la (5.8.3) mediante la (5.8.4).*

## 5.9 Equilibrio dei sistemi materiali

È un concetto relativo a un osservatore o riferimento spazio-temporale:

$(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) + \text{orologio}$



**Definizione 5.9.1.** *Un sistema materiale è in equilibrio  $\forall t \in I = [t_1, t_2]$  se conserva la stessa configurazione (i.e. se tutte le sue parti conservano la stessa posizione rispetto all'osservatore)*

**Esempio 5.9.1.** *Punto materiale libero  $(P, m)$*

1. Condizione necessaria all'equilibrio è:

$$\vec{F}_P = \vec{0} \quad \forall t \in I,$$

(principio d'inerzia di G. Galilei (1564-1642)).

2. Condizione sufficiente a garantire l'equilibrio è:

$$\vec{F}_P = \vec{0} \quad \forall t \in I \quad \text{et} \quad \vec{v}_P(t_1) = \vec{0}.$$

**N.B.** La 1 e la 2 valgono anche in un riferimento non inerziale, a patto di considerare tutte le forze misurate, anche quelle d'inerzia (centrifuga, Coriolis, etc.).

**Esempio 5.9.2.** Punto materiale vincolato ( $P, m$ )

1. Condizione necessaria all'equilibrio è:

$$\vec{F}_P + \vec{\phi}_P = \vec{0} \quad \forall t \in I,$$

2. Condizione sufficiente a garantire l'equilibrio è:

$$\vec{F}_P + \vec{\phi}_P = \vec{0} \quad \forall t \in I \quad \text{et} \quad \vec{v}_P(t_1) = \vec{0},$$

dove con  $\vec{\phi}_P$  abbiamo indicato il risultante delle reazioni vincolari sul punto  $P$ .

## 5.10 Principio dei lavori virtuali

Introduciamo la seguente classificazione delle *sollecitazioni* agenti su un qualunque modello meccanico:

**attive:** non sono dovute a vincoli;

**reattive:** l'insieme di forze che, sostituite ai vincoli, ne realizzano gli stessi effetti meccanici (*Postulato delle Reazioni Vincolari*).

Nel seguito indicheremo con:

$$LV^{(att)} = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P^{(att)} \cdot \delta \vec{x}_P \quad \text{il lavoro virtuale delle forze attive } \vec{F}_P,$$

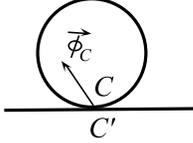
$$LV^{(reatt)} = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{\phi}_P^{(reatt)} \cdot \delta \vec{x}_P \quad \text{il lavoro virtuale delle reazioni vincolari } \vec{\phi}_P.$$

Introduciamo, ora, un'ulteriore classificazione dei vincoli, che formalizza il concetto di vincoli "lisci".

**Definizione 5.10.1.** Chiameremo *vincoli non dissipativi (o perfetti, o ideali)* quei vincoli le cui reazioni vincolari compiono un lavoro virtuale non negativo (o non resistente), cioè

$$(5.10.1) \quad LV^{(reatt)} = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{\phi}_P^{(reatt)} \cdot \delta \vec{x}_P \geq 0 \quad \forall \delta \mathcal{P}$$

Si osservi che tale classe include (strettamente) i vincoli privi di attrito, ma comprende anche i vincoli scabri che non dissipano energia, come ad esempio il vincolo di puro rotolamento tra 2 curve, tra 2 superfici o di una curva sopra una superficie. Per realizzare tale vincolo le curve o le superfici devono essere scabre (come sa chiunque abbia guidato un veicolo sull'asfalto bagnato o ghiacciato). Tuttavia, la (5.10.1) è ugualmente soddisfatta poiché (come abbiamo già accennato a pag. 27) il vincolo di puro rotolamento richiede  $\vec{v}_C = \vec{v}_{C'}$ , quindi,  $\partial x_{\vec{C}} = \partial x_{\vec{C}'}$ , ma, persino se il vincolo è mobile, vale



$$\delta x_{\vec{C}} = \delta x_{\vec{C}'} = \vec{0} \Rightarrow LV^{(reatt)} = \vec{\phi}_C^{(reatt)} \cdot \delta \vec{x}_C = 0$$

**N.B.** Il vincolo di puro rotolamento è non dissipativo se si fa l'ipotesi che le sollecitazioni reattive siano equivalenti a una sola forza  $\vec{\phi}_C$  applicata nel punto  $C$ . Invece, se si ammette che il vincolo eserciti anche una coppia d'attrito  $\vec{\Gamma}$ , detto attrito di rotolamento, il vincolo cessa di essere non dissipativo poiché, sulla base della (5.8.4), il lavoro virtuale delle sollecitazioni reattive diventa

$$LV^{(reatt)} = \vec{\phi}_C^{(reatt)} \cdot \delta \vec{x}_C + \vec{\Gamma} \cdot \vec{\epsilon} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\epsilon},$$

che può risultare negativo.

Enunciamo, ora, il principio dei lavori virtuali nella sua forma più generale, valida anche per i sistemi meccanici soggetti a vincoli anolonomi.

### PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione  $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_V$  sia di equilibrio per un sistema meccanico soggetto a vincoli fissi e *non dissipativi* è che il lavoro delle forze attive, per ogni insieme di spostamenti virtuali a partire da  $\mathcal{P}$ , sia NON positivo, cioè

$$(5.10.2) \quad LV^{(att)} = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P^{(att)} \cdot \delta \vec{x}_P \leq 0 \quad \forall \delta \mathcal{P},$$

dove  $\delta \mathcal{P} = \{\delta \vec{x}_P\}_{P \in \mathcal{B}}$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo la necessità. Se  $\mathcal{B}$  è in equilibrio nella configurazione  $\mathcal{P}$ , lo è ogni suo punto  $P$ , quindi

$$(5.10.3) \quad \vec{F}_P^{(att)} + \vec{\phi}_P^{(reatt)} = \vec{0} \quad \forall P \in \mathcal{B}$$

Valutiamo il segno del  $LV^{(att)}$

$$LV^{(att)} = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P^{(att)} \cdot \delta \vec{x}_P \stackrel{(5.10.3)}{=} \sum_{P \in \mathcal{B}} \left( -\vec{\phi}_P^{(reatt)} \right) \cdot \delta \vec{x}_P = -LV^{(reatt)} \stackrel{(5.10.1)}{\leq} 0 \quad \forall \delta \vec{x}_P$$

Non dimostriamo la sufficienza del PLV ma l'accettiamo come principio a priori confermato dall'evidenza di secoli di risultati sperimentali.  $\square$

**N.B.** Supponiamo che valga la relazione (5.10.2). Allora, se il lavoro virtuale è calcolato in corrispondenza di un insieme di spostamenti virtuali  $\delta\mathcal{P}$  reversibile, le disuguaglianze (5.10.1) e (5.10.2) si riducono ad eguaglianze. Infatti, scelto un insieme  $\delta\mathcal{P} = \{(P, \delta\vec{x}_P)\}_{P \in \mathcal{B}}$  di spostamenti virtuali tutti reversibili, devono valere contemporaneamente

$$(5.10.4) \quad \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_P \leq 0 ,$$

$$(5.10.5) \quad \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot (-\delta\vec{x}_P) \leq 0 .$$

Ma se la (5.10.4) e la (5.10.5) sono entrambe verificate, l'unica possibilità è che esse siano verificate come uguaglianze. Quindi, la (5.10.2), valutata sugli insiemi di spostamenti virtuali reversibili si riduce

$$(5.10.6) \quad \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_P = 0 \quad \forall \delta\mathcal{P} \text{ reversibile.}$$

Analogo discorso si può fare per la (5.10.1). Pertanto, la classe dei vincoli non dissipativi e bilateri è definita da

$$(5.10.7) \quad LV^{(reatt)} = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{\phi}_P^{(reatt)} \cdot \delta\vec{x}_P = 0 \quad \forall \delta\mathcal{P} \text{ reversibile.}$$

**Esempio 5.10.1.** *La leva.*

Il lavoro virtuale delle forze attive agenti sulla leva è stato calcolato nella (5.8.3). Dunque, essendo i vincoli bilateri, il PLV equivale all'equazione

$$\cos \varphi (F_R d_R - F_P d_P) \delta\varphi = 0 \quad \forall \delta\varphi$$

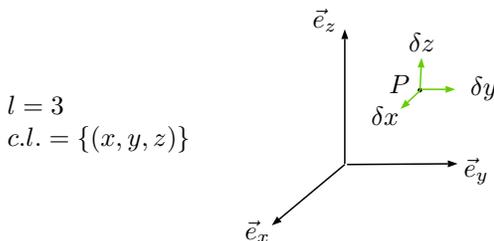
Le soluzioni di tale equazione forniscono tutte e sole le configurazioni di equilibrio della leva. Quindi:

1.  $\cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$
2.  $\frac{F_R}{F_P} = \frac{d_P}{d_R} \quad \forall \varphi$  (legge della leva)

In conclusione, la leva è in equilibrio se e solo se:

1. essa è parallela alla potenza e alla resistenza qualunque esse siano;
2. in qualunque configurazione, a condizione che la potenza  $F_P$  e la resistenza  $F_R$  siano inversamente proporzionali ai rispettivi bracci.

**Esempio 5.10.2.** *Punto materiale libero in  $\mathcal{E}_3$*



$$\begin{aligned} \vec{x}_P &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \\ \delta\vec{x}_P &= \delta x\vec{e}_x + \delta y\vec{e}_y + \delta z\vec{e}_z \\ \vec{F}_P &= F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z \end{aligned}$$

Poichè il punto materiale  $P$  non è soggetto ad alcun vincolo, i suoi spostamenti virtuali sono

completamente arbitrari. Quindi, il lavoro virtuale è dato da

$$\begin{aligned} LV &= \vec{F}_P \cdot \delta \vec{x}_P = (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z) \cdot (\delta x \vec{e}_x + \delta y \vec{e}_y + \delta z \vec{e}_z) \\ &= F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \end{aligned}$$

Dal PLV segue che la condizione necessaria e sufficiente all'equilibrio è

$$(5.10.8) \quad F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = 0 \quad \forall \delta x, \delta y, \delta z .$$

Osserviamo che, dovendo valere la (5.10.8)  $\forall \delta x, \delta y, \delta z$ , ed essendo queste variazioni del tutto arbitrarie, deve valere, per esempio, per  $\delta x = \varepsilon \neq 0$  e  $\delta y = \delta z = 0$ . In tal caso la (5.10.8) implica che

$$F_x = 0 .$$

Analogamente, scegliendo  $\delta x = \delta z = 0$  e  $\delta y = \varepsilon \neq 0$ , deve essere

$$F_y = 0$$

e scegliendo  $\delta x = \delta y = 0$ ,  $\delta z = \varepsilon \neq 0$ ,

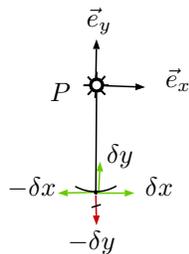
$$F_z = 0 .$$

Quindi, il PLV per un punto libero *equivale* all'equazione della statica del punto:

$$\vec{F}_P = \vec{0} .$$

Illustriamo, ora, nell'esempio seguente la necessità del segno di disuguaglianza nella (5.10.2)

**Esempio 5.10.3.** *Pendolo a filo inestensibile.*



Il PLV è una condizione necessaria all'equilibrio. Quindi, nella configurazione della figura, che è di equilibrio, deve risultare

$$LV \leq 0 \quad \forall \delta P$$

Consideriamo i casi seguenti.

1.  $\delta \vec{x}_P = \delta x \vec{e}_x$ , reversibile

$$LV = -F \vec{e}_y \cdot \delta x \vec{e}_x = 0 \quad \text{OK}$$

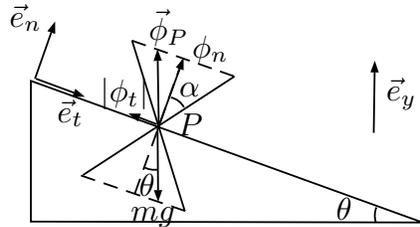
2.  $\delta \vec{x}_P = \delta y \vec{e}_y$ ,  $\delta y > 0$ , irreversibile

$$LV = -F \vec{e}_y \cdot \delta y \vec{e}_y = -F \delta y < 0 \quad \text{OK}$$

Nel primo caso il lavoro virtuale è nullo perché lo spostamento virtuale è reversibile. Nel secondo caso è negativo perché lo spostamento virtuale è irreversibile; infatti il filo è un vincolo unilatero e lo spostamento  $\delta \vec{x}_P = \delta y \vec{e}_y$  porta il punto  $P$  da una configurazione di confine a una configurazione ordinaria.

Spiegheremo, ora, la necessità dell'ipotesi dei vincoli non dissipativi nell'enunciato del PLV. Consideriamo il seguente esempio.

**Esempio 5.10.4.** *Punto materiale su una guida inclinata scabra di attrito  $f_s$ .*



$$\vec{e}_n \cdot \vec{e}_y = \cos \theta$$

In condizioni di equilibrio limite

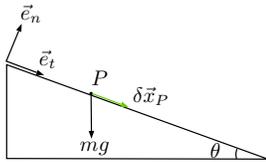
$$\frac{|\phi_t|}{|\phi_n|} = \tan \alpha$$

Supponiamo che il punto  $P$  sia in equilibrio sulla guida. Allora la reazione vincolare  $\vec{\phi}$  deve equilibrare la forza peso. Poiché dalla relazione di Coulomb  $\frac{|\phi_t|}{|\phi_n|} \leq f_s$  segue che la reazione  $\vec{\phi} = \phi_t \vec{e}_t + \phi_n \vec{e}_n$  è contenuta nel triangolo d'attrito di semi-ampiezza  $\alpha = \arctan f_s$ , l'angolo  $\theta$  d'inclinazione della guida deve soddisfare la relazione

$$\theta \leq \alpha = \arctan f_s$$

Calcoliamo il LV della forza attiva (il peso) in corrispondenza di uno spostamento virtuale tangente alla guida e dato da

$$\delta \vec{x}_P = \delta s \vec{e}_t \quad \delta s > 0 .$$



Allora risulta

$$\begin{aligned} LV^{(att)} &= \vec{F}_P \cdot \delta \vec{x}_P = mg (\sin \theta \vec{e}_t - \cos \theta \vec{e}_n) \cdot \delta s \vec{e}_t \\ &= mg \sin \theta \delta s > 0 \end{aligned}$$

Dunque, il PLV non è soddisfatto nonostante che il punto  $P$  sia in equilibrio: il motivo è che l'ipotesi di vincoli non dissipativi è stata violata.

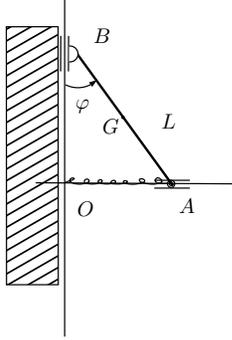
Vediamo, ora, un'applicazione del PLV al calcolo dell'equilibrio di un rigido soggetto sia a un vincolo unilatero sia a un vincolo bilatero.

**Esempio 5.10.5.** *Asta pesante omogenea nel piano verticale con due appoggi lisci.*

Vincoli lisci: in  $B$  una *semicerniera* scorrevole (unilatero) e in  $A$  una *cerniera* scorrevole (bilatero). Scelte come coordinate sovrabbondanti  $\{(x_B, y_A, \varphi)\}$ , le equazioni vincolari si possono scrivere

$$\begin{cases} x_B = 0 \\ y_A = 0 \end{cases}$$

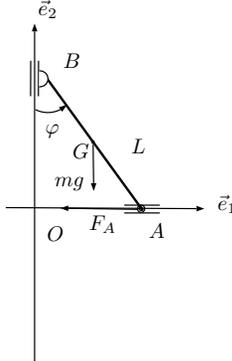
Il modello ha 1 grado di libertà; possiamo scegliere come coordinata libera l'angolo  $\varphi$  di figura,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Anche  $y_B$  sarebbe andata bene, ma non  $x_A$  che non soddisfa il criterio di biunivocità con le configurazioni del modello.



configurazioni ordinarie:  
 $g = 3, v = r = 2 \Rightarrow l = 1$

$$c.l. = \varphi \quad 0 < \varphi < \pi \quad \delta\varphi \text{ arbitrario}$$

configurazioni di confine:  
 $\varphi = 0 \Rightarrow \delta\varphi \geq 0$  irreversibile  
 $\varphi = \pi \Rightarrow \delta\varphi \leq 0$  irreversibile



$$\begin{aligned} \vec{F}_A &= -c\vec{x}_A = -cL \sin \varphi \vec{e}_1 \\ \vec{F}_G &= -mg \vec{e}_2 \end{aligned}$$

Diagramma delle forze attive

$$\begin{aligned} LV^{(att)} &= \vec{F}_G \cdot \delta\vec{x}_G + \vec{F}_A \cdot \delta\vec{x}_A \\ \vec{x}_A &= L \sin \varphi \vec{e}_1, & \delta\vec{x}_A &= L \cos \varphi \delta\varphi \vec{e}_1 \\ \vec{x}_G &= \frac{L}{2} (\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2), & \delta\vec{x}_G &= \frac{L}{2} (\cos \varphi \delta\varphi \vec{e}_1 - \sin \varphi \delta\varphi \vec{e}_2) \end{aligned}$$

Dunque,

$$(5.10.9) \quad LV^{(att)} = -mg \vec{e}_2 \cdot \frac{L}{2} (\cos \varphi \delta\varphi \vec{e}_1 - \sin \varphi \delta\varphi \vec{e}_2) - cL \sin \varphi \vec{e}_1 \cdot L \cos \varphi \delta\varphi \vec{e}_1$$

$$(5.10.10) \quad = mg \frac{L}{2} \sin \varphi \delta\varphi - cL^2 \sin \varphi \cos \varphi \delta\varphi$$

Quindi, dal PLV segue che le condizioni di equilibrio dell'asta sono date da:

- se  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \pi$ ,  $\sin \varphi (mg \frac{L}{2} - cL^2 \cos \varphi) \delta\varphi \leq 0 \quad \begin{cases} \forall \delta\varphi \geq 0 & \text{se } \varphi = 0 \\ \forall \delta\varphi \leq 0 & \text{se } \varphi = \pi \end{cases}$
- se  $0 < \varphi < \pi$ ,  $\sin \varphi (mg \frac{L}{2} - cL^2 \cos \varphi) \delta\varphi = 0 \quad \forall \delta\varphi$

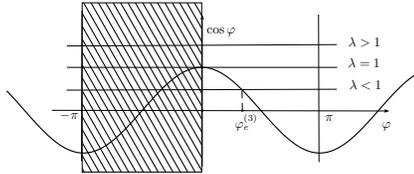
Si noti che la prima disequazione è soddisfatta come equazione: ciò implica che  $\varphi_e^{(1)} = 0$  e  $\varphi_e^{(2)} = \pi$  sarebbero di equilibrio anche con vincoli bilateri. Nella seconda equazione, scegliendo  $\delta\varphi \neq 0$ , possiamo dividere per  $\delta\varphi$  e ottenere

$$L \left( \frac{mg}{2} - cL \cos \varphi \right) = 0$$

Tale equazione equivale a

$$\cos \varphi = \frac{mg}{2cL}$$

Risolviamola per via grafica nell'intervallo  $0 < \varphi < \pi$



$$\lambda = \frac{mg}{2cL}$$

Dunque, nell'intervallo  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , le configurazioni di equilibrio sono  $\varphi_e^{(1)} = 0$ ,  $\varphi_e^{(2)} = \pi$  e, se  $\lambda = \frac{mg}{2cL} < 1$ , anche

$$\varphi_e^{(3)} = \arccos \frac{mg}{2cL}$$

#### Variazione sull'esempio 5.10.5

Supponiamo ora che il vincolo in A sia unilatero (semicerniera scorrevole) in modo che la coordinata libera vari come

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

In questo caso il PLV equivale a

- se  $\varphi = 0$  (conf. confine)  $\sin \varphi \left( mg \frac{L}{2} - cL^2 \cos \varphi \right) \delta\varphi \leq 0 \quad \forall \delta\varphi \geq 0$
- se  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (conf. confine)  $\sin \varphi \left( mg \frac{L}{2} - cL^2 \cos \varphi \right) \delta\varphi \leq 0 \quad \forall \delta\varphi \leq 0$
- se  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$  (conf. ordinarie)  $\sin \varphi \left( mg \frac{L}{2} - cL^2 \cos \varphi \right) \delta\varphi = 0 \quad \forall \delta\varphi$

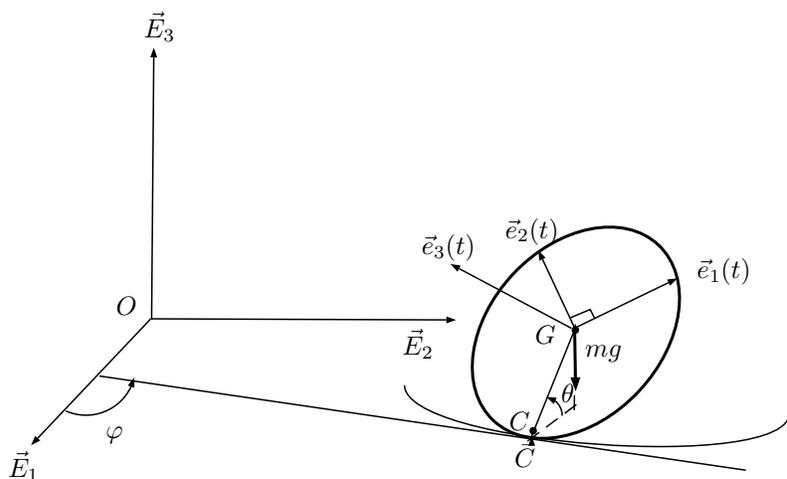
La prima e la terza relazione hanno come soluzioni, rispettivamente,  $\varphi_e^{(1)}$  e  $\varphi_e^{(3)}$  del caso precedente. La seconda equazione diventa

$$(5.10.11) \quad \text{se } \varphi = \frac{\pi}{2} \quad mg \frac{L}{2} \delta\varphi \leq 0 \quad \forall \delta\varphi \leq 0,$$

ed è sempre soddisfatta essendo  $\delta\varphi \leq 0$ . Ciò implica che  $\varphi_e^{(2)} = \frac{\pi}{2}$  è una configurazione di equilibrio.

**N.B.** Si noti che, a differenza della configurazione di equilibrio  $\varphi_e^{(1)} = 0$  esistente anche quando il vincolo in A è bilatero, la configurazione  $\varphi_e^{(2)} = \frac{\pi}{2}$  è di equilibrio solo quando il vincolo in A diventa unilatero. Ciò è conseguenza del fatto che (5.10.11) è verificata come diseuguaglianza e non come eguaglianza.

**Esempio 5.10.6.** Disco pesante in puro rotolamento su un piano orizzontale.



Nelle configurazioni di confine in cui il disco è appoggiato nel solo punto  $\bar{C}$  le coordinate libere sono  $(x_{\bar{C}}, y_{\bar{C}}, \varphi, \theta, \psi)$ , con  $(x_{\bar{C}}, y_{\bar{C}}) \in \mathbb{R}^2$ ,  $0 < \theta < \pi$  e  $0 \leq \psi < 2\pi$ .

Il lavoro virtuale delle forze attive è

$$LV^{(att)} = \vec{F}_G \cdot \delta \vec{x}_G = m\vec{g} \cdot \delta \vec{x}_G = -mg\vec{E}_3 \cdot (\delta x_G \vec{E}_1 + \delta y_G \vec{E}_2 + \delta z_G \vec{E}_3) = -mg \delta z_G$$

Dato che

$$z_G = a \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \delta z_G = a \cos \theta \delta \theta ,$$

risulta

$$LV^{(att)} = -mga \cos \theta \delta \theta$$

Per il PLV le configurazioni di equilibrio sono tutte e sole quelle in cui vale l'equazione (5.10.6), cioè

$$-mga \cos \theta \delta \theta = 0 \quad \forall \delta \theta$$

Dunque, le configurazioni di equilibrio sono

$$\mathbf{q}_e = (x_{\bar{C}}, y_{\bar{C}}, \varphi, \theta = \frac{\pi}{2}, \psi) ,$$

cioè tutte quelle in cui il piano del disco è verticale.

## 5.11 PLV per un sistema olonomo

Vogliamo dimostrare che, per un modello soggetto a soli vincoli fissi, non dissipativi, olonomi e bilateri, il PLV equivale a tante equazioni pure (non contenenti le reazioni vincolari) di equilibrio quanti sono i gradi di libertà del sistema. La dimostrazione si basa sul fatto che, nel caso di  $r$  vincoli olonomi e fissi, possiamo introdurre  $l = (g - r)$  coordinate generalizzate (o libere o lagrangiane)  $(q_1, \dots, q_l)$  tramite il sistema (3.3.8). Allora, i vettori posizione di ogni punto del sistema materiale e i relativi spostamenti virtuali si possono scrivere nella forma:

$$(5.11.1) \quad \vec{x}_P = \vec{x}_P(q_1, \dots, q_l) \Rightarrow \delta \vec{x}_P = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial q_i} \delta q_i .$$

Dunque, il lavoro virtuale di qualunque tipo di forze (sia attive che reattive) si può scrivere

$$\begin{aligned} LV &= \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \delta \vec{x}_P = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \left( \sum_{i=1}^l \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial q_i} \delta q_i \right) \\ &= \sum_{P \in \mathcal{B}} \sum_{i=1}^l \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^l \delta q_i \left( \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial q_i} \right) \end{aligned}$$

Si noti che nell'ultimo passaggio sono state scambiate le due sommatorie. Ora, definendo le grandezze scalari

$$(5.11.2) \quad Q_i := \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial q_i} ,$$

dette *forze generalizzate* o *componenti lagrangiane* della sollecitazione, otteniamo l'espressione del lavoro virtuale in termini delle coordinate lagrangiane e delle loro variazioni (o differenziali)

$$(5.11.3) \quad LV = \sum_{i=1}^l Q_i \delta q_i .$$

Se non ci sono altri vincoli, le variazioni  $\delta q_i$  sono del tutto arbitrarie. Questa è la differenza sostanziale tra la (5.11.3) e la (5.8.1). Infatti, a differenza delle  $\delta q_i$ , le variazioni  $\delta \vec{x}_P$  sono *virtuali*, quindi devono essere compatibili con i vincoli.

Invece, se sono presenti altri vincoli, le variazioni  $\delta q_i$  non sono più arbitrarie. Tuttavia, se i vincoli addizionali sono olonomi, si può ripetere il procedimento del sistema (3.3.8) riducendo ulteriormente il numero delle coordinate generalizzate. Invece, se ci sono vincoli anolonomi, tale procedura non si può effettuare poiché tali vincoli non sono integrabili. In conseguenza, le variazioni  $(\delta q_1, \dots, \delta q_l)$  non saranno arbitrarie (vedi, ad esempio, le Eq. (5.5.1)).

La (5.11.3) comporta che, nel caso di vincoli fissi e non dissipativi, *olonomi* e *bilateri*, il PLV si può scrivere

$$(5.11.4) \quad \sum_{i=1}^l Q_i^{(att)} \delta q_i = 0 \quad \forall (\delta q_1, \dots, \delta q_l) .$$

Data l'arbitrarietà delle  $\delta q_i$ , tale equazione equivale al sistema di  $l$  equazioni

$$(5.11.5) \quad Q_i^{(att)}(q_1, \dots, q_l) = 0 \quad i = 1, \dots, l ,$$

dette *equazioni pure d'equilibrio*. Infatti, scegliendo  $\delta q_i \neq 0$  e  $0 = \delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_{i-1} = \delta q_{i+1} = \dots = \delta q_l$ ,  $i = 1, \dots, l$ , si ricavano le (5.11.5). Dal punto di vista analitico, risolvere tale sistema equivale a trovare gli zeri comuni alle funzioni  $Q_1, \dots, Q_l$ .

Introducendo il concetto di campo delle forze lagrangiane, definito dal "vettor" a  $l$  componenti

$$(5.11.6) \quad \mathbf{Q} = [Q_1, \dots, Q_l]^T ,$$

nelle suddette ipotesi il PLV si può esprimere dicendo che:

**PLV per i sistemi olonomi:** per un sistema olonomo a vincoli fissi, non dissipativi e bilateri, le configurazioni di equilibrio sono tutte e sole quelle in cui si annulla il campo delle forze lagrangiane.

Si noti che tale formulazione è analoga a quella della statica di un punto materiale, con la differenza che in quel caso, ad annullarsi, è il risultante delle forze ordinarie (fisiche) nello spazio affine euclideo  $\mathcal{E}_3$ .

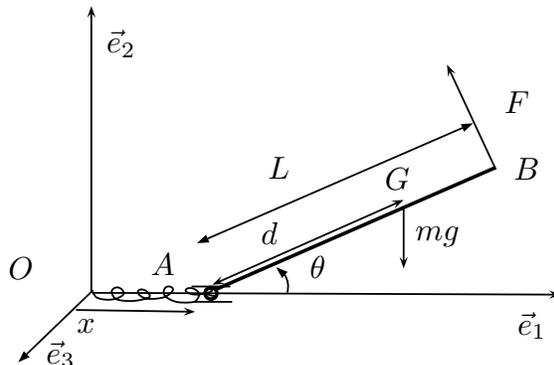
Per il calcolo del campo delle forze lagrangiane (5.11.6) possiamo usare due metodi. Il primo consiste nell'applicare la definizione

$$Q_i := \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial q_i} ;$$

il secondo consiste nel calcolare il lavoro virtuale e poi identificare le  $Q_i$  come i coefficienti della 1-forma differenziale

$$LV = \sum_{i=1}^l Q_i \delta q_i .$$

Come applicazione della formulazione suddetta, scriviamo le equazioni pure di equilibrio per il sistema seguente.



**Esempio 5.11.1.**

Consideriamo l'asta della figura, vincolata con una cerniera cilindrica scorrevole lungo l'asse  $(O; \vec{e}_1)$ , a stare nel piano verticale  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Supponiamo che i vincoli siano lisci e bilateri. Trovare tutte le (eventuali) configurazioni di equilibrio.

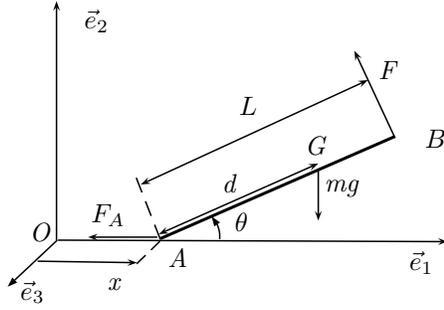
1. Analisi cinematica: gradi di libertà e coordinate libere.

L'equazione di vincolo è  $y_A = 0$ , indipendente dal tempo (vincolo fisso). Quindi il vincolo è semplice, ( $v = r = 1$ ). Pertanto,

$$l = g - v = 3 - 1 = 2$$

coordinate libere:  $(x = x_A, \theta)$      $x \in \mathbb{R}, -\pi < \theta \leq \pi, \quad \mathcal{C}_V = \mathbb{R} \times S^1$

2. Analisi delle forze attive:



molla	$\vec{F}_A = -c(A - O) = -cx\vec{e}_1$
follower	$\vec{F}_B = \frac{F}{L}\vec{e}_3 \times (B - A) = F(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2)$
peso	$m\vec{g} = -mg\vec{e}_2$

Calcoliamo le 2 componenti lagrangiane della sollecitazione attiva applicando il primo metodo.

$$(5.11.7) \quad Q_x = \vec{F}_A \cdot \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial x} + \vec{F}_G \cdot \frac{\partial \vec{x}_G}{\partial x} + \vec{F}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial x}$$

$$(5.11.8) \quad Q_\theta = \vec{F}_A \cdot \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \theta} + \vec{F}_G \cdot \frac{\partial \vec{x}_G}{\partial \theta} + \vec{F}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial \theta}$$

Le forze attive sono date da  $\vec{F}_A = -cx\vec{e}_1$ ,  $\vec{F}_G = -mg\vec{e}_2$ ,  $\vec{F}_B = F(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2)$ . I vettori posizione dei punti di applicazione delle forze attive e i loro derivati sono

$$\begin{aligned} \vec{x}_A &= x\vec{e}_1 ; & \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial x} &= \vec{e}_1, & \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \theta} &= \vec{0} \\ \vec{x}_G &= \vec{x}_A + (\vec{x}_G - \vec{x}_A) = x\vec{e}_1 + d(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2) ; & \frac{\partial \vec{x}_G}{\partial x} &= \vec{e}_1, & \frac{\partial \vec{x}_G}{\partial \theta} &= d(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2) \\ \vec{x}_B &= \vec{x}_A + (\vec{x}_B - \vec{x}_A) = x\vec{e}_1 + L(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2) ; & \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial x} &= \vec{e}_1, & \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial \theta} &= L(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2) \end{aligned}$$

Quindi, le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva sono

$$(5.11.9)$$

$$Q_x = (-cx\vec{e}_1 - mg\vec{e}_2 + F(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2)) \cdot \vec{e}_1 = -cx - F\sin\theta$$

$$\begin{aligned} Q_\theta &= -cx\vec{e}_1 \cdot \vec{0} - mg\vec{e}_2 \cdot d(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2) + F(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2) \cdot L(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2) \\ &= -mgd\cos\theta + FL \end{aligned}$$

Applichiamo il secondo metodo e calcoliamo il LV delle forze attive

$$LV = \vec{R}^{(att)} \cdot \delta \vec{x}_A + \vec{M}_A^{(att)} \cdot \vec{\epsilon}$$

Gli spostamenti virtuali dei punti di applicazione delle forze sono

$$\begin{aligned} \vec{R}^{(att)} &= \vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_B = -cx\vec{e}_1 - mg\vec{e}_2 + F(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2) \\ \vec{M}_A^{(att)} &= (\vec{x}_G - \vec{x}_A) \times m\vec{g} + (\vec{x}_B - \vec{x}_A) \times \vec{F}_B = (-mgd\cos\theta + FL)\vec{e}_3 \\ \delta \vec{x}_A &= \delta x \vec{e}_1 \\ \vec{\epsilon} &= \delta\theta \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} LV &= (-cx\vec{e}_1 - mg\vec{e}_2 + F(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2)) \cdot \delta x \vec{e}_1 \\ &+ (-mgd\cos\theta + FL)\vec{e}_3 \cdot \delta\theta \vec{e}_3 = \\ &= (-cx - F\sin\theta)\delta x + (-mgd\cos\theta + FL)\delta\theta \end{aligned}$$

Quindi, i coefficienti delle variazioni delle coordinate libere coincidono con le (5.11.9). Vediamo qual è, in questo esempio, il significato fisico delle forze generalizzate. Osserviamo, a posteriori, che

$$\begin{aligned} Q_x &= \vec{R}^{(att)} \cdot \vec{e}_1 = \vec{R} \cdot \vec{e}_1 \\ Q_\theta &= \vec{M}_A^{(att)} \cdot \vec{e}_3 = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_3 \end{aligned}$$

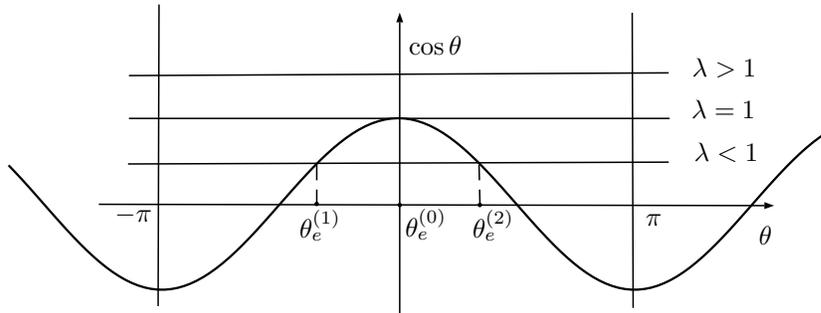
Dunque,  $Q_x$  è la componente lungo l'asse orizzontale del risultante di tutte le forze attive agenti sull'asta;  $Q_\theta$  è la componente lungo l'asse  $\vec{e}_3$  del momento risultante di tutte le forze attive, calcolato rispetto al polo mobile  $A$ .

Pertanto, le equazioni pure di equilibrio sono

$$(5.11.10) \quad \begin{cases} -cx - F\sin\theta = 0 \\ -mgd\cos\theta + FL = 0 \end{cases}$$

Risolvo il sistema (5.11.10) rispetto alle incognite  $(x, \theta)$ . Inizio dalla seconda equazione che contiene solo l'incognita  $\theta$ .

$$\cos\theta = \frac{FL}{mgd} = \lambda > 0$$



se  $\lambda > 1 \nexists$  soluzione  $\Rightarrow$  Non esiste alcuna configurazione di equilibrio: il momento del peso non è mai sufficiente a equilibrare il momento del carico follower  $\vec{F}_A$ .

se  $\lambda=1 \Rightarrow 1$  soluzione  $\theta_e^{(0)} = 0$

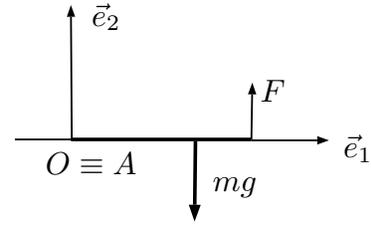
se  $\lambda < 1 \Rightarrow 2$  soluzioni  $\begin{cases} \theta_e^{(1)} = -\theta_e^{(2)} = -\arccos\lambda < 0 & -\frac{\pi}{2} < \theta_e^{(1)} < 0 \\ \theta_e^{(2)} = \arccos\lambda > 0 & 0 < \theta_e^{(2)} < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Dall'equazione (8.5.10) ricavo la  $x_e$ :

$$x_e = -\frac{F}{c} \sin\theta_e = \begin{cases} \text{se } \lambda = 1 & x_e^{(0)} = 0 \\ \text{se } \lambda < 1 & \begin{cases} x_e^{(1)} = \frac{F}{c} \sqrt{1 - \lambda^2} \\ x_e^{(2)} = -\frac{F}{c} \sqrt{1 - \lambda^2} \end{cases} \end{cases}$$

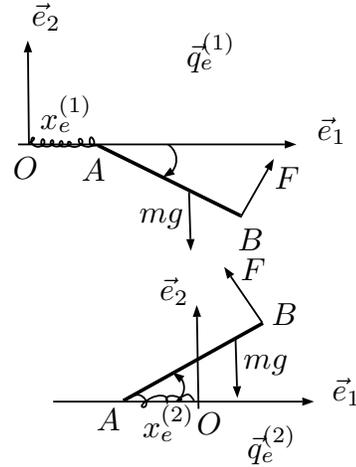
Denotate le configurazioni di equilibrio con  $\mathbf{q}_e = (x_e, \theta_e)$ , possiamo riassumere i risultati ottenuti : se  $\lambda = 1 \Leftrightarrow FL = mgd$

$$\mathbf{q}_e^{(0)} = (0, 0)$$



se  $\lambda < 1 \Leftrightarrow FL < mgd$

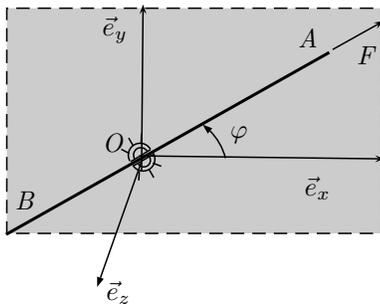
$$\mathbf{q}_e^{(1)} = \left( \frac{F}{c} \sqrt{1 - \lambda^2}, -\arccos \lambda, \right)$$



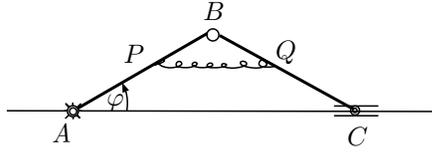
$$\mathbf{q}_e^{(2)} = \left( -\frac{F}{c} \sqrt{1 - \lambda^2}, \arccos \lambda, \right)$$

**Esercizio 5.11.1.** Calcolare le forze generalizzate nell'esempio (5.10.5) e spiegarne il significato fisico.

**Esercizio 5.11.2.** Consideriamo un'asta di lunghezza  $L$  e massa  $m$ , passante per una cerniera cilindrica "bucata" liscia con asse ortogonale al piano verticale e fissata nel punto  $O$ . Sull'asta agisce, oltre al peso proprio, un carico di punta  $F$ . Determinare le eventuali configurazioni di equilibrio.

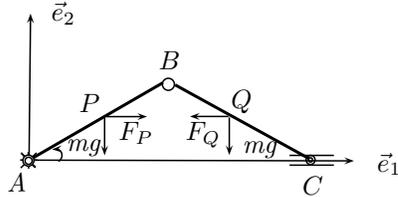


Concludiamo lo studio del PLV con una applicazione ad un sistema articolato soggetto al peso e ad una coppia di forze interne.

**Esempio 5.11.2.** *Biella-manovella pesante con molla interna*

Piano verticale, vincoli lisci e bilateri, aste uguali ed omogenee di massa  $m$  e lunghezza  $L$ ;  $\overline{AP} = \overline{BP}$ ,  $\overline{BQ} = \overline{CQ}$ .

Il sistema biella-manovella è un sistema con 1 grado di libertà per  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . Infatti,  $g = 3 \cdot 2$  e  $v = 2 + 2 + 1$ , quando i vincoli sono efficaci. Si ricordi che, se  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , i vincoli sono inefficaci. Consideriamo il diagramma delle sole forze attive



$$\vec{F}_P = -c(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) = -\vec{F}_Q$$

e calcoliamo il LV

$$LV = (\vec{F}_P - mg\vec{e}_2) \cdot \delta\vec{x}_P + (\vec{F}_Q - mg\vec{e}_2) \cdot \delta\vec{x}_Q$$

$$\vec{x}_P = \frac{L}{2}(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2)$$

$$\delta\vec{x}_P = \frac{L}{2}(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2)\delta\varphi$$

$$\vec{x}_Q - \vec{x}_P = L\cos\varphi\vec{e}_1$$

$$\delta(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) = -L\sin\varphi\vec{e}_1\delta\varphi$$

$$\vec{x}_Q = \vec{x}_P + (\vec{x}_Q - \vec{x}_P) = \frac{L}{2}(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) + L\cos\varphi\vec{e}_1$$

$$= \frac{L}{2}(3\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2)$$

$$\delta\vec{x}_Q = \frac{L}{2}(-3\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2)\delta\varphi$$

Allora

$$\begin{aligned} LV &= \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_P + \vec{F}_Q \cdot \delta\vec{x}_Q - mg\vec{e}_2 \cdot (\delta\vec{x}_P + \delta\vec{x}_Q) \\ &= \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_P - \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_Q - mg\vec{e}_2 \cdot \delta(\vec{x}_P + \vec{x}_Q) \\ &= \vec{F}_P \cdot \delta(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) - mg\vec{e}_2 \cdot \frac{L}{2}(-4\sin\varphi\vec{e}_1 + 2\cos\varphi\vec{e}_2)\delta\varphi \\ &= cL\cos\varphi\vec{e}_1 \cdot L\sin\varphi\vec{e}_1\delta\varphi - mgL\cos\varphi\delta\varphi \\ &= (cL^2\sin\varphi\cos\varphi - mgL\cos\varphi)\delta\varphi \\ &= L\cos\varphi(cL\sin\varphi - mg)\delta\varphi \end{aligned}$$

Pertanto, l'unica componente lagrangiana della sollecitazione attiva è:

$$Q_\varphi = L\cos\varphi(cL\sin\varphi - mg) ,$$

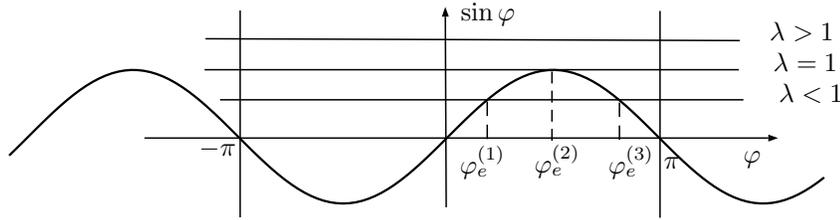
che si annulla se

$$\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad (\text{vincoli inefficaci})$$

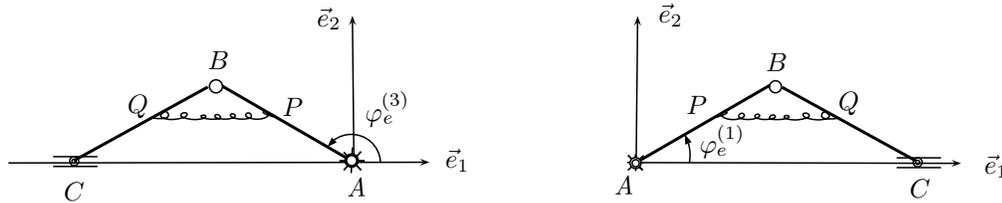
oppure, se

$$\sin\varphi = \frac{mg}{cL}$$

Risolviamo l'ultima equazione con il solito metodo grafico, ponendo  $\frac{mg}{cL} = \lambda$ .



Dunque, le uniche configurazioni di equilibrio a vincoli efficaci,  $\varphi_e^{(1)}, \varphi_e^{(3)}$  esistono se  $mg < cL$ , cioè se il peso non è troppo elevato rispetto alla forza di richiamo della molla. Esse sono rappresentate graficamente da



**Lavoro virtuale di una coppia Newtoniana**

Nell'esempio precedente possiamo constatare che il lavoro della coppia di forze generata dalla molla, che agisce tra due punti interni al sistema, è diverso da zero, benché la coppia sia a braccio nullo, come in tutte le interazioni newtoniane. Dunque, possiamo affermare che in un caso generico il lavoro virtuale di una coppia a braccio nullo può essere diverso da zero. Precisamente, consideriamo

$$\begin{array}{ccc}
 \overleftarrow{F_P} \quad P & \quad \quad \quad Q \quad \overrightarrow{F_Q} & \quad \quad \quad \vec{F}_P = f(P, Q) \text{vers}(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \quad f > 0 \\
 \\
 P \quad \overrightarrow{F_P} \quad \overleftarrow{F_Q} \quad Q & & \vec{F}_P = f(P, Q) \text{vers}(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \quad f < 0
 \end{array}$$

dove  $f$  è una funzione di  $P$  e  $Q$ . Il lavoro virtuale della coppia è dato da:

$$\begin{aligned}
 LV &= \vec{F}_P \cdot \delta \vec{x}_P + \vec{F}_Q \cdot \delta \vec{x}_Q = \vec{F}_P \cdot \delta \vec{x}_P - \vec{F}_P \cdot \delta \vec{x}_Q = \\
 &= \vec{F}_P \cdot \delta(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) = f(P, Q) \frac{\vec{x}_P - \vec{x}_Q}{|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|} \cdot \delta(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) = \\
 &= \frac{f(P, Q)}{|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|} \frac{1}{2} \delta(|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|^2)
 \end{aligned}$$

**Esempio 5.11.3. Molla di richiamo.**

$$\vec{F}_P = -c(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) = -c|\vec{x}_P - \vec{x}_Q| \text{vers}(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \xrightarrow{f(P, Q) = -c|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|} LV = -\frac{1}{2} c \delta(|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|^2) .$$

Quindi, in generale, possiamo concludere che il LV di una coppia a braccio nullo è uguale a zero se e solo se

$$|\vec{x}_P - \vec{x}_Q| = \text{costante} ,$$

cioè se la distanza tra i due punti di applicazione delle forze  $P$  e  $Q$  rimane invariata. Da ciò segue immediatamente che

**Proposizione 5.11.1.** *In un rigido, il lavoro virtuale di tutte le forze interne è nullo.*

## 5.12 Soluzioni degli esercizi

### Esercizio 5.11.1

Applicando il secondo metodo, dall'equazione (5.10.9) segue che

$$Q_\varphi = \sin \varphi \left( mg \frac{L}{2} - cL^2 \cos \varphi \right)$$

Illustriamo il significato fisico di  $Q_\varphi$ . A tale scopo, calcoliamo il momento di tutte le forze rispetto al centro d'istantanea rotazione  $C$ :

$$\begin{aligned} \vec{M}_C &= (\vec{x}_G - \vec{x}_C) \times (mg\vec{e}_2) + (\vec{x}_A - \vec{x}_C) \times \vec{F}_A \\ (5.12.1) \quad &= -\frac{L}{2}(\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) \times (-mg\vec{e}_2) + (-L \cos \varphi \vec{e}_2) \times (-cL \sin \varphi \vec{e}_1) \\ &= \left( mg \frac{L}{2} \sin \varphi - cL^2 \sin \varphi \cos \varphi \right) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

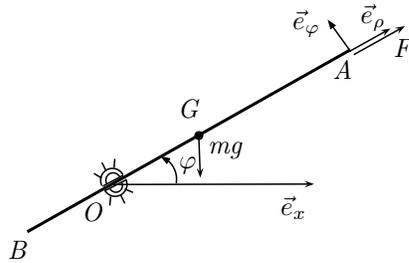
È evidente che :

$$Q_\varphi \equiv \vec{M}_C \cdot \vec{e}_3 \equiv \vec{M}_C^{(att)} \cdot \vec{e}_3$$

In questo caso, quindi, la forza generalizzata associata alla coordinata libera  $\varphi$  coincide con il momento (scalare) risultante delle forze esterne, calcolato rispetto al polo  $C$ .

**Esercizio 5.11.2** Il modello è un rigido con 2 gradi di libertà. Infatti, applicando il metodo dei congelamenti successivi, basta osservare che per congelare l'asta bisogna congelare 2 spostamenti virtuali indipendenti: lo scorrimento dell'asta dentro la cerniera cilindrica e la rotazione dell'asta intorno all'asse della cerniera. Dunque, possiamo ridurci al piano ortogonale all'asse della cerniera, passante per  $O$  e prendere come coordinate libere, le coordinate del punto  $A$  rispetto al riferimento polare  $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ .

Poichè il modello è olonomo ed è vincolato con vincoli fissi, non dissipativi e bilateri, possiamo utilizzare le equazioni pure per determinare gli equilibri. A tale scopo, dobbiamo calcolare le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva  $(Q_\rho, Q_\varphi)$ .



Facciamolo, a partire dalla definizione 5.11.2, separando il contributo del carico follower da quello della forza peso (per motivi che vedremo nel prossimo capitolo)

$$\begin{aligned} Q_\rho^{(oll)} &= \vec{F}_A \cdot \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \rho}, & Q_\rho^{(peso)} &= \vec{F}_G \cdot \frac{\partial \vec{x}_G}{\partial \rho} \\ Q_\varphi^{(oll)} &= \vec{F}_A \cdot \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \varphi}, & Q_\varphi^{(peso)} &= \vec{F}_G \cdot \frac{\partial \vec{x}_G}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Le forze attive sono:

$$\vec{F}_A = F\vec{e}_\rho, \vec{F}_G = -mg\vec{e}_y = -mg(\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi),$$

mentre i vettori posizione sono

$$\vec{x}_A = \rho\vec{e}_\rho, \vec{x}_G = \left(\rho - \frac{L}{2}\right)\vec{e}_\rho.$$

Tenendo conto delle (2.4.2) e (4.7.6), i loro derivati risultano

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{x}_A}{\partial\rho} &= \vec{e}_\rho, \quad \frac{\partial\vec{x}_G}{\partial\rho} = \vec{e}_\rho \\ \frac{\partial\vec{x}_A}{\partial\varphi} &= \rho\vec{e}_\varphi = \rho\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial\vec{x}_G}{\partial\varphi} = \left(\rho - \frac{L}{2}\right)\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Dunque

$$(5.12.2) \quad Q_\rho^{(foll)} = F\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = F, \quad Q_\rho^{(peso)} = -mg(\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi) \cdot \vec{e}_\rho = -mg\sin\varphi$$

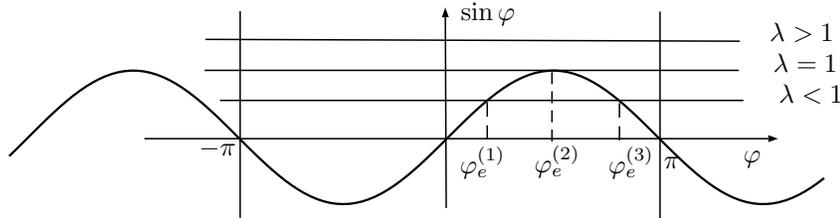
(5.12.3)

$$Q_\varphi^{(foll)} = F\vec{e}_\rho \cdot \rho\vec{e}_\varphi = 0, \quad Q_\varphi^{(peso)} = -mg(\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi) \cdot \left(\rho - \frac{L}{2}\right)\vec{e}_\varphi = -mg\cos\varphi\left(\rho - \frac{L}{2}\right).$$

Pertanto, le equazioni pure di equilibrio sono

$$(5.12.4) \quad \begin{cases} F - mg\sin\varphi = 0 \\ -mg\cos\varphi\left(\rho - \frac{L}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Risolviamo la prima equazione con il solito metodo grafico, ponendo  $\frac{F}{mg} = \lambda > 0$ .



Dunque, le soluzioni  $\mathbf{q}_e = (\rho_e, \varphi_e)$  esistono se e solo se  $F \leq mg$ , cioè se il carico di punta non supera il peso dell'asta. Precisamente,

$$\text{se } \lambda = 1 \quad \varphi_e^{(2)} = \frac{\pi}{2} \quad 0 < \rho < L$$

$$\text{se } \lambda < 1 \quad \varphi_e^{(1)} = \arcsin\lambda, \varphi_e^{(3)} = \pi - \arcsin\lambda \quad \rho = \frac{L}{2}$$

Concludendo, le configurazioni di equilibrio sono:

$$(5.12.5) \quad \text{se } \lambda = 1 \quad \mathbf{q}_e^{(2)} = \left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) \quad 0 < \rho < L$$

$$\text{se } \lambda < 1 \quad \mathbf{q}_e^{(1)} = \left( \frac{L}{2}, \arcsin \lambda \right), \quad \mathbf{q}_e^{(3)} = \left( \frac{L}{2}, \pi - \arcsin \lambda \right).$$

**N.B.** Osserviamo che, qualunque sia la configurazione dell'asta, lo spostamento virtuale del punto del rigido che passa per la cerniera bucata è diretto come l'asta. Infatti, detto  $P$  un generico punto dell'asta a distanza  $d$  dall'estremo  $A$

$$\vec{x}_P = (\rho - d)\vec{e}_\rho, \quad \delta\vec{x}_P = \delta\rho\vec{e}_\rho + (\rho - d)\delta(\vec{e}_\rho) = \delta\rho\vec{e}_\rho + (\rho - d)\delta\varphi\vec{e}_\varphi$$

Quindi, se  $P \equiv O \Leftrightarrow d = \rho$ , lo spostamento virtuale di  $P$  si riduce a  $\delta\vec{x}_P = \delta\rho\vec{e}_\rho$ , cioè risulta parallelo all'asta.

