

Capitolo 6

Sollecitazioni conservative

In questo capitolo, studieremo i modelli meccanici soggetti a una sollecitazione *attiva* rappresentabile da una funzione scalare, detta *energia potenziale*, che sarà usata in Statica per lo studio degli equilibri e della loro stabilità e in Dinamica per ricavare le equazioni di Lagrange in forma conservativa.

6.1 Richiami sui campi di forze conservative

Richiamiamo alcuni concetti sui campi di forze già studiati in Analisi II (vedi [Omari e Trombetta]), adattandoli alla Meccanica Razionale. A tale scopo, penseremo il campo di forza agente su un punto materiale (P, m) posto in uno spazio affine euclideo \mathcal{E}_n .

Definizione 6.1.1. *Un campo di forze posizionali è un'applicazione differenziabile (di classe almeno C^1) da un aperto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_n$ a valori nello spazio vettoriale euclideo soggiacente E_n*

$$\vec{F} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_n \rightarrow E_n, \quad P \mapsto \vec{F}(P)$$

Esempio 6.1.1.

1. Campo della forza peso (in piccolo) su una particella di massa m

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{E}_3 \quad \vec{F}(P) = m\vec{g} \quad \text{campo uniforme.}$$

2. Campo della forza peso (in grande) su una particella di massa m

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}_3 \setminus \{O\} \quad \vec{F}(P) = -GmM_T \frac{P - O}{|P - O|^3},$$

dove O indica il centro della Terra, G la costante di gravitazione universale e M_T la massa della Terra.

3. Campo di una forza elastica di centro O e di costante c , applicata in P

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{E}_3 \quad \vec{F}(P) = -c(P - O).$$

N.B. Si osservi che i campi di forza 2 e 3 sono *centrali*, cioè sono campi vettoriali tali che:

- in ogni punto il vettore del campo è radiale, cioè è diretto verso un punto fisso dello spazio detto centro; quindi ammette la rappresentazione

$$\vec{F}(P) = F(P) \text{ vers}(P - O) .$$

- La componente scalare del campo, $F(P)$, dipende solo dal modulo del vettore $P - O$ e non dalla sua direzione. Quindi il campo si rappresenta

$$\vec{F}(P) = F(|P - O|) \text{ vers}(P - O)$$

Pertanto, possiamo dire che un campo centrale è un campo radiale a simmetria sferica.

Definizione 6.1.2. *Un campo di forze posizionali \vec{F} , definito in un aperto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_n$, si dice localmente conservativo se esiste un aperto stellato U e una funzione scalare (di classe C^2)*

$$V : U \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che risulti

$$(6.1.1) \quad \vec{F}(P) = \text{grad}(-V(P)) \quad P \in U ,$$

dove grad denota l'operatore gradiente in \mathcal{E}_n e la funzione V si dice energia potenziale del campo di forze \vec{F} . In un riferimento cartesiano $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, l'operatore grad è rappresentato da

$$\text{grad} = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} ,$$

quindi la (6.1.1) si specializza a

$$(6.1.2) \quad F_i = \frac{\partial(-V)}{\partial x_i} .$$

N.B. Osserviamo che se la funzione energia potenziale esiste, essa è definita a meno di una costante additiva.

Proposizione 6.1.1. *I campi uniformi, cioè quelli indipendenti dal posto e quindi rappresentabili da*

$$\vec{F}(P) = c \vec{u} \quad c \in \mathbb{R}, \quad |\vec{u}| = 1$$

sono conservativi ed ammettono energia potenziale data da

$$V(P) = -c \vec{u} \cdot (P - O) \quad O \in \mathcal{E}_n$$

Dimostrazione. Basta verificare la (6.1.1). Infatti, posto $P - O = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ e $\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i$, si ha

$$\text{grad} V(P) = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-c \sum_{k=1}^n u_k x_k \right) = -c \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \sum_{k=1}^n u_k \delta_{ki} = -c \sum_{i=1}^n \vec{e}_i u_i = -c \vec{u}$$

□

Esempio 6.1.2. Il campo della forza peso (in piccolo) al punto 1 dell' Esempio 6.1.1 è un campo uniforme. La sua energia potenziale sarà, quindi,

$$V(P) = -m\vec{g} \cdot (P - O)$$

Proposizione 6.1.2. Ogni campo centrale in $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_3$ è (localmente) conservativo. Infatti, in coordinate polari sferiche $(O; r, \theta, \varphi)$, ammette la rappresentazione

$$\vec{F}(P) = F(r) \vec{e}_r(\theta, \varphi)$$

ed energia potenziale data da

$$V(P) = - \int F(r) dr$$

Dimostrazione. È facile verificare la (6.1.1) utilizzando l'espressione dell'operatore gradiente in coordinate polari sferiche:

$$\text{grad} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

□

Esempio 6.1.3.

1. Campo di Kepler-Coulomb

$$\vec{F}(P) = \frac{c}{r^2} \vec{e}_r = c \frac{P - O}{|P - O|^3}, \quad V(P) = \frac{c}{r} = \frac{c}{|P - O|} \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2. Campo elastico

$$\vec{F}(P) = -cr\vec{e}_r = -c(P - O), \quad V(P) = \frac{c}{2}r^2 = \frac{c}{2}|P - O|^2 \quad c \in \mathbb{R}^+$$

Richiamiamo, ora, il test da effettuare su un dato campo di forze posizionali per decidere se è, o meno, localmente conservativo.

Proposizione 6.1.3. Un campo di forze posizionali definito in un aperto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_n$ è localmente conservativo se e solo esiste un aperto stellato $U \subseteq \mathcal{A}$ nel quale si verifica che

$$(6.1.3) \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n,$$

dove le x_i sono le coordinate cartesiane del punto P in un riferimento cartesiano $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Dimostrazione. Per il solo se vedi [Omari e Trombetta].

□

Corollario 6.1.1. Un campo di forze posizionali definito in $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_3$ è localmente conservativo se e solo se il suo rotore è nullo:

$$\text{rot} \vec{F}(P) = \vec{0}$$

Dimostrazione. Vedi [Omari e Trombetta]. Si ricorda che

$$\operatorname{rot} \vec{F}(P) = \nabla \times \vec{F}(P) = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix}$$

□

N.B. In Meccanica Razionale si usa una nozione di campo conservativo (localmente) più debole di quella utilizzata in Analisi (globalmente conservativo). Questo spiega il fatto che, nei testi di Analisi, la condizione (6.1.1) è solo necessaria ma non sufficiente a garantire la conservatività (globale) di un campo vettoriale.

Esercizio 6.1.1. *Verificare che il rotore dei campi uniformi e dei campi centrali dell'Esempio 6.1.1 è nullo.*

Daremo ora una definizione di campo conservativo che è equivalente alla (6.1.1) nello spazio \mathcal{E}_n ma, che al contrario della (6.1.1), si presta a una facile generalizzazione nello spazio delle configurazioni di un sistema olonomo.

Consideriamo il lavoro virtuale di un campo di forze \vec{F} su un punto materiale P

$$LV = \vec{F}(P) \cdot \delta \vec{x}_P$$

Osserviamo che, se il campo è conservativo secondo la (6.1.1), il lavoro virtuale si può scrivere

$$LV = \operatorname{grad}(-V(P)) \cdot \delta \vec{x}_P = \delta(-V(P))$$

Su tali basi possiamo enunciare la caratterizzazione seguente:

Proposizione 6.1.4. *Un campo di forze posizionali è localmente conservativo se e solo se il suo lavoro virtuale è un differenziale (localmente) esatto, cioè se e solo se esiste una funzione $V : U \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^2 , tale che*

$$(6.1.4) \quad LV = \delta(-V) ,$$

dove U è un aperto stellato (o semplicemente connesso).

6.2 Sollecitazione conservativa

Passiamo ora dallo studio dei campi di forze agenti su un punto materiale allo studio della sollecitazione attiva agente su un modello \mathcal{B} più generale, costituito, ad esempio, da più punti materiali, da uno o più rigidi, da combinazioni dei precedenti, etc.. L'ipotesi che faremo è che i vincoli a cui \mathcal{B} è soggetto siano *olonomi*. In questo caso, lo spazio delle configurazioni di \mathcal{B} ha una struttura di varietà differenziabile, dove non ha senso parlare del gradiente di un campo scalare. Pertanto, non possiamo usare la (6.1.1) per definire i modelli conservativi. Invece, potremo utilizzare la (6.1.4). Quindi diremo che:

Definizione 6.2.1. Un modello meccanico soggetto a vincoli olonomi e fissi, definito nello spazio delle configurazioni \mathcal{C}_V , $\dim \mathcal{C}_V = l$, si dice soggetto a una sollecitazione attiva localmente conservativa se il lavoro virtuale di tale sollecitazione è un differenziale localmente esatto, cioè se esiste una funzione $V : U \subseteq \mathcal{C}_V \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^2 , tale che

$$(6.2.1) \quad LV^{(att)} = \delta(-V) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial(-V)}{\partial q_k} \delta q_k,$$

dove U è un aperto stellato (o semplicemente connesso). La funzione $V(q_1, \dots, q_l)$ si dice energia potenziale del modello.

Proposizione 6.2.1. Nelle ipotesi della definizione precedente, un modello meccanico è soggetto a una sollecitazione attiva conservativa se e solo se si verifica che

$$(6.2.2) \quad Q_i^{(att)}(q_1, \dots, q_l) = \frac{\partial}{\partial q_i} (-V(q_1, \dots, q_l)) \quad i = 1, \dots, l.$$

Dimostrazione. Viene dal fatto che per i sistemi olonomi il lavoro virtuale della sollecitazione attiva è dato dalla (5.11.3) che qui riscriviamo

$$LV^{(att)} = \sum_{k=1}^l Q_k^{(att)} \delta q_k$$

□

Dalla Proposizione precedente, ricaviamo un test da applicare al campo delle forze generalizzate per deciderne la conservatività o meno.

Proposizione 6.2.2. Nelle ipotesi della Def. (6.2.1), un modello \mathcal{B} è localmente conservativo se e solo se esiste un aperto stellato $U \subseteq \mathcal{C}_V$ dove si verifica identicamente che

$$(6.2.3) \quad \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \quad j, k = 1, \dots, l$$

Dimostrazione. La necessità è una diretta conseguenza del lemma di Schwartz applicato alla funzione energia potenziale V . Infatti, se esiste V definita in U e di classe C^2 , in ogni punto di U deve verificarsi che

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \quad j, k = 1, \dots, l$$

e quindi la tesi, tenuto conto della (6.2.2). La dimostrazione della sufficienza si basa sul Lemma di Poincaré per le forme differenziali ed esula dal contenuto di questo corso. □

N.B. Le $l(l-1)/2$ condizioni (6.2.3) sono equivalenti al fatto che la matrice Jacobiana delle forze generalizzate

$$[Jac(Q)]_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}$$

è una matrice simmetrica.

Esempio 6.2.1. *Energia potenziale del peso proprio.*

La sollecitazione della forza peso applicata a un qualunque modello meccanico \mathcal{B} è conservativa e ha energia potenziale pari a

$$(6.2.4) \quad V = -M\vec{g} \cdot (G - O) ,$$

dove M è la massa totale del modello, O un arbitrario punto fisso di \mathcal{E}_3 e $G - O := \frac{\sum_{P \in \mathcal{B}} m_P (P - O)}{M}$ il vettore posizione del suo baricentro rispetto ad O . Infatti,

$$LV^{(peso)} = \sum_{P \in \mathcal{B}} m_P \vec{g} \cdot \delta P = \vec{g} \cdot \sum_{P \in \mathcal{B}} m_P \delta P = M\vec{g} \cdot \frac{\sum_{P \in \mathcal{B}} m_P \delta(P - O)}{M} = M\vec{g} \cdot \delta(G - O) = \delta(M\vec{g} \cdot (G - O))$$

Esempio 6.2.2. *Macchine semplici: sono modelli olonomi a vincoli fissi, con 1 grado di libertà.*

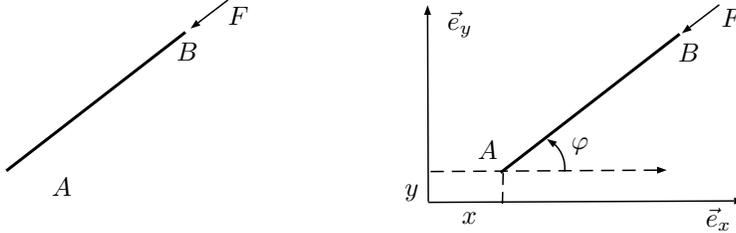
La sollecitazione di forze attive posizionali, agente su una macchina semplice è conservativa. Infatti, in tal caso, il lavoro virtuale è dato da

$$LV^{(att)} = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \delta \vec{x}_P = Q(q) \delta q$$

e l'energia potenziale $V(q)$ è data da

$$V(q) = - \int Q(q) \delta q$$

Esempio 6.2.3. *Consideriamo un'asta libera in un piano orizzontale liscio e soggetta a un carico di punta F ("follower"). Vogliamo stabilire se tale sollecitazione è conservativa oppure non conservativa.*



Il sistema materiale è un rigido libero nel piano, quindi ha 3 gradi di libertà. Scegliamo come coordinate libere le coordinate cartesiane (x, y) del punto A e l'angolo φ formato dal versore \vec{e}_x e dall'asta. Dunque:

$$\mathbf{q} = (x, y, \varphi) \quad \vec{F}_B = -F \text{vers}(B - A) = -F (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y)$$

Determiniamo ora il campo delle forze lagrangiane

$$\mathbf{Q} = [Q_x, Q_y, Q_\varphi]^T$$

I metodo.

$$\begin{aligned} \vec{x}_B &= (x + L \cos \varphi) \vec{e}_x + (y + L \sin \varphi) \vec{e}_y \\ \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial x} &= \vec{e}_x, \quad \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial y} = \vec{e}_y, \quad \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial \varphi} = L (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_x &= \vec{F}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial x} = -F (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_x = -F \cos \varphi \\
Q_y &= \vec{F}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial y} = -F (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_y = -F \sin \varphi \\
Q_\varphi &= -F (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) \cdot L (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y) = 0
\end{aligned}$$

Il metodo.

$$LV = \vec{F}_B \cdot \delta \vec{x}_B$$

$$\begin{aligned}
\delta \vec{x}_B &= (\delta x - L \sin \varphi \delta \varphi) \vec{e}_x + (\delta y + L \cos \varphi \delta \varphi) \vec{e}_y \\
LV &= -F (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) \cdot [(\delta x - L \sin \varphi \delta \varphi) \vec{e}_x + (\delta y + L \cos \varphi \delta \varphi) \vec{e}_y] \\
&= -F [\cos \varphi (\delta x - L \sin \varphi \delta \varphi) + \sin \varphi (\delta y + L \cos \varphi \delta \varphi)] \\
&= \underbrace{-F \cos \varphi \delta x}_{Q_x} - \underbrace{F \sin \varphi \delta y}_{Q_y} + \underbrace{0}_{Q_\varphi} \delta \varphi
\end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{aligned}
Q_x &= -F \cos \varphi \\
Q_y &= -F \sin \varphi \\
Q_\varphi &= 0 .
\end{aligned}$$

Ricapitolando, il campo delle forze (attive) lagrangiane è dato da

$$\mathbf{Q} = [-F \cos \varphi, -F \sin \varphi, 0]$$

Il test che assicura la (locale) conservatività del campo \mathbf{Q} è dato dall'eguaglianza delle "derivate in croce" delle componenti (6.2.3)

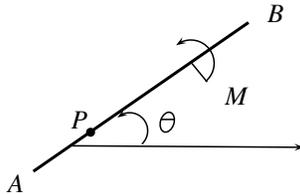
$$\frac{\partial Q_x}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial Q_y}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial Q_\varphi}{\partial x} \stackrel{?}{=} \frac{\partial Q_x}{\partial \varphi} \quad , \quad \frac{\partial Q_\varphi}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial Q_y}{\partial \varphi}$$

È immediato verificare che mentre la prima identità è soddisfatta la seconda e la terza non lo sono. In conclusione la sollecitazione non è conservativa.

Esercizio 6.2.1. Dire cosa succede se l'asta dell'esempio precedente è soggetta alla stessa sollecitazione, ma è vincolata con:

1. un appoggio liscio bilatero del punto A sull'asse (O, \vec{e}_x)
2. una cerniera fissa in A e in O .

Esempio 6.2.4. Coppia costante e uniforme su un rigido piano.



Consideriamo l'asta AB libera nel piano di figura ($l = 3$) e soggetta all'azione di una coppia uniforme di momento $\vec{M} = M\vec{e}_3$. Scelto un generico punto P dell'asta, calcoliamo il lavoro virtuale della coppia. Esso è dato da

$$LV = \vec{K} \cdot \delta\vec{x}_P + \vec{M}_P \cdot \vec{\epsilon} = M\vec{e}_3 \cdot \delta\theta\vec{e}_3 = M\delta\theta = \delta(M\theta) .$$

Pertanto, una coppia uniforme agente su un rigido piano ammette un'energia potenziale data da

$$(6.2.5) \quad V(\theta) = -M\theta .$$

Si noti, quindi, che una coppia follower risulta (localmente) conservativa, mentre una forza follower, in generale, non lo è.

6.3 Energia potenziale di una molla

In questa sezione, calcoleremo il lavoro virtuale di molle lineari di tipo diverso: molle interne ed esterne con centro fisso e mobile e vedremo sotto quali condizioni tali molle ammettono energia potenziale. Infine, considereremo anche la sollecitazione di molle angolari o, come si dice impropriamente, molle di torsione.

6.3.1 Molle lineari interne

Sono molle i cui estremi sono fissati a due punti P e Q interni a un modello meccanico \mathcal{B} , ad esempio quello dell'esempio 5.11.2. Esse esercitano sul modello una coppia di forze a braccio nullo. Nell'esempio 5.11.3 ne abbiamo già calcolato il lavoro virtuale

$$P \xleftrightarrow[c]{\text{-----}} Q \quad P \xrightarrow{\quad} \xleftarrow{\quad} Q \quad LV^{(molla)} = -\frac{1}{2}c\delta(|P - Q|^2)$$

$$P, Q \in \mathcal{B}$$

È immediato concludere che tali molle ammettono un'energia potenziale *complessiva* data da

$$V^{(molla)} = \frac{1}{2}c|P - Q|^2$$

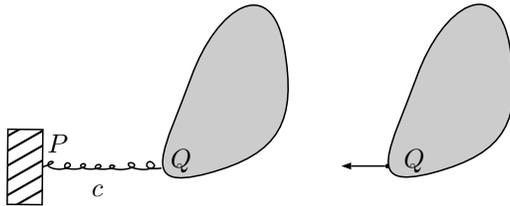
6.3.2 Molle lineari esterne

Se invece la molla agisce su un punto Q di \mathcal{B} ed ha l'altro estremo P fissato all'esterno del modello, si ha che

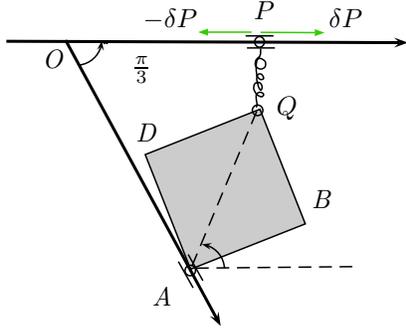
$$LV^{(molla)} = \vec{F}_Q \cdot \delta\vec{x}_Q = -c(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) \cdot \delta\vec{x}_Q$$

Consideriamo 2 casi:

a) l'estremo P è fisso $\Rightarrow \delta\vec{x}_P = \vec{0}$



b) l'estremo P è mobile su una traiettoria sempre ortogonale alla molla $\Rightarrow (\vec{x}_Q - \vec{x}_P) \cdot \delta\vec{x}_P = 0$



In entrambi i casi il LV si può scrivere come un differenziale esatto

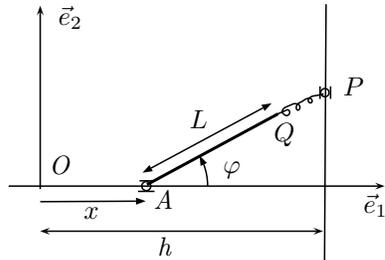
$$LV^{(molla)} = -c(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) \cdot \delta(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) = -\frac{1}{2}c\delta(|\vec{x}_Q - \vec{x}_P|^2)$$

Pertanto, la molla ammette energia potenziale data, anche in questi casi, da

$$V^{(molla)} = \frac{1}{2}c|Q - P|^2 .$$

c) Invece, se l'estremo P è mobile su una traiettoria diversa da quella del caso b) non è detto che la molla ammetta energia potenziale, come si verifica nell'esempio seguente.

Esempio 6.3.1. *Molla non conservativa (follower)*



$l = 2$, $\mathbf{q} = (x, \varphi)$
piano orizzontale

Calcoliamo le componenti lagrangiane della sollecitazione della molla

$$(6.3.1) \quad Q_x = \vec{F}_Q \cdot \frac{\partial \vec{x}_Q}{\partial x}$$

$$(6.3.2) \quad Q_\varphi = \vec{F}_Q \cdot \frac{\partial \vec{x}_Q}{\partial \varphi}$$

dove $\vec{F}_Q = -c(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) = c(\vec{x}_P - \vec{x}_Q)$. Poichè

$$\vec{x}_Q - \vec{x}_A = L(\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2)$$

$$\vec{x}_P - \vec{x}_A = (h - x) \vec{e}_1 + (h - x) \tan \varphi \vec{e}_2$$

segue che

$$\begin{aligned}\vec{x}_Q - \vec{x}_O &= (\vec{x}_Q - \vec{x}_A) + (\vec{x}_A - \vec{x}_O) = (x + L \cos \varphi) \vec{e}_1 + L \sin \varphi \vec{e}_2 \\ \vec{x}_P - \vec{x}_Q &= (\vec{x}_P - \vec{x}_A) + (\vec{x}_A - \vec{x}_Q) = (h - x - L \cos \varphi) \vec{e}_1 + ((h - x) \tan \varphi - L \sin \varphi) \vec{e}_2\end{aligned}$$

Dunque

$$(6.3.3) \quad \frac{\partial \vec{x}_Q}{\partial x} = \vec{e}_1$$

$$(6.3.4) \quad \frac{\partial \vec{x}_Q}{\partial \varphi} = L(-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2)$$

Allora, le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva risultano

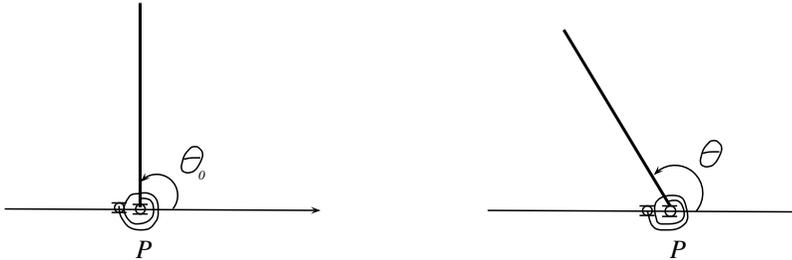
$$\begin{aligned}Q_x &= c \left((h - x - L \cos \varphi) \vec{e}_1 + ((h - x) \tan \varphi - L \sin \varphi) \vec{e}_2 \right) \cdot \vec{e}_1 = c(h - x - L \cos \varphi) \\ Q_\varphi &= c \left((h - x - L \cos \varphi) \vec{e}_1 + ((h - x) \tan \varphi - L \sin \varphi) \vec{e}_2 \right) \cdot L(-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) = 0\end{aligned}$$

È evidente che $\frac{\partial Q_\varphi}{\partial x} \neq \frac{\partial Q_x}{\partial \varphi}$, quindi la sollecitazione della molla NON è conservativa.

6.3.3 Molle Angolari

Le molle angolari sono costituite da avvolgimenti metallici che giacciono in un piano (piano della molla) e si avvolgono intorno ad un asse ortogonale al piano (asse della molla). Dopo essere state deformate per allungamento dell'avvolgimento, esse esercitano un momento di richiamo diretto come l'asse e proporzionale all'angolo di rotazione dell'avvolgimento.

Esempio 6.3.2. *Molla angolare su un rigido piano.*



Consideriamo la molla angolare agente sull'asta vincolata a stare nel piano del foglio, come nella figura. Essa esercita una sollecitazione attiva che si riduce a una coppia di momento $\vec{M} = -c(\theta - \theta_0)\vec{e}_3$, cioè lineare nella variazione tra la coordinata θ e la configurazione θ_0 in cui la molla è a riposo. Tale sollecitazione è localmente conservativa poichè il suo lavoro virtuale è dato da

$$LV = \vec{R} \cdot \delta \vec{x}_P + \vec{M}_P \cdot \vec{\epsilon} = -c(\theta - \theta_0)\vec{e}_3 \cdot \delta\theta \vec{e}_3 = -c(\theta - \theta_0)\delta\theta = -c\delta\left(\frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^2\right).$$

Pertanto, ammette un'energia potenziale data da

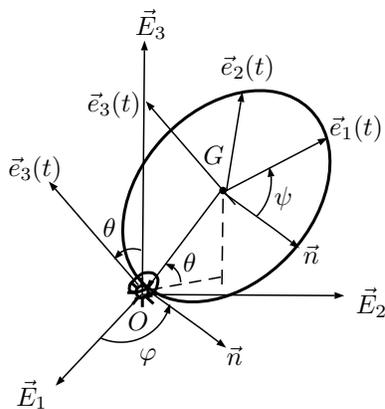
$$(6.3.5) \quad V(\theta) = \frac{1}{2}c(\theta - \theta_0)^2.$$

Si noti l'analogia formale tra la (6.3.5) e l'energia potenziale delle molle lineari data da

$$V(x) = \frac{1}{2}c(x - x_0)^2 \quad x \in \mathbb{R},$$

dove x_0 è l'ascissa del punto in cui la forza della molla si annulla.

Esempio 6.3.3. *Molla angolare su un rigido nello spazio.*



Consideriamo la molla angolare agente sul disco come nella figura. Essa esercita una sollecitazione attiva che si riduce a una coppia di momento $\vec{M} = -c(\psi - \psi_0)\vec{e}_3(t)$, dove ψ è l'angolo di rotazione propria del disco e ψ_0 l'angolo di riposo della molla. Scegliendo $\vec{e}_1(t)$ in modo che $\psi_0 = 0$, troviamo che il suo lavoro virtuale è dato da

$$LV = \vec{R} \cdot \delta \vec{x}_P + \vec{M}_P \cdot \vec{\epsilon} = -c\psi \vec{e}_3(t) \cdot (\delta\varphi \vec{E}_3 + \delta\theta \vec{n} + \delta\psi \vec{e}_3(t)) = -c\psi(\delta\varphi \cos\theta + \delta\psi) = -c(\psi \cos\theta \delta\varphi + \psi \delta\psi).$$

Pertanto, le forze generalizzate sono

$$(6.3.6) \quad Q_\varphi = -c\psi \cos\theta$$

$$(6.3.7) \quad Q_\theta = 0$$

$$(6.3.8) \quad Q_\psi = -c\psi$$

È immediato verificare che esse non soddisfano le condizioni (6.2.3), quindi la sollecitazione non è conservativa, dunque non ammette energia potenziale.

Esercizio 6.3.1. *Supponiamo che sul disco dell'esempio precedente agisca una coppia di momento $\vec{M} = M\vec{e}_3(t)$ con $M \in \mathbb{R}$. Verificare che, persino in questo caso, la sollecitazione attiva non è conservativa.*

6.4 Energia potenziale ed equilibri

Vediamo ora come si traducono le equazioni pure di equilibrio, e quindi il PLV, per i sistemi olonomi soggetti a sollecitazione conservativa.

Teorema 6.4.1. *Stazionarietà dell'energia potenziale.*

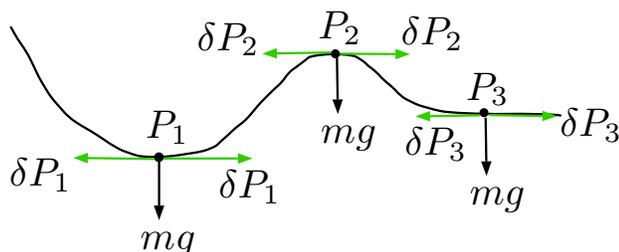
Si consideri un sistema materiale con vincoli olonomi, non dissipativi, bilateri e fissi, soggetto a una sollecitazione conservativa. Sia $V(q_1, \dots, q_l)$ la sua energia potenziale definita e regolare in un aperto U dello spazio delle configurazioni. Le configurazioni di equilibrio in U sono tutte e solo quelle che rendono stazionaria la funzione V

$$(6.4.1) \quad \delta V(q_1, \dots, q_l) = 0.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è una immediata conseguenza delle equazioni pure di equilibrio (5.11.5) e della (6.2.2). \square

6.5 Criterio statico di stabilità

Consideriamo un punto materiale P pesante, vincolato ad appartenere ad una curva liscia S con un vincolo bilatero e supponiamo che esistano i tre equilibri di figura P_1 , P_2 e P_3 .



L'esperienza ci dice che i tre equilibri sono di "qualità" diversa. Infatti, se perturbiamo l'equilibrio P_1 variando di "poco" la posizione e la velocità del punto materiale constatiamo che esso compie un moto che non si allontana da P_1 . Invece, se perturbiamo gli equilibri P_2 e P_3 il punto materiale si allontana "molto" dalla configurazione di equilibrio. Vogliamo ora introdurre un criterio che discrimini questi diversi comportamenti. A questo scopo, useremo il concetto di lavoro. Ma quale lavoro? Non possiamo certo usare il lavoro virtuale dato che, tutti e tre i punti di equilibrio sono caratterizzati dall'avere

$$LV = m\vec{g} \cdot \delta\vec{x}_P = 0 \quad \forall \delta\vec{x}_P \text{ virtuale}$$

Dobbiamo allora considerare un altro tipo di lavoro: non un lavoro elementare (o infinitesimo) ma un lavoro *finito*. Introduciamo le seguenti notazioni:

\mathbf{q}_e , configurazione di equilibrio nello spazio \mathcal{C}_V ;

\mathbf{q}_v , configurazione variata, o "vicina", o perturbata, appartenente ad un opportuno intorno di \mathbf{q}_e , $I(\mathbf{q}_e)$.

Consideriamo inoltre un qualunque moto virtuale $\mathbf{q}(\tau)$, cioè un moto solo immaginato (visto che siamo in statica) ma compatibile con i vincoli, il quale partendo da \mathbf{q}_e termina in \mathbf{q}_v :

$$\mathbf{q}(\tau) \quad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1] \quad \text{t.c. } \mathbf{q}(\tau_0) = \mathbf{q}_e, \mathbf{q}(\tau_1) = \mathbf{q}_v$$

Calcoliamo ora il lavoro compiuto dalle forze attive agenti sul punto P lungo tale moto $\mathbf{q}(\tau)$

$$(6.5.1) \quad L(\mathbf{q}_e \rightarrow \mathbf{q}_v) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \pi^{(vir)}(\tau) \delta\tau,$$

dove $\pi^{(vir)}$ denota la potenza virtuale delle forze attive ed è definita da

$$(6.5.2) \quad \pi^{(vir)} := \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \vec{v}_P^{(vir)} \quad \vec{v}_P^{(vir)} := \frac{\delta \vec{x}_P}{\delta \tau} \quad \text{velocità del punto } P \text{ lungo un moto virtuale.}$$

L'idea è che il segno di tale lavoro distingue i tre diversi equilibri, P_1 , P_2 e P_3 :

1. P_1 , $L(\mathbf{q}_e^{(1)} \rightarrow \mathbf{q}_v) < 0$ (resistente) $\forall \mathbf{q}_v \in I(\mathbf{q}_e^{(1)})$
2. P_2 , $L(\mathbf{q}_e^{(2)} \rightarrow \mathbf{q}_v) > 0$ (motore) $\forall \mathbf{q}_v \in I(\mathbf{q}_e^{(2)})$
3. P_3 , $L(\mathbf{q}_e^{(3)} \rightarrow \mathbf{q}_v) = 0$ (nullo) $\forall \mathbf{q}_v \in I(\mathbf{q}_e^{(3)})$

In base alle evidenze sperimentali, adotteremo il seguente criterio di stabilità

Criterio statico di stabilità. Sia \mathcal{B} un sistema olonomo a vincoli fissi, bilateri e non dissipativi, soggetto a una sollecitazione conservativa. Sia \mathbf{q}_e una sua configurazione di equilibrio. Condizione sufficiente affinché \mathbf{q}_e sia di equilibrio *stabile* è che esista un intorno di \mathbf{q}_e , $U(\mathbf{q}_e)$, tale che $\forall \mathbf{q}_v \in U(\mathbf{q}_e)$ il lavoro delle forze attive durante un *qualsiasi* moto virtuale che unisce \mathbf{q}_e a \mathbf{q}_v sia strettamente negativo

$$L(\mathbf{q}_e \rightarrow \mathbf{q}_v) < 0 \quad \forall \mathbf{q}(\tau)$$

Mostreremo, ora, come il criterio si traduca in criterio operativo, in termini dell'energia potenziale $V(\mathbf{q})$ del sistema \mathcal{B} . A questo scopo, calcoliamo la funzione integranda dell'integrale (6.5.1), cioè la potenza virtuale delle forze attive (6.5.2).

Ricordiamo che, essendo in Statica, non ci sono moti effettivi; per questo parliamo di moto, velocità e potenza virtuali. Calcoliamo la velocità virtuale di un punto P . Per un modello \mathcal{B} olonomo con vincoli fissi si ha

$$\vec{x}_P = \vec{x}_P(q_1(\tau), \dots, q_l(\tau))$$

che, derivata rispetto al tempo virtuale τ , fornisce

$$\vec{v}_P^{(vir)} = \frac{\delta \vec{x}_P}{\delta \tau} = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial q_k} \frac{\delta q_k}{\delta \tau}.$$

Dunque

$$\pi^{(vir)}(\tau) = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \left(\sum_{k=1}^l \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial q_k} \frac{\delta q_k}{\delta \tau} \right) = \sum_{k=1}^l \frac{\delta q_k}{\delta \tau} \left(\sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^l Q_k \frac{\delta q_k}{\delta \tau}$$

Allora

$$(6.5.3) \quad L(\mathbf{q}_e \rightarrow \mathbf{q}_v) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\sum_{k=1}^l Q_k(\mathbf{q}) \frac{\delta q_k}{\delta \tau} \right) \delta \tau$$

Poiché la sollecitazione attiva sul sistema meccanico è per ipotesi conservativa la (6.5.3) diventa

$$\begin{aligned} L(\mathbf{q}_e \rightarrow \mathbf{q}_v) &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\sum_{k=1}^l \frac{\partial}{\partial q_k} (-V(\mathbf{q})) \frac{\delta q_k}{\delta \tau} \right) \delta \tau = \\ &= - \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\delta V}{\delta \tau}(\mathbf{q}(\tau)) \delta \tau \\ &= - \int_{\mathbf{q}_e}^{\mathbf{q}_v} \delta V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{q}_e) - V(\mathbf{q}_v) \end{aligned}$$

Osserviamo che, il lavoro delle forze attive non dipende dal particolare moto virtuale compiuto dal sistema per andare da \mathbf{q}_e a \mathbf{q}_v , ma solo dalla configurazione iniziale e finale, tramite l'energia potenziale del sistema. Ritroviamo qui una proprietà dei campi di forza conservativi, generalizzata alla sollecitazione conservativa agente su un modello meccanico a vincoli olonomi.

Teorema 6.5.1. (*Lagrange-Dirichlet*) *Nelle stesse ipotesi del Criterio statico di stabilità, poiché*

$$L(\mathbf{q}_e \rightarrow \mathbf{q}_v) = V(\mathbf{q}_e) - V(\mathbf{q}_v) ,$$

possiamo concludere che \mathbf{q}_e è di equilibrio stabile se l'energia potenziale del sistema ha un minimo (relativo) stretto in \mathbf{q}_e .

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che se $V(\mathbf{q}_e)$ è minimo (relativo) stretto allora $L(\mathbf{q}_e \rightarrow \mathbf{q}_v) < 0 \quad \forall \mathbf{q}_v \in U(\mathbf{q}_e)$. \square

N.B. La condizione del Teorema precedente è solo sufficiente per la stabilità dell'equilibrio, ma non necessaria. In altre parole, possono esistere configurazioni di equilibrio stabile in cui $V(\mathbf{q})$ non è minimo.

Esempio 6.5.1. *Consideriamo l'energia potenziale di un sistema con 1 g.l. e coordinata libera x , data da*

$$V(x) = \begin{cases} x^5 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

La funzione è di classe C^2 , $V(0) = 0$ e si può dimostrare che il punto $x = 0$ è di equilibrio stabile malgrado non sia punto di minimo.

Su questo argomento, un risultato importante è dato dal teorema di Chetaev il quale afferma

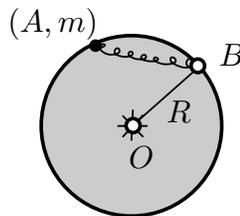
Teorema 6.5.2. (*Chetaev*) *Se $V(\mathbf{q})$ è una funzione analitica in \mathbf{q}_e , cioè sviluppabile in serie di Taylor in un intorno opportuno di \mathbf{q}_e , se \mathbf{q}_e NON è un punto di minimo (relativo) stretto per V , allora \mathbf{q}_e è una configurazione di equilibrio instabile.*

Dunque nelle ipotesi del Teorema di Chetaev, che sono sempre soddisfatte negli esempi ed esercizi che trattiamo, si può concludere:

Teorema 6.5.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché \mathbf{q}_e sia di equilibrio stabile è che esso sia un punto di minimo stretto per l'energia potenziale del sistema.*

N.B. Il Teorema di Lagrange-Dirichlet e il Teorema di Chetaev valgono per modelli meccanici con un numero finito di gradi di libertà ($l < \infty$) che, del resto, sono gli unici modelli che trattiamo in questo corso. Invece, non valgono, almeno in questa forma, per un continuo deformabile, come si vedrà nel corso di Scienza delle Costruzioni.

Esempio 6.5.2. *Si consideri il sistema della figura costituito da un disco rigido di raggio R e di massa M , vincolato con una cerniera cilindrica fissa in un piano verticale, e da una particella di massa m vincolata a scorrere sul bordo del disco e soggetta alla forza di una molla fissata in un punto B del bordo del disco. Tenendo conto che tutti i vincoli sono lisci, trovare le eventuali configurazioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.*

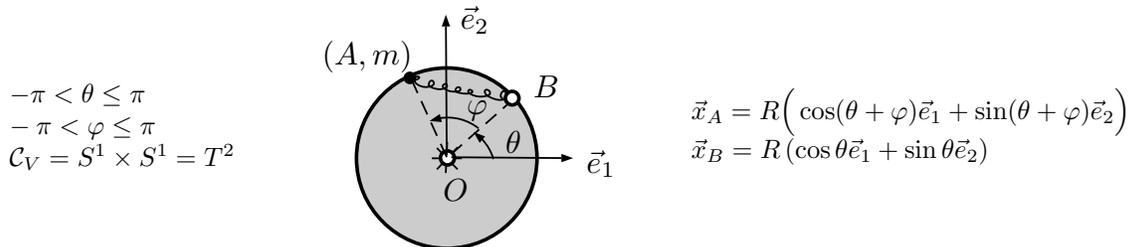


Disco+1 punto $\Rightarrow g = 3 + 2 = 5$
 cerniera O+ appoggio di A $\Rightarrow v = 2 + 1 = 3$

$$l = 5 - 3 = 2$$

Il modello ha due gradi di libertà (come si calcola anche congelando successivamente la rotazione del disco e lo scorrimento di A sul bordo del disco).

Scegliamo come coordinate libere i 2 angoli di figura $-\pi < \theta \leq \pi$ e $-\pi < \varphi \leq \pi$, in modo che $\mathbf{q} = (\theta, \varphi)$.



Il sistema è soggetto alla forza peso (sul disco e sulla particella A) e alla forza elastica esercitata dalla molla interna su A e su B, tutte forze conservative. Inoltre i vincoli sono lisci, fissi e bilateri; quindi la sollecitazione attiva è conservativa, come, del resto, si può verificare calcolando il campo delle forze lagrangiane (come faremo nell'Esempio 6.5.3).

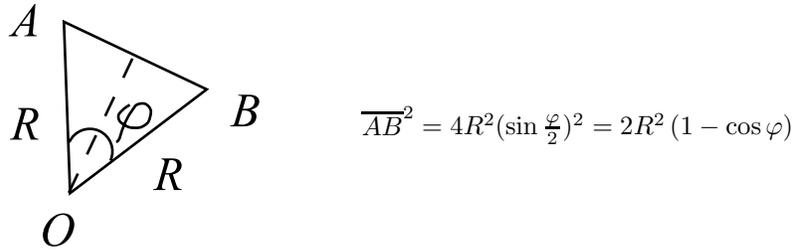
Ora, invece, calcoleremo direttamente l'energia potenziale del sistema $V(\theta, \varphi)$:

$$V(\theta, \varphi) = V^{(peso)} + V^{(molla)}$$

$$\begin{aligned} V^{(peso)} &= -m\vec{g} \cdot \vec{x}_A - M\vec{g} \cdot \vec{x}_O = mg\vec{e}_2 \cdot R(\cos(\theta + \varphi)\vec{e}_1 + \sin(\theta + \varphi)\vec{e}_2) = mgR \sin(\theta + \varphi) \\ V^{(molla)} &= \frac{1}{2}c|\vec{x}_A - \vec{x}_B|^2 = cR^2(1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\vec{x}_A - \vec{x}_B|^2 &= \left| R(\cos(\theta + \varphi) - \cos\theta)\vec{e}_1 + R(\sin(\theta + \varphi) - \sin\theta)\vec{e}_2 \right|^2 \\
&= R^2 \left((\cos(\theta + \varphi) - \cos\theta)^2 + (\sin(\theta + \varphi) - \sin\theta)^2 \right) \\
&= R^2 \left(\cos^2(\theta + \varphi) + \cos^2\theta - 2\cos(\theta + \varphi)\cos\theta + \sin^2(\theta + \varphi) + \sin^2\theta - 2\sin(\theta + \varphi)\sin\theta \right) \\
&= R^2 \left(2 - 2(\cos(\theta + \varphi)\cos\theta + \sin(\theta + \varphi)\sin\theta) \right) \\
&= 2R^2 \left(1 - \cos(\theta + \varphi - \theta) \right) = 2R^2(1 - \cos\varphi)
\end{aligned}$$

N.B. La lunghezza del lato AB del triangolo AOB si può anche calcolare più velocemente per via trigonometrica mediante il Teorema del coseno (pag.5), oppure tenendo conto che il triangolo AOB è isoscele, quindi



Dunque, l'energia potenziale del sistema è data da

$$(6.5.4) \quad V(\theta, \varphi) = mgR \sin(\theta + \varphi) + cR^2(1 - \cos\varphi)$$

Cerchiamo i punti stazionari. Poiché

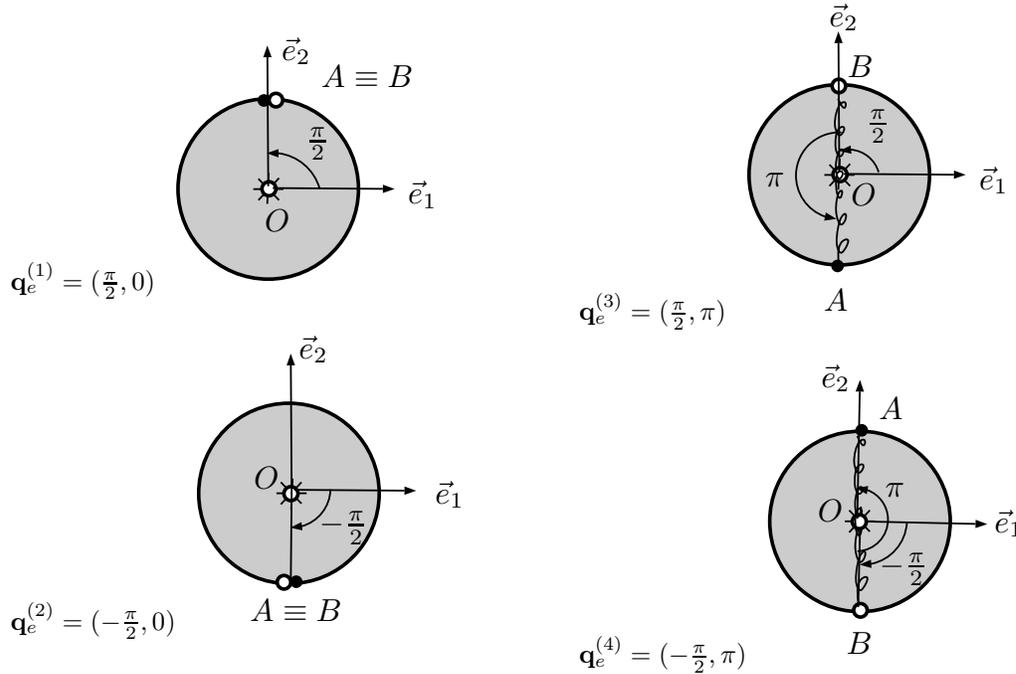
$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \theta} &= mgR \cos(\theta + \varphi) = -Q_\theta \\
\frac{\partial V}{\partial \varphi} &= mgR \cos(\theta + \varphi) + cR^2 \sin\varphi = -Q_\varphi
\end{aligned}$$

essi sono dati dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} mgR \cos(\theta + \varphi) = 0 \\ mgR \cos(\theta + \varphi) + cR^2 \sin\varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta + \varphi) = 0 \\ \sin\varphi = 0 \end{cases} \quad \varphi = 0, \pi$$

$$\begin{aligned}
\varphi = 0 \quad \theta &= \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \\
\varphi = \pi \quad \theta &= \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

In conclusione, le configurazioni di equilibrio $\mathbf{q}_e = (\theta_e, \varphi_e)$ sono date da:



Ora verifichiamone la stabilità. A questo scopo, calcoliamo la matrice Hessiana di $V(\theta, \varphi)$:

$$\mathcal{H}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} -mgR \sin(\theta + \varphi) & -mgR \sin(\theta + \varphi) \\ -mgR \sin(\theta + \varphi) & -mgR \sin(\theta + \varphi) + cR^2 \cos \varphi \end{bmatrix}$$

e valutiamola nelle configurazioni di equilibrio

$$\mathcal{H}_e^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -mgR \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 - \frac{cR}{mg} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\det \mathcal{H}_e^{(1)}}{(-mgR)^2} = -\frac{cR}{mg} < 0, H_{11}^{(1)} < 0,$$

$$\mathcal{H}_e^{(2)}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) = mgR \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \frac{cR}{mg} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\det \mathcal{H}_e^{(2)}}{(mgR)^2} = \frac{cR}{mg} > 0, H_{11}^{(2)} > 0,$$

$$\mathcal{H}_e^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = mgR \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 - \frac{cR}{mg} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\det \mathcal{H}_e^{(3)}}{(mgR)^2} = -\frac{cR}{mg} < 0, H_{11}^{(3)} > 0,$$

$$\mathcal{H}_e^{(4)}\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right) = -mgR \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \frac{cR}{mg} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\det \mathcal{H}_e^{(4)}}{(-mgR)^2} = \frac{cR}{mg} > 0, H_{11}^{(4)} < 0.$$

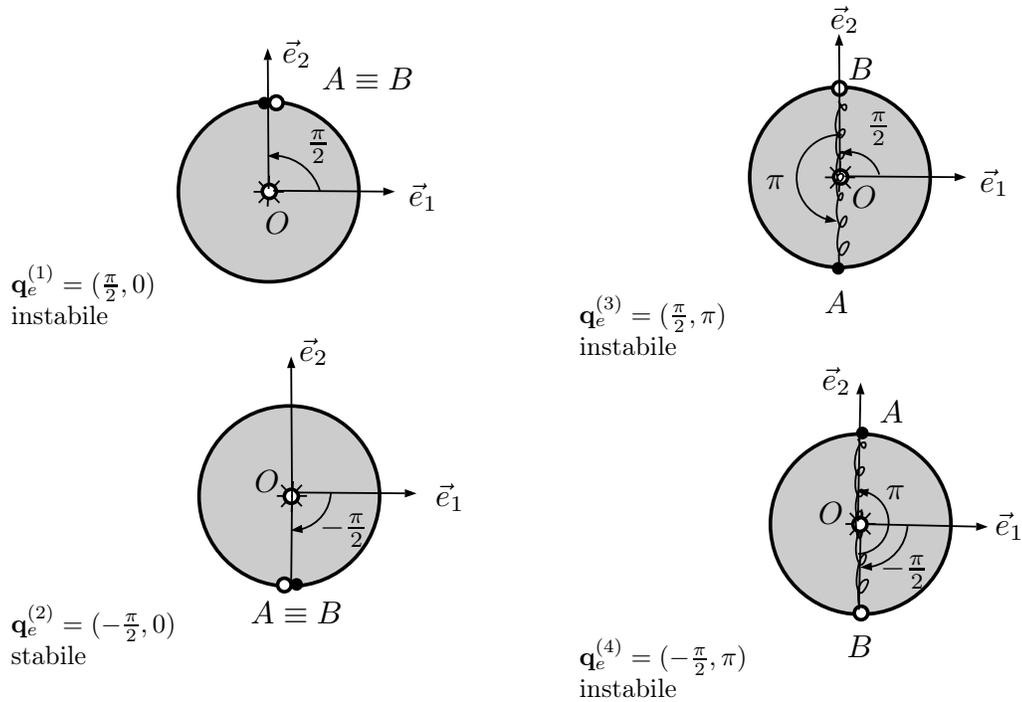
In base agli studi fatti nel corso di Analisi II [Omari e Trombetta] sulla segnatura della forma quadratica associata alla matrice Hessiana e la natura dei punti stazionari di una funzione scalare (in questo caso $V(\theta, \varphi)$), i dati precedenti possono essere riassunti nella tabella seguente

equilibri	$\det \mathcal{H}_e$	H_{11}	segnatura	Punto stazionario	stabilità
$\vec{q}_e^{(1)}$	-		indefinita	sella	instabile
$\vec{q}_e^{(2)}$	+	+	positiva	min.	stabile
$\vec{q}_e^{(3)}$	-		indefinita	sella	instabile
$\vec{q}_e^{(4)}$	+	-	negativa	max	instabile

Ai fini della stabilità degli equilibri, i casi precedenti si riducono a due:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{11} > 0 \text{ et } \det \mathcal{H}_e > 0 \Rightarrow \text{stabilità} \\ \text{altrimenti} \qquad \qquad \qquad \Rightarrow \text{instabilità} \end{array} \right.$$

Ricapitolando i risultati ottenuti sopra,



Metodo sistematico per il calcolo dell'energia potenziale

Qui illustriamo il metodo sistematico per il calcolo di V nel caso del modello con 2 gradi di libertà dell'esempio precedente.

Esempio 6.5.3.

Calcoliamo le forze generalizzate per il modello dell'Esempio 6.5.2 con il I metodo, facendo riferimento alla figura 6.5.1.

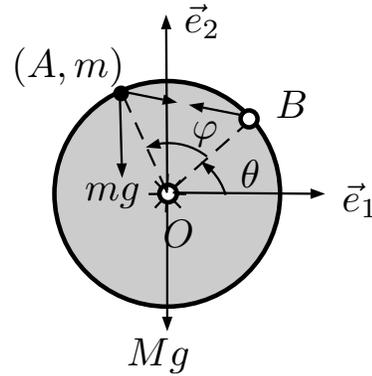


Figura 6.5.1: Diagramma delle forze attive

$$Q_\theta = (m\vec{g} + \vec{F}_A) \cdot \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \theta} + \vec{F}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial \theta} + M\vec{g} \cdot \frac{\partial \vec{x}_O}{\partial \theta}$$

$$Q_\varphi = (m\vec{g} + \vec{F}_A) \cdot \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \varphi} + \vec{F}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial \varphi} + M\vec{g} \cdot \frac{\partial \vec{x}_O}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \theta} = R(-\sin(\theta + \varphi)\vec{e}_1 + \cos(\theta + \varphi)\vec{e}_2) = \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial \theta} = R(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2), \quad \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial \varphi} = 0$$

$$\vec{F}_A = -c(\vec{x}_A - \vec{x}_B) = -cR((\cos(\theta + \varphi) - \cos\theta)\vec{e}_1 + (\sin(\theta + \varphi) - \sin\theta)\vec{e}_2)$$

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_A$$

$$Q_\theta = \left(-mg\vec{e}_2 - cR((\cos(\theta + \varphi) - \cos\theta)\vec{e}_1 + (\sin(\theta + \varphi) - \sin\theta)\vec{e}_2) \right) \cdot R(-\sin(\theta + \varphi)\vec{e}_1 + \cos(\theta + \varphi)\vec{e}_2) +$$

$$+ cR((\cos(\theta + \varphi) - \cos\theta)\vec{e}_1 + (\sin(\theta + \varphi) - \sin\theta)\vec{e}_2) \cdot R(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2) =$$

$$= -mgR\cos(\theta + \varphi) - cR^2((\cos(\theta + \varphi) - \cos\theta)(-\sin(\theta + \varphi)) + (\sin(\theta + \varphi) - \sin\theta)\cos(\theta + \varphi)) +$$

$$+ cR^2((\cos(\theta + \varphi) - \cos\theta)(-\sin\theta) + (\sin(\theta + \varphi) - \sin\theta)\cos\theta)$$

$$= -mgR\cos(\theta + \varphi)$$

$$\begin{aligned}
Q_\varphi &= \left(-mg\vec{e}_2 - cR \left((\cos(\theta + \varphi) - \cos\theta)\vec{e}_1 + (\sin(\theta + \varphi) - \sin\theta)\vec{e}_2 \right) \right) \cdot \\
&\quad \cdot R \left(-\sin(\theta + \varphi)\vec{e}_1 + \cos(\theta + \varphi)\vec{e}_2 \right) = \\
&= -mgR \cos(\theta + \varphi) - cR^2 \left(-\sin(\theta + \varphi) (\overline{\cos(\theta + \varphi)} - \cos\theta) + \cos(\theta + \varphi) (\overline{\sin(\theta + \varphi)} - \sin\theta) \right) \\
&= -mgR \cos(\theta + \varphi) - cR^2 (\sin(\theta + \varphi) \cos\theta - \cos(\theta + \varphi) \sin\theta) = \\
&= -mgR \cos(\theta + \varphi) - cR^2 \sin(\theta + \varphi - \theta) = \\
&= -mgR \cos(\theta + \varphi) - cR^2 \sin\varphi
\end{aligned}$$

Ora, verifichiamo che il test di conservatività (6.2.3) sia soddisfatto

$$\frac{\partial Q_\theta}{\partial \varphi} = mgR \sin(\theta + \varphi) = \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \theta} \quad \forall (\theta, \varphi) \in \mathcal{C}_V$$

Pertanto, esiste in \mathcal{C}_V la funzione energia potenziale $V(\theta, \varphi)$ che possiamo calcolare integrando il sistema di equazioni alle derivate parziali

$$(6.5.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \theta} = mgR \cos(\theta + \varphi) \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgr \cos(\theta + \varphi) + cR^2 \sin\varphi \end{cases}$$

con il metodo di *variazione delle funzioni arbitrarie*. Dalla I Eq. (6.5.5) ricaviamo che

$$(6.5.6) \quad V(\theta, \varphi) = mgR \int \cos(\theta + \varphi) d\theta + F(\varphi) = mgR \sin(\theta + \varphi) + F(\varphi)$$

Si osservi che ora V è determinata a meno di una funzione incognita, $F(\varphi)$, della sola coordinata φ . Per determinare tale funzione, calcoliamo la derivata parziale della (6.5.6) rispetto alla coordinata φ

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgR \cos(\theta + \varphi) + F'(\varphi)$$

e richiediamo che essa soddisfi la II equazione delle (6.5.5), cioè

$$\overline{mgR \cos(\theta + \varphi)} + F'(\varphi) = \overline{mgR \cos(\theta + \varphi)} + cR^2 \sin\varphi.$$

Questa è una equazione differenziale ordinaria nella funzione incognita $F(\varphi)$, la cui soluzione generale è

$$F(\varphi) = -cR^2 \cos\varphi + \text{cost} \Rightarrow V \equiv (6.5.4)$$

Esercizio 6.5.1. *Dire se la sollecitazione agente sui modelli degli esempi 5.11.1 e 5.11.2 e dell'esercizio 5.11.2 è conservativa; in caso affermativo calcolare l'energia potenziale e discutere la stabilità degli equilibri.*

6.6 Soluzione degli esercizi

Esercizio 6.2.1 .

1. Non conservativa.
2. Conservativa poiché $l = 1$. L'energia potenziale è $V(\varphi) = cost$, poiché $Q_\varphi = 0$. Quindi, l'asta è in equilibrio $\forall \varphi \in \mathcal{C}_V = S^1$.

Esercizio 6.5.1 .

Esempio 5.11.1 Non conservativa, poiché $\frac{\partial Q_x}{\partial \varphi} \neq \frac{\partial Q_\varphi}{\partial x}$.

Esempio 5.11.2 La sollecitazione agente sul modello biella-manovella è conservativa poiché $l = 1$. L'energia potenziale è pari a

$$V(\varphi) = - \int Q_\varphi \delta\varphi = - \int L \cos \varphi (cL \sin \varphi - mg) \delta\varphi = mgL \sin \varphi + c \frac{L^2}{2} \cos^2 \varphi$$

Discutiamo la stabilità dei due equilibri $\varphi_e = \pm \frac{\pi}{2}$, che esistono qualunque siano i valori dei parametri e di $\varphi_e^{(1)} = \arcsin \lambda$, $\varphi_e^{(3)} = \pi - \varphi_e^{(1)}$, che esistono solo se $\lambda = \frac{mg}{cL} < 1$. A tale scopo, studiamo il segno della derivata seconda dell'energia potenziale

$$V''(\varphi) = -(cL^2 \cos 2\varphi + mgL \sin \varphi) = cL^2(2 \sin^2 \varphi - 1) - mgL \sin \varphi = cL^2(2 \sin^2 \varphi - 1 - \lambda \sin \varphi),$$

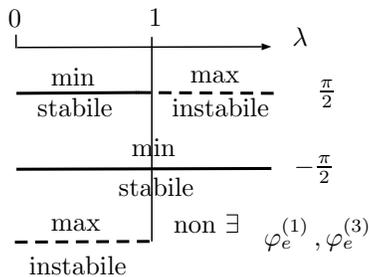
nelle configurazioni di equilibrio. Allora, valgono le disuguaglianze seguenti

$$V''\left(\frac{\pi}{2}\right) = cL^2(1 - \lambda) > 0 \quad \text{se } \lambda < 1$$

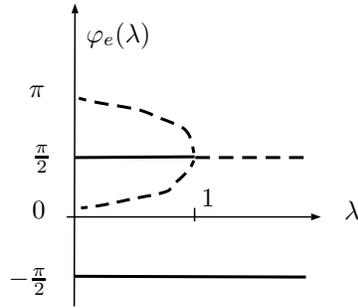
$$V''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = cL^2(1 + \lambda) > 0 \quad \forall \lambda$$

$$V''(\varphi_e^{(1)}) = V''(\varphi_e^{(3)}) = cL^2(\lambda^2 - 1) < 0 \quad \text{se } 0 < \lambda < 1,$$

e quindi la stabilità illustrata dai diagrammi



I risultati ottenuti si possono riassumere nel cosiddetto diagramma di biforcazione



dove si conviene di disegnare con un tratto continuo gli equilibri stabili e con uno discontinuo quegli instabili. Si noti che la stabilità di una stessa configurazione di equilibrio può dipendere dal valore di un parametro; in questo esempio la stabilità di $\varphi_e = \frac{\pi}{2}$ dipende dal valore di λ . Cosa succede in $\varphi = \pi/2$ se $\lambda = 1$?

Esercizio 5.11.2 La sollecitazione attiva del carico di punta è data da

$$Q_\rho = F \quad Q_\varphi = 0 ,$$

ed è conservativa, poichè

$$\frac{\partial Q_\rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \rho} = 0 \quad \forall (\theta, \varphi) \in \mathcal{C}_V$$

Dunque, integrando il sistema

$$(6.6.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \rho} = -F \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

si ottiene che la sua energia potenziale è

$$V^{(foll)} = -F\rho .$$

N.B. Questo esempio dimostra che non sempre un carico follower è *non* conservativo, come si potrebbe pensare. Quindi, si deve verificarlo caso per caso.

La sollecitazione del peso è conservativa e la sua energia potenziale si può calcolare usando la (6.2.4).

Quindi

$$(6.6.2) \quad V^{(peso)} = -m\vec{g} \cdot \vec{x}_G = mg\vec{e}_2 \cdot \left(\rho - \frac{L}{2}\right)\vec{e}_\rho = mg \sin \varphi \left(\rho - \frac{L}{2}\right) ,$$

e l'energia potenziale totale risulta

$$V = V^{(foll)} + V^{(peso)} = -F\rho + mg \sin \varphi \left(\rho - \frac{L}{2}\right) .$$

Per determinare la stabilità degli equilibri, scriviamo la matrice Hessiana di V

$$\mathcal{H}(\rho, \varphi) = \begin{bmatrix} 0 & mg \cos \varphi \\ mg \cos \varphi & -mg\left(\rho - \frac{L}{2}\right) \sin \varphi \end{bmatrix} ,$$

e valutiamola nelle configurazioni di equilibrio (5.12.5)

$$\mathcal{H}_e^{(1)}\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = mg \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\rho - \frac{L}{2}) \end{bmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{H}_e^{(1)} = 0,$$

$$\mathcal{H}_e^{(2)}\left(\frac{L}{2}, \arcsin \lambda\right) = mg \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1-\lambda^2} \\ \sqrt{1-\lambda^2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{H}_e^{(2)} < 0, \text{ se } \lambda \neq 1$$

$$\mathcal{H}_e^{(3)}\left(\frac{L}{2}, \pi - \arcsin \lambda\right) = mg \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{1-\lambda^2} \\ -\sqrt{1-\lambda^2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{H}_e^{(3)} < 0, \text{ se } \lambda \neq 1$$

Dunque, la situazione è la seguente

equilibri	$\det \mathcal{H}_e$	segnatura	Punto stazionario	stabilità
$q_e^{(1)}$	0	?	?	dubbio
$q_e^{(2)}$	-	indefinita	sella	instabile
$q_e^{(3)}$	-	indefinita	sella	instabile

N.B Nei casi in cui $\det \mathcal{H}_e = 0$ o, rispettivamente, \mathcal{H}_e è uguale alla matrice nulla (in questo esempio per $\lambda = 1$) la forma quadratica è semidefinita positiva o, rispettivamente, è nulla. Allora, niente si può dire sulla qualità dei punti stazionari, senza ricorrere ai termini di ordine superiore dello sviluppo di Taylor o ad altri metodi ad hoc.

Esercizio 6.6.1. Calcolare l'energia potenziale (6.6.2) utilizzando il metodo sistematico esposto nella sezione precedente.

Soluzione. L'energia potenziale della forza peso si può calcolare risolvendo il sistema di EDP

$$(6.6.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \rho} = -Q_\rho^{(peso)} = mg \sin \varphi \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -Q_\varphi^{(peso)} = mg \cos \varphi (\rho - \frac{L}{2}) \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$(6.6.4) \quad V(\rho, \varphi) = mg\rho \sin \varphi + F(\varphi)$$

Richiedendo che la (6.6.4) soddisfi la seconda Eq.(6.6.3), si determina la funzione arbitraria $F(\varphi)$. Precisamente, sostituendo

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = mg\rho \cos \varphi + F'(\varphi)$$

nella seconda della (6.6.3) si ottiene la EDO

$$mg\rho \cos \varphi + F'(\varphi) = mg \cos \varphi (\rho - \frac{L}{2}),$$

da cui

$$F(\varphi) = -mg \frac{L}{2} \sin \varphi.$$