Appunti delle lezioni di Meccanica Razionale

Giorgio S. Tondo

a.a. 2020-2021
versione del 10/06/2021

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore; pertanto, essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto.

Indice

1 Introduzione **1**

2 Calcolo Vettoriale **3**
2.1 Richiami di algebra vettoriale . . . 3
2.2 Spazio affine euclideo $\mathcal{E}_3$ . . . 11
2.2.1 Applicazioni affini in $\mathcal{E}_3$ . . . 12
2.3 Riferimento cartesiano in $\mathcal{E}_3$ . . . 13
2.4 Riferimento polare in $\mathcal{E}_2$ . . . 15
2.5 Riferimento cilindrico in $\mathcal{E}_3$ . . . 17
2.6 Riferimento sferico in $\mathcal{E}_3$ . . . 19
2.7 Momenti di vettori applicati . . . 23
2.8 Soluzione dell'Es. 2.2.2 . . . 26

3 Vincoli e gradi di libertà di un sistema meccanico **29**
3.1 Spazio delle configurazioni . . . 29
3.2 Vincoli e loro classificazione . . . 30
3.3 Gradi di libertà di un rigido . . . 33
3.4 Grado di un vincolo . . . 38
3.5 Sovrapposizione di più vincoli . . . 45
3.6 Modelli articolati . . . 53

4 Cinematica dei Rigidi **55**
4.1 Cenni di Cinematica dei Modelli Continui . . . 55
4.2 Moti rigidi . . . 57
4.2.1 Esempi di Moto rigido . . . 60
4.3 Angoli di Eulero . . . 71
4.4 Angoli nautici (di Blagoveščenskij) . . . 76
4.5 Moto rigido generale . . . 78
4.5.1 Teorema di Poisson . . . 79
4.6 Applicazioni del teorema di Poisson . . . 81
4.6.1 Campo di velocità di un rigido . . . 82
4.6.2 Campo delle accelerazioni di un rigido . . . 86
4.7 Cinematica Relativa . . . 86
4.7.1 Formula di derivazione cinematica . . . 87
4.7.2 Composizione delle velocità . . . 88

4.7.3 Composizione delle accelerazioni . . . 90
4.7.4 Composizione delle velocità angolari . . . 92
4.8 Moto di precessione . . . 93
4.9 Moto rigido piano . . . 97
4.9.1 Accelerazioni del moto piano . . . 105
4.9.2 Disco appoggiato su di una guida rettilinea . . . 105
4.9.3 Vincolo di puro rotolamento . . . 108
4.10 Disco appoggiato su un piano . . . 113
4.10.1 Puro rotolamento . . . 116
4.11 Classificazione dei moti rigidi . . . 118
4.12 Soluzione degli esercizi . . . 119

5 Principio dei lavori virtuali 123
5.1 Moti possibili e moti virtuali . . . 123
5.2 Spostamenti possibili e virtuali . . . 124
5.3 Vincoli unilateri e spostamenti virtuali irreversibili . . . 126
5.4 Campo degli spostamenti virtuali di un rigido . . . 127
5.5 Gradi di mobilità di un modello meccanico . . . 127
5.6 Vincoli piani . . . 129
5.7 Vincoli nello spazio . . . 131
5.8 Lavoro virtuale . . . 133
5.8.1 Lavoro virtuale su un rigido . . . 135
5.9 Equilibrio dei sistemi materiali . . . 135
5.10 Principio dei lavori virtuali . . . 136
5.11 PLV per un sistema olonomo . . . 143
5.12 Soluzioni degli esercizi . . . 151

6 Sollecitazioni conservative 155
6.1 Richiami sui campi di forze conservative . . . 155
6.2 Sollecitazione conservativa . . . 158
6.3 Energia potenziale di una molla . . . 162
6.3.1 Molle lineari interne . . . 162
6.3.2 Molle lineari esterne . . . 162
6.3.3 Molle Angolari . . . 164
6.4 Energia potenziale ed equilibri . . . 165
6.5 Criterio statico di stabilità . . . 166
6.6 Soluzione degli esercizi . . . 175

7 Forze applicate su un rigido 179
7.1 Insiemi di forze equivalenti su un rigido . . . 179
7.2 Insiemi elementari di forze su un rigido . . . 180
7.2.1 Singola forza . . . 180
7.2.2 Coppia . . . 181
7.2.3 Torsore . . . 181
7.2.4 Insieme nullo o equilibrato . . . 182
7.3 Caso generale . . . 182
7.4 Insiemi di forze a risultante equivalente . . . 184

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

7.4.1 Forze complanari. 184
7.4.2 Forze concorrenti 185
7.4.3 Forze parallele 186
7.5 Proprietà del centro G delle forze parallele 188

8 Equazioni cardinali della statica 197
8.1 Classificazione delle sollecitazioni 197
8.2 Sollecitazioni interne 199
8.2.1 Sollecitazione interne in un rigido 199
8.3 Equazioni cardinali della statica dei sistemi 200
8.4 Sollecitazione reattiva su un rigido 202
8.4.1 Vincoli piani non dissipativi 203
8.4.2 Vincoli spaziali non dissipativi 207
8.5 Problemi della statica dei modelli 209

9 Sollecitazioni interne in un rigido in equilibrio 217
9.1 Azioni interne in un rigido 3D in equilibrio 217
9.2 Azioni interne in un rigido 2D in equilibrio 219
9.3 Azioni interne in rigido 1D in equilibrio 221
9.4 Azioni interne in archi e aste "scariche" in equilibrio 222
9.5 Osservazioni sui fili 223
9.6 Calcolo di azioni interne in un rigido monodimensionale 224
9.6.1 Approfondimento: diagrammi delle azioni interne 226

10 Modelli articolati 229
10.1 Biella-manovella 229
10.2 Arco a 3 cerniere 233
10.3 Esempio di problema inverso 237
10.3.1 Equazioni Cardinali della Statica 237
10.3.2 Equazione pura di equilibrio 241
10.4 Soluzione del Quiz 7.1 242

11 Equazioni Cardinali della Dinamica 243
11.1 Principio di D'Alembert 243
11.1.1 I Equazione Cardinale della Dinamica 243
11.1.2 II Equazione Cardinale della Dinamica 244
11.2 Equazione dell'energia cinetica 245
11.3 Statica e Dinamica relativa del punto materiale 246
11.4 Statica e Dinamica relativa dei modelli meccanici 250

12 Operatore d'inerzia per un Rigido 259
12.1 Momento angolare per i rigidi 259
12.2 Energia cinetica di un rigido 261
12.3 Operatore d'inerzia per un rigido 261
12.4 Matrice d'inerzia nel caso piano 264
12.5 Ellissoide d'inerzia 265
12.6 Assi principali d'inerzia 269

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

12.7 Variazione con il polo dell'operatore d'inerzia . . . 277
12.8 Assi principali d'inerzia centrali . . . 279

13 Statica e Dinamica dei Rigidi 283
13.1 Equazioni Cardinali della Statica per un Rigido . . . 283
13.2 Equazioni Cardinali della Dinamica per un Rigido . . . 285
13.3 Moto rigido piano . . . 287
13.4 Rigido con asse fisso . . . 288
13.5 Moti particolari di un rotore . . . 293
13.6 Rigido con punto fisso . . . 296
13.6.1 Moto per inerzia . . . 299
13.6.2 Effetti giroscopici elementari . . . 305
13.6.3 Tendenza al parallelismo . . . 307
13.6.4 Tenacia dell'asse giroscopico . . . 307
13.7 Disco appoggiato su una guida fissa . . . 308

14 Equazioni di Lagrange 319
14.1 Equazioni di Lagrange non conservative . . . 319
14.2 Equazioni di Lagrange conservative . . . 322
14.3 Equazioni di Lagrange in forma mista . . . 322
14.4 Struttura dell'energia cinetica di un sistema olonomo . . . 326
14.5 Struttura delle equazioni di Lagrange . . . 329
14.6 Integrali primi per i sistemi olonomi . . . 331
14.7 Macchine semplici . . . 333

15 Linearizzazione delle equazioni di Lagrange 335
15.1 Modelli con un grado di libertà . . . 335
15.2 Modelli con l gradi di libertà . . . 339
15.3 Sistemi di eq. di Lagrange lineari . . . 342
15.3.1 Modelli lineari con l gradi di libertà . . . 344
15.4 Costruzione delle coordinate normali . . . 351

16 Bibliografia 359

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Capitolo 1

Introduzione

La Meccanica Razionale (termine introdotto da I. Newton, 1642–1727) è una disciplina che studia l'equilibrio e il moto dei sistemi fisici. Per comoditÃ didattica, si usa dividere la Meccanica in:

Cinematica: studio della geometria del *moto*, prescindendo dalle cause che lo provocano;

Statica: studio dell'*equilibrio* sotto l'azione di una sollecitazione (causa);

Dinamica: studio del *moto* sotto l'azione di una sollecitazione.

Poiché la realtÃ è sempre molto complicata, la Meccanica Razionale ne estrae gli aspetti pišignificativi, costruendo dei *modelli* (o *sistemi materiali*) di sistemi fisici reali. Tali modelli saranno abbastanza semplificati da poter essere trattati con gli strumenti della matematica (calcolo vettoriale e tensoriale, calcolo differenziale ed integrale, etc.) ma, nello stesso tempo, abbastanza raffinati da descrivere gli aspetti della realtà fisica ai quali si è interessati. I modelli più studiati sono:

Discreti

- punto materiale;
- sistemi di punti materiali.

Continui

- solidi
  - rigido: se la distanza tra i suoi punti **non** dipende dalla sua configurazione;
  - articolato: costituito da più rigidi vincolati tra loro;
  - deformabile: filo, trave, etc.
- fluidi: liquidi, gas.

Naturalmente sono possibili varie combinazioni dei suddetti modelli: ad esempio un punto materiale piú un rigido, etc. In questo corso non tratteremo i solidi deformabili, nè i fluidi. Per questi argomenti si rimanda ai successivi corsi di Scienza delle Costruzioni, di Idraulica, di Fluidodinamica.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Capitolo 2

Calcolo Vettoriale

Tutti i sistemi fisici sono collocati nello spazio, del quale abbiamo un'esperienza quotidiana (ma limitata) e si evolvono nel tempo. In questo capitolo richiameremo il modello matematico per lo spazio fisico, in cui ambienteremo i modelli meccanici che studieremo in questo corso: lo spazio affine euclideo tridimensionale. Gli elementi di tale spazio, formalizzano il *posto* in cui avviene un evento (per esempio il posto in cui decade una particella elementare o quello in cui si trova un aereo su uno schermo radar) e lo *spostamento* da un posto all'altro (della particella, dell'aereo). Il posto e lo spostamento sono rappresentati da due enti matematici fondamentali: i *punti* e i *vettori*. Richiamiamo, prima, alcuni concetti sui vettori, già acquisiti dai corsi di Fisica 1, Algebra Lineare e Geometria, Analisi I e II, rinviando a quei corsi per tutte le dimostrazioni. Poi, ricorderemo la nozione di spazio affine euclideo.

2.1 Richiami di algebra vettoriale

Consideriamo uno spazio vettoriale astratto tridimensionale munito di prodotto *scalare* e prodotto *vettoriale* $(E_3, \cdot, \times)$. Come esempio, possiamo pensare a $\mathbb{R}^3$ con le proprietà della geometria euclidea usuale. Gli elementi di E_3 sono detti vettori *liberi*. Fissata una base $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, possiamo esprimere in modo univoco un qualunque vettore di E_3 come combinazione lineare degli elementi della base e chiameremo *componenti* del vettore (sulla base scelta) i coefficienti della combinazione lineare. Ad esempio

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \qquad [\vec{a}]^{\mathcal{B}} = [a_x\, a_y\, a_z]^T$$

$$\vec{b} = b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \qquad [\vec{b}]^{\mathcal{B}} = [b_x\, b_y\, b_z]^T$$

N.B. Spesso, i vettori vengono identificati con gli elementi di $\mathbb{R}^n$. Ad esempio, se $n = 3$, si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra i vettori di E_3 e gli elementi di $\mathbb{R}^3$, tramite l'applicazione

$$\vec{a} \mapsto \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T$$

ed identificare E_3 con $\mathbb{R}^3$. Si tenga presente, comunque, che tale identificazione dipende dalla base poichè le componenti di un vettore dipendono dalla base scelta. Vediamo come le componenti si trasformano sotto un cambiamento di base. Indichiamo con $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la "nuova" base e con $[R]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice del cambiamento di base, le cui colonne sono le componenti della "vecchia base" sulla "nuova", quindi soddisfano la relazione

$$\left[\begin{array}{ccc} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{array}\right] [R]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \ . \tag{2.1.1}$$

Allora, il vettore $\vec{a}$ si scrive

$$\vec{a} = \left[\begin{array}{ccc} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \end{array}\right] [\vec{a}]^{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{ccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{array}\right] [R]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [\vec{a}]^{\mathcal{B}} \ . \tag{2.1.2}$$

Pertanto, vale la legge di trasformazione

$$[\vec{a}]^{\mathcal{B}'} = [R]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [\vec{a}]^{\mathcal{B}} \ . \tag{2.1.3}$$

Definizione 1. Diremo che due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ dello spazio vettoriale E_3 hanno la stessa orientazione se la matrice del cambiamento di base ha determinante positivo

$$det\left([R]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right) > 0 \ , \tag{2.1.4}$$

altrimenti diremo che hanno orientazioni opposte.

Esercizio 2.1.1. *Verificare che la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, ha la stessa orientazione di $(\vec{e_y}, \vec{e_z}, \vec{e_x})$ e di $(\vec{e_z}, \vec{e_x}, \vec{e_y})$, mentre ha opposta orientazione di $(\vec{e_y}, \vec{e_x}, \vec{e_z})$, $(\vec{e_x}, \vec{e_z}, \vec{e_y})$, $(\vec{e_z}, \vec{e_y}, \vec{e_x})$.*

Richiamiamo le operazioni sui vettori, rinviando, per le definizioni, ai corsi precedenti.

Somma di vettori

$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_x + b_x)\overrightarrow{e_x} + (a_y + b_y)\overrightarrow{e_y} + (a_z + b_z)\overrightarrow{e_z}$

Prodotto di un vettore per un fattore scalare

$\lambda\overrightarrow{a} = (\lambda a_x)\overrightarrow{e_x} + (\lambda a_y)\overrightarrow{e_y} + (\lambda a_z)\overrightarrow{e_z}$ (l'operatore prodotto si sottintende).

Diremo che $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli (o proporzionali) se $\exists\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Prodotto scalare tra due vettori

$\cdot : E_3 \times E_3 \to \mathbb{R}, (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \mapsto \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ (l'operatore prodotto **NON** si sottintende).

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |a|\ |b|\ \cos\varphi$.

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ et $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$

Lo scalare $|\vec{a}| := \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ è detto modulo del vettore $\vec{a}$ ed è un numero positivo se $\vec{a} \neq \vec{0}$, è nullo se e solo se $\vec{a} = \vec{0}$.

Il versore di $\vec{a}$ è il vettore di modulo pari a 1, parallelo e concorde ad $\vec{a}$. Quindi, è definito come $vers(\vec{a}) := \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

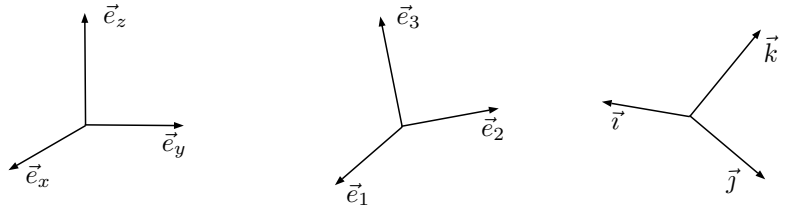
Di solito, useremo basi ortonormali (ON) in E_3, cioè tali che

$$\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker, che assume valore 1 se $i = j$ e valore 0 se $i \neq j$.

Spesso indicheremo le basi ON scelte con $(\vec{e_x}, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, etc..

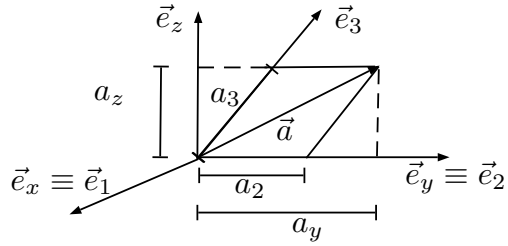


Se la base $\mathcal{B} = (\vec{e_x}, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ è ortonormale, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, quindi $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Esercizio 2.1.2. *Verificare che le componenti del vettore $\vec{a}$ sulla base ortonormale $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, si calcolano come*

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i \qquad i = 1, 2, 3 \ . \tag{2.1.5}$$

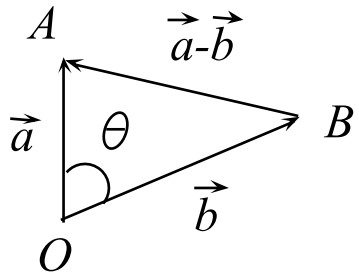
N.B. Si osservi che la (2.1.5) non vale su basi che non siano ON. Ad esempio, confrontando le componenti del vettore $\vec{a}$ di figura su una base ON, $(\vec{e_x}, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ e una base non ON, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, si trova



$$\begin{aligned} a_y &= \vec{a} \cdot \vec{e}_y \neq a_2 \\ a_z &= \vec{a} \cdot \vec{e}_z \neq a_3 \end{aligned}$$

Applicazione

La lunghezza del lato AB del triangolo scaleno AOB si può calcolare utilizzando il teorema del "coseno" o di Carnot:



$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$
$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

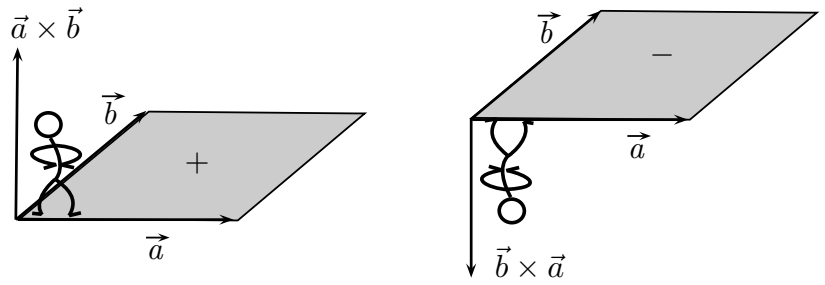


Figura 2.1.1: Prodotto vettoriale come area orientata

Prodotto vettoriale tra due vettori

È l'applicazione $\times : E_3 \times E_3 \to E_3, (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \mapsto \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, che in forma geometrica si può calcolare come

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{cases} \text{modulo:} & \left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| |\sin\varphi| \\ \text{direzione:} & \perp \pi\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) \\ \text{verso: regola della mano destra, della vite, del cavatappi} \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Esso rappresenta l'area della superficie *orientata* del parallelogramma che ha per lati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, come nella Fig. 2.1.1.

In forma algebrica, scelta una base ON $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, il prodotto vettoriale si può calcolare tramite il determinante formale

$$\vec{a} \times \vec{b} = det \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \vec{e}_x\,(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{e}_y\,(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{e}_z\,(a_x b_y - a_y b_x) \tag{2.1.7}$$

Segue immediatamente che il prodotto vettoriale è anti-commutativo $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$; ciò implica che $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. Inoltre vale la

Legge di Annullamento

Se $\vec{a} \neq \vec{0}$ et $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ se e solo se $\vec{a}$ è parallelo a $\vec{b}$.

Dalla Eq. (2.1.7) segue che i prodotti vettoriali dei versori della base $\mathcal{B}$ sono

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \tag{2.1.8}$$

Definizione 2.1.1. *Diremo base destra una base ON che soddisfa le Eq.* (2.1.8) *e base sinistra una base con orientazione opposta.*

Le Eq. (2.1.8) permettono di calcolare il prodotto vettoriale facendo uso della proprietà distributiva.

Esercizio 2.1.3. *Calcolare $\vec{a} \times \vec{b}$ mediante la proprietà distributiva e le (2.1.8). Poi, confrontare il risultato con la (2.1.7).*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

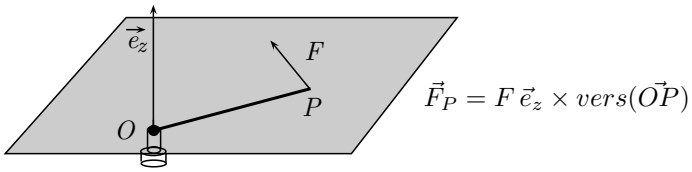


Figura 2.1.2: Carico follower ortogonale a un'asta vincolata in un piano

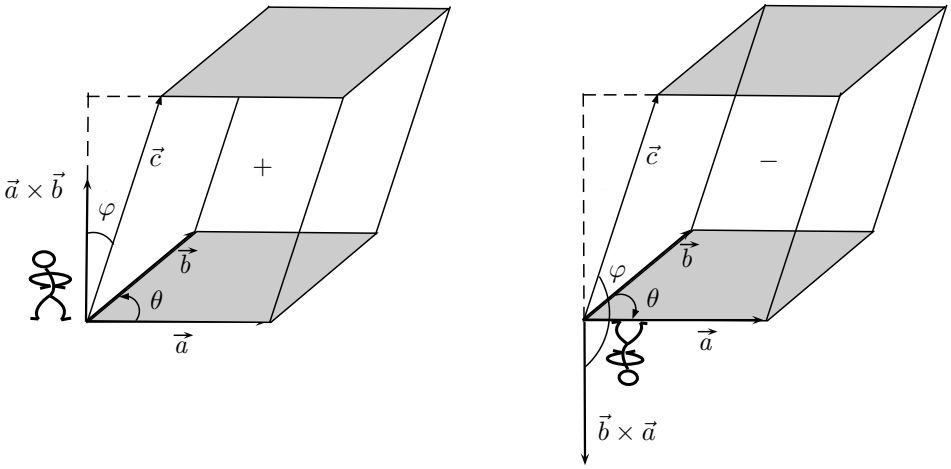


Figura 2.1.3: Prodotto misto come volume orientato

Applicazione

Carico ortogonale all'asta OP vincolata in un piano con una cerniera cilindrica in O, come nella Fig. 2.1.2.

Prodotto misto

È l'applicazione data da $E_3 \times E_3 \times E_3 \to \mathbb{R}$, $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \mapsto \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$. In forma geometrica si può calcolare come

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos\varphi = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta |\vec{c}| \cos\varphi \ . \tag{2.1.9}$$

Quindi alla terna di vettori $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ associa il volume *orientato* del parallepipedo di lati $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$, come nella Fig. 2.1.3. In forma algebrica, scelta una base ON $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, si può scrivere come

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = det \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \ .$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Legge di annullamento

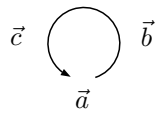
Se $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sono complanari, allora $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. In particolare, se $\vec{a}\left(\text{o}\,\vec{b}\right) \parallel \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. Viceversa, se $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ et $\vec{a} \neq \vec{0}$ et $\vec{b} \neq \vec{0}$ et $\vec{c} \neq \vec{0}$, allora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sono complanari.

Proprietà

Dalla rappresentazione mediante il determinante segue l'invarianza del prodotto misto per permutazioni cicliche e per scambio degli operatori prodotto:

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \quad \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a} = \quad \vec{c} \times \vec{a} \cdot \vec{b} \tag{2.1.10}$$

permutazioni cicliche



$$\Updownarrow$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \quad \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} \tag{2.1.11}$$

scambio

Doppi prodotti vettoriali

Iterando il prodotto vettoriale, si possono costruire le due applicazioni da $E_3 \times E_3 \times E_3 \to E_3$, date da

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \mapsto \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} \quad = \quad (\vec{a} \cdot \vec{c})\ \vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)\ \vec{a} \tag{2.1.12}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \mapsto \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \quad = \quad (\vec{a} \cdot \vec{c})\ \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\ \vec{c} \tag{2.1.13}$$

Poichè i due prodotti danno come risultato due vettori differenti, possiamo concludere che

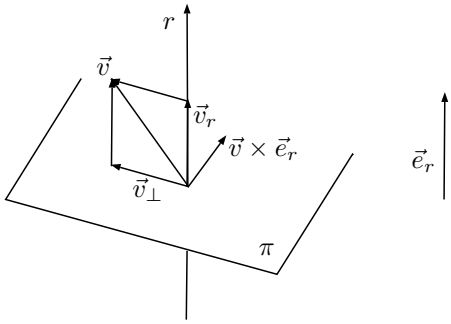
Lemma 1. *Il prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa.*

Esercizio 2.1.4. *Verificare che vale l'identità di Jacobi, cioè:*

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} + \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$$

Applicazione 1

Scomposizione di un vettore lungo un asse (retta orientata) e nel piano $\pi \perp$ all'asse.



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Chiameremo:

- $v_r = v_\parallel = \vec{v} \cdot \vec{e}_r = |\vec{v}| \cos\varphi$, la componente (scalare) di $\vec{v}$ lungo l'asse r;
- $\vec{v}_r = \vec{v}_\parallel = v_r \vec{e}_r$, il componente (vettoriale) di $\vec{v}$ lungo l'asse r;
- $\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_r = \vec{v} - v_r \vec{e}_r \overset{(2.1.13)}{=} \vec{e}_r \times (\vec{v} \times \vec{e}_r)$, il componente di $\vec{v} \perp$ all'asse r.

Pertanto, vale la seguente scomposizione:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\perp = (\vec{v} \cdot \vec{e_r})\, \vec{e}_r + \vec{e_r} \times (\vec{v} \times \vec{e_r}) \tag{2.1.14}$$

Applicazione 2

Consideriamo l'equazione vettoriale

$$\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}\ , \tag{2.1.15}$$

dove $\vec{a}$, $\vec{b}$ sono due vettori di E_3 e cerchiamone tutte le soluzioni, cioè tutti i vettori $\vec{x} \in E_3$ che la soddisfano. Cominciamo con l'osservare che tale equazione è *lineare* in $\vec{x}$ e, se $\vec{b} \neq \vec{0}$, è anche non omogenea. Quindi, la soluzione generale sarà la somma delle soluzioni dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare della non omogenea. Innanzitutto, osserviamo che se $\vec{a} = \vec{0}$ **et** $\vec{b} \neq \vec{0}$, non esiste alcuna soluzione, mentre, se $\vec{a} = \vec{0}$ **et** $\vec{b} = \vec{0}$, l'equazione (2.1.15) è identicamente soddisfatta da tutti i vettori di E_3. Esaminiamo, quindi, il caso $\vec{a} \neq \vec{0}$ e cerchiamo una soluzione particolare $\vec{x}_0$ dell'equazione *non* omogenea. Dalla definizione di prodotto vettoriale (2.1.6), segue che la (2.1.15) ha soluzione solo se $\vec{a}$ **et** $\vec{x}$ sono ortogonali a $\vec{b}$. Dunque, devono valere le condizioni di esistenza

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} & = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{b} & = 0 \end{cases} \tag{2.1.16}$$

Allora, verificato che $\vec{a}$ è ortogonale a $\vec{b}$, cerchiamo una soluzione particolare $\vec{x}_0$ nel piano ortogonale a $\vec{b}$ e, per semplicità, in direzione ortogonale anche ad $\vec{a}$, come nella Fig. 2.1.4. Affinché tale soluzione particolare soddisfi la (2.1.6), deve avere modulo pari a $|\vec{b}|/|\vec{a}|$ e verso tale che $\big(vers(\vec{x}_0), vers(\vec{a}), vers(\vec{b})\big)$ sia una base destra. Quindi, essa si scrive

$$\vec{x}_0 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\ .$$

Adesso, osserviamo che la soluzione generale dell'omogenea associata è data da tutti e soli i vettori paralleli ad $\vec{a}$. Dunque, la soluzione generale dell'eq. (2.1.6) risulta

$$\vec{x} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2} + \lambda \vec{a} \qquad \lambda \in \mathbb{R}\ , \tag{2.1.17}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

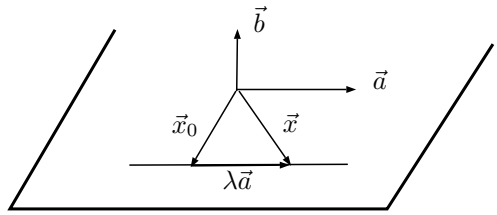


Figura 2.1.4: Soluzioni dell'equazione $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$

Operatori lineari trasposti, simmetrici, antisimmetrici

Dato un generico operatore lineare (o endomorfismo) su uno spazio vettoriale euclideo $\mathbf{A} : E_3 \to E_3$, ricordiamo che la sua matrice rappresentativa su una base *ortonormale* $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è data da

$$A_{ij} = \vec{e}_i \cdot \mathbf{A}\, \vec{e}_j \ . \tag{2.1.18}$$

L'operatore *trasposto* di $\mathbf{A}$ rispetto al prodotto scalare, denotato da $\mathbf{A}^T : E_3 \to E_3$, è definito come

$$\vec{u} \cdot (\mathbf{A}^T \vec{v}) = (\mathbf{A}\vec{u}) \cdot \vec{v} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E_3 \tag{2.1.19}$$

Allora, la sua matrice rappresentativa avrà come elementi

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} \overset{(2.1.18)}{=} \vec{e}_i \cdot \mathbf{A^T}\, \vec{e}_j \overset{(2.1.19)}{=} (\mathbf{A}\, \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j \overset{(2.1.18)}{=} A_{ji} \ , \tag{2.1.20}$$

quindi la sua matrice sarà la trasposta di quella di $\mathbf{A}$

$$[\mathbf{A}^T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \left([\mathbf{A}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\right)^T \ . \tag{2.1.21}$$

Gli operatori che soddisfano la condizione

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Leftrightarrow \vec{u} \cdot (\mathbf{A}\vec{v}) = (\mathbf{A}\vec{u}) \cdot \vec{v} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E_3 \ . \tag{2.1.22}$$

si dicono *simmetrici* (o autoaggiunti). Per la (2.1.21) la loro matrice rappresentativa, su una base ON, è una matrice simmetrica, cioè una matrice che ha uguali fra loro gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale: $A_{ij} = A_{ji}$. Invece, gli operatori che soddisfano la condizione

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \Leftrightarrow \vec{u} \cdot (\mathbf{A}\vec{v}) = -(\mathbf{A}\vec{u}) \cdot \vec{v} \tag{2.1.23}$$

si dicono *antisimmetrici* (o emisimmetrici). Su una base ortonormale, la loro matrice rappresentativa è una matrice antisimmetrica, cioè una matrice che ha gli elementi della diagonale principale nulli e quelli simmetrici rispetto alla stessa diagonale, opposti: $A_{ij} = -A_{ji}$.

Operatori ortogonali

Nella cinematica dei rigidi utilizzeremo spesso operatori lineari che conservano il prodotto scalare e, per questo, sono detti ortogonali

$$\mathbf{R}\vec{u} \cdot \mathbf{R}\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E_3 \tag{2.1.24}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Introducendo l'operatore trasposto, segue che

$$\mathbf{R}\vec{u} \cdot \mathbf{R}\vec{v} = \vec{u} \cdot (\mathbf{R}^T \mathbf{R}\vec{v}) \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E_3$$

Confrontando le due formule precedenti, si vede subito che un operatore ortogonale è caratterizzato dalla proprietà

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbb{1} \Leftrightarrow \mathbf{R}^T \equiv \mathbf{R}^{-1} \tag{2.1.25}$$

Questa implica che

$$1 = \det(\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = \det(\mathbf{R}) \det(\mathbf{R}^T) = \det(\mathbf{R})^2$$

Pertanto, il determinante di un operatore ortogonale è pari a $+1$ o -1.

2.2 Spazio affine euclideo $\mathcal{E}_3$

Finora abbiamo incontrato solo vettori *liberi*. Introduciamo, in questa sezione, il concetto di vettore *applicato* in un punto di uno spazio *affine euclideo*. Consideriamo la terna $\mathcal{E}_3 = (\mathcal{A}_3, E_3, \sigma)$ in cui

$\mathcal{A}_3$: insieme di elementi che chiamiamo punti e indichiamo con P, Q, ...;
E_3: insieme dei vettori liberi $\vec{u}$,$\vec{v}$, ...;
σ: applicazione bi-punto,

$$\sigma : \mathcal{A}_3 \times \mathcal{A}_3 \to E_3, \quad (P, Q) \mapsto \sigma(P, Q) \ .$$

Il vettore $\sigma(P, Q)$ è detto vettore posizione di Q rispetto a P, o vettore *spostamento* da P a Q e viene denotato in diversi modi, tra i quali

$$\sigma(P, Q) = \overrightarrow{PQ} = Q - P$$

L'applicazione σ deve soddisfare gli assiomi seguenti:

Assioma 1: $\forall (P, \vec{v}) \ \exists! \, Q \in \mathcal{A}_3$ t.c. $\vec{v} = \sigma(P, Q)$.
In altri termini, ogni applicazione parziale:

$$\sigma_P : \mathcal{A}_3 \to E_3, \quad Q \mapsto \sigma_P(Q) = \sigma(P, Q)$$

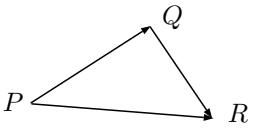
è invertibile, cioè: $\forall P \ \exists \ \sigma_P^{-1} : E_3 \to \mathcal{A}_3, \ \vec{v} \mapsto Q$ t.c. $\vec{v} = \sigma(P, Q)$.

La coppia $(P, \vec{v})$ è detta vettore *applicato* e spesso sarà denotato con $\vec{v}_P$. L'assioma **1** permette di definire la somma di un *punto* P e di un *vettore* $\vec{v}$ applicato in P, che scriveremo

$$P + \vec{v} = Q \qquad \text{dove} \qquad Q = \sigma_P^{-1}(\vec{v}). \tag{2.2.1}$$

Assioma 2 $\forall (P, Q, R) \quad \sigma(P, Q) + \sigma(Q, R) = \sigma(P, R)$
Tale assioma è detto proprietà triangolare.
Scritta mediante la notazione di Grassmann permette di utilizzare facilmente "l'algebra dei punti":

$$(Q - P) + (R - Q) = (\cancel{Q} - P) + (R - \cancel{Q}) = (R - P)$$



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

N.B. Fissando un punto $O \in \mathcal{E}_3$, detto origine, si può introdurre una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti $\mathcal{E}_3$ e lo spazio euclideo soggiacente E_3, tramite l'applicazione

$$P \mapsto \vec{r}_P = \vec{x}_P := P - O \ ,$$

che a ogni punto P di $\mathcal{E}_3$ associa il suo vettore posizione rispetto all'origine O. Tale vettore è anche detto vettore raggio di P. Si noti, comunque, che tale corrispondenza dipende dalla scelta di O. Tramite i vettori posizione di P e di Q possiamo anche scrivere

$$Q - P = \vec{x}_Q - \vec{x}_P \ .$$

Esempio 2.2.1. *(vedi la Figura 2.2).*

1. *Asse (o retta orientata) passante per un punto O e parallelo ad un vettore $\vec{v}$. Sarà denotato con $(O, \vec{v})$ ed ha equazione parametrica:*

$$P(\lambda) = O + \lambda\, \vec{v} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. *Il piano ortogonale a un vettore $\vec{v}$ e passante per un punto O avrà equazione*

$$(P - O) \cdot \vec{v} = 0 \tag{2.2.2}$$

3. *Distanza di un punto P da un altro punto Q*

$$d(P, Q) = |P - Q|$$

4. *Distanza orientata di un punto P da un piano π. Detto $\vec{u}$ uno dei due versori (tra loro opposti) ortogonali a π e O un generico punto del piano, risulta*

$$d(P, \pi) = |P - O| \cos\theta = (P - O) \cdot \vec{u}$$

Il segno sarà positivo se P sta nel semispazio (aperto) verso cui punta $\vec{u}$, negativo se P sta nel semispazio opposto.

5. *Distanza di un punto P da un asse r passante per un punto O e parallelo a un versore $\vec{u}$*

$$d(P, r) = |P - O'||\sin\theta| = |(P - O') \times \vec{u}| \qquad O' \in (O, \vec{u})$$

2.2.1 Applicazioni affini in $\mathcal{E}_3$

Nel seguito avremo bisogno di alcune applicazioni affini. Le applicazioni affini $\Phi : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ sono quelle che rispettano la struttura affine dello spazio e sono definite implicitamente dalla esistenza e dall'unicità di un operatore lineare associato $\hat{\Phi} : E_3 \to E_3$ che soddisfa la condizione

$$\Phi(Q) - \Phi(P) = \hat{\Phi}(Q - P) \qquad \forall P, Q \in \mathcal{E}_3 \tag{2.2.3}$$

La trasformazione lineare $\hat{\Phi}$, che deve essere indipendente dai punti P e Q dello spazio, si dice la parte lineare di Φ poichè, se $Q = P + \vec{v}$, l'incremento dell'applicazione Φ nel passaggio da P a Q si scrive, per la (2.2.3),

$$\Phi(P + \vec{v}) - \Phi(P) = \hat{\Phi}\, \vec{v} \ . \tag{2.2.4}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

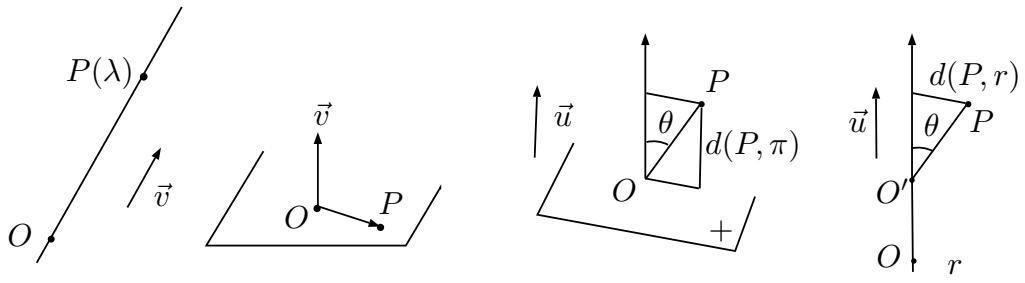


Figura 2.2.1: Geometria affine euclidea

Dunque, $\hat{\Phi}$ coincide con il differenziale dell'applicazione Φ e la sua rappresentazione matriciale coincide con la matrice Jacobiana di Φ che, evidentemente, risulta indipendente dal punto P

$$[\frac{\partial \Phi}{\partial x}](P) \equiv [\hat{\Phi}] \tag{2.2.5}$$

Esempio 2.2.2. *Fissato un punto $O' \in \mathcal{E}_3$ e un operatore lineare $\mathbf{A} : E_3 \to E_3$, l'applicazione*

$$\Phi(P) = O' + \mathbf{A}(P - O') \tag{2.2.6}$$

è un'applicazione affine.

Esercizio 2.2.1. *Dimostrare che l'applicazione Φ (2.2.6) è affine e ha almeno un punto fisso, cioè un punto Q tale che $\Phi(Q) \equiv Q$.*

Esercizio 2.2.2. *Dimostrare che l'applicazione della Figura 2.2.2, detta* Riflessione *rispetto al piano π, si puó scrivere come*

$$S_\pi(P) = O + \hat{\boldsymbol{S}}_{\vec{u}}(P - O) \qquad \forall O \in \pi \ , \vec{u} \perp \pi,$$

dove, se $|\vec{u}| = 1$,

$$\hat{\boldsymbol{S}}_{\vec{u}}(\vec{v}) := \vec{v} - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} \qquad \forall \vec{v} \in E_3 \ .$$

Inoltre, dimostrare che S_π è un'applicazione affine e determinarne i punti fissi. Poi, dimostrare che $\hat{\boldsymbol{S}}_{\vec{u}}$ è un operatore simmetrico ed ortogonale e calcolarne gli autospazi. e i relativi autovalori. Infine trovare una base ON di autovettori per $\hat{\boldsymbol{S}}_{\vec{u}}$, la sua matrice rappresentativa su tale base e il suo determinante.

Definizione 2.2.1. *Le applicazioni affini $\Phi : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$, bigettive e, quindi, invertibili, si dicono trasformazioni affini di $\mathcal{A}_3$ o affinità.*

2.3 Riferimento cartesiano in $\mathcal{E}_3$

Un riferimento cartesiano in $\mathcal{E}_3$ è definito dalla scelta di un punto $O \in \mathcal{A}_3$, detto origine del riferimento, e dalla scelta di una base di vettori $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ in E_3. Esso sarà indicato con $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

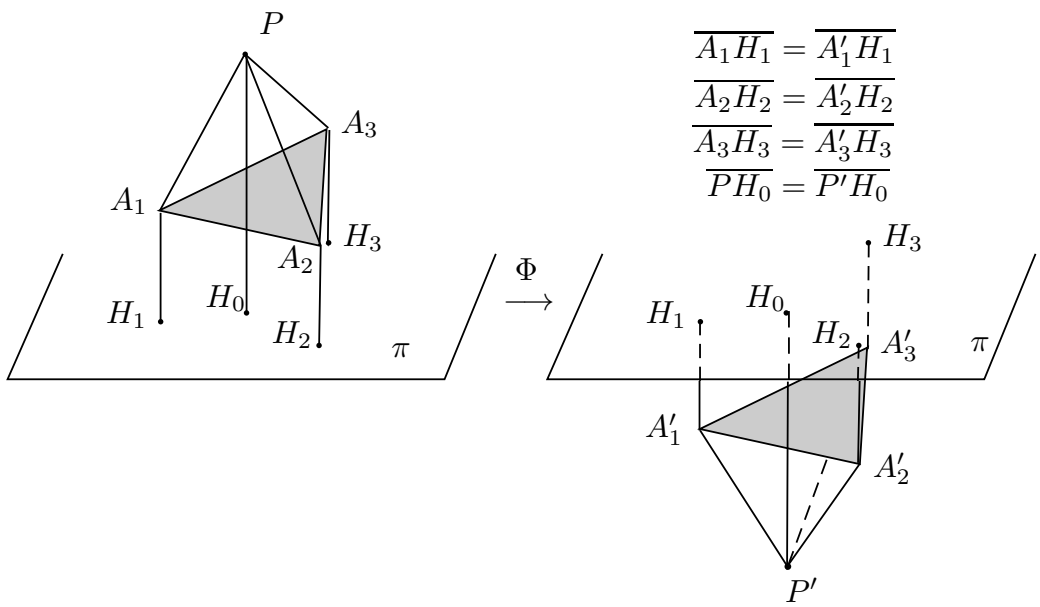


Figura 2.2.2: Riflessione rispetto al piano π

Grazie a tali scelte possiamo scrivere il vettore posizione di un generico punto P nel modo seguente

$$\overrightarrow{x_P} = P - O = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

Supponiamo che il punto P sia mobile e la sua equazione di moto sia $P(t) \simeq \overrightarrow{x_P}(t)$. Calcoliamo velocità e accelerazione di P nel riferimento cartesiano assegnato, derivando rispetto al tempo il vettore posizione e il vettore velocità di P:

$$\vec{v}_P = \frac{\mathrm{d}\vec{x}_P}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{x}}_P = \dot{x_1}\,\vec{e}_x + \dot{x_2}\,\vec{e}_y + \dot{x_3}\,\vec{e}_z \tag{2.3.2}$$

$$\vec{a}_P = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_P}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}_P}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x_1}\,\vec{e}_x + \ddot{x_2}\,\vec{e}_y + \ddot{x_3}\,\vec{e}_z\ , \tag{2.3.3}$$

dove abbiamo tenuto conto che i versori della base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ non dipendono dal tempo.

Definizione

Diremo coordinate cartesiane del punto P rispetto al riferimento $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, la terna ordinata (x_1, x_2, x_3) delle componenti di $\vec{x}_P$. L'applicazione che associa ad ogni punto di $\mathcal{A}_3$ le sue coordinate cartesiane permette di identificare $\mathcal{E}_3$ con $\mathbb{R}^3$. Si osservi, comunque, che tale identificazione dipende dal riferimento scelto.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

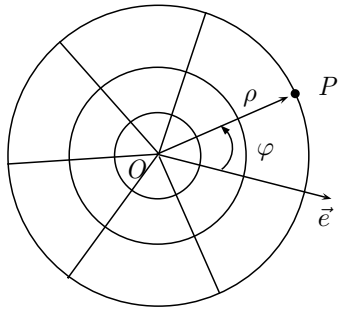


Figura 2.4.1: Coordinate polari piane

In tale riferimento, l'applicazione Φ dell'Es. 2.2.2 si rappresenta come

$$\begin{bmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \\ x_3(P) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1(O') \\ x_2(O') \\ x_3(O') \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(P) - x_1(O') \\ x_2(P) - x_2(O') \\ x_3(P) - x_3(O') \end{bmatrix} \tag{2.3.4}$$

Esercizio 2.3.1. *Calcolare la rappresentazione in coordinate dell'applicazione affine di Riflessione dell' Esercizio 2.2.2, scegliendo un riferimento cartesiano* $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$*, con* $\vec{e}_3$ *ortogonale al piano* π*. Calcolare gli autovalori e gli autovettori di* $\hat{\boldsymbol{S}}_{\vec{u}}$*.*

2.4 Riferimento polare in $\mathcal{E}_2$

A differenza di quanto abbiamo fatto nella sezione precedente, procediamo in senso inverso: prima definiamo le coordinate polari e poi introduciamo una base in E_2 adattata al riferimento.

Nel piano affine $\mathcal{E}_2$ introduciamo (vedi Fig. 2.4.1) un punto O, che chiameremo origine o *polo* e un asse $(O, \vec{e})$ che chiameremo *asse polare*. Per ogni punto $P \neq O$, consideriamo la sua distanza dal polo O, che chiameremo *raggio* di P e indicheremo con ρ e l'angolo φ, compreso tra l'asse polare e il vettore $(P - O)$, che chiameremo *anomalia* di P.

Definizione

Chiameremo coordinate polari del punto P la coppia ordinata (ρ, φ), Tale sistema di coordinate è ben definito in $\mathcal{E}_2 \setminus \{O\}$ se $\rho > 0$ et $-\pi < \varphi \leq \pi$, oppure $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Con l'aiuto della Fig. 2.4.2 è facile ricavare le trasformazioni fra il riferimento polare e uno cartesiano con la stessa origine e con il versore $\vec{e}_x$ parallelo ed equiverso all'asse polare. Esse sono date da

$$\begin{cases} x = & \rho \cos \varphi \\ y = & \rho \sin \varphi \end{cases}, \qquad \begin{cases} \rho = & \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = & \arctan 2(x, y) \end{cases}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

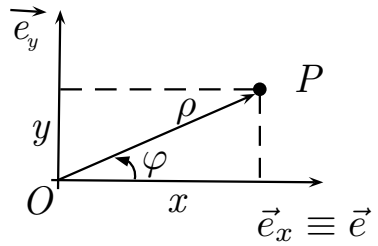


Figura 2.4.2: Trasformazione coordinate polari-cartesiane

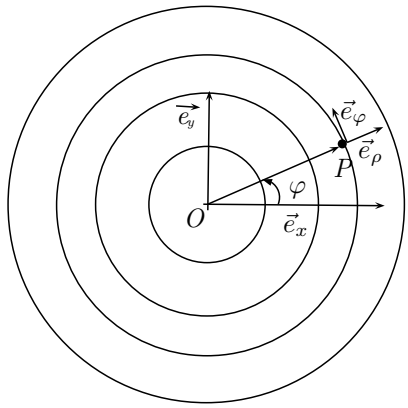


Figura 2.4.3: Base adattata alle coordinate polari

N.B. La funzione di due variabili $\arctan 2(x, y)$ è definita come l'applicazione da $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ data da

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } y \geq 0 \ , \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } y < 0 \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Costruiamo la base dei versori adattata alle coordinate polari. A tale scopo, consideriamo il vettore posizione di P

$$\vec{x}_P = \rho(\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y)$$

e introduciamo i versori:

$$\vec{e}_\rho(P) := \frac{\partial \vec{x_P}}{\partial \rho} = \cos\varphi\ \vec{e}_x + \sin\varphi\ \vec{e}_y = \frac{1}{\rho}\,\vec{x}_P \qquad \text{versore radiale} \tag{2.4.2}$$

$$\vec{e}_\varphi(P) := \frac{1}{\rho}\frac{\partial \vec{x_P}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\ \vec{e}_x + \cos\varphi\ \vec{e}_y \qquad \text{versore traverso} \ , \tag{2.4.3}$$

rappresentati nella Fig. 2.4.3.

Calcolando i prodotti scalari dei suddetti vettori è facile dimostrare che

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Proposizione 2.4.1. *(Fig.2.4.3) Il riferimento $(O; \vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi})$, detto riferimento polare, è un riferimento ortonormale in $\mathcal{E}_2$, nel quale il vettore posizione di un punto P si scrive*

$$\vec{x}_P = (\vec{x}_P \cdot \vec{e_\rho})\, \vec{e_\rho} + \cancel{(\vec{x}_P \cdot \vec{e_\varphi})}\vec{e_\varphi} = \rho\ \vec{e_\rho}\ . \tag{2.4.4}$$

Si noti che, a differenza del riferimento cartesiano $(O; \vec{e_x}, \vec{e_y})$, quello polare dipende dal punto P poiché

$$\vec{e_\rho} = \vec{e_\rho}\,(\varphi(P))\,, \quad \vec{e_\varphi} = \vec{e_\varphi}\,(\varphi(P))\,,$$

cioè la direzione dei versori $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ dipende dal punto P.

Supponiamo che il punto P sia mobile e calcoliamo la sua velocità nel riferimento polare:

$$\vec{v}_P = \frac{\mathrm{d}\vec{x}_P}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{x}}_P = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\vec{e}}_\rho$$

Dalle equazioni (2.4.2) e (2.4.3) segue che

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_\rho &= -\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_y = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_x - \sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_y = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho\ . \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Quindi

$$\vec{v_P} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \tag{2.4.6}$$

Inoltre, il vettore accelerazione del punto P è dato da

$$\begin{aligned} \vec{a_P} &= \tfrac{d\vec{v}_p}{dt} = \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\vec{e}}_\rho + (\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\,\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi = \\ &= \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + (\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\,\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\dot{\varphi}\,(-\dot{\varphi})\,\vec{e}_\rho = \\ &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

2.5 Riferimento cilindrico in $\mathcal{E}_3$

È un riferimento di $\mathcal{E}_3$ che si può ottenere traslando un riferimento polare piano lungo un qualsiasi asse ortogonale a tale piano. In alternativa, introduciamo un asse arbitrario $(O, \vec{e_r})$ detto *asse polare*, un piano ad esso ortogonale e passante per O, detto *piano equatoriale* e un generico semipiano con origine sull'asse polare, detto *semipiano polare*. Preso un punto generico $P \in \mathcal{A}_3$, consideriamo il semipiano per l'asse polare e passante per P, detto *semipiano meridiano*. Introduciamo i seguenti parametri

ρ	distanza di P dall'asse polare
φ	angolo fra il semipiano polare e il semipiano meridiano
z	quota di P rispetto al piano equatoriale

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

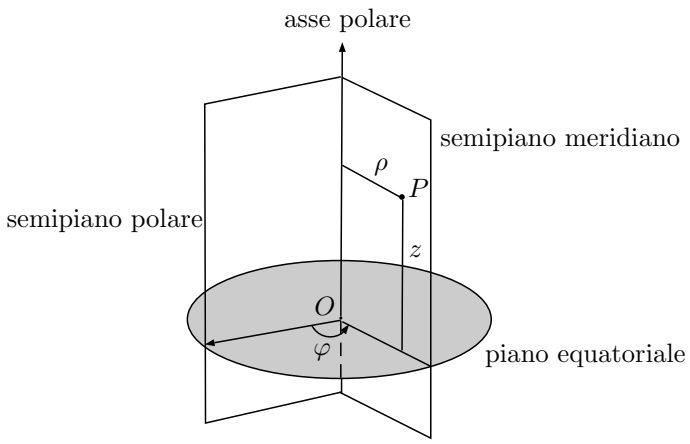


Figura 2.5.1: Coordinate cilindriche

Definizione

Chiameremo coordinate cilindriche del punto P la terna ordinata (ρ, φ, z), con $\rho > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $z \in \mathbb{R}$. Tale sistema di coordinate è ben definito in $\mathcal{E}_3 \setminus \{asse\ polare\}$.

In ogni riferimento cartesiano $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, il vettore posizione di P rispetto ad O è dato da $\vec{x}_P = P - O = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$. Se ora consideriamo il particolare riferimento cartesiano ON, con asse $(O, \vec{e}_x)$ coincidente con l'intersezione del semipiano polare con il piano equatoriale e asse $(O, \vec{e}_z)$ coincidente con l'asse polare, come nella Fig. 2.5.2, possiamo subito ricavare le trasformazioni dirette e inverse tra i due sistemi di coordinate

$$\begin{cases} x = & \rho\cos\varphi \\ y = & \rho\sin\varphi \\ z = & z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho & = \sqrt{x^2+y^2}\ , \\ \varphi & = \arctan 2(x,y) \\ z & = z \end{cases}$$

Costruiamo una base adattata al riferimento cilindrico introducendo i versori:

$$\vec{e}_\rho := \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \rho} = \cos\varphi\ \vec{e}_x + \sin\varphi\ \vec{e}_y \qquad \text{versore radiale}\ , \tag{2.5.1}$$

$$\vec{e}_\varphi := \frac{1}{\rho}\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\ \vec{e}_x + \cos\varphi\ \vec{e}_y \qquad \text{versore traverso}\ , \tag{2.5.2}$$

rappresentati nella Fig. 2.5.3. Calcolando i prodotti scalari e vettoriali dei suddetti vettori è facile dimostrare che

Proposizione 2.5.1. *Il riferimento $(O; \vec{e}_\rho(P), \vec{e}_\varphi(P), \vec{e}_z)$, detto riferimento cilindrico, è un riferimento ortonormale destro in $\mathcal{E}_3$, nel quale il vettore posizione di un punto P si scrive*

$$\vec{x}_P = (\vec{x}_P \cdot \vec{e}_\rho)\,\vec{e}_\rho + \cancel{(\vec{x}_P \cdot \vec{e}_\varphi)}\vec{e}_\varphi + (\vec{x}_P \cdot \vec{e}_z)\,\vec{e}_z = \rho\ \vec{e}_\rho + z\vec{e}_z\ . \tag{2.5.3}$$

Si noti che, come il riferimento polare piano e a differenza del riferimento cartesiano, quello cilindrico dipende dal punto P poiché

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho\,(\varphi(P))\,, \quad \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi\,(\varphi(P))\,,$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

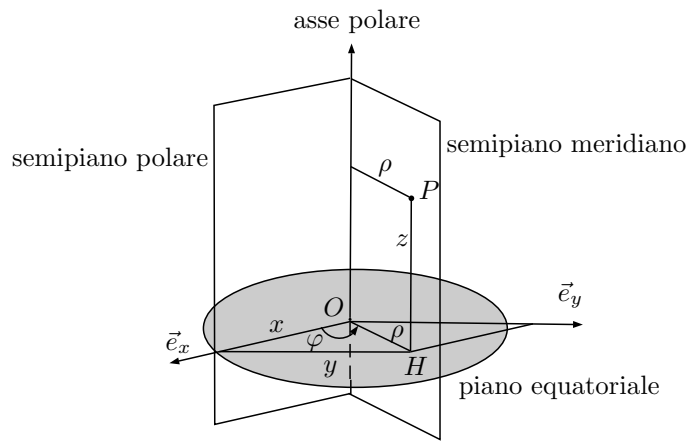


Figura 2.5.2: Trasformazione coordinate cilindriche-cartesiane

cioè la direzione dei versori $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ dipende dal punto P.

Supponiamo che il punto P sia mobile e la sua equazione di moto sia $P(t) \simeq \overrightarrow{x_P}(t)$. Calcoliamo velocità e accelerazione di P nel riferimento cilindrico, derivando rispetto al tempo il vettore posizione e il vettore velocità di P e tenendo conto che i versori $(\vec{e}_\rho\ , \vec{e}_\varphi)$ dipendono da P e quindi dal tempo t.

$$\vec{v}_P = \frac{\mathrm{d}\vec{x}_P}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{x}}_P = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}\vec{e}_z$$

Dalle (2.4.2) e (2.4.3) segue che

$$\dot{\vec{e}}_\rho = -\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_y = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_x - \sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_y = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$$

Quindi

$$\overrightarrow{v_P} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \tag{2.5.4}$$

Inoltre, il vettore accelerazione del punto P è dato da

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_P} &= \tfrac{d\overrightarrow{v_P}}{dt} = \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\vec{e}}_\rho + (\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\,\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{e}_z = \\ &= \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + (\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\,\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\dot{\varphi}\,(-\dot{\varphi})\,\vec{e}_\rho + \ddot{z}\,\vec{e}_z = \\ &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{e}_z \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

2.6 Riferimento sferico in $\mathcal{E}_3$

Come per il riferimento cilindrico, consideriamo un asse arbitrario, detto asse polare, un generico piano ortogonale all'asse, detto piano equatoriale e un generico semipiano per l'asse, detto semipiano

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

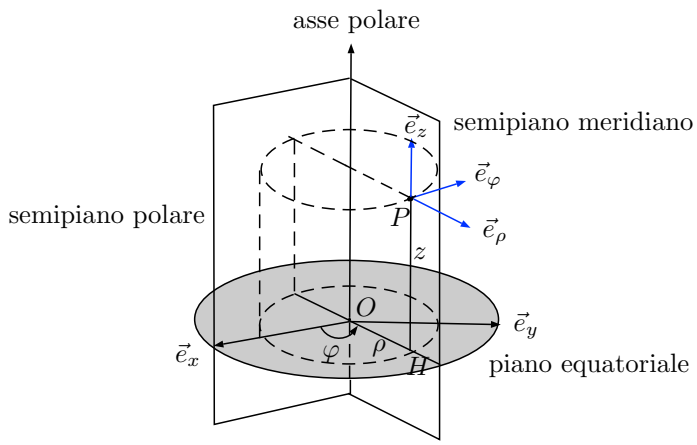


Figura 2.5.3: Base adattata alle coordinate cilindriche

polare. Chiamiamo O il punto d'intersezione dell'asse polare con il piano equatoriale e introduciamo i seguenti parametri, illustrati nella Fig. 2.6.1:

r	distanza di P dal polo O	*raggio*
θ	angolo tra l'asse polare e il vettore $P - O$	*colatitudine*
φ	angolo fra il semipiano polare e il semipiano meridiano	*longitudine*

Definizione

Chiameremo coordinate sferiche del punto P la terna ordinata (r, θ, φ), con $r > 0$, $0 < \theta < \pi$ e $-\pi < \varphi \leq \pi$. Tale sistema di coordinate è ben definito in $\mathcal{E}_3 \setminus \{asse\ polare\}$.

Se ora consideriamo il particolare riferimento cartesiano con origine in O, asse $(O, \vec{e}_x)$ coincidente con l'intersezione del semipiano polare con il piano equatoriale e asse $(O, \vec{e}_z)$ coincidente con l'asse polare, come nella Fig. 2.6.2, possiamo ricavare le trasformazioni dirette e inverse tra i due sistemi di coordinate

$$\begin{cases} x = & r \sin\theta \, \cos\varphi \\ y = & r \sin\theta \, \sin\varphi \\ z = & r \cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r & = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta & = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \varphi & = \arctan 2(x, y) \ . \end{cases}$$

Introduciamo i vettori:

$$\vec{e}_r := \frac{\partial \vec{x_P}}{\partial r} = \sin\theta \, \cos\varphi \, \vec{e}_x + \sin\theta \, \sin\varphi \, \vec{e}_y + \cos\theta \, \vec{e}_z \qquad \text{versore radiale} \tag{2.6.1}$$

$$\vec{e}_\theta := \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{x_P}}{\partial \theta} = \cos\theta \, \cos\varphi \, \vec{e}_x + \cos\theta \, \sin\varphi \, \vec{e}_y - \sin\theta \vec{e}_z \qquad \text{versore meridiano} \tag{2.6.2}$$

$$\vec{e}_\varphi := \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \vec{x_P}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi \, \vec{e}_x + \cos\varphi \, \vec{e}_y \qquad \text{versore parallelo ,} \tag{2.6.3}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

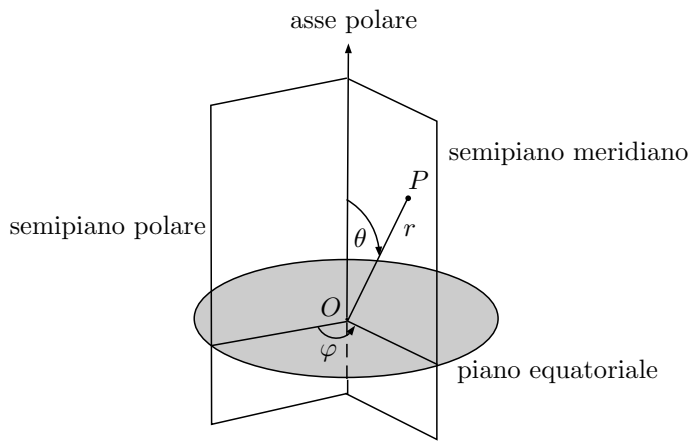


Figura 2.6.1: Coordinate sferiche

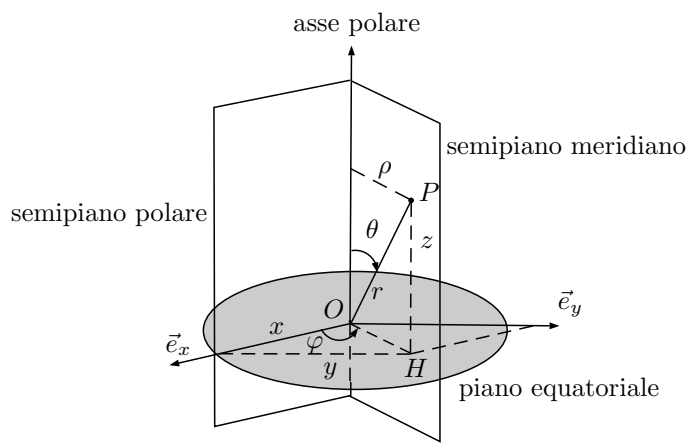


Figura 2.6.2: Trasformazione di coordinate cartesiane-sferiche

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

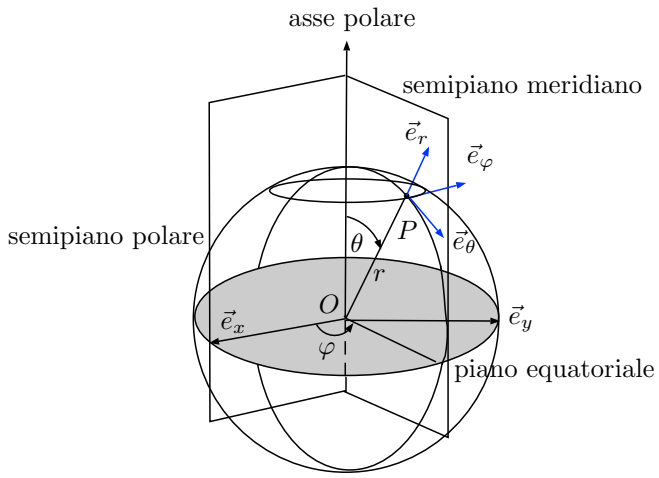


Figura 2.6.3: Base adattata alle coordinate sferiche

rappresentati nella Fig. 2.6.3. Calcolando i prodotti scalari e vettoriali dei suddetti vettori è facile dimostrare che

Proposizione 2.6.1. *Il riferimento* $(O; \vec{e}_r(P), \vec{e}_\theta(P), \vec{e}_\varphi(P))$*, detto riferimento sferico, è un riferimento ortonormale destro in* $\mathcal{E}_3$*, nel quale il vettore posizione di un punto* P *si scrive*

$$\overrightarrow{x}_P = (\overrightarrow{x}_P \cdot \vec{e}_r)\,\vec{e}_r + \cancel{(\overrightarrow{x}_P \cdot \vec{e}_\theta)}\vec{e}_\theta + \cancel{(\overrightarrow{x}_P \cdot \vec{e}_\varphi)}\vec{e}_\varphi = r\,\vec{e}_r\ . \tag{2.6.4}$$

Si noti che, come il riferimento cilindrico, anche quello sferico dipende dal punto P poiché

$$\vec{e}_r = \vec{e}_r\,(\theta(P), \varphi(P))\,, \quad \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta\,(\theta(P), \varphi(P))\ , \quad \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi\,(\theta(P), \varphi(P))\,,$$

cioè la direzione dei versori $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ dipende dal punto P.

Supponiamo che il punto P sia mobile e la sua equazione di moto sia $P(t) \simeq \overrightarrow{xP}\,(t)$. Calcoliamo velocità e accelerazione di P nel riferimento sferico, derivando rispetto al tempo il vettore posizione e il vettore velocità di P.

$$\vec{v}_P = \frac{\mathrm{d}\vec{x}_P}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{x}}_P = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}}_r$$

Dalle (2.4.2) e (2.4.3) segue che

$$\dot{\vec{e}}_r = (\cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z)\dot{\theta} + \sin\theta(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)\dot{\varphi} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Analogamente, si calcolano

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Quindi,

$$\overrightarrow{v_P} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \tag{2.6.5}$$

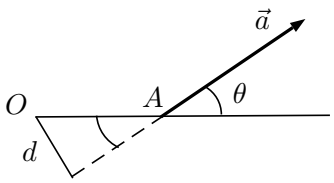
Inoltre, il vettore accelerazione del punto P è dato da

(2.6.6)

$$\begin{aligned}\vec{a}_P &= \frac{d\overrightarrow{v_P}}{dt} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r + \left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta + \left(\dot{r}\,\sin\theta\,\dot{\varphi} + r\cos\theta\dot{\theta}\,\dot{\varphi} + r\,\sin\theta\,\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + r\,\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\theta + \left(2\sin\theta\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} + r\sin\theta\,\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

2.7 Momenti di vettori applicati

Consideriamo un qualunque vettore applicato $(A, \vec{a})$ in un punto A di $\mathcal{E}_3$.



$d :=$ braccio di $\vec{a}$ rispetto ad O.

Momento polare di un vettore applicato

Scelto un punto O detto polo, è definito come

$$\overrightarrow{M_O} := (A - O) \times \vec{a} \tag{2.7.1}$$

e il suo modulo vale

$$\left|\overrightarrow{M_O}\right| = |A - O|\,|\sin\theta|\,|\vec{a}| = d\,|\vec{a}| \ .$$

Per esempio, se $\vec{a} = \overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{M_O}$ è il momento della forza $\vec{F}$ rispetto ad O, se $\vec{a} = m\vec{v}$, $\overrightarrow{M_O}$ è il momento della quantità di moto della particella (A, m) rispetto ad O.

Formula di trasporto

$$\overrightarrow{M_{O'}} = \overrightarrow{M_O} + (O - O') \times \vec{a} \tag{2.7.2}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{O'}} &= (A - O') \times \vec{a} \\ &= [(A - O) + (O - O')] \times \vec{a} \\ &= (A - O) \times \vec{a} + (O - O') \times \vec{a} \\ &= \overrightarrow{M_O} + (O - O') \times \vec{a}\end{aligned}$$

□

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Momento assiale di un vettore applicato

Il momento rispetto ad un asse $r = (O, \vec{e}_r)$, detto in breve momento assiale, è definito da

$$M_r = \overrightarrow{M_O} \cdot \vec{e}_r \qquad O \in r \ . \tag{2.7.3}$$

È indipendente da O, purché $O \in r$. Infatti, preso $O' \in r$, risulta

$$\overrightarrow{M_{O'}} \cdot \vec{e_r} \overset{(2.7.2)}{=} \left(\overrightarrow{M_O} + (O - O') \times \vec{a}\right) \cdot \vec{e_r} = \overrightarrow{M_O} \cdot \vec{e_r}$$

poichè il vettore $O - O'$ è parallelo a $\vec{e}_r$ (vedi la Legge di annullamento del prodotto misto).

Insieme di vettori applicati

Indichiamo con $\mathcal{S} = \{(A_i, \vec{a_i}), i = 1, \ldots, N\}$ un insieme di vettori applicati in diversi punti di $\mathcal{E}_3$. Se si tratta di forze, l'insieme $\mathcal{S}$ si dice *sollecitazione* applicata all'insieme dei punti $\{A_i, i = 1, \ldots, N\} \subset \mathcal{E}_3$

Risultante

$$\overrightarrow{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{a_i}$$

è un vettore *libero* $\in E_3$!

Momento risultante rispetto a un polo O

$$\overrightarrow{M}_O = \sum_{i=1}^{N} (A_i - O) \times \vec{a_i}$$

N.B. Si noti che $\overrightarrow{M}_O$ non è il momento di $\overrightarrow{R}$ rs. ad O. Infatti $\vec{R}$, che è un vettore libero, non ha in generale punto di applicazione, quindi non ha senso calcolare il suo momento!

Formula di trasporto

$$\overrightarrow{M_{O'}} = \overrightarrow{M_O} + (O - O') \times \overrightarrow{R} \tag{2.7.4}$$

Dimostrazione.

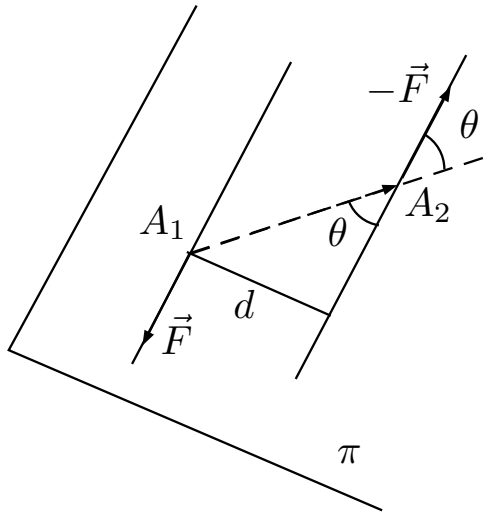
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_{O'}} &= \sum_{i=1}^{N} (A_i - O') \times \vec{a_i} = \sum_{i=1}^{N} [(A_i - O) + (O - O')] \times \vec{a_i} \\
&= \sum_{i=1}^{N} (A_i - O) \times \vec{a_i} + \sum_{i=1}^{N} (O - O') \times \vec{a_i} \\
&= \overrightarrow{M_O} + (O - O') \times \sum_{i=1}^{N} \vec{a_i} \\
&= \overrightarrow{M_O} + (O - O') \times \overrightarrow{R}
\end{aligned}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

□

Corollario 2.7.1. *Se* $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{M_{O'}} \qquad \forall O, O'$

Esempio 2.7.1. *Coppia di forze*



$$\mathcal{S} = \{(A_1, \overrightarrow{F_1}), (A_2, \overrightarrow{F_2} = -\overrightarrow{F_1})\}$$
$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F}_1 - \overrightarrow{F}_1 = \overrightarrow{0}$$

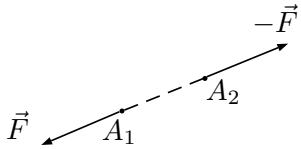
$$\overrightarrow{M} = \begin{cases} \textit{modulo: } |\overrightarrow{F}_1|\ d = |\overrightarrow{F}_2|\ d, \\ \textit{direzione: } \perp \pi, \\ \textit{verso: regola della mano destra} \end{cases}$$

d=braccio della coppia
π= piano della coppia

Infatti $\left|\overrightarrow{M_{A_1}}\right| = \left|(A_2 - A_1) \times \overrightarrow{F_2}\right| = |A_2 - A_1|\,|\sin\theta|\left|\overrightarrow{F}_2\right| = d\left|\vec{F_1}\right|$.

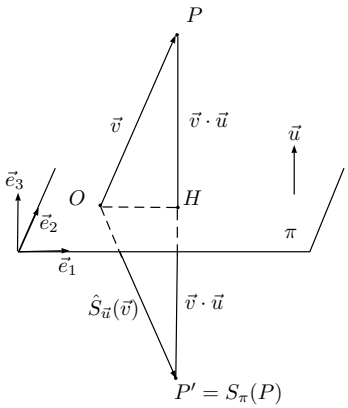
N.B. Si osservi che il momento di una coppia si denota semplicemente con $\overrightarrow{M}$ (tralasciando il polo) poichè esso è indipendente dal polo, come segue immediatamente dalla formula di trasporto e dal fatto che il vettore risultante di una coppia è nullo per definizione.

Esempio 2.7.2. *Coppia a braccio nullo:* $d = 0 \Rightarrow \overrightarrow{M} = \overrightarrow{0}$.



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

2.8 Soluzione dell'Es. 2.2.2



- S_π è affine poiché soddisfa la condizione (4.2.6). Infatti,

  $$S_\pi(P)-S_\pi(Q) = \cancel{O}+\hat{\boldsymbol{S}}_{\vec{u}}(P-O)-\big(\cancel{O}+\hat{\boldsymbol{S}}_{\vec{u}}(Q-O)\big) = \hat{\boldsymbol{S}}_{\vec{u}}(P-\cancel{O}-Q+\cancel{O}) \qquad \forall P,Q\in\mathcal{E}_3\ .$$

- I punti fissi sono tutti e soli i punti del piano π. Infatti, l'equazione dei punti fissi è

  $$P = S_\pi(P) = O+\hat{\boldsymbol{S}}_{\vec{u}}(P-O) = \cancel{O}+\Big(P-\cancel{O}-2\Big(\vec{u}\cdot(P-O)\Big)\vec{u}\Big)$$

  ed ha soluzione se e solo se $\vec{u}\cdot(P-O)=0$, che è l'equazione (2.2.2) del piano passante per O ed ortogonale a $\vec{u}$.

- Basta verificare che $\hat{\boldsymbol{S}}_{\vec{u}}$ soddisfa le condizioni (15.4.2) e (2.1.24). Dalla proprietà di simmetria e dal Teorema spettrale segue che $\hat{\boldsymbol{S}}_{\vec{u}}$ ammette una base ON di autovettori (vedi l'ultimo punto).

- Scriviamo l'equazione agli autovettori per l'operatore lineare $\hat{\boldsymbol{S}}_{\vec{u}}$

  $$\vec{v}-2(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow (1-\lambda)\vec{v}-2(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u} = 0 \tag{2.8.1}$$

  Ci sono due alternative:

  - Il vettore $\vec{v}$ è proporzionale a $\vec{u}$, cioè $\vec{v}=c\vec{u}$, $c\in\mathbb{R}$. Allora, l'equazione si riduce a

    $$(1-\lambda)\cancel{c}\vec{u}-2(\vec{u}\cdot\cancel{c}\vec{u})\vec{u} = 0$$

    ed ha soluzione se e solo se $\lambda=-1$. Dunque, l'autospazio con autovalore $\lambda=-1$ è quello generato dal versore $\vec{u}$

    $$V_{-1} = Span(\vec{u}) \quad\Rightarrow\quad dim(V_{-1}) = 1\ .$$

  - I vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sono linearmente indipendenti. Allora l'Eq. (2.8.1) ha soluzione solo se i coefficienti della combinazione lineare sono entrambi nulli. Quindi,

    $$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \end{cases}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Dunque, l'autospazio con autovettore $\lambda = 1$ è il complemento ortogonale di V_{-1} in $\mathcal{E}_3$, cioè

$$V_1 = V_{-1}^{\perp} = \{\vec{v} \in E_3 : \vec{v} \cdot \vec{u} = 0\} \Rightarrow dim(V_1) = 2$$

- Poichè

$$E_3 = V_1 \oplus V_{-1} \ ,$$

come base ON di autovettori per $\hat{\boldsymbol{S}}$ basta prendere $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ con $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ versori ortogonali in V_1 ed $\vec{e_3} = \vec{u}$. Su tale base, la matrice rappresentativa di $\hat{\boldsymbol{S}}$ sarà

$$[\hat{\boldsymbol{S}}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\hat{\boldsymbol{S}}) = -1 \ .$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Capitolo 3

Vincoli e gradi di libertà di un sistema meccanico

In questo capitolo, per comodità didattica, considereremo i modelli meccanici come insiemi discreti di punti materiali e introdurremo in modo informale i concetti che descrivono il piazzamento nello spazio di tali modelli. Comunque, avvisiamo il lettore che quanto diremo vale anche per il modello dei continui rigidi, modello che esamineremo in dettaglio più avanti.

3.1 Spazio delle configurazioni

I modelli meccanici che studieremo, saranno immersi nello spazio affine euclideo tridimensionale $\mathcal{E}_3$. Chiameremo *configurazione* o *piazzamento* di un modello l'insieme delle posizioni di tutti i punti di tale modello e supporremo che ogni configurazione sia individuata univocamente da un numero sufficiente di parametri indipendenti che chiameremo coordinate *libere* o *lagrangiane* del modello.

Definizione 3.1.1. *Lo spazio delle configurazioni di un modello meccanico è l'insieme dei parametri necessari e sufficienti ad individuare tutte le configurazioni che il modello può assumere.*

Esempio 3.1.1. *Lo spazio delle configurazioni di un punto materiale (P, m) libero nello spazio coincide con $\mathbb{R}^3$. Come coordinate libere possiamo prendere, ad esempio, le coordinate cartesiane del punto P, $\{(x, y, z)|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$, rispetto a un riferimento cartesiano ortogonale fissato.*

Esempio 3.1.2. *Lo spazio delle configurazioni di due cariche elettriche libere è $\mathbb{R}^6 \setminus \{x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2\}$.*

Esempio 3.1.3. *Lo spazio delle configurazioni di un insieme di N punti materiali liberi $\{(P_i, m_i)\,|i = 1, \cdots, N\}$ in $\mathcal{E}_3$ è l'iperspazio $\mathbb{R}^{3N}$ (privato dell'insieme dei punti di collisione). Infatti, dette $(x_1, y_1, z_1), \cdots, (x_N, y_N, z_N)$ le coordinate cartesiane di ciascuno dei punti materiali in $\mathcal{E}_3$, possiamo introdurre in $\mathbb{R}^{3N}$ il punto geometrico $\mathcal{P}$ di coordinate $(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_N, y_N, z_N)$. Allora, le posizioni di $\mathcal{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_N)$ in $\mathbb{R}^{3N}$ equivalgono alle configurazioni dell'insieme $\{P_1, \ldots, P_N\}$ in $\mathcal{E}_3$.*

D'ora in poi denoteremo con $\mathcal{C}$ lo spazio delle configurazioni di un modello meccanico. Osserviamo che il numero delle coordinate libere del modello coincide con la dimensione di $\mathcal{C}$.

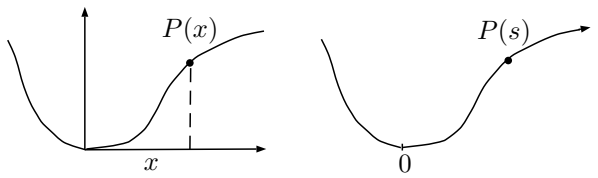
3.2 Vincoli e loro classificazione

Chiameremo vincolo un qualsiasi dispositivo che limita le configurazioni che un modello meccanico può assumere e/o che limita la velocità dei suoi punti.

Esempio 3.2.1. *Per un punto materiale soggetto a stare su un piano* $\Pi \subset \mathcal{E}_3$, $\mathcal{C} \equiv \mathbb{R}^2$ *e le coordinate libere sono due.*

Esempio 3.2.2. *Consideriamo un punto materiale vincolato a stare sul sostegno di una curva regolare* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{E}_2$. *In questo caso* $\mathcal{C} \equiv \cup_{t\in\mathbb{R}}\gamma(t)$ *e la coordinata libera è una.*

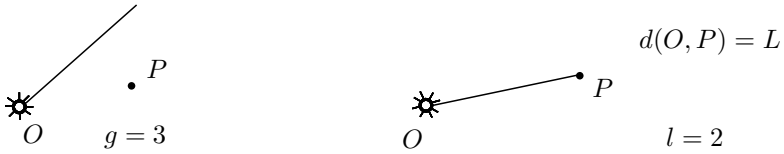
Nel caso dell'esempio 3.2.2 possiamo scegliere una delle coordinate cartesiane del punto P, oppure l'ascissa curvilinea di P, $s \in \mathbb{R}$.



N.B. La scelta delle coordinate dipende di volta in volta dal problema da risolvere. Trovare un insieme di coordinate che meglio si "adattano" al problema specifico è spesso una questione delicata che necessita di una buona dose di "intuito".

Gli esempi precedenti possono indurre a pensare erroneamente che lo spazio delle configurazioni abbia sempre una struttura di spazio vettoriale. Invece ha una struttura matematica di varietà differenziabile.

Esempio 3.2.3. *Consideriamo un "pendolo ad asta", cioè un punto materiale* (P, m) *posto ad un estremo di un' asta rigida di lunghezza* L *e massa trascurabile, che ha l'altro estremo fissato in un punto* O.



Il punto P *è vincolato dall'asta a stare sulla superficie sferica di raggio* L *e centro* O. *Quindi, il suo spazio delle configurazioni è*

$$\mathcal{C} = S^2 \ ,$$

cioè una varietà bidimensionale e il punto P *ha 2 coordinate libere. Possiamo scegliere, ad esempio, le coordinate sferiche* θ *e* φ *del punto* P, $0 < \theta < \pi$ *e* $-\pi < \varphi \leq \pi$. *Si osservi che la coordinata radiale* r *non è libera perché è vincolata dall'equazione* $r = L$.

Introduciamo, ora, la seguente fondamentale classificazione dei vincoli:

vincoli olonomi, sono quelli che limitano solo le configurazioni accessibili ad un sistema e sono detti anche vincoli di *posizione* e sono esprimibili mediante relazioni del tipo

$$f(\mathcal{P}, t) \geq 0 \ ; \tag{3.2.1}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

vincoli di mobilità, sono quelli che limitano anche le velocità che i punti di un sistema meccanico possono assumere e sono rappresentati da relazioni del tipo

$$f(\mathcal{P}, \dot{\mathcal{P}}, t) \geq 0 \ . \tag{3.2.2}$$

Tutti i vincoli degli esempi precedenti sono vincoli olonomi.

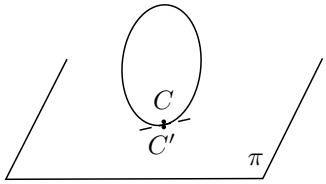
I vincoli di mobilità si possono suddividere a loro volta in due classi:

vincoli integrabili, sono quelli che possono essere integrati rispetto al tempo, riducendosi a vincoli olonomi;

vincoli non integrabili, sono quelli che non possono essere integrati rispetto al tempo, quindi rimangono vincoli genuini sulle velocità. Sono detti, anche, vincoli *anolonomi*.

Presentiamo un esempio familiare di vincolo anolonomo.

Esempio Vincolo di puro rotolamento su un piano: $\vec{v}_C = \vec{v}_{C'}$



Un disco (di spessore trascurabile) che rotola *senza strisciare* su di un piano è soggetto ad un vincolo anolonomo. Infatti il vincolo di puro rotolamento costringe il punto di contatto C tra il disco e il piano ad avere velocità nulla. È, quindi, un vincolo di mobilità che, si può dimostrare, non può essere integrato e quindi non si può esprimere mediante un vincolo sulle configurazioni. Si veda la Sez. 4.10.

C: punto del disco a contatto con il piano π
C': punto di π a contatto con il disco

quindi $\vec{v}_{C'} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_C = \vec{0}$.

Invece, come vedremo nella Sez. 4.9.2, il vincolo di puro rotolamento di un disco posto in un piano e che rotola lungo una guida (curva nel piano) è un vincolo di mobilità integrabile, quindi si riduce a un vincolo olonomo.

Da ora in poi considereremo solo vincoli olonomi, per i quali possiamo introdurre la seguente

Definizione 3.2.1. *I gradi di libertà, l, di un sistema materiale soggetto a vincoli olonomi, sono pari al numero delle coordinate libere (o indipendenti) sufficienti a individuare univocamente tutte le configurazione che il sistema può assumere.*

Quindi, possiamo affermare che

$$l = \dim \mathcal{C}$$

Esempio

1) Un punto materiale libero nello spazio ha 3 gradi di libertà.

2) Lo stesso punto vincolato a stare su un piano ha 2 gradi di libertà.

3) Lo stesso punto vincolato a stare su una curva ha 1 grado di libertà.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

4) Il pendolo ad asta ha 2 gradi di libertà.

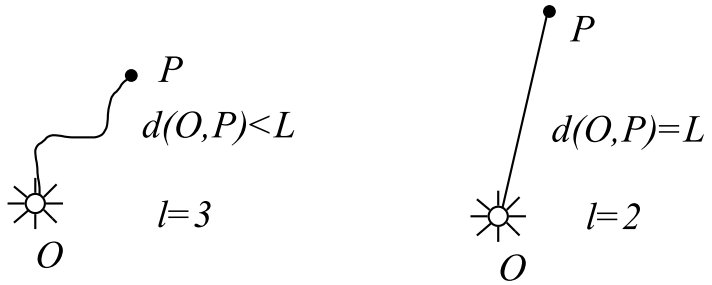
I vincoli si possono ulteriormente distinguere in:

vincoli bilateri, sono esprimibili da equazioni (es: il pendolo ad asta, $x^2 + y^2 + z^2 = L^2$);

vincoli unilateri, sono esprimibili da disequazioni (es: il pendolo a filo, $x^2 + y^2 + z^2 \leq L^2$).

Le configurazioni in cui è soddisfatta l'equazione si dicono configurazioni di *confine*, quelle in cui è soddisfatta la disequazione stretta, *ordinarie*. Si osservi che un sistema con vincoli unilateri ha un diverso numero di gradi di libertà a seconda che si trovi in una configurazione ordinaria o una di confine.

Esempio 3.2.4. *Consideriamo un "pendolo a filo", cioè un punto materiale posto ad un estremo di un filo inestensibile di lunghezza L e massa trascurabile, che ha l'altro estremo fissato in un punto* O. *Per questo modello si ha*

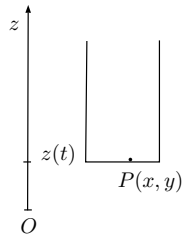


Dunque, in un problema a vincoli unilateri bisogna studiare separatamente le configurazioni di confine e quelle ordinarie.

I vincoli olonomi possono essere ulteriormente distinti in due classi, a seconda del loro eventuale moto rispetto all'osservatore:

vincoli fissi, sono quelli la cui espressione matematica (equazione o disequazione) è indipendente dal tempo;

vincoli mobili, sono quelli, al contrario, la cui espressione matematica dipende esplicitamente dal tempo.



Un punto materiale vincolato a stare sul pavimento di un ascensore che si muove con un moto assegnato. Se z è la quota del pavimento dell'ascensore, l'equazione di vincolo è z=z(t).

Infine, possiamo ancora distinguere fra:

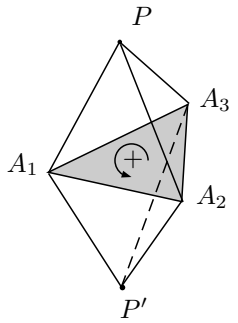
vincoli interni, quelli che vincolano tra loro parti interne del modello;

vincoli esterni, quelli che vincolano parti del modello con agenti esterni.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

3.3 Gradi di libertà di un rigido

Consideriamo, ora, un sistema *rigido* (asta esclusa), cioè un insieme di punti materiali le distanze dei quali siano invariabili, libero nello spazio $\mathcal{E}_3$ e calcoliamo i suoi gradi di libertà. Innanzitutto, osserviamo che la configurazione di un rigido nello spazio è univocamente determinata se si conosce la posizione di soli 3 dei suoi punti non allineati (A_1, A_2, A_3) e un'*orientazione* del rigido. Infatti, la posizione di un generico punto P del rigido, che ha distanze fissate dai 3 punti (A_1, A_2, A_3) deve coincidere con il vertice di uno dei due tetraedri che hanno come base il triangolo $\widehat{A_1A_2A_3}$.

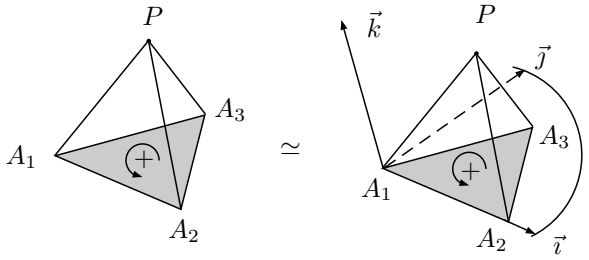


$$\overline{A_1P} = \overline{A_1P'}$$
$$\overline{A_2P} = \overline{A_2P'}$$
$$\overline{A_3P} = \overline{A_3P'}$$

Se assegno un'orientazione al triangolo, per esempio chiamo positiva la faccia del triangolo sulla quale i vertici A_1, A_2, A_3 sono disposti in senso antiorario, e negativa l'altra faccia, posso selezionare il punto $\mathcal{P}$ o il punto $\mathcal{P}'$ che rimarrà in ogni configurazione dalla parte della stessa faccia (positiva o negativa) in cui si trova nella configurazione di riferimento.

Dunque, i gradi di libertà di un rigido libero sono quelli di 3 punti non allineati che si trovano a distanze mutue fissate. In altre parole, i gradi di libertà di un triangolo rigido nello spazio $\mathcal{E}_3$.

Una schematizzazione equivalente di un rigido, è quella della terna *solidale*. Si tratta di una terna rigida ortonormale solidale al rigido: per esempio, fissata al rigido tramite una saldatura. È facile convincersi che le configurazioni di un rigido sono tutte e sole quelle di una terna ad esso solidale, considerando l'equivalenza (in infiniti modi) tra il tetraedro e una terna rigida costruita, ad esempio, prendendo l'origine in uno dei vertici, come asse $\vec{i}$ uno degli spigoli, come asse $\vec{j}$ un asse ortogonale ad $\vec{i}$ in modo che il piano $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ contenga la base del tetraedro, e $\vec{k}$ ortogonale a tale faccia, in modo che la terna $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sia una terna destra.



Spazio solidale ad un rigido

L'insieme dei punti di $\mathcal{E}_3$ che conservano la stessa distanza dai punti del rigido, qualunque sia la sua configurazione, costituisce lo *spazio solidale* ad esso. Tale spazio è dato da tutti e soli quei punti di

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$\mathcal{E}_3$ le cui coordinate, rispetto a una terna solidale non dipendono dalla particolare configurazione assunta dal rigido. Ad esempio, il centro di un anello rigido, che non è un punto materiale ma un punto geometrico solidale all'anello.

Metodo del bilancio

Per calcolare i gradi di libertà di un triangolo rigido, utilizzeremo il cosiddetto *metodo del bilancio*. Esso consiste nel calcolare i gradi di libertà di un sistema materiale vincolato, calcolando la differenza tra i gradi di libertà del sistema immaginato privo di alcuni (o tutti i) vincoli e il numero delle equazioni dei vincoli *efficaci* tolti. Daremo la definizione di vincoli efficaci a pag. 36.

Indicheremo con

- l= gradi di libertà del modello vincolato;
- r= numero delle equazioni dei vincoli efficaci da togliere;
- g= gradi di libertà del modello ottenuto togliendo i vincoli suddetti.

Come vedremo in seguito, vale l'equazione di bilancio

$$l = max\,\{g - r,\, 0\} \tag{3.3.1}$$

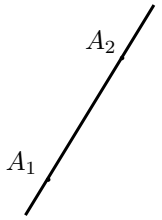
Esempio. Nel caso di 3 punti non allineati a distanza fissata si ha che le equazioni di vincolo sono 3: $\overline{A_1A_2} = d_{12}$, $\overline{A_1A_3} = d_{13}$, $\overline{A_2A_3} = d_{23}$, dove d_{12}, d_{13}, d_{23} sono le mutue distanze tra i 3 punti. Quindi,

$$g = 3 \cdot 3 = 9, \quad r = 3, \Rightarrow l = 9 - 3 = 6$$

Pertanto, vale la

Proposizione 3.3.1. *Un rigido nello spazio 3D ha 6 gradi di libertà, tranne che nel caso di un'asta, cioè di un rigido costituito da un insieme di punti allineati. Infatti, un'asta ha 5 gradi di libertà e verrà definita: caso "degenere".*

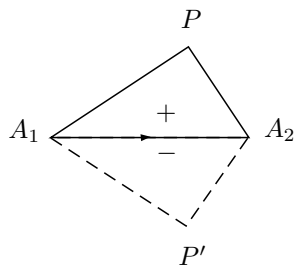
N.B. Nel caso di un'asta, cioè di un insieme allineato di punti materiali, bastano 2 punti a distanza fissata per individuarne ogni configurazione. In tal caso, si ha 1 equazione di vincolo



$\overline{A_1A_2} = d_{12}$
Quindi
$g = 2 \cdot 3 = 6,\ r = 1 \Rightarrow l = 6 - 1 = 5$

Nel caso particolare di un rigido piano (lamina) posto in un piano, la posizione di un generico punto $\mathcal{P}$ della lamina è univocamente determinata se si conoscono le posizioni di 2 punti A_1 e A_2 del rigido più l'orientazione del segmento $\overline{A_1A_2}$.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



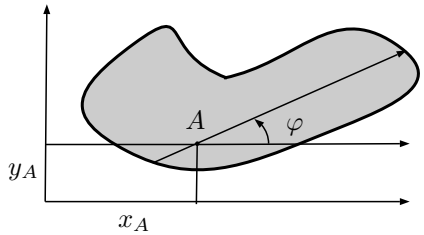
Dunque, i gradi di libertà di una lamina su un piano sono quelli dei due punti A_1, A_2 che si trovano in un piano a distanza fissata ($\overline{A_1A_2} = d_{12}$). Di nuovo, con il metodo del bilancio troviamo che

$$l = g - r = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

Quindi una lamina e anche un qualunque rigido piano, ad esempio un telaio piano, un'asta, ha 3 g.l. e il suo spazio delle configurazioni è:

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}^2 \times S^1 \ ,$$

dove con S^1 denotiamo la circonferenza di raggio unitario. Infatti, possiamo scegliere come coordinate libere



coordinate libere= $\{x_A, y_A, \varphi\}$
$x_A, y_A \in \mathbb{R}$
$-\pi < \varphi \leq \pi$

N.B. Mentre nello spazio 3D l'asta è un caso degenere, nel piano non lo è poiché ha 3 g.l. come tutti gli altri rigidi piani.

Compatibilità ed efficacia dei vincoli

Vediamo nell'esempio seguente che il metodo del bilancio richiede molta cautela.

Esempio Consideriamo un punto materiale $P = (x, y, z)$ obbligato a stare contemporaneamente su due piani π_1 e π_2 di equazioni, rispettivamente

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & \pi_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & \pi_2 \end{cases} \tag{3.3.2}$$

È ovvio che, se π_1 e π_2 sono paralleli e distinti il sistema (3.3.2) non ha alcuna soluzione, quindi non esiste nessuna configurazione possibile per il punto P. Inoltre, se i piani sono coincidenti, è chiaro che il vincolo efficace è soltanto uno. Allora avremo la situazione seguente:

- se $\pi_1 \neq \pi_2$ **et** $\pi_1 \parallel \pi_2$ nessuna configurazione;
- se $\pi_1 \neq \pi_2$ **et** $\pi_1$non $\|\pi_2$, $g = 3$, $r = 2 \Rightarrow l = 3 - 2 = 1$;

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

- se $\pi_1 = \pi_2$, $g = 3$, $r = 1 \Rightarrow l = 3 - 1 = 2$.

Quindi, prima di utilizzare l'equazione di bilancio (3.3.1) per il calcolo di l, è necessario assicurarsi che il sistema delle equazioni vincolari, cioè dei vincoli *semplici* a cui è soggetto il modello, abbia almeno una soluzione e che non ci siano vincoli inefficaci. Per garantire tale situazione, richiederemo che le equazioni di vincolo soddisfino due condizioni: la compatibilità e l'efficacia. Introduciamo le seguenti notazioni:

$\mathcal{C}_L$: spazio delle configurazioni del sistema (parzialmente) libero, cioè privo di alcuni (o di tutti i) vincoli, dim $\mathcal{C}_L = g$. Le coordinate dei punti di tale spazio, denotate con $\{(x_1, \ldots, x_g)\}$, saranno dette coordinate *sovrabbondanti*.

$\mathcal{C}_V$: spazio delle configurazioni del sistema vincolato, dim $\mathcal{C}_V = l$, cioè l'insieme dei punti soluzione del sistema dato dalle r equazioni scalari,

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_g) = 0 \\ \vdots \\ f_r(x_1, \ldots, x_g) = 0 \end{cases} \tag{3.3.3}$$

La condizione di compatibilità garantisce che il modello vincolato ammetta almeno una configurazione possibile; quella di efficacia che non venga conteggiato un vincolo il cui effetto è già assicurato dagli altri vincoli. Matematicamente, le due condizioni si esprimono nel seguente modo .

1. Compatibilità:

$$\mathcal{C}_V \neq \emptyset \tag{3.3.4}$$

2. Efficacia:

$$\text{rango} \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = max \ , \tag{3.3.5}$$

cioè il rango della matrice Jacobiana (a r righe e g colonne) valutata nei punti di $\mathcal{C}_V$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} \text{grad} f_1 \\ \text{grad} f_2 \\ \vdots \\ \text{grad} f_r \end{bmatrix}_{|\mathcal{C}_V}$$

deve essere massimo, cioè pari al minimo fra (r, g).

N.B. Il rango della matrice Jacobiana è una funzione sullo spazio $\mathcal{C}_V$. Esso coincide con la dimensione dello spazio vettoriale tangente (l'insieme dei vettori tangenti alla varietà delle configurazioni) in un suo punto fissato. Quindi, può succedere che esso sia non massimo solo in alcuni punti di tale spazio, cioè che la dimensione dello spazio tangente in quei punti sia inferiore alla dimensione della varietà. Tali punti singolari sono detti, in Meccanica, configurazioni a vincoli *inefficaci*.

Possiamo, adesso, classificare i sistemi vincolati che soddisfano le condizioni di compatibilità ed efficacia, nelle seguenti classi:

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$r < g$ sistema ipostatico $l = g - r > 0$ (ammette almeno una coordinata libera)

$r = g$ sistema isostatico $l = g - r = 0$ (tolto un qualunque vincolo il modello diventa ipostatico)

$r > g$ sistema iperstatico $l = 0$ (esistono $r - g$ vincoli, tolti i quali il modello diventa isostatico)

N.B. In molti testi di Scienza delle Costruzioni e in alcuni di Meccanica Razionale, i sistemi ipostatici vengono chiamati *labili*. Inoltre, per i modelli iperstatici, la differenza $i = r - g$ si dice grado di iperstaticità del modello.

Dimostrazione del metodo del bilancio nel caso di sistemi ipostatici ($r<g$)

Consideriamo il modello privo di alcuni vincoli e parametrizzato da g coordinate sovrabbondanti $(x_1, x_2, \ldots, x_{g-1}, x_g)$. Supponiamo che i vincoli mancanti si esprimano tramite r equazioni vincolari

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_g) = 0 \\ \vdots \\ f_r(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_g) = 0 \end{cases} \tag{3.3.6}$$

compatibili ed efficaci, cioè soddisfano le (3.3.4) e (3.3.5).

Sotto tali ipotesi, il teorema di Dini assicura che possiamo risolvere *localmente* il sistema rispetto a r variabili, diciamo $(x_1, \ldots, x_r)$, e scrivere

$$\begin{cases} x_1 = h_1(x_{r+1}, \ldots, x_g) \\ x_2 = h_2(x_{r+1}, \ldots, x_g) \\ \vdots \\ x_r = h_r(x_{r+1}, \ldots, x_g) \ . \end{cases} \tag{3.3.7}$$

In tal modo, rimangono libere le $(g - r)$ coordinate $(x_{r+1}, \ldots, x_g)$, mentre $(x_1, \ldots, x_r)$ si esprimono come loro funzioni. Quindi, il numero delle coordinate libere del sistema vincolato è pari a:

$$l = g - r$$

N.B. Nella pratica, le l coordinate libere $(x_{r+1}, \ldots, x_g)$ possono essere scomode da usare. Allora, può essere più conveniente scegliere altre coordinate $(q_1, \ldots, q_l)$, a condizione che siano legate alle $(x_{r+1}, \ldots, x_g)$ da una trasformazione differenziabile

$$\begin{cases} x_{r+1} = h_{r+1}(q_1, \ldots, q_l) \\ \vdots \\ x_g = h_g(q_1, \cdots, q_l) \end{cases} \tag{3.3.8}$$

A questo punto, anche le coordinate residue $(x_1, \ldots, x_r)$ possono essere scritte in termini di $(q_1, \ldots, q_l)$, concatenando le (3.3.7) e (3.3.8).

N.B. Le condizioni di compatibilità ed efficacia dei vincoli devono essere verificate anche nel caso di una sola equazione vincolare. Infatti, può succedere che un'equazione vincolare che non soddisfi la condizione 2 di efficacia della pagina precedente, rappresenti un vincolo doppio anziché

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

semplice. A questo proposito si veda l'Esempio 1.7 di pag.14 in [Ughi, 2003], dove si utilizza il fatto che

$$x_0^2 + y_0^2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

3.4 Grado di un vincolo

Classifichiamo, ora, alcuni vincoli, introducendo il concetto di grado o molteplicità di un vincolo.

Definizione 3.4.1. *Chiameremo* grado di vincolo, v, *il numero delle equazioni compatibili ed efficaci che traducono le condizioni vincolari esercitate da un singolo dispositivo vincolare e diremo che un vincolo con $v = 1$ è semplice, con $v = 2$ è doppio, con $v = N$ è N-plo.*

Vincoli piani su un rigido ($g = 3$)

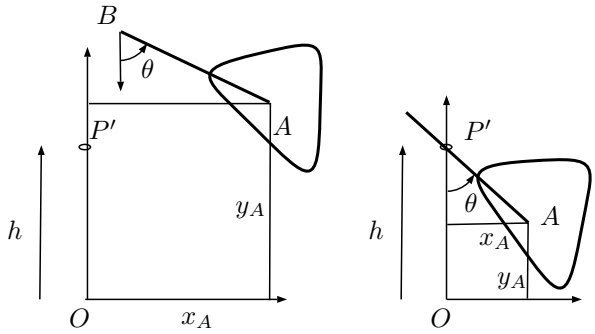
Illustriamo alcuni vincoli *piani*, applicati ad un rigido piano (lamina o asta). Ricordiamo che se tale rigido è libero, $g = 3$ e lo spazio delle configurazioni è dato da

$$\mathcal{C}_L = \{(x_A, y_A, \theta)\}$$

Vincoli semplici (v=1)

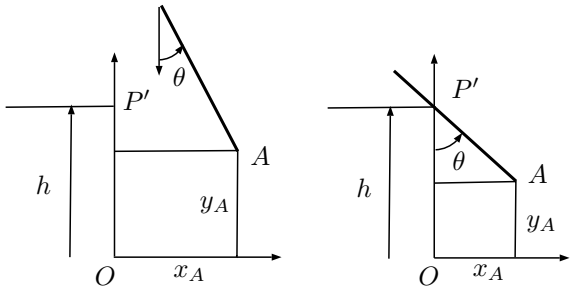
- Passaggio per un punto fisso P': il punto del rigido a contatto con il vincolo varia.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



anellino o cerniera cilindrica "bucata"
$l = 2$

Bilatero:
$x_A = (h - y_A)\tan\theta$ se $\theta \neq \pm\pi/2$
$y_A = h$ se $\theta = \pm\pi/2$

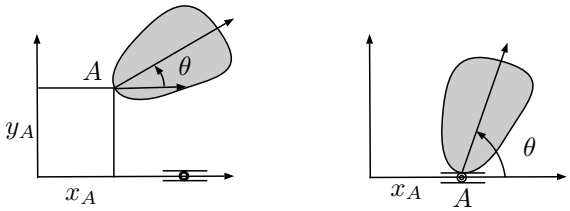


config. di confine: $l = 2$
config. ordinarie: $l = 3$

Unilatero:
$x_A \geq (h - y_A)\tan\theta$ se $\theta \neq \pm\pi/2$
$y_A \geq h$ se $\theta = \pm\pi/2$

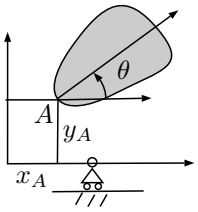
modello ipostatico.

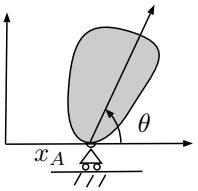
- Appoggio o carrello con cerniera o cerniera scorrevole: il punto del rigido a contatto con il vincolo non varia.



Bilatero, $y_A = 0$, $l = 2$.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

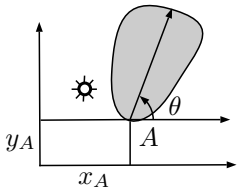


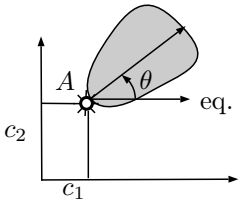


Unilatero, $y_A \geq 0$
config. di confine: $l = 2$
config. ordinarie: $l = 3$

Vincoli doppi (v=2)

- cerniera fissa:





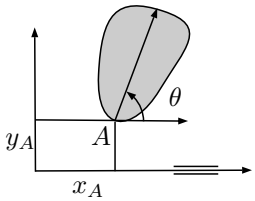
eq. di vincolo $\begin{cases} x_A - c_1 = 0 \\ y_A - c_2 = 0 \end{cases}$

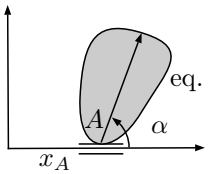
1. $\mathcal{C}_V = \{-\pi < \theta \leq \pi\} = S^1$
2. $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{|\mathcal{C}_V} \Rightarrow \text{rango} = 2 = \max \Rightarrow v = 2$

   $l = 3 - 2 = 1$

   modello ipostatico;

- pattino: carrello senza cerniera o incastro scorrevole o doppio pendolo:





eq. di vincolo $\begin{cases} y_A = 0 \\ \theta = \alpha \end{cases}$

1. $\mathcal{C}_V = \{-\infty < x_A < \infty\} = \mathbb{R}$
2. $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 2 = \max \Rightarrow v = 2$

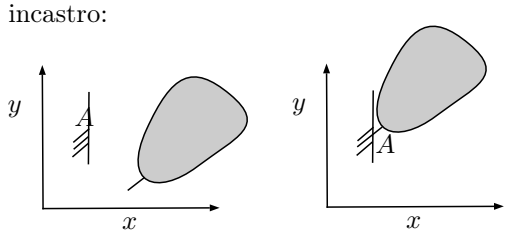
   $l = 3 - 2 = 1$

modello ipostatico

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Vincolo triplo (v=3)

- incastro:



eq. di vincolo

$$\begin{cases} x_A = c_1 \\ y_A = c_2 \\ \theta = \alpha \end{cases}$$

1. $\mathcal{C}_V = \{x_A = c_1, y_A = c_2, \theta = \alpha\} \equiv 1$ sola configurazione possibile

2. $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 3 = \max \Rightarrow v = 3$
   $l = 0$ modello isostatico

Vincoli nello spazio su un rigido ($g = 6$)

Lo spazio delle configurazioni di un rigido libero è: $\mathcal{C}_L = \{(x_A, y_A, z_A, \theta_1, \theta_2, \theta_3)\} = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$, dove $SO(3)$ è il gruppo di Lie delle matrici (3×3) ortogonali speciali, cioè con determinante pari a 1.

Vincolo semplice (v=1)

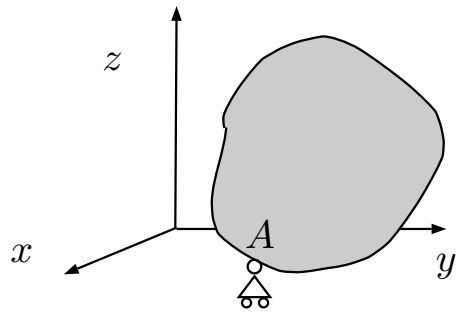
- appoggio su una superficie fissa

eq. di vincolo

$$z_A = 0$$

$$\text{rango} = 1 = max$$

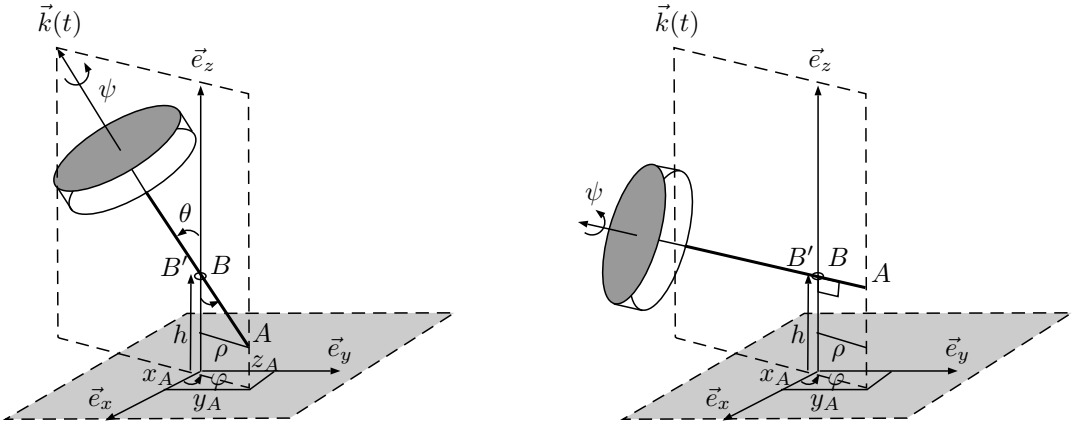
$$v = 1 \Rightarrow l = 5$$



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Vincoli doppi (v=2)

- passaggio per un punto o anellino fisso o cerniera sferica bucata fissa



$0 \leq \theta_1 = \varphi < 2\pi$, $0 < \theta_2 = \theta < \pi$, $0 \leq \theta_3 = \psi < 2\pi$

Se $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ le equazioni di vincolo sono

$$\begin{cases} x_A &= (h - z_A)\tan\theta\cos\varphi \\ y_A &= (h - z_A)\tan\theta\sin\varphi \end{cases}$$

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, et

$$\varphi \neq \pm\pi/2 \begin{cases} z_A = h \\ y_A = x_A \tan\varphi \end{cases}$$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \begin{cases} z_A = h \\ x_A = 0 \end{cases}$$

1. $\mathcal{C}_V = \left\{(z_A, \theta \neq \frac{\pi}{2}, \varphi, \psi)\right\} \cup \left\{(x_A, \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi \neq \pm\pi/2, \psi)\right\} \cup \left\{(y_A, \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = \pm\pi/2, \psi)\right\}$

2. Se $\theta \neq \pi/2$, allora $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tan\theta\cos\varphi & -(z_A - h)\tan\theta\sin\varphi & (z_A - h)\frac{\cos\varphi}{\cos^2\theta} & 0 \\ 0 & 1 & \tan\theta\sin\varphi & (z_A - h)\tan\theta\cos\varphi & (z_A - h)\frac{\sin\varphi}{\cos^2\theta} & 0 \end{bmatrix}$

   Se $\theta = \pi/2$ e $\varphi \neq \pm\pi/2$, allora $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tan\varphi & -1 & 0 & \frac{x_A}{\cos^2\varphi} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   invece,

   se $\theta = \pi/2$ e $\varphi = \pm\pi/2$, allora $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   In tutti i casi, rango $= 2 = \max \Rightarrow v = 2$. Dunque, $l = 4$ e il modello è ipostatico.

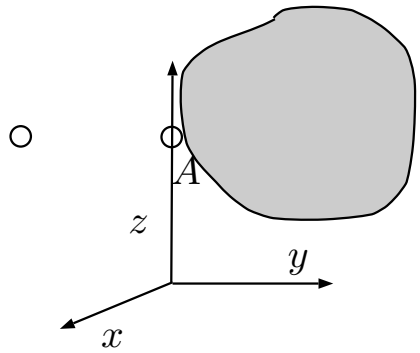
- cerniera sferica scorrevole lungo un asse fisso

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

eq. di vincolo $\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \end{cases}$

rango $= 2 = max$

$v = 2 \Rightarrow l = 4$



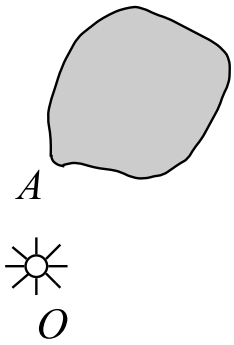
Vincolo triplo (v=3)

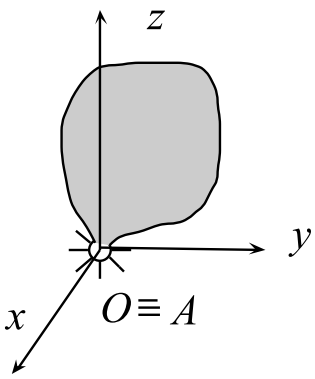
- cerniera sferica fissa

eq. di vincolo $\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ z_A = 0 \end{cases}$

rango $= 3 = max$

$v = 3 \Rightarrow l = 3$





Vincolo quadruplo (v=4)

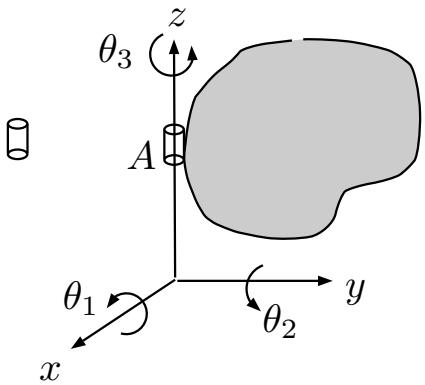
- cerniera cilindrica scorrevole lungo un asse fisso o collare cilindrico

eq. di vincolo

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{cases}$$

rango $= 4 = max$

$v = 4 \Rightarrow l = 2$



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

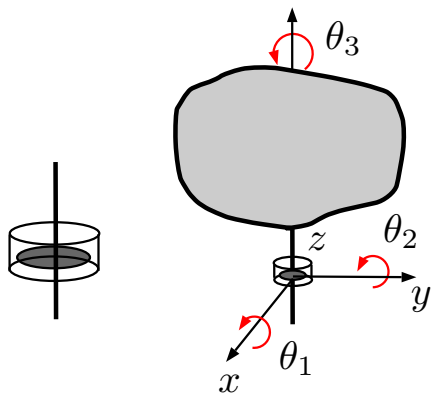
Vincoli quintupli (v=5)

- cerniera cilindrica fissa

eq. di vincolo $\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ z_A = 0 \\ \theta_1 = cost \\ \theta_2 = cost \end{cases}$

$$\text{rango} = 5 = max$$

$$v = 5 \Rightarrow l = 1$$



N.B. Nei problemi piani useremo sempre cerniere cilindriche: quelle fisse, sono vincoli *doppi* nel piano mentre sono vincoli *quintupli* nello spazio.

- incastro scorrevole lungo un asse fisso o pattino
  eq. di vincolo

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{cases} \tag{3.4.1}$$

$$\text{rango} = 5 = max$$

$$v = 5 \Rightarrow l = 1$$

Vincolo sestuplo (v=6)

- incastro
  eq. di vincolo

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ z_A = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{cases} \tag{3.4.2}$$

$$\text{rango} = 6 = max$$

$$v = 6 \Rightarrow l = 0$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

3.5 Sovrapposizione di più vincoli

Supponiamo di imporre ad un modello meccanico con g gradi di libertà, m vincoli, ognuno dei quali abbia grado di vincolo v_k, $k = 1, \ldots, m$.

Allora, il numero delle equazioni vincolari (che supponiamo compatibili)

$$v = \sum_{k=1}^{m} v_k$$

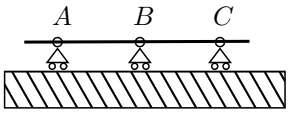
sarà detto *grado di vincolo apparente*.

Si potrebbe pensare ingenuamente che v coincida con r, cioè con il numero delle equazioni vincolari efficaci e, quindi, che i gradi di libertà del modello si calcolino come

$$l = \max\{g - v, 0\} \tag{3.5.1}$$

Tale procedura è sbagliata come dimostra il seguente esempio.

Esempio. Asta con 3 appoggi semplici.



$v = 3 \cdot 1 = 3 \quad g - v = 0$, tuttavia $l = 1$!

Esercizio 3.5.1. *Verificare la condizione di efficacia dei vincoli dell'Esempio precedente.*

Il motivo dell'errore è che quando si sovrappongono più vincoli, alcuni di essi possono diventare inefficaci, cioè possono limitare configurazioni già limitate da altri vincoli. In questo caso, $v > r$, quindi usare la (3.5.1) significherebbe contare alcuni vincoli più di una volta. Pertanto, anche nel caso di sovrapposizione di più vincoli multipli, la formula da usare per il calcolo dei gradi di libertà del modello vincolato è sempre la (3.3.1), dove r è il numero delle equazioni vincolari efficaci, che risulta in generale $r \leq v$. In particolare, ci sono due possibilità che dipendono dal rango della matrice Jacobiana dei vincoli. Precisamente:

- se rango $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = max$, allora $r \equiv v$, tutti i vincoli sono efficaci;
- se rango $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} < max$, allora $r \equiv$ rango, solo $r < v$ vincoli sono efficaci.

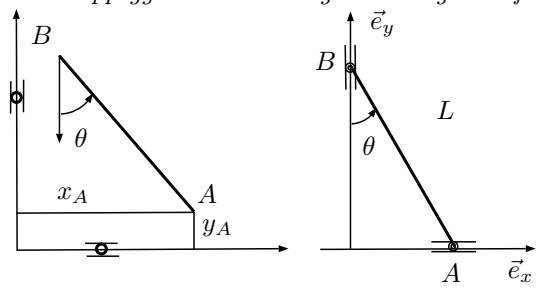
Vediamo, ora, alcuni esempi di sovrapposizione di vincoli per modelli piani.

Sovrapposizione di due vincoli semplici (v=2)

Esempio 3.5.1. *Scala con 2 appoggi bilateri su 2 guide ortogonali fra loro.*

$g = 3$

$\mathcal{C}_L = \{(x_A, y_A, \theta)\}$



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Le equazioni di vincolo sono

$$\begin{cases} x_B = 0 \\ y_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - L\sin\theta = 0 \\ y_A = 0 \end{cases}$$

quindi $v = 2$

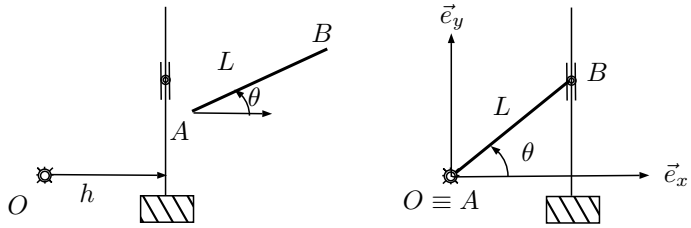
1. $\mathcal{C}_V = \{-\pi < \theta \leq \pi\} = S^1$
2. $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -L\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{|\mathcal{C}_V} \Rightarrow \text{rango} = 2 = \max$

$$r = v = 2 \qquad l = 3 - 2 = 1 \quad \text{modello ipostatico}$$

Sovrapposizione di un vincolo doppio e di uno semplice (v=3)

Esempio 3.5.2. *Cerniera fissa + carrello su una guida a distanza h dalla cerniera.*

$g = 3$



eq. di vincolo

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ x_A + L\cos\theta - h = 0 \end{cases}$$

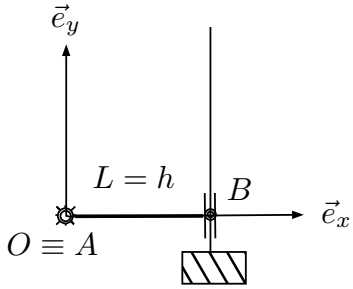
1. *Compatibilità:* $\cos\overline{\theta} = \frac{h}{L}$, *se* $h \leq L$;
2. *Efficacia:* $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -L\sin\overline{\theta} \end{bmatrix} \Rightarrow \det\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = -L\sin\bar{\theta}$

Dunque;

- se $h < L \Rightarrow \overline{\theta} \neq 0,\ r = v,\ l = 0 \Rightarrow$ modello isostatico

$$\mathcal{C}_V = \left\{\overline{\theta} = \arccos\frac{h}{L}\right\} \text{ oppure } \mathcal{C}_V = \left\{\overline{\theta} = -\arccos\frac{h}{L}\right\}$$

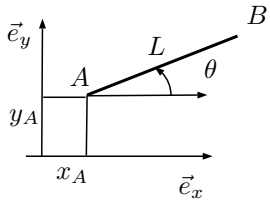
- se $h = L \Rightarrow \overline{\theta} = 0,\ \det\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = 0 \Rightarrow \text{rango} = 2 < \max \Rightarrow$ vincoli inefficaci, $r = 2 < v$

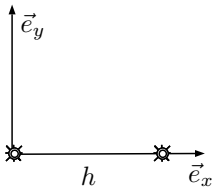


©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

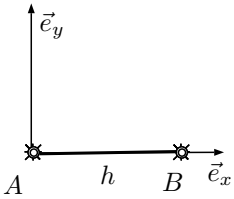
Sovrapposizione di due vincoli doppi (v=4)

Esempio 3.5.3. *Due cerniere fisse a distanza h fra loro.*





$$g = 3 \quad \mathcal{C}_L = \{(x_A, y_A, \theta)\}$$



eq. di vincolo

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ x_B = h \\ y_B = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ x_A + L\cos\theta = h \\ y_A + L\sin\theta = 0 \end{cases}$$

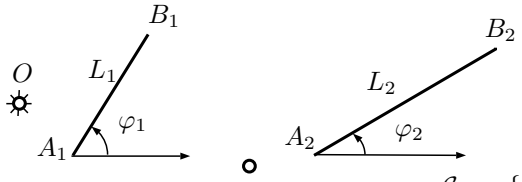
1. *Compatibilità:* $h = L \quad \mathcal{C}_V = \{x_A = y_A = \theta = 0\}$
2. *Efficacia:* $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -L\sin\theta \\ 0 & 1 & L\cos\theta \end{bmatrix}_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L \end{bmatrix}$ *rango* $= 3 = \max$

$r = v = 4 > g, \ l = 0$

modello iperstatico (1 volta).

Esempio

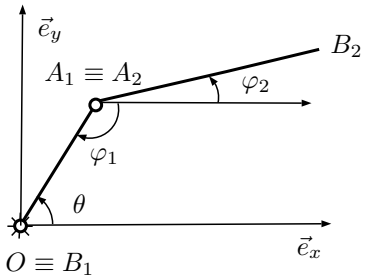
1. 2 aste + 1 cerniera interna + 1 cerniera esterna fissa: **pendolo doppio**



$g = 3 \cdot 2 = 6$

$v = 2 + 2$

$\mathcal{C}_L = \{(x_{A_1}, y_{A_1}, \varphi_1; x_{A_2}, y_{A_2}, \varphi_2)\}$



$A_1 \equiv A_2$ cerniera interna

$B_1 \equiv O$ cerniera esterna

$l = 2$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

In coordinate sovrabbondanti le eq. di vincolo si scrivono:

$$\begin{cases} x_{A_1} = x_{A_2} & \text{cerniera} \\ y_{A_1} = y_{A_2} & \text{interna} \\ \\ x_{B_1} = 0 & \text{cerniera} \\ y_{B_1} = 0 & \text{esterna} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A_1} - x_{A_2} = 0 \\ y_{A_1} - y_{A_2} = 0 \\ \\ x_{A_1} + L_1 \cos\varphi_1 = 0 \\ y_{A_1} + L_1 \sin\varphi_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A_2} = -L_1 \cos\varphi_1 \\ y_{A_2} = -L_1 \sin\varphi_1 \\ x_{A_1} = -L_1 \cos\varphi_1 \\ y_{A_1} = -L_1 \sin\varphi_1 \end{cases}$$

(a) Compatibilità: è sempre soddisfatta. Lo spazio delle configurazioni del pendolo doppio risulta

$$\mathcal{C}_V = \{-\pi < \varphi_1 \leq \pi\} \times \{-\pi < \varphi_2 \leq \pi\} = S^1 \times S^1 \ ,$$

cioè il toro bidimensionale.

(b) Efficacia:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -L_1 \sin\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_1 \cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{|\mathcal{C}_V} \Rightarrow \text{rango} \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = 4 = \max$$

Infatti

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Pertanto, il pendolo doppio ha gradi di libertà pari a

$$l = g - r = 6 - 4 = 2$$

ed è un modello ipostatico in ogni configurazione di $\mathcal{C}_V = S^1 \times S^1$. Come coordinate libere possiamo scegliere i 2 angoli

$$c.l. = (\varphi_1, \varphi_2) \ ,$$

oppure i 2 angoli

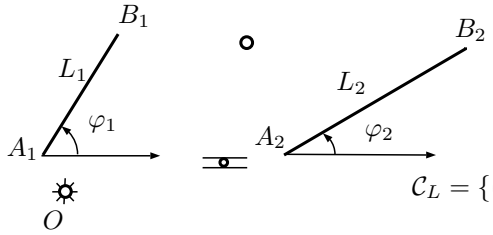
$$c.l. = (\theta, \varphi_2)\,, \ \text{dove} \quad \theta = \pi + \varphi_1$$

N.B. In questo caso, come in molti altri casi, una volta determinato lo spazio delle configurazioni del sistema vincolato $\mathcal{C}_V$, conviene scegliere coordinate libere più "comode" di quelle scelte inizialmente come coordinate sovrabbondanti.

2. Ai vincoli del punto 1 aggiungiamo un appoggio semplice, bilatero sull'asse x in modo da ottenere il modello **biella-manovella**. Inoltre, per semplicità di calcolo, supponiamo $L_1 =$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

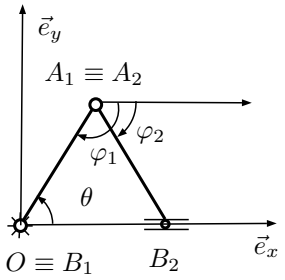
$L_2 = L$.



$g = 3 \cdot 2 = 6$

$v = 2 + 2 + 1$

$\mathcal{C}_L = \{(x_{A_1}, y_{A_1}, \varphi_1; x_{A_2}, y_{A_2}, \varphi_2)\}$



$A_1 \equiv A_2$ cerniera interna

$B_1 \equiv O$ cerniera esterna

$B_2 \in (O, \vec{e}_x)$ cerniera scorrevole esterna

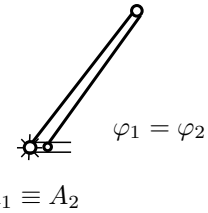
$l = 1$

Le eq. di vincolo sono

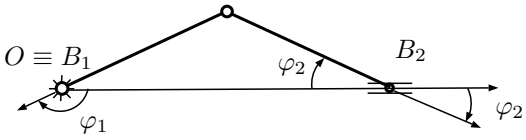
$$\begin{cases} x_{A_1} = x_{A_2} \\ y_{A_1} = y_{A_2} \\ x_{B_1} = 0 \\ y_{B_1} = 0 \\ y_{B_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A_1} - x_{A_2} = 0 \\ y_{A_1} - y_{A_2} = 0 \\ x_{A_1} + L\cos\varphi_1 = 0 \\ y_{A_1} + L\sin\varphi_1 = 0 \\ y_{A_2} + L\sin\varphi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A_2} = x_{A_1} \\ y_{A_2} = y_{A_1} \\ x_{A_1} = -L\cos\varphi_1 \\ y_{A_1} = -L\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 \end{cases} \tag{3.5.2}$$

(a) Compatibilità: il sistema (3.5.2) ammette sempre soluzioni date da

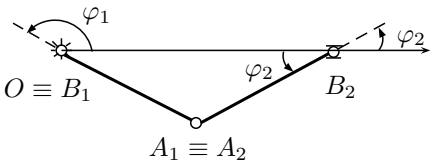
1) se $\varphi_1 = \varphi_2$



2) se $\varphi_1 + \varphi_2 = -\pi$



3) se $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

(b) Efficacia

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -L\sin\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L\cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L\cos\varphi_2 \end{bmatrix}$$

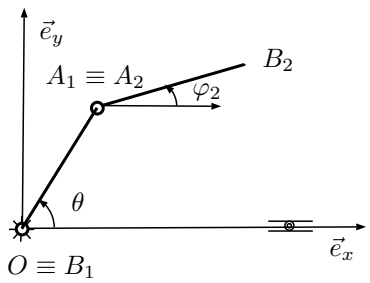
Si può dimostrare, con un po' di calcoli, che il rango della matrice Jacobiana precedente è max se e solo se

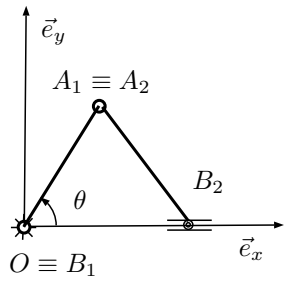
$$\cos\varphi_2 \neq 0 \ . \tag{3.5.3}$$

Possiamo, però, procedere in un altro modo, più semplice dal punto di vista computazionale, utilizzando i risultati del punto 1. Precisamente, partiamo dal modello parzialmente svincolato del pendolo doppio.

$\mathcal{C}_L = \{(\theta, \varphi_2)\}$ $\qquad$ $\mathcal{C}_V = \{-\pi < \theta \leq \pi\}$

$g = 2$ $\qquad$ $l = 2 - 1 = 1$





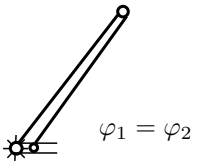
e vincoliamo il punto B_2 con un appoggio semplice sull'asse x, in modo che

$$0 = y_{B_2} = y_{A_2} + L\sin\varphi_2 = L\sin\theta + L\sin\varphi_2 \tag{3.5.4}$$

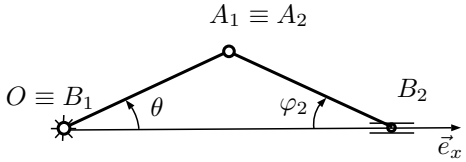
Basta, ora, studiare l'unica eq. vincolare (3.5.4) al posto del sistema (3.5.2).

(a) Compatibilità: l'eq. ammette sempre le soluzioni

1) $\varphi_2 = \theta - \pi$



2) $\varphi_2 = -\theta$



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

(b) Efficacia

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = [L\cos\theta, L\cos\varphi_2] = \begin{cases} \xrightarrow{1)} [L\cos\theta, L\cos(\theta-\pi)] = [L\cos\theta, -L\cos\theta] \\ \xrightarrow{2)} [L\cos\theta, L\cos(-\theta)] = [L\cos\theta, L\cos\theta] \end{cases}$$

È immediato concludere che il vincolo è inefficace se e solo se

$$\cos\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{2}$$

Pertanto, per evitare problemi, possiamo escludere le configurazioni a vincoli inefficaci dallo spazio delle configurazioni del sistema biella-manovella e dire che esso è dato da

$$\mathcal{C}_V = S^1 \setminus \left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}\right) \ ,$$

che è la circonferenza unitaria privata dei punti $\pm\frac{\pi}{2}$, cioè privata delle configurazioni in cui biella e manovella sono parallele tra loro e ortogonali alla guida.

Si vedrà in statica e in dinamica che tali configurazioni creano problemi, per esempio, nel calcolo delle reazioni vincolari.

Concludendo, per il modello biella manovella, analizzato prendendo come modello svincolato il pendolo doppio, risulta

- se $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$, $g = 2$, $v = r = 1$, $l = 1 \Rightarrow$ modello ipostatico
- se $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, $g = 2, v = 1, r = 0 \Rightarrow$ vincoli inefficaci

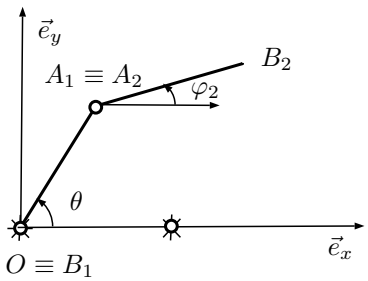
Naturalmente, lo stesso risultato, ma con più fatica, si ottiene partendo dal modello totalmente svincolato, come al punto 1.

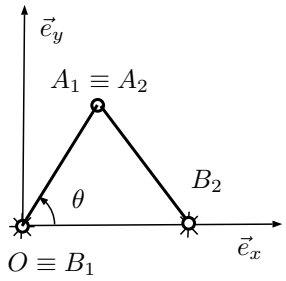
3. 2 aste + 2 cerniere esterne fisse a distanza d: **arco a 3 cerniere**.

   Procediamo come al punto precedente, partendo dal pendolo doppio e aggiungendovi una cerniera esterna fissa in B_2

   $\mathcal{C}_L = \{(\theta, \varphi_2)\}$

   $g = 2$ $\qquad$ $l = 2 - 2 = 0$





©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Le equazioni di vincolo sono ($v = 2$):

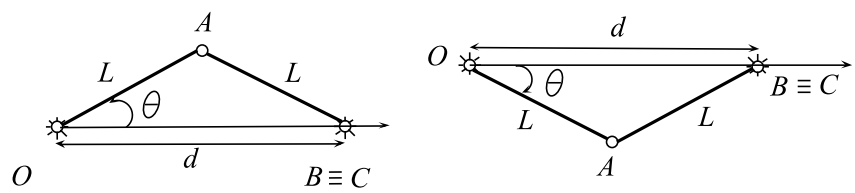
$$\begin{cases} y_{B_2} = 0 \\ x_{B_2} = d \end{cases} \quad \begin{cases} L\sin\theta + L\sin\varphi_2 = 0 \\ L\cos\theta + L\cos\varphi_2 = d \end{cases}$$

(a) Compatibilità: le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} \varphi_2 = -\theta \\ 2L\cos\theta = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_2 = -\theta \\ \cos\theta = \frac{d}{2L} \end{cases} \quad \text{se } d \leq 2L$$

Quindi $\mathcal{C}_V \neq \emptyset$ se e solo se $d \leq 2L$, come è ovvio dalla figura. Sotto questa condizione di compatibilità, lo spazio delle configurazioni del modello è dato da un'unica configurazione, cioè

$$\mathcal{C}_V = \left\{ \overline{\theta} = \arccos\frac{d}{2L} \right\} \text{ oppure } \mathcal{C}_V = \left\{ \overline{\theta} = -\arccos\frac{d}{2L} \right\} \tag{3.5.5}$$



(b) Efficacia

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} L\cos\theta & L\cos\varphi_2 \\ -L\sin\theta & -Lsin\varphi_2 \end{bmatrix}_{|\mathcal{C}_V} = L\begin{bmatrix} \cos\overline{\theta} & \cos\overline{\theta} \\ -\sin\overline{\theta} & \sin\overline{\theta} \end{bmatrix}_{|\mathcal{C}_V}$$

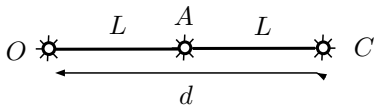
Quindi,

$$\det\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{|\mathcal{C}_V} = 2L^2\sin\overline{\theta}\cos\overline{\theta} = \pm 2L^2\frac{d}{2L}\sqrt{1-\left(\frac{d}{2L}\right)^2} = \pm Ld\sqrt{1-\left(\frac{d}{2L}\right)^2}$$

Pertanto, i vincoli sono inefficaci nella configurazione

$$d = 2L$$

in cui rango$= r = 1 < v$



Anche in questo caso, vedremo che tale configurazione crea problemi nel calcolo delle reazioni vincolari.

In conclusione, per l'arco a 3 cerniere risulta che:

- se $d < 2L,\ g = 2, v = r = 2,\ l = 0$, modello isostatico
- se $d = 2L,\ g = 2, v = 2, r = 1,$ vincoli inefficaci.

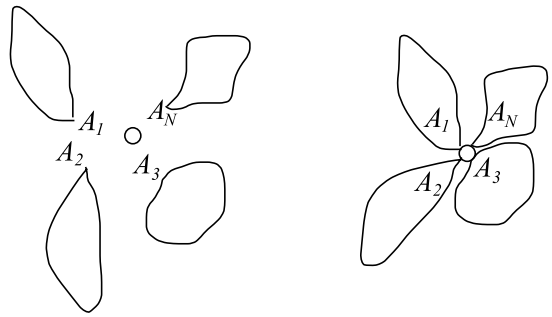
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

3.6 Modelli articolati

Introduciamo la seguente

Definizione 3.6.1. *I modelli articolati piani sono i sistemi meccanici costruiti con lamine e/o aste giacenti su uno stesso piano e vincolate con cerniere cilindriche, ciascuna avente il proprio asse ortogonale al piano suddetto.*

Ora, vediamo qual è l'effetto delle cerniere su tali modelli. Calcoliamo, ad esempio, il grado di vincolo di una cerniera interna (o nodo) in cui convergono N lamine ($g = 3N, \mathcal{C} = \{(x_1, y_1, \theta_1, \ldots, x_n, y_n, \theta_n)\}$)



$$\begin{aligned} &A_1 = (x_1, y_1) \\ &A_2 = (x_2, y_2) \\ &\vdots \\ &A_N = (x_N, y_N) \end{aligned}$$

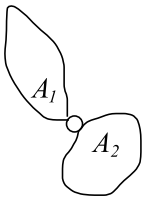
Scriviamo le equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ x_2 = x_3 \\ y_2 = y_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} = x_N \\ y_{N-1} = y_N \end{cases} \qquad v = 2\,(N-1)$$

Se invece che interna, la cerniera è esterna (fissa), devo aggiungere altre 2 equazioni di vincolo ($x_1 = c_1$, $y_1 = c_2$) quindi

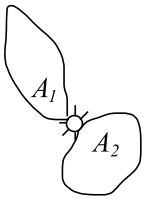
$$v = 2N - 2 + 2 = 2N$$

Esempio 3.6.1. $N = 2$



1. *se la cerniera è interna* $\Longrightarrow v = 2$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

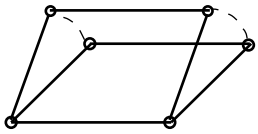


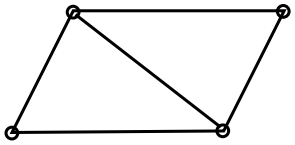
2. *se la cerniera è fissata a terra* $\Longrightarrow v = 4$.

   Si noti che, in questo caso, il vincolo è contemporaneamente esterno ed interno.

Sistemi articolati lineari: modelli fatti da aste vincolate mediante cerniere.

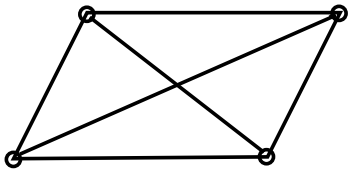
Si classificano in:

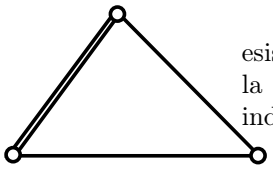
- modelli deformabili 
- modelli rigidi o indeformabili o *travature reticolari* che, a loro volta, si dividono in:
  - travature strettamente indeformabili



togliendo qualunque asta il sistema diventa deformabile

  - travature ad aste sovrabbondanti,





esiste almeno un'asta, tolta la quale il sistema rimane indeformabile

Problema 3.6.1. *Qual è il numero delle aste di una travatura strettamente indeformabile avente N cerniere (nodi)?*

Soluzione: Consideriamo gli N nodi come i punti di un sistema libero e le aste come i vincoli semplici da imporre per "irrigidire" il sistema. Dal metodo del bilancio (supponendo di evitare configurazioni a vincoli inefficaci) si ha

$$g = 2N \ , \quad l = 3 \ , \quad r = g - l = 2N - 3 \ .$$

Dunque, il numero delle aste è $v = r = 2N - 3$.

N.B. Strutture analoghe alle travature nello spazio $3D$ si dicono *tralicci.*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Capitolo 4

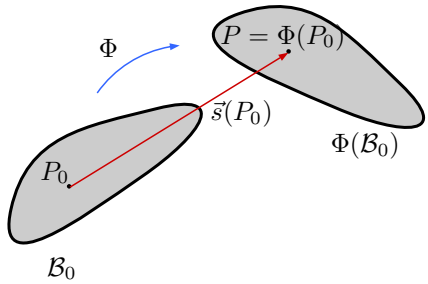
Cinematica dei Rigidi

In questo capitolo, presentiamo una descrizione geometrica del moto di un rigido come caso particolare della più generale cinematica di un modello continuo deformabile.

4.1 Cenni di Cinematica dei Modelli Continui

Un modello continuo, solido o fluido, può essere modellizzato dalla chiusura $\mathcal{B}_0$ di un insieme aperto dello spazio affine euclideo tridimensionale $\mathcal{E}_3$ (con un bordo regolare a tratti) che può cambiare forma e posizione in $\mathcal{E}_3$. Quindi, può essere descritto nel modo seguente.

Definizione 4.1.1. *Diremo piazzamento o configurazione (o deformazione in Scienza delle Costruzioni) del modello, un'applicazione $\Phi : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{E}_3$ che soddisfi le seguenti proprietà:*



Notazioni:
$\mathcal{B}_0$, configurazione di riferimento
$\Phi(\mathcal{B}_0)$, piazzamento del continuo
P_0, punto materiale
$P = \Phi(P_0)$, punto spaziale
$\vec{s}(P_0) = P - P_0$, *spostamento* di P_0
$\{P_0, \vec{s}(P_0)\}_{P_0 \in \mathcal{B}_0}$, spostamento del continuo

1. sia iniettiva, affinchè rispetti l'impenetrabilità dei corpi;
2. sia regolare, affinchè rispetti la continuità della materia;
3. abbia Jacobiano strettamente positivo, affinchè conservi l'orientazione dei volumi.

Tali condizioni assicurano l'esistenza dell'applicazione inversa

$$\Phi^{-1} : \Phi(\mathcal{B}_0) \to \mathcal{B}_0$$

con le stesse proprietà di Φ.

Definizione 4.1.2. *Chiameremo moto del continuo o flusso (dipendente dal tempo) una famiglia ad un parametro di piazzamenti del sistema*

$$\Phi : I \times \mathcal{B}_0 \to \mathcal{E}_3, (t, P_0) \mapsto P = \Phi(t, P_0) \ ,$$

dove $I = [t_0, t_1]$ *è l'intervallo degli istanti di tempo, che supporremo contenga l'istante* $t = 0$. *Richiederemo che l'applicazione parziale ottenuta*

1. *fissando il tempo* t, $\Phi_t : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{E}_3, \Phi_t(P_0) := \Phi(t, P_0)$ *sia un piazzamento del modello all'istante* t. *Le immagini* $\mathcal{B}_{t_0} = \Phi_{t_0}(\mathcal{B}_0)$, $\mathcal{B}_t = \Phi_t(\mathcal{B}_0)$, $\mathcal{B}_{t_1} = \Phi_{t_1}(\mathcal{B}_0)$, *saranno chiamate, rispettivamente, configurazione iniziale, attuale, finale del continuo. Per semplicità di descrizione, prenderemo la configurazione iniziale coincidente con quella di riferimento. Dunque,*

$$\Phi_{t_0}(\mathcal{B}_0) \equiv \mathcal{B}_0 \Rightarrow \Phi_{t_0} = \mathbb{1}_{\mathcal{B}_0} \ . \tag{4.1.1}$$

Inoltre, richiederemo che l'applicazione parziale ottenuta

2. *fissando il punto* P_0, $\Phi_{P_0} : I \to \mathcal{E}_3, \Phi_{P_0}(t) := \Phi(t, P_0)$ *sia di classe* C^2 *a tratti. Essa rappresenta il moto della particella* P_0 *nell'intervallo* I. *La traiettoria* $\cup_{t \in I} \Phi_{P_0}(t)$ *del punto materiale* P_0 *è detta* linea di corrente *di* P_0.

L'applicazione $\vec{s}(t, P_0) := P(t) - P_0$ sarà detta *spostamento* di P_0 all'istante t.

Il vettore

$$\vec{v}_m(t, P_0) = \frac{d\Phi_{P_0}}{dt}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, P_0) \tag{4.1.2}$$

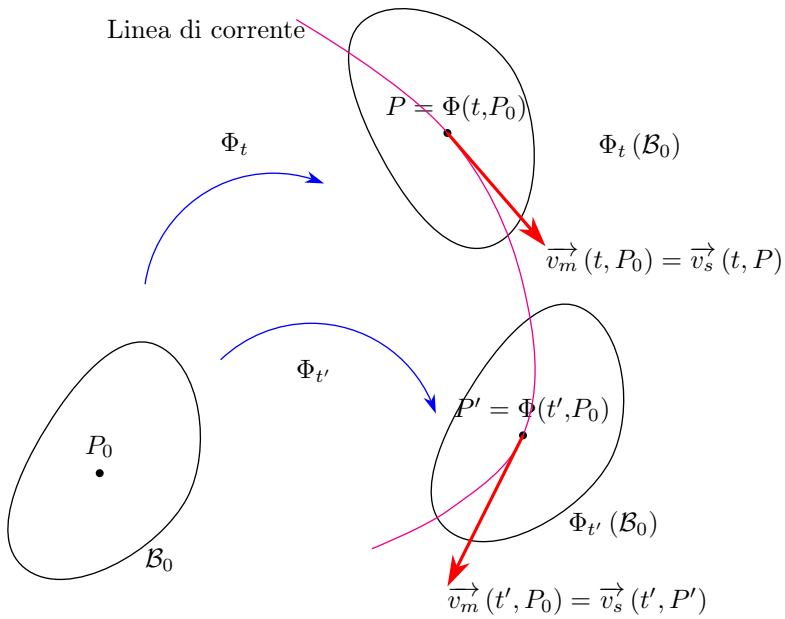
sarà detto *velocità materiale (o lagrangiana)* del punto materiale P_0, mentre lo *stesso* vettore espresso in funzione del punto spaziale P

$$\vec{v}_s(t, P) := \vec{v}_m\left(t, P_0 = \Phi_t^{-1}(P)\right) \tag{4.1.3}$$

sarà detto *velocità spaziale (o euleriana)* e, al variare di P definisce il campo della velocità spaziale dei punti del continuo ad un istante t. Il vettore $\vec{v}_m(t, P_0)$ è tangente alla linea di corrente di P_0 nel punto $P(t)$ all'istante t, quindi si può pensare come un vettore applicato in $P(t)$. Invece, le curve tangenti al campo di velocità spaziale $\vec{v}_s(t, P)$, ad un istante fissato t, sono dette linee di *flusso*. Si può dimostrare che le linee di flusso coincidono con quelle di corrente se il moto è *stazionario*, cioè se il campo di velocità spaziale è indipendente dal tempo. A questo proposito si veda [Levi–Civita, Compendio di Meccanica Razionale, parte II, pag. 241.]

Tuttavia, non vale il viceversa, come vedremo nel caso del moto rotatorio non uniforme.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



4.2 Moti rigidi

Definizione 4.2.1. *Chiameremo moto* rigido *un flusso che preserva le distanze tra ogni coppia di punti del modello,*

$$d\big(\Phi_t(P_0), \Phi_t(Q_0)\big) = d(P_0, Q_0) \qquad \forall t \in I\ , \quad \forall P_0, Q_0 \in \mathcal{B}_0\ , \tag{4.2.1}$$

dove la distanza (euclidea) tra due punti qualsiasi P, $Q \in \mathcal{E}_3$, è definita tramite il prodotto scalare in E_3

$$d(P,Q) = |P - Q| = \sqrt{(P-Q)\cdot(P-Q)}\ . \tag{4.2.2}$$

Quindi, la (4.2.1) si scrive

$$|\Phi_t(P_0) - \Phi_t(Q_0)| = |P_0 - Q_0| \qquad \forall t \in I\ , \quad \forall P_0, Q_0 \in \mathcal{B}_0\ . \tag{4.2.3}$$

Lemma 2. *Sia $(V,\cdot)$ uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare e $F : V \to V$ un operatore che soddisfa le proprietà.*

i) $F(\vec{0}) = \vec{0}$

ii) $|F(\vec{u}) - F(\vec{v})| = |\vec{u} - \vec{v}| \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$.

Allora, F è lineare ed ortogonale.

Dimostrazione. Se nella *ii)* scelgo $\vec{v} = \vec{0}$, grazie alla *i)* segue che

$$|F(\vec{u})| = |\vec{u}| \qquad \forall \vec{u} \in V\ , \tag{4.2.4}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

cioè F preserva i moduli dei vettori. In più, confrontando ambo i lati della *ii)* scritti tramite il prodotto scalare

$$|F(\vec{u})-F(\vec{v})|^2 = \big(F(\vec{u})-F(\vec{v})\big)\cdot\big(F(\vec{u})-F(\vec{v})\big) = |F(\vec{u})|^2-2F(\vec{u})\cdot F(\vec{v})+|F(\vec{v})|^2 \overset{(4.2.4)}{=} |\vec{u}|^2-2F(\vec{u})\cdot F(\vec{v})+|\vec{v}|^2$$

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 \ ,$$

risulta, più in generale

$$F(\vec{u})\cdot F(\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v} \qquad \forall \vec{u}\ ,\vec{v}\in E_3\ , \tag{4.2.5}$$

cioè F preserva anche il prodotto scalare. Utilizzando la (4.2.4) e la (4.2.5) è facile dimostrare che lo scalare

$$\begin{aligned}|F(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) - \lambda F(\vec{u}) - \mu F(\vec{v})|^2 &= |F(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})|^2 + \lambda^2|F(\vec{u})|^2 + \mu^2|F(\vec{v})|^2 + \\ &- 2\lambda F(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot F(\vec{u}) - 2\mu F(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot F(\vec{v}) + 2\lambda\mu F(\vec{u})\cdot F(\vec{v}) = \\ &= |\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}|^2 + \lambda^2|\vec{u}|^2 + \mu^2|\vec{v}|^2 - 2\lambda(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot\vec{u} - 2\mu(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot\vec{v} + 2\lambda\mu\vec{u}\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

è nullo. Segue immediatamente la linearità dell'operatore F e dalla (4.2.5) la sua ortogonalità. □

N.B. Da ora in poi, accanto ai punti materiali del rigido $\mathcal{B}_0$, considereremo anche i punti del suo insieme complementare, immaginando il rigido esteso a tutto lo spazio $\mathcal{E}_3$, che si chiamerà lo *spazio solidale* al rigido. Quindi, da ora in poi

$$\mathcal{B}_0 \equiv \mathcal{E}_3$$

in modo che

$$\Phi_t^{-1} : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3\ .$$

Proposizione 4.2.1. *Ogni piazzamento $\Phi_t : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ di un moto rigido è un'isometria affine propria (o diretta), cioè, $\forall t \in I$, esiste un'unica trasformazione lineare $\hat{\Phi}_t : E_3 \to E_3$, associata a Φ_t, che preserva la struttura affine*

$$\Phi_t(P_0) - \Phi_t(Q_0) = \hat{\Phi}_t(P_0 - Q_0) \qquad \forall t\in I \quad \forall P_0\ ,Q_0 \in \mathcal{B}_0\ , \tag{4.2.6}$$

che è ortogonale rispetto al prodotto scalare ed è unimodulare, cioè $\det(\hat{\Phi}_t) = 1$. *Inoltre, lo spostamento rigido relativo a qualunque sotto-intervallo $[t_0, t] \subset I$, soddisfa la proprietà*

$$\vec{s}(t, P_0) = (\Phi_t(Q_0) - P_0) + \hat{\Phi}_t(P_0 - Q_0) \qquad \forall Q_0 \in \mathcal{E}_3 \tag{4.2.7}$$

Dimostrazione. Fissiamo ad arbitrio un punto $O_0 \in \mathcal{E}_3$, che chiameremo centro di riduzione e, per ogni vettore $\vec{v}$ di E_3, consideriamo il punto corrispondente $P_0 := O_0+\vec{v}$ e l'applicazione $\hat{\Phi}_t : E_3 \to E_3$ così definita

$$\hat{\Phi}_t(\vec{v}) = \hat{\Phi}_t(P_0 - O_0) := \Phi_t(P_0) - \Phi_t(O_0)\ .$$

L'applicazione $\hat{\Phi}_t$ gode delle proprietà:

i) $\hat{\Phi}_t(\vec{0}) = \Phi_t(O_0) - \Phi_t(O_0) = \vec{0}$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

ii) per ogni $Q_0 \in \mathcal{E}_3$, sia $\vec{w} = Q_0 - O_0$. Allora,

$$|\hat{\Phi}_t(\vec{v}) - \hat{\Phi}_t(\vec{w})| = |\big(\Phi_t(P_0) - \cancel{\Phi_t(O_0)}\big) - \big(\Phi_t(Q_0) - \cancel{\Phi_t(O_0)}\big)| =$$
$$= |\Phi_t(P_0) - \Phi_t(Q_0)| \overset{(4.2.3)}{=} |P_0 - Q_0| = |(P_0 - O_0) + (O_0 - Q_0)| = |\vec{v} - \vec{w}|$$

Pertanto, per il Lemma 2, l'applicazione $\hat{\Phi}_t$ è lineare ed ortogonale, quindi il suo determinante può essere ± 1. Inoltre, poichè lo Jacobiano di un piazzamento Φ_t è positivo per l'ipotesi 3 della definizione 4.1.1, per la (2.2.5) esso coincide con il il determinante di $\hat{\Phi}_t$; allora, segue che il determinante di $\hat{\Phi}_t$ è sempre pari a 1. Resta da verificare che la $\hat{\Phi}_t$ non dipende dalla scelta del centro di riduzione O_0. Infatti, se scegliamo un altro punto $O_0' = O_0 + \vec{u}$, detto $R_0 := O_0' + \vec{v} = O_0 + (\vec{u} + \vec{v})$, si ottiene, $\forall \vec{v} \in E_3$,

$$\hat{\Phi}_t'(\vec{v}) = \hat{\Phi}_t'(R_0 - O_0') := \Phi_t(R_0) - \Phi_t(O_0') = \Phi_t\big(O_0 + (\vec{u} + \vec{v})\big) - \Phi_t(O_0 + \vec{u}) =$$
$$= \Phi_t(O_0 + \vec{v}) + \cancel{\hat{\Phi}_t(\vec{u})} - \big(\Phi_t(O_0) + \cancel{\hat{\Phi}_t(\vec{u})}\big) = \Phi_t(P_0) - \Phi_t(O_0)\ .$$

Dunque, $\hat{\Phi}_t' \equiv \hat{\Phi}_t$.

Infine, lo spostamento rigido risulta

$$\vec{s}(t, P_0) = \Phi_t(P_0) - P_0 = (\Phi_t(P_0) - \Phi_t(Q_0)) - (P_0 - \Phi_t(Q_0)) = \hat{\Phi}_t(P_0 - Q_0) - (P_0 - \Phi_t(Q_0))$$

□

N.B. La (4.2.6) formalizza la seguente descrizione del moto rigido:

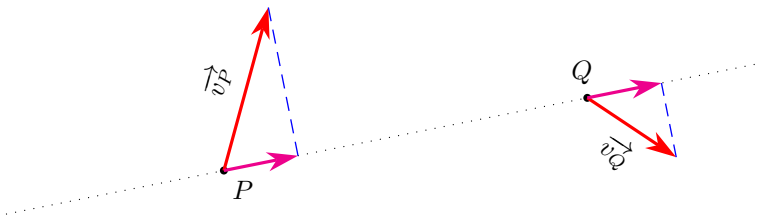
i) si sceglie ad arbitrio una particella del rigido, ad esempio Q_0;

ii) noto il moto di Q_0, $\Phi_{Q_0}(t)$, il moto delle altre particelle, ad es. P_0, è determinato dall'azione dell'operatore lineare $\hat{\Phi}_t$ (dipendente solo dal tempo e non da Q_0) sul vettore $(P_0 - Q_0)$, posizione delle particella P_0 rispetto a Q_0 nella configurazione di riferimento.

Dalla (4.2.1) si può ricavare immediatamente una caratterizzazione equivalente del moto rigido in termini del campo di velocità spaziale.

Proposizione 4.2.2. *Un moto è rigido se e solo se il suo campo delle velocità spaziali è equiproiettivo, cioè sono uguali i vettori componenti delle velocità di due punti lungo la congiungente i due punti.*

$$\vec{v}_P \cdot (P - Q) = \vec{v}_Q \cdot (P - Q) \qquad \forall t \in I \tag{4.2.8}$$



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Dimostrazione. Poiché il moto è rigido vale la (4.2.3), equivalente a

$$|\Phi_t(P_0) - \Phi_t(Q_0)|^2 = \big(\Phi_{P_0}(t) - \Phi_{Q_0}(t)\big) \cdot \big(\Phi_{P_0}(t) - \Phi_{Q_0}(t)\big) = \textit{indipendente dal tempo}$$

Derivando rispetto al tempo t si ottiene

$$2\,\big(\frac{d\Phi_{P_0}}{dt}(t) - \frac{d\Phi_{Q_0}}{dt}(t)\big) \cdot \big(\Phi_{P_0}(t) - \Phi_{Q_0}(t)\big) = 0\ ,$$

cioè

$$\big(\vec{v}_m(t, P_0) - \vec{v}_m(t, Q_0)\big) \cdot \big(P(t) - Q(t)\big) = 0\ ,$$

ovvero

$$\vec{v}_s(t, P) \cdot (P(t) - Q(t)) = \vec{v}_s(t, Q) \cdot (P(t) - Q(t))\ , \tag{4.2.9}$$

tenuto conto della (4.1.3).

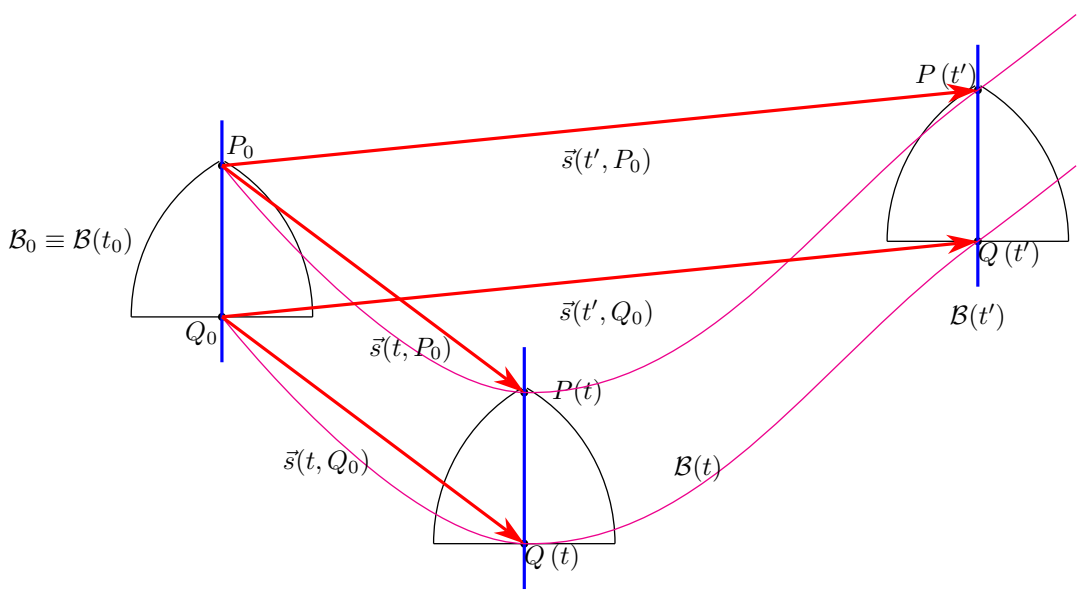
Viceversa, integrando rispetto al tempo la (4.2.9) si ottiene la (4.2.1). □

4.2.1 Esempi di Moto rigido

Presentiamo alcuni esempi già familiari di moto rigido, caratterizzandoli tramite i loro insiemi invarianti, cioè l'insieme dei punti del modello o dello spazio solidale che viene trasformato in sè stesso dal flusso.

Moto traslatorio

Definizione 4.2.2. *Diremo* traslatorio *un moto rigido che preserva tutte le direzioni, cioè un moto che trasforma assi in assi paralleli. Esso sarà indicato con τ.*



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Consideriamo il quadrilatero di vertici $P_0, P(t), Q(t), Q_0$. Per l'ipotesi di moto rigido i lati P_0Q_0 e $P(t)Q(t)$ sono di uguale lunghezza e per l'ipotesi di moto traslatorio sono anche paralleli. Allora, il quadrilatero suddetto è un parallelogramma e quindi gli spostamenti al tempo t sono

$$\vec{s}(t, P_0) = \vec{s}(t, Q_0) = \vec{s}(t) \quad \forall P_0, Q_0 \in \mathcal{B}_0 \ ,$$

cioè tutti i punti del rigido hanno il *medesimo* spostamento all'istante t. Dunque, il moto del rigido è descritto da

$$\tau : I \times \mathcal{B}_0 \to \mathcal{E}_3, (t, P_0) \mapsto P(t) = P_0 + \vec{s}(t) \tag{4.2.10}$$

e i suoi piazzamenti al tempo t si possono scrivere

$$\tau_t = \tau_{\vec{s}(t)} \ ,$$

per evidenziare il fatto che sono caratterizzati da un unico spostamento $\vec{s}(t)$. Si noti che il piazzamento inverso è dato da $\tau_{-\vec{s}(t)}$.

Derivando la (4.2.10), si ottiene il campo delle velocità del moto traslatorio

$$\dot{P}(t) = \cancel{\dot{P}_0} + \dot{\vec{s}}(t) \ , \tag{4.2.11}$$

cioè

$$\vec{v}_m(t, P_0) = \vec{v}_s(t, P) = \dot{\vec{s}}(t) = \vec{u}(t) \qquad \forall P_0 \in \mathcal{B}_0 \ , \forall P \in \mathcal{B}_t \ . \tag{4.2.12}$$

Esso è un campo uniforme, istante per istante, quindi le sue linee di flusso sono rette parallele. Inoltre, integrando la (4.2.12) rispetto al tempo, si dimostra che vale anche il viceversa: se un corpo ha un campo di velocità uniforme in un sotto-intervallo $[t, t'] \subseteq I$, allora il suo moto è traslatorio in tale sotto-intervallo.

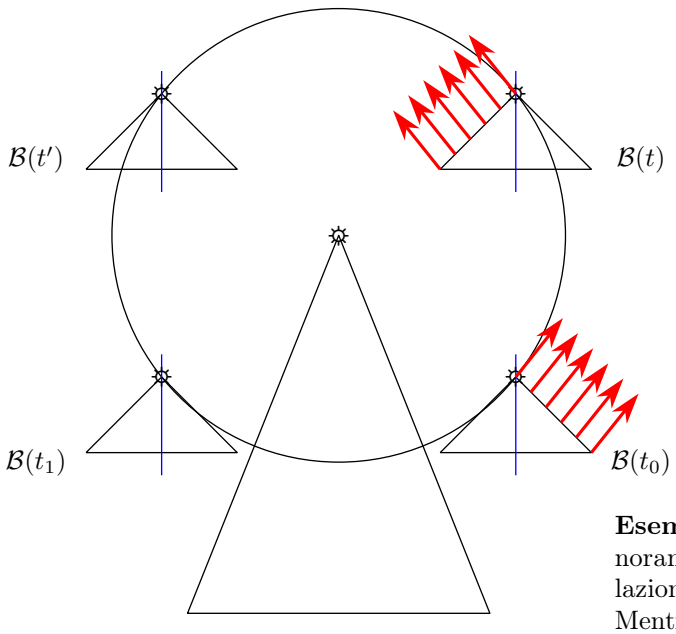
N.B. Dalla (4.2.10) segue

$$\tau_t(P_0) - \tau_t(Q_0) = P_0 - Q_0 \qquad \forall P_0, Q_0 \in \mathcal{B}_0 \ ,$$

che confrontata con la (4.2.6) implica che la famiglia degli operatori lineari associata al flusso è

$$\hat{\tau}_t \equiv \mathbb{1}_3 \ , \forall t \in I \ . \tag{4.2.13}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Esempio. Una cabina sulla ruota panoramica trasla, se trascuriamo le oscillazioni intorno alle cerniere cilindriche. Mentre le sue linee di corrente sono date da circonferenze, le sue linee di flusso sono rette parallele.

N.B. Il moto traslatorio è, in generale, curvilineo. Infatti, ciò che caratterizza il moto traslatorio è l'invarianza dell'*orientazione* del corpo nello spazio. Pertanto, il moto traslatorio può essere descritto, in modo equivalente, come il moto durante il quale ogni terna solidale al rigido preserva l'orientazione dei suoi assi.

Il moto rettilineo è il caso particolare del moto traslatorio che corrisponde a

$$\vec{s}(t) = s(t)\,\vec{e} \qquad \forall t \in I\ , \tag{4.2.14}$$

dove $\vec{e}$ è un versore indipendente dal tempo. In questo caso, il campo delle velocità (4.2.12) si riduce a

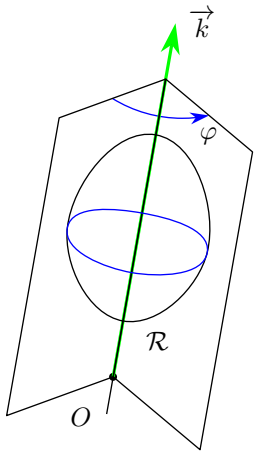
$$\vec{v}_m(t, P_0) = \vec{v}_s(t, P) = \dot{\vec{s}}(t) = \dot{s}(t)\,\vec{e} \qquad \forall P_0 \in \mathcal{B}_0\ , \forall P \in \mathcal{B}_t\ . \tag{4.2.15}$$

Infine, se $\dot{s}(t)$ non dipende dal tempo, il moto si dice traslatorio rettilineo ed *uniforme*. Viceversa, integrando la (4.2.15), segue che essa caratterizza i moti traslatori rettilinei, eventualmente uniformi se $\dot{s}(t)$ non dipende dal tempo. Per i i moti traslatori rettilinei, anche non uniformi, le linee di corrente sono rette parallele, che coincidono con le linee di flusso.

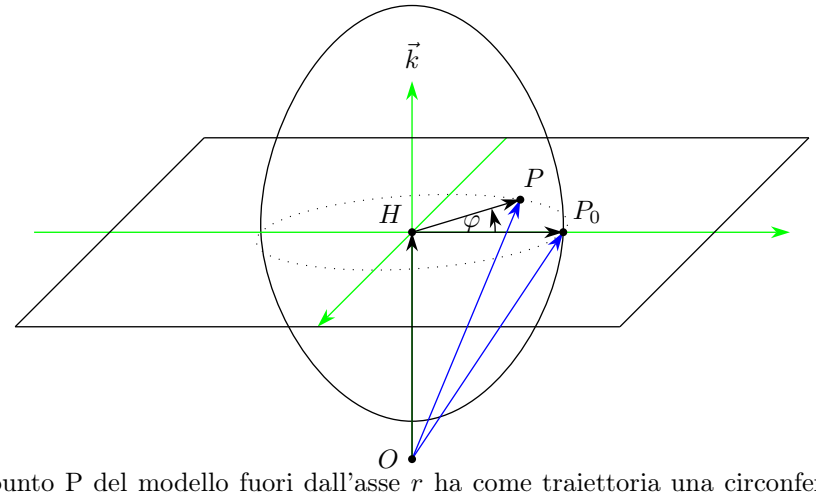
Moto rotatorio

Chiameremo *rotatorio* attorno ad un asse fisso il moto rigido che tiene fissi 2 punti del modello e quindi, per l'ipotesi di rigidità del moto, anche tutti i punti della retta passante per i 2 punti in oggetto. Tale retta è detta asse di rotazione del modello e sarà denotata anche con $(O, \vec{k})$, essendo O un qualunque punto dell'asse.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



N.B. Un rigido libero di ruotare intorno a un asse fisso ha 1 grado di libertà. Infatti, dal metodo del bilancio segue che i gradi di vincolo apparenti, cioè il numero delle equazioni vincolari che fissano 2 punti è $v = 3 \cdot 2 = 6$. Tuttavia, si può verificare che, a causa dei vincoli di rigidità, il numero di quelle efficaci si riduce a $r = 5$. Come coordinata libera possiamo prendere l'angolo φ compreso tra due semipiani del fascio passante per l'asse di rotazione, il primo semipiano fisso e il secondo solidale al rigido. In altre parole, la rotazione all'istante t è individuata univocamente dalla tripla $(O, \vec{k}, \varphi(t))$.



Ogni punto P del modello fuori dall'asse r ha come traiettoria una circonferenza giacente sul piano per P e ortogonale a r, centrata nel punto H d'intersezione di tale piano con l'asse r. Infatti, presi due punti A e B appartenenti a r, per il vincolo di rigidità, P si muove sull'intersezione delle due sfere di centro A (rs. B) e raggio AP (rs. BP), quindi lungo la circonferenza suddetta. Quindi, le linee di corrente nel moto rotatorio sono tutte circonferenze giacenti su piani ortogonali all'asse di rotazione e con centro appartenente a tale asse.

Il vettore posizione di P rispetto a un punto O sull'asse di rotazione, in un sistema di coordinate

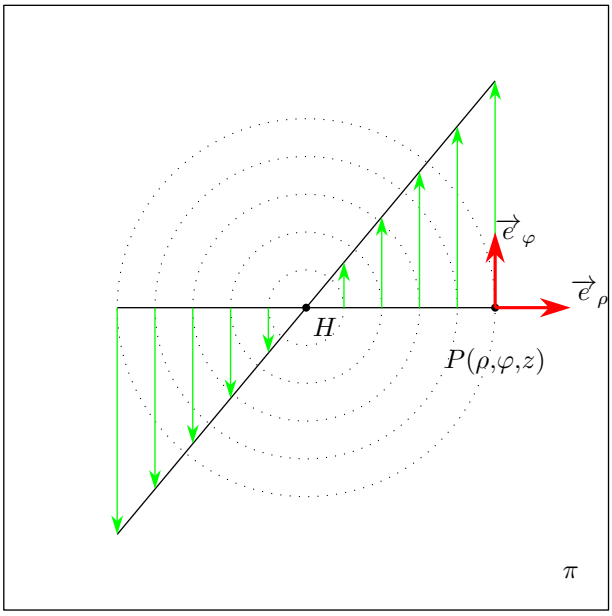
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

cilindriche $(0; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ è

$$P - O = (P - H) + (H - O) = \rho\, \vec{e}_\rho(t) + z\vec{k}\ .$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene la velocità di P data da

$$\vec{v}_P(\rho, \varphi) = \rho(P)\dot{\vec{e}}_\rho = \rho(P)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$



La struttura del campo di velocità si dice *rotatoria* o cilindrica e il diagramma della velocità dei punti su un diametro delle circonferenze è di tipo triangolare. È immediato verificare che, introducendo il vettore

$$\vec{\omega} := \dot{\varphi}\vec{k}\ , \tag{4.2.16}$$

la velocità di un generico punto P si può scrivere

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times (P - O) = \dot{\varphi}\vec{k} \times (\rho\, \vec{e}_\rho + z\vec{k}) = \rho\dot{\varphi}(\vec{k} \times \vec{e}_\rho) = \rho(P)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \qquad O \in r\ . \tag{4.2.17}$$

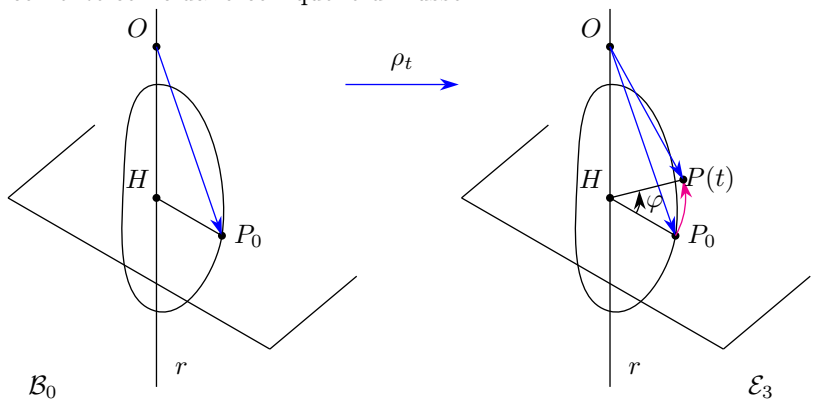
Il vettore $\vec{\omega}$ è detto velocità angolare del moto rotatorio. Riassumiamo alcune proprietà del campo di velocità del moto rotatorio.

Proprietà del campo di velocità del moto rotatorio

1. l'asse di rotazione è il luogo di tutti e soli i punti del rigido a velocità nulla;
2. la velocità di un punto P fuori dall'asse giace nel piano ortogonale all'asse passante per P e ha modulo proporzionale alla distanza di P dall'asse;
3. i punti che stanno su una parallela all'asse hanno il medesimo vettore velocità;
4. le linee di flusso sono circonferenze giacenti su piani ortogonali all'asse di rotazione e con centro sull'asse. Quindi coincidono con le linee di corrente, anche se il moto *non* è stazionario.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

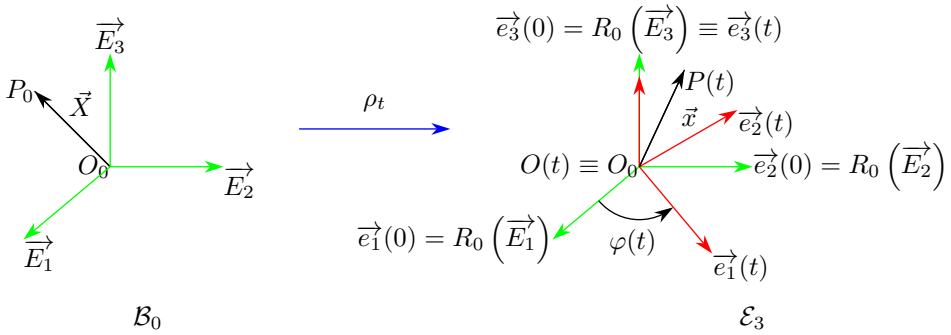
La suddetta proprietà 4. prova che la stazionarietà del moto non è una condizione necessaria affinchè le linee di corrente coincidano con quelle di flusso.



Determiniamo, ora, il moto rotatorio e la famiglia $\hat{\rho}_t$ degli operatori lineari associati ai piazzamenti ρ_t. A tale scopo, riscriviamo la (4.2.6) scegliendo il punto $Q_0 \equiv O_0$

$$\rho_t : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{E}_3, P_0 \mapsto P(t) = \rho_t(P_0) = \rho_t(O_0) + \hat{\rho}_t(P_0 - O_0) = O_0 + R_t(P_0 - O_0) \ , \tag{4.2.18}$$

dove abbiamo tenuto conto che O_0 è un punto fisso, cioè $O(t) \equiv O_0 = O$, e dove abbiamo denotato con $R_t = \hat{\rho}_t : E_3 \to E_3$ l'operatore lineare associato alle rotazioni ρ_t intorno a r. Determiniamo la rappresentazione matriciale di R_t su una base di E_3.



Per semplicità di notazione, poniamo $t_0 = 0$ in modo che, per la (4.1.1), si abbia

$$R_0 = \mathbb{1}_{E_3} \tag{4.2.19}$$

e scegliamo una terna $(O; \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ adattata al problema, cioè con l'origine nel punto fisso $O \in r$ e il versore $\vec{E}_3 \equiv \vec{k}$. Denotiamo con $\vec{e}_i(t) := R_t(\vec{E}_i),\ i = 1, 2, 3$, i trasformati al tempo t dei versori della base e osserviamo che dalla (4.2.19) segue

$$\vec{e}_i(0) = R_0(\vec{E}_i) = \vec{E}_i \qquad i = 1, 2, 3 \ . \tag{4.2.20}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Il vincolo che fissa l'asse $(O, \vec{k})$ implica che il versore $\vec{e}_3(t)$ non dipende dal tempo, quindi $\vec{e}_3(t) = R_t(\vec{E}_3) \equiv \vec{e}_3(0) \equiv \vec{E}_3 \equiv \vec{k}$, per ogni t. Dunque, $\vec{E}_3$ è un autovettore dell'operatore R_t con autovalore pari a 1, $\forall t \in I$. Introducendo i vettori posizione, rispettivamente, del punto materiale e del punto spaziale

$$\vec{X} := \quad P_0 - O_0 = X_1\vec{E}_1 + X_2\vec{E}_2 + X_3\vec{E}_3 \overset{(4.2.20)}{=} X_1\vec{e}_1(0) + X_2\vec{e}_2(0) + X_3\vec{e}_3(0) \ , \tag{4.2.21}$$

$$\vec{x} := \quad P(t) - O(t) = x_1(t)\vec{e}_1(0) + x_2(t)\vec{e}_2(0) + x_3(t)\vec{e}_3(0) \ , \tag{4.2.22}$$

la (4.2.18) si può riscrivere

$$\vec{x} = R_t\vec{X} \tag{4.2.23}$$

e, in forma matriciale, come

$$[\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0)][R_t]^{\mathscr{B}_0} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \ ,$$

dove $[R_t]^{\mathscr{B}_0}$ denota la matrice rappresentativa dell'operatore R_t sulla base $\mathscr{B}_0 = \big(\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0)\big)$.

Una descrizione equivalente del moto si può ottenere seguendo l'evoluzione della base solidale $\mathscr{B}_t = \big(\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)\big)$. Su tale base, il vettore posizione di un punto spaziale si scrive

$$\vec{x} = R_t(X_1\vec{E}_1 + X_2\vec{E}_2 + X_3\vec{E}_3) = X_1R_t(\vec{E}_1) + X_2R_t(\vec{E}_2) + X_3R_t(\vec{E}_3) = X_1\vec{e}_1(t) + X_2\vec{e}_2(t) + X_3\vec{e}_3(t) \ ,$$

quindi la (4.2.23) si può rappresentare come

$$[\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0)][R_t]^{\mathscr{B}_0} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \ , \tag{4.2.24}$$

che equivale a

$$[\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)] = [\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0)]\,[R_t]^{\mathscr{B}_0} \ . \tag{4.2.25}$$

Da tale equazione segue che le colonne della matrice $[R_t]^{\mathscr{B}_0}$ sono le componenti dei vettori $\vec{e}_i(t)$ sulla base fissa, cioè dei trasformati della base dall'operatore di rotazione di un angolo φ intorno all'asse r. Poichè risulta

$$\vec{e}_1(t) = \cos\varphi\,\vec{e}_1(0) + \sin\varphi\,\vec{e}_2(0) \ , \quad \vec{e}_2(t) = -\sin\varphi\,\vec{e}_1(0) + \cos\varphi\,\vec{e}_2(0) \ , \quad \vec{e}_3(t) = \vec{e}_3(0) \ ,$$

la rappresentazione di R_t sulla base $\vec{e}_i(0)$ si scrive

$$[R_t]^{\mathscr{B}_0} = \begin{bmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \varphi(0) = 0 \ . \tag{4.2.26}$$

Per evidenziare il fatto che l'operatore di rotazione è caratterizzato da una direzione $\vec{k}$ e da un angolo di rotazione φ intorno a tale direzione, spesso si scrive

$$R_t = R_{(\varphi(t), \vec{k})} \ .$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Esercizio 4.2.1. *Verificare che la matrice* $[R_t]^{\mathscr{B}_0}$ *è ortogonale ed unimodulare. Inoltre, dimostrare che l'operatore inverso di* $R_{(\varphi,\vec{k})}$ *è dato da* $R_{(-\varphi,\vec{k})}$.

Dalla (4.2.23) segue facilmente che il campo degli spostamenti è dato da

$$\vec{s}(t,P_0) = P(t) - P_0 = \vec{x} - \vec{X} = R_t\vec{X} - \vec{X} = (R_t - \mathbb{1})\vec{X} = (R_t - \mathbb{1})(P_0 - O_0) \qquad O_0 \in r \ .$$

Da ora in poi, posto $\mathbf{e}(t) := [\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)]$, per scrivere la (4.2.25) useremo la forma più compatta

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(0)[R_t]^{\mathscr{B}_0} \ . \tag{4.2.27}$$

Ora, calcoliamo il campo delle velocità del moto rotatorio derivando rispetto al tempo la (4.2.23). La velocità in forma lagrangiana risulta

$$\dot{\vec{x}} = \dot{R}(\varphi(t))\vec{X} \ ,$$

dove si è tenuto conto che il vettore $\vec{X}$, relativo alla configurazione di riferimento, è indipendente dal tempo. Dalla (4.2.23) segue che $\vec{X} = R^{-1}\vec{x}(t)$, quindi la velocità in forma euleriana risulta

$$\dot{\vec{x}} = \dot{R}R^{-1}\vec{x}(t) = \frac{dR}{d\varphi}\dot{\varphi(t)}R^{-1}\vec{x}(t)$$

Calcoliamo esplicitamente la matrice $\dot{\varphi}[\frac{dR}{d\varphi}R^{-1}]$. Poichè

$$\left[\frac{dR}{d\varphi}\right] = \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $[R]$ è una matrice ortogonale, si ottiene

$$\dot{\varphi}[\frac{dR}{d\varphi}R^{-1}] = \dot{\varphi}\left[\begin{array}{c|c|c} \cancel{-\sin\varphi\cos\varphi} + \cancel{\cos\varphi\sin\varphi} & -\sin^2\varphi - \cos^2\varphi & 0 \\ \hline \sin^2\varphi + \cos^2\varphi & \cancel{\cos\varphi\sin\varphi} - \cancel{\sin\varphi\cos\varphi} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \dot{\varphi}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2.28}$$

Pertanto, posto $[A]^{\mathscr{B}_0} = \dot{\varphi}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, dalla (4.2.22) segue che

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} = \dot{\varphi}(t)(-x_2\vec{e}_1(0) + x_1\vec{e}_2(0)) = \dot{\varphi}\vec{e}_3(0) \times \vec{x}(t) = \vec{\omega} \times \vec{x} \ , \tag{4.2.29}$$

che coincide con la (4.2.17).

Moto elicoidale

Chiameremo *elicoidale* il moto che preserva l'insieme dei punti di un asse r solidale al modello (i punti dell'asse possono spostarsi solo lungo l'asse). Tale asse è detto asse del moto. Ad esempio, il moto di un proiettile di peso trascurabile ($l = 6$), quello di un rigido vincolato ad un asse fisso

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

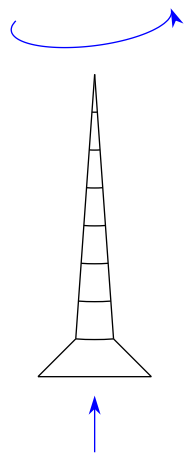


Figura 4.2.1: Vite

da un collare cilindrico, come nella Sez.3.4 ($l = 2$), il moto di avvitamento di una vite dentro una madrevite fissa ($l = 1$).

È chiaro che la composizione $\rho_t \circ \tau_t$ (allo stesso istante t) del piazzamento di un moto traslatorio *rettilineo* lungo l'asse r, $\tau_t : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{E}_3$ composto con un piazzamento rotatorio, $\rho_t : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$, intorno allo stesso asse è un piazzamento elicoidale. Scriviamone il flusso. Scelto il versore $\vec{E}_3$ parallelo a r e il punto $O_0 \in r$, il componente traslatorio si scrive

$$P'(t) = \tau_t(P_0) = P_0 + s(t)\vec{E}_3 \ , \qquad\qquad s(0) = 0$$

e quello rotatorio come

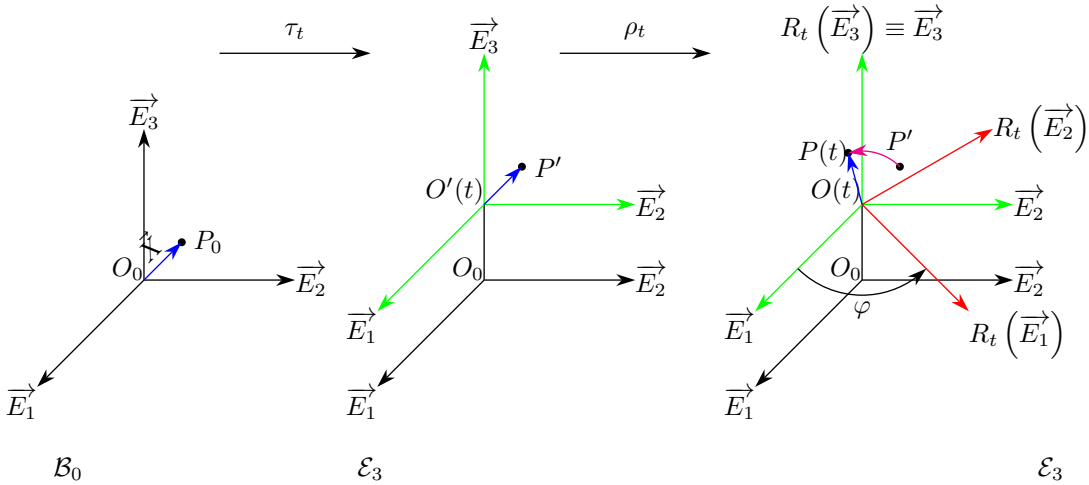
$$P(t) = \rho_t(P') = O'(t) + R_t\,(P' - O') \ ,$$

dove il punto

$$O'(t) = \tau_t(O_0) = O_0 + s(t)\vec{E}_3 \ ,$$

essendo il traslato di un punto dell'asse, appartiene all'asse del moto per ogni $t \in I$.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Allora, il piazzamento composto $\rho_t \circ \tau_t : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{E}_3$, sarà

$$P(t) = O_0 + s(t)\vec{E}_3 + R_t\left(P_0 + \cancel{s(t)\vec{E}_3} - (O_0 + \cancel{s(t)\vec{E}_3})\right) = O_0 + s(t)\vec{E}_3 + R_t\left(P_0 - O_0\right) \ , \tag{4.2.30}$$

e il campo degli spostamenti

$$\vec{s}(t, P_0) = P(t) - P_0 = O_0 + s(t)\vec{E}_3 + R_t(P_0 - O_0) - P_0 = s(t)\vec{E}_3 + (R_t - \mathbb{1})(P_0 - O_0) \qquad O_0 \in r$$

Le linee di corrente, in questo caso, sono curve che si avvolgono su cilindri con assi coincidenti tutti con l'asse del moto.

N.B. Lo stesso moto elicoidale (4.2.30) si può scomporre nello stesso moto rotatorio seguito dallo stesso moto traslatorio. Infatti

$$P_0 \overset{\rho_t}{\mapsto} \rho_t(P_0) = \rho_t(O_0) + R_t\left(P_0 - O_0\right) = O_0 + R_t(P_0 - O_0) \overset{\tau_t}{\mapsto} O_0 + s(t)\vec{E}_3 + R_t(P_0 - O_0) \ .$$

In altri termini, una rotazione attorno ad un asse fisso commuta con una traslazione lungo lo stesso asse.

Finora, abbiamo visto come la composizione di un moto traslatorio lungo un asse, composto con un moto rotatorio, intorno allo stesso asse, produce un moto elicoidale. Viceversa, si può di mostrare che un qualunque moto elicoidale si può scomporre in un moto traslatorio composto con uno rotatorio. La dimostrazione è lasciata come esercizio.

Esercizio 4.2.2. *Dimostrare che ogni piazzamento elicoidale con asse r si può scomporre, in modo unico, in un piazzamento traslatorio lungo r composto con uno rotatorio intorno ad r, o viceversa.*

Derivando rispetto al tempo la (4.2.30), si ottiene il campo di velocità materiale

$$\dot{P}(t) = \dot{s}(t)\vec{e}_3(0) + \dot{R}_t(P_0 - O_0) \ , \tag{4.2.31}$$

e quello spaziale, in base alle (4.2.12), (4.2.31) e (4.2.30),

$$\vec{v}_P = u(t)\vec{e}_3(0) + \dot{R}_t R_t^T\left(P(t) - O(t)\right) \ ,$$

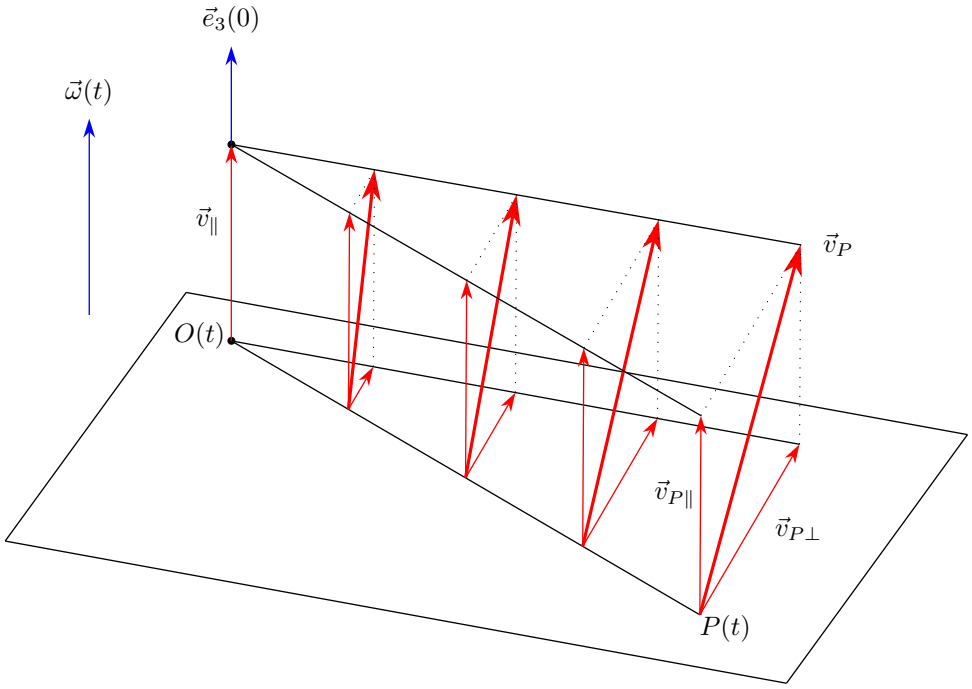
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

dove $O(t) = s(t)\vec{e}_3(0) + O_0$ è un punto appartenente al'asse del moto, quindi solidale al rigido.

Pertanto, per la (4.2.29)) si ha:

$$\vec{v}_P = u(t)\vec{e}_3(0) + \vec{\omega} \times \big(P(t) - O(t)\big) = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \big(P - O\big) \qquad O \in r \ ,$$

dove ricordiamo che $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_3(0)$.



Proprietà del campo di velocità del moto elicoidale

1. Non esistono punti a velocità nulla.

2. I punti dell'asse r, detto *asse del moto*, sono tutti e soli i punti aventi velocità parallela ad $\vec{\omega}$ e minima (in modulo).

3. Il componente della velocità parallelo all'asse è uniforme per tutti i punti del rigido.

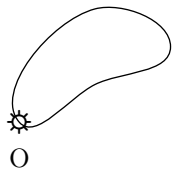
4. Tutti i punti equidistanti dall'asse hanno la stessa velocità in modulo: per tali punti il vettore velocità è tangente alla superficie del cilindro circolare retto passante per tali punti e avente come asse, l'asse del moto.

5. Le linee di flusso sono eliche circolari intorno all'asse del moto di passo uguale a $\vec{v}_P(t) \cdot \vec{e}_3(0)$, ma non coincidono necessariamente con le linee di corrente.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

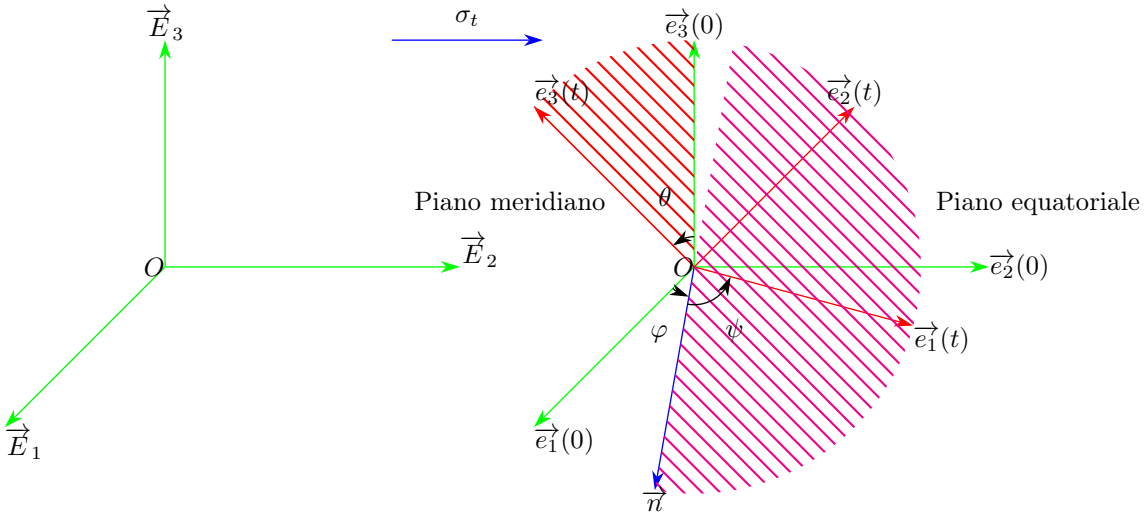
Moto polare

Chiameremo *polare* un moto rigido che mantiene fisso un punto O del modello. Tale vincolo è triplo, quindi lascia al modello 3 gradi di libertà (in assenza di ulteriori vincoli). Il moto polare sarà denotato con σ, o con σ_O quando vorremo mettere in evidenza il punto fisso.



4.3 Angoli di Eulero

Introduciamo un sistema di coordinate adatto a descrivere un qualsiasi moto polare. Useremo la seguente terminologia di origine astronomica avvisando, comunque, che le convenzioni usate nella Meccanica Razionale non sono le stesse usate, ad esempio, in Meccanica Applicata.



Scelte due terne con la stessa origine nel punto fisso O, una fissa $\Sigma = (O, \vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0))$ e una mobile $\Sigma(t) = (O, \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$, chiameremo

- Piano dell'eclittica: passante per gli assi $(O, \vec{e}_1(0))$, $(O, \vec{e}_2(0))$ della terna fissa.
- Piano equatoriale: passante per gli assi $(O, \vec{e}_1(t))$, $(O, \vec{e}_2(t))$ della terna mobile.
- Piano meridiano: passante per gli assi $(O, \vec{e}_3(0))$, $(O, \vec{e}_3(t))$.
- Asse dei nodi $(O, \vec{n}(t))$, dove $\vec{n}(t)$ è il versore definito da

$$\vec{n}(t) := \frac{\vec{e}_3(0) \times \vec{e}_3(t)}{|\vec{e}_3(0) \times \vec{e}_3(t)|} = \frac{\vec{e}_3(0) \times \vec{e}_3(t)}{|\sin\theta|}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

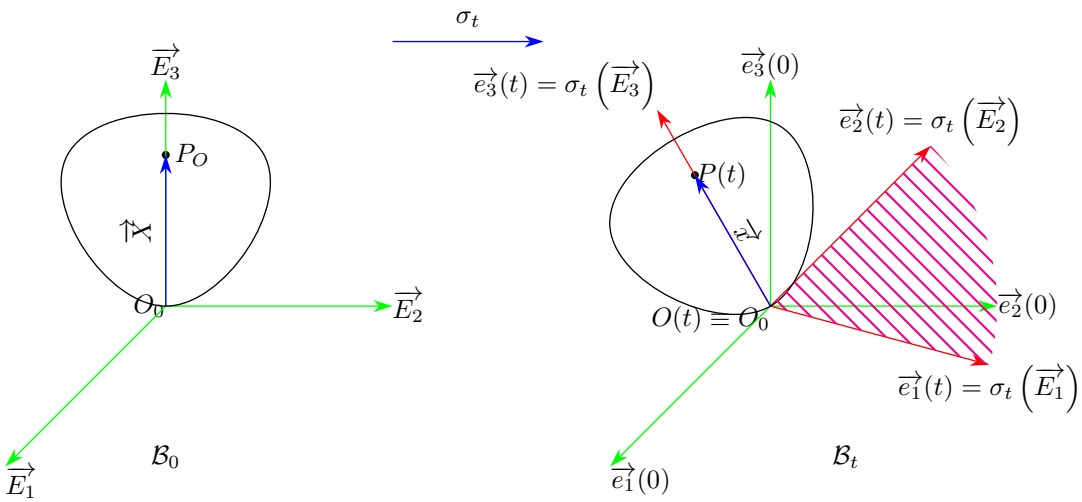
Poiché $\vec{n}(t)$ è ortogonale sia a $\vec{e}_3(0)$, sia a $\vec{e}_3(t)$, esso risulta parallelo alla retta d'intersezione del piano equatoriale con il piano dell'eclittica.

- Angolo di precessione φ: angolo tra i versori $\vec{e}_1(0)$ e $\vec{n}(t)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.
- Angolo di nutazione θ: angolo tra i versori $\vec{e}_3(0)$ e $\vec{e}_3(t)$, $0 < \theta < \pi$. La limitazione sulla coordinata angolare θ è dovuta al fatto che, quando l'angolo tra i versori $\vec{e}_3(0)$ e $\vec{e}_3(t)$ diventa ottuso, il versore $\vec{n}(t)$ cambia verso, quindi la coordinata angolare rimane sempre limitata tra $0 \leq \theta < \pi$.
- Angolo di rotazione propria ψ: angolo tra i versori $\vec{n}(t)$ e $\vec{e}_1(t)$, $0 \leq \psi < 2\pi$.

N.B. Se $\theta = 0$, il piano equatoriale coincide con il piano dell'eclittica e la linea dei nodi non è definita. In questo caso, quindi, non è definito l'angolo di precessione nè quello di rotazione propria, ma è definita solo la loro somma $\varphi + \psi$.

N.B. Gli angoli di Eulero (φ, θ) corrispondono alle coordinate sferiche dei punti dell'asse $\vec{e}_3(t)$. Precisamente, l'angolo di precessione è pari all'angolo di longitudine sommato a $\pi/2$, mentre l'angolo di nutazione coincide con la colatitudine.

Teorema 4.3.1 (Eulero, 1707-1783)**.** *In ogni moto polare il piazzamento del rigido ad ogni istante $t \in I$ si scompone, in un unico modo, in 3 piazzamenti rotatori intorno a 3 assi passanti per O.*



Dimostrazione. Sia $\sigma_t : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{E}_3$, il piazzamento del modello al tempo t. Dall'ipotesi di punto fisso segue che:

$$\sigma_t(O_0) = O \equiv O_0 \qquad \forall t \in I \tag{4.3.1}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Allora, per la (4.2.6), il piazzamento si scrive

$$\sigma_t : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{E}_3, P_0 \mapsto P(t) = \sigma_t(O_0) + \hat{\sigma}_t(P_0 - O_0) = O + R_t(P_0 - O) \ , \tag{4.3.2}$$

dove abbiamo indicato con $R_t : E_3 \to E_3$ l'operatore lineare $\hat{\sigma}_t$ associato al piazzamento del moto polare al tempo t. Vogliamo ora dimostrare che R_t è la composizione di 3 rotazioni elementari dipendenti dai cosiddetti angoli di Eulero, scelti come coordinate lagrangiane del rigido. A tale scopo, considereremo la base "fissa" $\mathscr{B}_0 = (\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3) = (\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0))$, una base solidale al rigido $\mathscr{B}_t = (\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ e costruiremo la matrice di piazzamento della base mobile rispetto a quella fissa

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(0)[R_t]^{\mathscr{B}_0} \ , \tag{4.3.3}$$

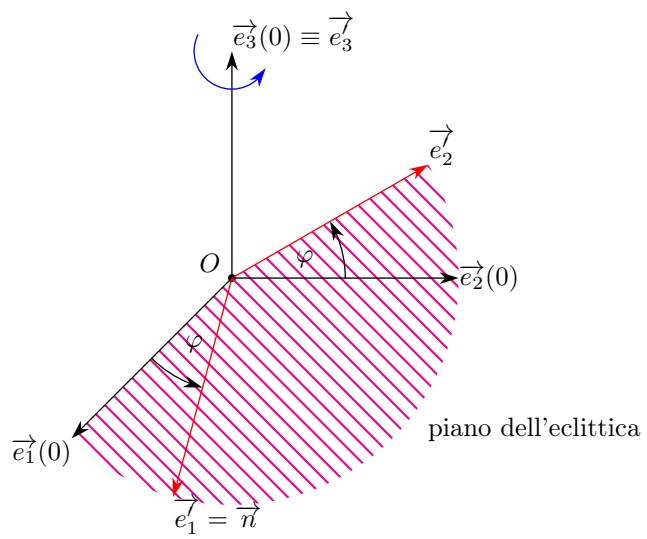
equivalente a

$$\mathbf{e}(0) = \mathbf{e}(t)\left([R_t]^{\mathscr{B}_0}\right)^{-1} = \mathbf{e}(t)\left([R_t]^{\mathscr{B}_0}\right)^{T} \tag{4.3.4}$$

□

Ora dimostriamo che la terna fissa $\vec{e}(0)$ si può sovrapporre, in un unico modo, ad un'assegnata terna mobile $\vec{e}(t)$ mediante 3 rotazioni: la prima dell'angolo di precessione φ intorno all'asse $\vec{e}_3(0)$, la seconda dell'angolo di nutazione θ intorno all'asse dei nodi $\vec{n}(t)$, la terza dell'angolo di rotazione propria ψ intorno all'asse di figura $\vec{e}_3(t)$.

1. PRECESSIONE



La base trasformata $\mathbf{e}'$ si ottiene dalla base di partenza $\mathbf{e}(0)$ tramite la trasformazione

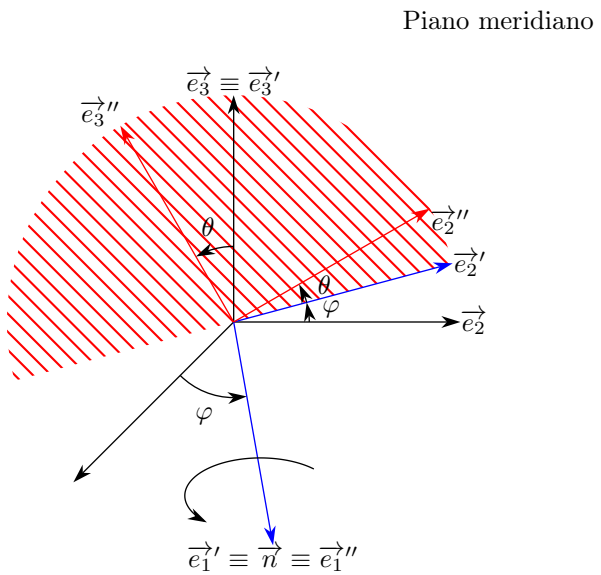
$$\mathbf{e}\,' = \mathbf{e}(0)[R_{(\varphi, \vec{e}_3(0))}] \ . \tag{4.3.5}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Se si esprimono le componenti dei vettori trasformati $\mathscr{B}\,' = (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ sulla base $\mathscr{B}_0 = \big(\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0)\big)$, la matrice $[R_{(\varphi,\vec{e}_3(0))}]^{\mathscr{B}_0}$ coincide con la (4.2.26) che riscriviamo per comodità

$$[R_{\big(\varphi,\vec{e}_3(0)\big)}]^{\mathscr{B}_0} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{4.3.6}$$

2. NUTAZIONE



La terna trasformata $\mathbf{e}''$ si ottiene dalla terna $\mathbf{e}'$ tramite la trasformazione

$$\mathbf{e}'' = \mathbf{e}'[R_{(\theta,\vec{n})}] \ . \tag{4.3.7}$$

Se si esprimono le componenti dei vettori trasformati $\mathscr{B}'' = (\vec{e}_1{}'', \vec{e}_2{}'', \vec{e}_3{}'')$ sulla base $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$, poichè

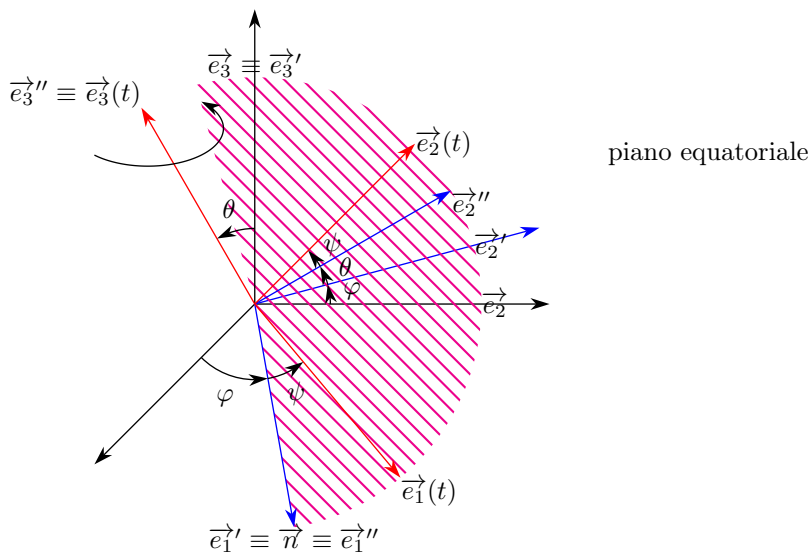
$$\vec{e}_1{}'' = \vec{e}_1{}' \ , \ \vec{e}_2{}'' = \cos\theta\,\vec{e}_2{}' + \sin\theta\,\vec{e}_3{}' \ , \ \vec{e}_3{}'' = -\sin\theta\,\vec{e}_2{}' + \cos\theta\,\vec{e}_3{}' \ ,$$

la matrice $[R_{(\theta,\vec{n})}]^{\mathscr{B}'}$ risulta

$$[R_{(\theta,\vec{n})}]^{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{4.3.8}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

3. ROTAZIONE PROPRIA



Infine, la base mobile $\mathbf{e}(t)$ si ottiene dalla base $\mathbf{e}''$ mediante la trasformazione

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}''[R_{(\psi,\vec{e}_3(t))}] \ . \tag{4.3.9}$$

Se si esprimono le componenti dei vettori trasformati $\big(\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)\big)$ sulla base $\mathscr{B}'' = (\vec{e}_1\,'', \vec{e}_2\,'', \vec{e}_3\,'')$, risulta che la matrice $[R_{(\psi,\vec{e}_3(t))}]^{\mathscr{B}''}$ coincide con la (4.2.26) a meno dello scambio dell'angolo φ con l'angolo ψ. Dunque,

$$[R_{(\psi,\vec{e}_3(t))}]^{\mathscr{B}''} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \tag{4.3.10}$$

Ora, è facile concludere che la matrice $[R_t]$ di trasformazione tra la base fissa $\vec{e}(0)$ e la base mobile $\vec{e}(t)$ si ottiene moltiplicando fra loro le matrici (4.3.5), (4.3.7), (4.3.9). Infatti, concatenando le precedenti trasformazioni si ottiene

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}''[R_{(\psi,\vec{e}_3(t))}] = \mathbf{e}'[R_{(\theta,\vec{n})}][R_{(\psi,\vec{e}_3(t))}] = \mathbf{e}(0)[R_{(\varphi,\vec{e}_3(0))}][R_{(\theta,\vec{n})}][R_{(\psi,\vec{e}_3(t))}] \ . \tag{4.3.11}$$

Pertanto, la matrice di piazzamento $[R_t]$ del moto polare nella (4.3.3) è data da

$$[R_t]^{\mathscr{B}_0} = \left[\begin{array}{c|c|c} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \hline \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \hline \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{array}\right] \tag{4.3.12}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Esercizio 4.3.1. *Dimostrare che la matrice $[R_t]$ è ortogonale ed unimodulare, cioè*

$$[R_t][R_t]^T = \mathbb{1}_{E_3} \tag{4.3.13}$$

$$\det[R_t] = 1 \tag{4.3.14}$$

Suggerimento: $[R_t]$ è uguale al prodotto di matrici ortogonali e unimodulari.

N.B. Si può dimostrare (uno dei tanti Teoremi di Eulero) che l'operatore R_t rappresenta esso stesso una singola rotazione di un angolo

$$\alpha = \arccos \frac{traccia(R_t) - 1}{2} \ ,$$

attorno a un asse per O e parallelo ai vettori che appartengono all'autospazio (unidimensionale) di R_t con autovalore 1. Tale proprietà spiega la scelta della notazione R_t anche per l'operatore lineare associato al moto polare. Comunque, essendo tale asse dipendente dal tempo, il moto rappresentato da R_t non è un moto rotatorio e, per questo motivo, l'asse suddetto si dice asse *d'istantanea* rotazione per O.

4.4 Angoli nautici (di Blagoveščenskij)

Per completezza, illustriamo un'altra terna di coordinate libere per il corpo rigido con un punto fisso O, gli angoli nautici, di uso comune nella navigazione navale e aerea. A tale scopo, osserviamo che la scelta degli angoli di Eulero si può generalizzare al seguente metodo:

- scelta di due assi *fondamentali* concorrenti in O, un asse fisso e uno solidale, e scelta dei piani a loro ortogonali, detti piani fondamentali;
- versore dei nodi $\vec{n}$ come prodotto vettoriale normalizzato del versore fondamentale fisso per il versore fondamentale solidale;
- scelta di due assi di riferimento concorrenti in O nei due piani fondamentali, quindi un asse di riferimento fisso e uno solidale.

Allora, gli angoli sono:

- angolo di rotazione intorno all'asse fondamentale fisso, misurato tra l'asse di riferimento fisso e il versore dei nodi $\vec{n}$;
- angolo di rotazione intorno al versore dei nodi, misurato tra l'asse fondamentale fisso e l'asse fondamentale solidale (angolo che, a volte, viene sostituito dall'opposto del suo complementare a $\frac{\pi}{2}$);
- angolo di rotazione intorno all'asse fondamentale solidale, misurato tra il versore dei nodi e l'asse di riferimento solidale.

Nel caso degli angoli di Eulero, l'asse fondamentale fisso e quello solidale sono, rispettivamente, $\vec{E}_3$ ed $\vec{e}_3(t)$; il piano fondamentale fisso e quello solidale sono il piano dell'eclittica e quello equatoriale. Gli assi di riferimento sono $\vec{E}_1$ e $\vec{e}_1(t)$. Nel caso degli angoli nautici, di solito si sceglie come origine della terna solidale alla nave il suo baricentro G, che si suppone appartenga al piano longitudinale

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

di simmetria della nave (piano diametrale), come asse fondamentale fisso l'asse verticale $(G;\vec{e}_z)$ diretto verso il basso, come asse fondamentale solidale l'asse longitudinale della nave $(G;\vec{\imath})$ orientato positivamente da poppa a prua. Inoltre, si sceglie come asse di riferimento fisso un asse orizzontale arbitrario $(G;\vec{e}_y)$ e come asse di riferimento solidale l'asse trasversale alla nave $(G;\vec{\jmath})$, orientato positivamente da sinistra a dritta. Di conseguenza gli angoli nautici sono definiti come:

- angolo di imbardata o di rotta ψ: è l'angolo di rotazione intorno all'asse verticale discendente $(G,\vec{e}_z)$, misurato fra $\big(\vec{e}_y,\vec{n}(t)\big)$, che risulta positivo per accostata a destra;

- angolo di beccheggio θ: è l'angolo di rotazione intorno all'asse dei nodi, misurato tra la superficie dell'acqua tranquilla e l'asse longitudinale nave, risulta positivo per un appoppamento della nave. Si noti che $\theta+\frac{\pi}{2}$ è l'angolo tra il versore fondamentale fisso e quello fondamentale mobile;

- angolo di rollio φ o di sbandamento: è l'angolo di rotazione intorno all'asse fondamentale mobile $\vec{\imath}(t)$, misurato fra $\big(\vec{n}(t),\vec{\jmath}(t)\big)$, positivo con sbandamento sulla murata destra.

Per ulteriori dettagli, si veda [R. Nabergoj, *Fondamenti di Tenuta della Nave al Mare*, Appendice B].

		Eulero	Nautici [Blagoveščenskij]
Basi	Fissa	$\big(\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{E}_3\big)$: *arbitraria*	$\big(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z\big)$: *adattata*
	Solidale	$\big(\vec{e}_1(t),\vec{e}_2(t),\vec{e}_3(t)\big)$: *arbitraria*	$\big(\vec{\imath}(t),\vec{\jmath}(t),\vec{k}(t)\big)$: *adattata*
Assi fondamentali	Fisso	$\vec{E}_3$	$\vec{e}_z$: verticale discendente
	Solidale	$\vec{e}_3(t)$	$\vec{\imath}(t)$: longitudinale nave da poppa a prua
Piani fondamentali	Fisso	$\big(O;\vec{E}_1,\vec{E}_2\big)$: eclittica	$\big(G;\vec{e}_x,\vec{e}_y\big)$: orizzontale parallelo alla superficie dell'acqua tranquilla)
	Solidale	$\big(O;\vec{e}_1(t),\vec{e}_2(t)\big)$: equatoriale	$\big(G;\vec{\jmath}(t),\vec{k}(t)\big)$: trasversale nave al mezzo
Linea del nodi	Versore $\vec{n}(t)$	$\frac{\vec{E}_3\times\vec{e}_3(t)}{\lvert\vec{E}_3\times\vec{e}_3(t)\rvert}$	$\frac{\vec{e}_z\times\vec{\imath}(t)}{\lvert\vec{e}_z\times\vec{\imath}(t)\rvert}$
Assi di riferimento	Fisso	$\vec{E}_1$	$\vec{e}_y$: orizzontale arbitrario
	Solidale	$\vec{e}_1(t)$	$\vec{\jmath}(t)$: asse trasversale nave da sinistra a dritta
Angoli	Rotazione intorno all'asse fondamentale fisso	φ: precessione, fra $\big(\vec{E}_1,\vec{n}(t)\big)$	ψ: imbardata o rotta fra $\big(\vec{e}_y,\vec{n}(t)\big)$
	Rotazione intorno a $\vec{n}(t)$	θ: nutazione, fra $\big(\vec{E}_3,\vec{e}_3(t)\big)$	θ: beccheggio, fra la superficie dell'acqua tranquilla e $\vec{\imath}(t)$
	Rotazione intorno all'asse fondamentale mobile	ψ: rotazione propria, fra $\big(\vec{n}(t),\vec{e}_1(t)\big)$	φ: rollio fra $\big(\vec{n}(t),\vec{\jmath}(t)\big)$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

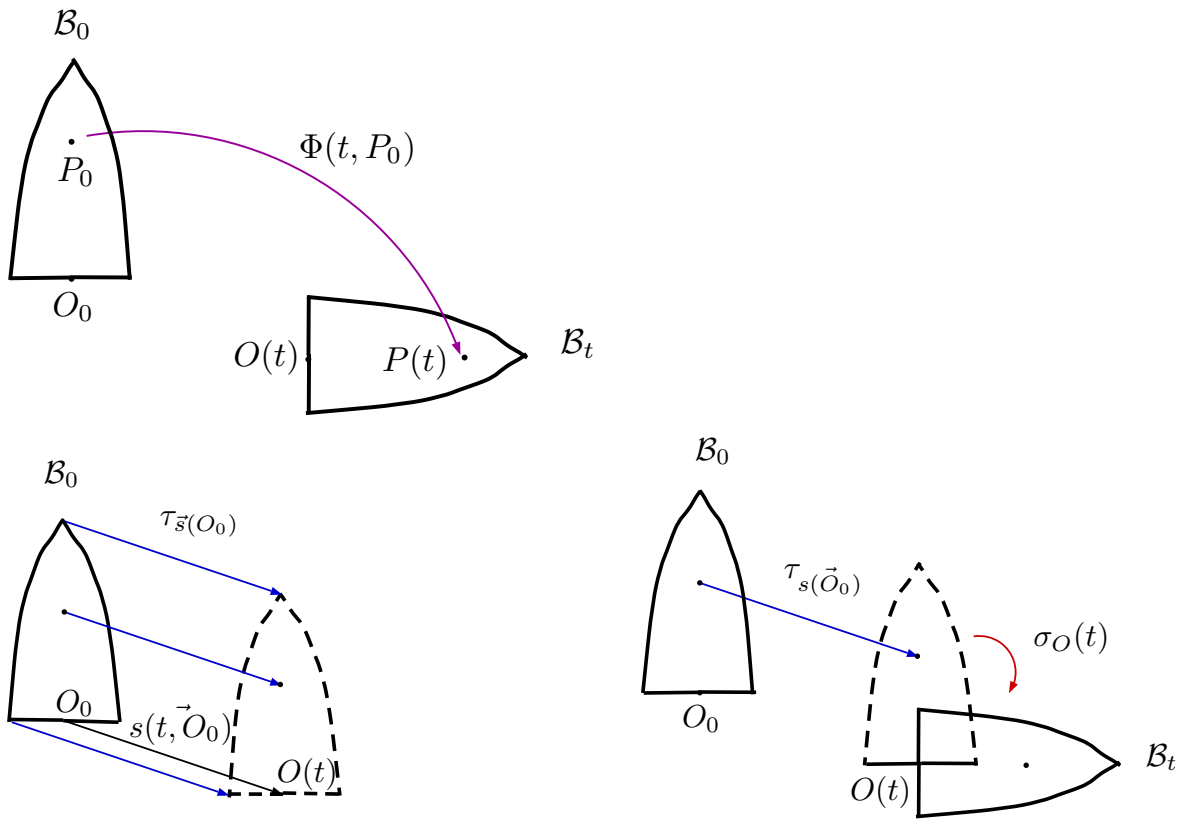
4.5 Moto rigido generale

Analizziamo il moto rigido più generale, che risulterà una composizione dei moti rigidi elementari analizzati nelle precedenti sezioni.

Teorema 4.5.1. *Il più generale moto rigido Φ si può scomporre, in infiniti modi, in un moto traslatorio τ e in un moto polare σ. Precisamente, scelto un punto $O(t)$ solidale al rigido, Φ si può rappresentare come*

$$P(t) = \Phi(t, P_0) = (\sigma_O \circ \tau_{\vec{s}})(t, P_0) = O(t) + R_t(P_0 - O_0) \ , \tag{4.5.1}$$

dove lo spostamento $\vec{s} = O(t) - O_0$ è lo spostamento del punto $O_0 := \Phi_t^{-1}(O)$, R_t è la parte lineare del moto polare e risulta indipendente da O. Ad un istante t fissato, al variare della scelta di O gli assi d'istantanea rotazione dei diversi componenti polari σ_O sono tutti paralleli.



Dimostrazione. Dato un moto rigido $\Phi(t)$, scegliamo ad arbitrio un centro di riduzione $O(t)$ solidale al rigido e poniamo

$$O_0 = \Phi_t^{-1}(O) \ , \qquad \vec{s}(t, O_0) = O(t) - O_0$$

Consideriamo il moto traslatorio

$$\tau_{\vec{s}}(t, P_0) = P_0 + \vec{s}(t, O_0) \qquad \forall P_0 \in \mathcal{B}_0 \tag{4.5.2}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

e il moto

$$\sigma_O = \Phi \circ \tau_{\vec{s}}^{-1} = \Phi \circ \tau_{-\vec{s}}$$

Mostriamo che il punto $O(t)$ è un un punto fisso per σ_0, il quale, dunque, è un moto polare. Infatti,

$$\sigma_0(O(t)) = \Phi \circ \tau_{\vec{s}}^{-1}(O(t)) = \Phi\big(O(t) - \vec{s}(t, O_0)\big) = \Phi(t, O_0) = O(t) \ .$$

Dunque, il moto composto si può scrivere come

$$\begin{aligned} \Phi(t, P_0) &= \sigma_O\big(\tau(P_0)\big) = \sigma_O\big(P_0 + \vec{s}(t, O_0)\big) = \sigma_O\big(P_0 + O(t) - O_0\big) \overset{(4.2.6)}{=} \\ &= \sigma_O\big(O(t)\big) + \hat{\sigma}_O(P_0 - O_0) = O(t) + R_t\left(P_0 - \Phi_t^{-1}(O)\right) \ , \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

dove $R_t = \hat{\sigma}_O$ è l'operatore lineare del moto polare attorno al punto $O(t)$. A priori, R_t potrebbe dipendere dal centro di riduzione $O(t)$. Ciò non succede perchè R_t è la parte lineare dell'applicazione affine Φ_t, quindi per la Prop. 4.2.1 può dipendere solo dal tempo. □

N.B. Equivalentemente, il moto assegnato Φ si può scomporre in un moto polare intorno al punto $O_0 = \Phi_t^{-1}(O)$, seguito dal moto traslatorio $\tau_{\vec{s}}$ (4.5.2), cioè

$$\Phi = \tau_{\vec{s}} \circ \sigma_{O_0} \ .$$

Infatti, il moto $\sigma_{O_0} = \tau_{\vec{s}}^{-1} \circ \Phi$ ammette il punto fisso O_0, poichè

$$\sigma_{O_0}(O_0) = \sigma_{O_0}(\Phi^{-1}(O)) = (\tau_{\vec{s}}^{-1} \circ \Phi)(\Phi^{-1}(O)) = \tau_{-\vec{s}}(O) = O_0 \ .$$

Quindi, il moto Φ si può rappresentare come

$$\begin{aligned} \Phi(t, P_0) &= \tau_{\vec{s}}(\sigma_{O_0}(P_0)) = \tau_{\vec{s}}\big(O_0 + R'_t(P_0 - O_0)\big) = \\ &= O_0 + \vec{s}(t, O_0) + R'_t(P_0 - O_0) + \vec{s}(t, O_0) = O(t) + R'_t(P_0 - O_0) \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

Confrontando la (4.5.1) con la (4.5.4), poiché esse valgono $\forall P_0, Q_0 \in \mathcal{E}_3$, si può concludere che

$$R_t = R'_t \ , \tag{4.5.5}$$

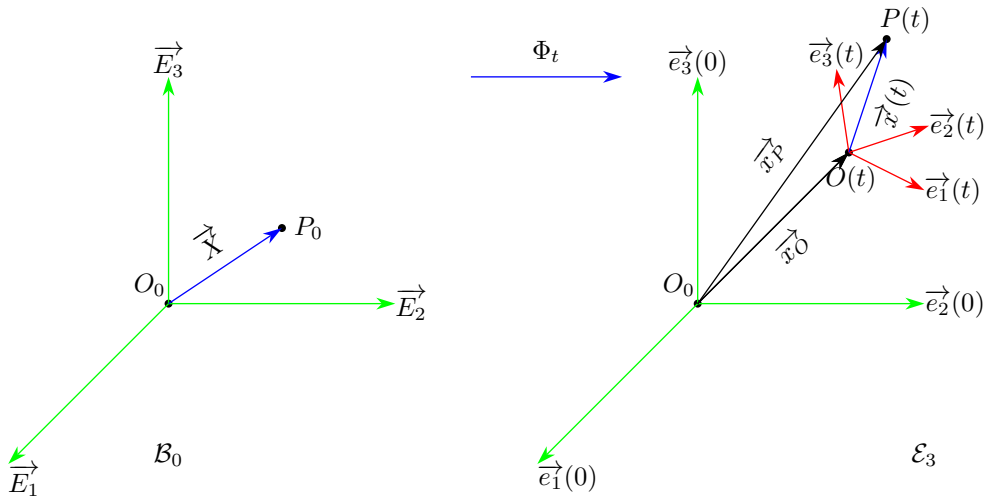
cioè le parti lineari dei due moti polari σ_O e σ_{O_0} coincidono. Quindi, ad un istante t fissato, l'asse istantaneo del moto polare intorno ad O risulta parallelo a quello del moto polare intorno ad O_0.

N.B. Il Teorema 4.5.1 equivale a dire che il più generale moto rigido si può descrivere come il moto di una *qualsiasi* terna solidale al rigido $\big(O(t); \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)\big)$. Tale moto si può scomporre nel moto traslatorio τ di una terna intermedia con origine nel punto $O(t)$ seguito dal moto polare σ intorno ad $O(t)$ della terna solidale rispetto alla terna intermedia. Di solito, il moto della terna intermedia si dice moto di *trascinamento*, mentre quello della terna solidale rispetto a quella intermedia si dice moto *relativo*. Vedremo nella Sez. 4.7 un'applicazione importante del suddetto punto di vista.

4.5.1 Teorema di Poisson

In questa sezione dimostreremo il teorema di Poisson che descrive il campo di velocità del più generale moto rigido.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Teorema 4.5.2 (Poisson, 1781-1840)**.** *Dati due punti generici P e O di un rigido o dello spazio ad esso solidale, esiste ed è unico un vettore $\vec{\omega}(t) \in E_3$, detto velocità angolare del rigido, tale che*

$$\frac{d}{dt}(P - O) = \vec{\omega} \times (P - O) \tag{4.5.6}$$

Dimostrazione. Derivando la (4.5.1) rispetto al tempo, si ottiene il campo di velocità materiale

$$\dot{P} = \dot{O} + \dot{R}_t(P_0 - O_0) \ , \tag{4.5.7}$$

mentre quello spaziale, sulla base della (4.5.1), risulta

$$\dot{P} = \dot{O} + \dot{R}_t R_t^T \left(P(t) - O(t)\right) \ , \tag{4.5.8}$$

dove $O(t)$ è un punto solidale al rigido.

Consideriamo l'operatore $A : I \times E_3 \to E_3$, definito da

$$A(t) := \dot{R}R^T \qquad \text{(il pedice } t \text{ di } R_t \text{ è sottointeso per non appesantire la notazione)} \ , \tag{4.5.9}$$

detto operatore di spin (o di Cartan) di R. Dimostriamo che è antisimmetrico rispetto al prodotto scalare di E_3, cioè

$$A\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot A\vec{v} = 0 \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E_3 \Leftrightarrow A + A^T = 0 \ . \tag{4.5.10}$$

Tale proprietà è una semplice conseguenza del fatto che R è ortogonale. Infatti, derivando rispetto al tempo l'Eq. (4.3.13) si ha

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0 \tag{4.5.11}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Il primo termine della (4.5.11) è proprio l'operatore A, mentre il secondo termine coincide con il suo trasposto, poichè

$$A^T = (\dot{R}R^T)^T = (R^T)^T(\dot{R})^T = R\dot{R}^T$$

Pertanto la (4.5.8) si può scrivere

$$\frac{d}{dt}(P - O) = A(P - O) \ . \tag{4.5.12}$$

Per concludere la dimostrazione del teorema, utilizzeremo il seguente

Lemma 4.5.1. *Dato un generico operatore antisimmetrico $A : E_3 \to E_3$, esiste ed è unico un vettore $\vec{\omega} \in E_3$, tale che*

$$\vec{\omega} \times \vec{y} = A\vec{y} \qquad \forall \vec{y} \in E_3 \ . \tag{4.5.13}$$

Il vettore $\vec{\omega}$ dato da

$$\vec{\omega} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i \times A_{ji}\vec{e}_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \times A\vec{e}_i \ , \tag{4.5.14}$$

è detto il vettore assiale associato all'operatore A ed appartiene al $KerA$, cioè

$$A\vec{\omega} = \vec{0} \ .$$

Dimostrazione. Scelta una base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e un vettore $\vec{y}$ arbitrario la (4.5.13) si scrive esplicitamente come

$$\det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \ .$$

Risolvendo tale sistema di equazioni rispetto alle componenti del vettore incognito

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2 + \omega_3\vec{e}_3 \tag{4.5.15}$$

si trova l'unica soluzione

$$\omega_1 = -A_{23} \ , \omega_2 = A_{13} \ , \omega_3 = -A_{12} \tag{4.5.16}$$

che, in forma vettoriale, si scrive come nella (4.5.14). È facile verificare che il vettore di componenti (4.5.16) $\in KerA$. □

A questo punto, sostituendo nella (4.5.12) il vettore assiale $\vec{\omega}$ si ottiene la (4.5.6), concludendo la dimostrazione del teorema di Poisson. □

4.6 Applicazioni del teorema di Poisson

Come applicazioni del teorema di Poisson, ricaveremo le formule per il campo delle velocità e delle accelerazione di un rigido, la formula di derivazione cinematica per un vettore dipendente dal tempo.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

4.6.1 Campo di velocità di un rigido

Consideriamo il più generale moto rigido. Dalla (4.5.6) otteniamo

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_O(t) + \vec{\omega}(t) \times \big(P(t) - O(t)\big) \qquad \forall O, P \in \mathcal{R} \tag{4.6.1}$$

dove la velocità angolare del rigido si può calcolare come vettore assiale dell'operatore di spin

$$A(t) = \dot{R}R^T \ .$$

La (4.6.1) è detta formula dell'atto di moto rigido e permette, noti i due vettori caratteristici $(\vec{v}_O, \vec{\omega})$ di calcolare la velocità spaziale di tutti i punti del rigido ad ogni istante $t \in I$. Ricordiamo la forma del vettore $\vec{\omega}$ per i moti rigidi già incontrati.

1. Moto *traslatorio*

   Poiché $\vec{v}_P - \vec{v}_0 = \vec{0}\ \forall P, O \in \mathcal{R}$, dalla (4.6.1) segue che

   $$\vec{\omega} = \vec{0} \qquad \forall t \in I$$

   Del resto, l'operatore lineare di piazzamento nella (4.5.1) è $\hat{\tau}_t = R = \mathbb{1}_3$, quindi $\dot{R} = 0 \Rightarrow A = 0$.

2. Moto *rotatorio*.

   In questo caso, abbiamo già ricavato dalle (4.2.26), (4.2.28) che

   $$R_t = R_{(\varphi(t),\vec{k})} \ , \qquad A = \dot{R}_t R_t^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi} & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \qquad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} \qquad \forall t \in I \ ,$$

   dove $\vec{k}$, è parallelo all'asse (fisso) di rotazione.

3. Moto *elicoidale*.

   Anche in questo caso, abbiamo ricavato che

   $$\vec{\omega} = \dot{\varphi}(t)\vec{k} \qquad \forall t \in I \ ,$$

   dove $\vec{k}$, questa volta, è parallelo all'asse del moto elicoidale.

4. Moto *polare*.

   In questo caso, tenendo conto della (4.3.12), la matrice dell'operatore di spin $A(t)$ risulta (4.6.2)

   $$[A]^{\mathscr{B}_0} := [\dot{R}_t R_t^T]^{\mathscr{B}_0} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & -(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) & \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta \\ \hline (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) & 0 & -(\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta) \\ \hline -(\dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta) & (\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta) & 0 \end{array}\right] \ .$$

   Pertanto, in base alla (4.5.16), il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$, sulla terna fissa, assume la forma

   $$\vec{\omega} = (\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta)\vec{e}_1(0) + (\dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi)\vec{e}_2(0) + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{e}_3(0) \ . \tag{4.6.3}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Più avanti ci serviranno le componenti di $\vec{\omega}$ sulla terna mobile. Per calcolarle, basta osservare che un qualunque vettore $\vec{u}$ si può scomporre sia sulla terna fissa, sia sulla terna mobile in base alla inversa della (4.3.3)

$$\vec{u} = \mathbf{e}(0) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}(t)[R_t]^T \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Pertanto, la velocità angolare sulla terna mobile si trova post-moltiplicando la colonna delle componenti di (4.6.3) per la matrice $[R_t]^T$

$$\vec{\omega} = (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta)\vec{e_1}(t) + (-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)\vec{e_2}(t) + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\vec{e_3}(t) \ . \tag{4.6.4}$$

Esercizio 4.6.1. *Dimostrare che il campo di velocità di un rigido è sempre equiproiettivo.*

Struttura del campo di velocità di un rigido

Studieremo in questa sezione la struttura che il più generale campo di velocità di un rigido assume ad un generico istante fissato $\bar{t} \in I$.

Teorema 4.6.1 (G. Mozzi, 1730-1813)**.** *Il campo di velocità di un rigido $\mathcal{R}$ è elicoidale o eventualmente degenere in un atto di moto rotatorio o traslatorio. Se $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, esiste un unico asse parallelo a $\vec{\omega}$ e solidale a $\mathcal{R}$, detto asse di Mozzi (o asse istantaneo di moto), i cui punti Ω soddisfano l'equazione parametrica*

$$\Omega - O = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{|\vec{\omega}|^2} + \lambda\vec{\omega} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \ , O \in \mathcal{R} \ . \tag{4.6.5}$$

Rispetto a tale asse il campo di velocità di $\mathcal{R}$ si può scomporre come

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P\parallel} + \vec{v}_{P\perp} \ ,$$

dove il componente parallelo all'asse

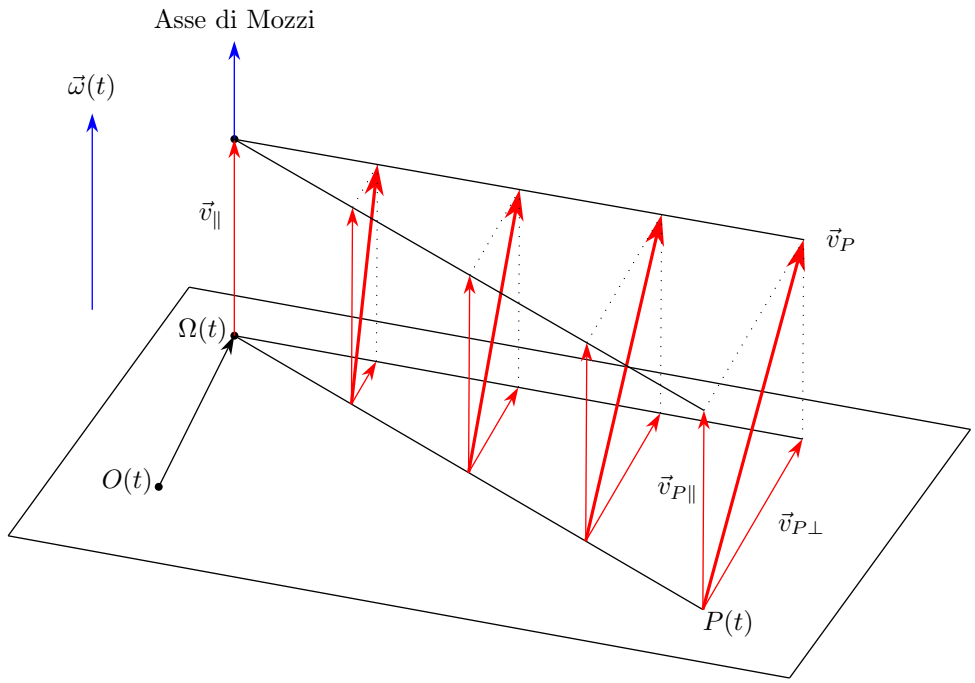
$$\vec{v}_{P\parallel} = \vec{v}_\Omega \qquad\qquad \forall \Omega \in \textit{asse di Mozzi}$$

ha una struttura traslatoria (o uniforme), mentre il componente ortogonale all'asse

$$\vec{v}_{P\perp} = \vec{\omega} \times (P - \Omega)$$

ha una struttura rotatoria.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Dimostrazione. Supponiamo di conoscere due vettori caratteristici $(\vec{v}_O, \vec{\omega})$ e che $\vec{\omega} \neq \vec{0}$. La (4.6.1) ci permette di calcolare la velocità di ogni punto $P \in \mathcal{R}$ e di scomporla rispettivamente nel componente parallelo a $\vec{\omega}$ e in quello ortogonale

$$v_{P\parallel} = \vec{v}_P \cdot vers(\vec{\omega}) \ , \vec{v}_{P\parallel} = v_{P\parallel} vers(\vec{\omega}) \ , \vec{v}_{P\perp} = \vec{v}_P - \vec{v}_{P\parallel} \tag{4.6.6}$$

Osserviamo che il campo $\vec{v}_{P\parallel}$ è uniforme poichè

$$v_{P\parallel} = \vec{v}_P \cdot vers(\vec{\omega}) = (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times (P - O)) \cdot vers(\vec{\omega}) = \vec{v}_O \cdot vers(\vec{\omega}) = v_{O\parallel} \qquad \forall P, O \in \mathcal{R}$$

Inoltre, il componente ortogonale soddisfa la relazione

$$\vec{v}_{P\perp} = \vec{v}_{O\perp} + \vec{\omega} \times (P - O) \ , \tag{4.6.7}$$

essendo $v_{P\parallel} = v_{O\parallel}$. La (4.6.7) implica che $\vec{v}_{P\perp}$ è invariante per traslazione di P lungo la retta per P e parallela a $\vec{\omega}$. Infatti, se P' appartiene a tale retta

$$(P - P') \times \vec{\omega} = \vec{0}$$

e allora

$$\vec{v}_{P\perp} - \vec{v}_{P'\perp} = \vec{\omega} \times ((P - O) - (P' - O)) = \vec{\omega} \times (P - P') = \vec{0} \ .$$

Vediamo, ora, se esistono punti Ω dello spazio solidale a $\mathcal{R}$ che hanno solo velocità parallela a $\vec{\omega}$, cioè soddisfano

$$\vec{v}_{\Omega\perp} = \vec{0} \ . \tag{4.6.8}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Esprimendo la velocità $\vec{v}_{\Omega\perp}$ mediante la (4.6.7), con il punto incognito Ω al posto di P, la (4.6.8), equivale a

$$\vec{v}_{O\perp} + \vec{\omega} \times (\Omega - O) = \vec{0} \ ,$$

ovvero

$$(\Omega - O) \times \vec{\omega} = \vec{v}_{O\perp} \ , \tag{4.6.9}$$

che è un'equazione del tipo (2.1.15), già studiata nel Cap. 2. Si presentano due alternative. Se $\vec{v}_{O\perp} = \vec{0}$, siamo estremamente fortunati: il centro di riduzione O è uno dei punti che stiamo cercando. Infatti, in questo caso la (4.6.9) diventa omogenea, ammette come soluzioni tutti e soli i vettori $(\Omega - O)$ paralleli ad $\vec{\omega}$. Quindi, gli altri punti Ω sono quelli della retta parallela a $\vec{\omega}$ e passante per O.

Se, invece, $\vec{v}_{O\perp} \neq \vec{0}$, sulla base della (2.1.17), tutte le soluzioni della (4.6.9) sono date dalla (4.6.5).

Infine, se nella (4.6.7) si sceglie come centro di riduzione un punto Ω dell'asse di Mozzi al posto di un generico punto O, si vede che

$$\vec{v}_{P\perp} = \vec{v}_{\Omega\perp} + \vec{\omega} \times (P - \Omega) = \vec{\omega} \times (P - \Omega) \ ,$$

cioè $\vec{v}_{P\perp}$ è rotatorio intorno all'asse di Mozzi. □

Dal Teorema precedente segue subito

Teorema 4.6.2 (di classificazione)**.** *Scelto un generico punto $O \in \mathcal{R}$ e definito l'invariante scalare cinematico come*

$$\mathcal{I} = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \qquad \textit{(non dipende da } O\textit{)} \ , \tag{4.6.10}$$

il campo di velocità di un rigido appartiene a una delle seguenti categorie:

Tabella 4.6.1: atto di moto rigido

$\mathcal{I} = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega}$	$\vec{\omega}$	$\vec{v}_O$	categoria	linee di flusso
$\neq 0$			Elicoidale	eliche cilindriche
$= 0$	$\neq \vec{0}$		Rotatorio	circonferenze
$= 0$	$= \vec{0}$	$\neq \vec{0}$	Traslatorio	rette parallele
$= 0$	$= \vec{0}$	$= \vec{0}$	Nullo	

Dimostrazione. Mostriamo che, se $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ e $\mathcal{I} = 0$, l'atto di moto è rotatorio. A questo scopo, basta osservare che, in generale, il componente di $\vec{v}_P$ parallelo a $\vec{\omega}$ si scrive

$$\vec{v}_{P\parallel} = \frac{\mathcal{I}}{|\vec{\omega}|^2}\vec{\omega}$$

ed è il componente traslatorio del campo elicoidale. Dunque, se $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ esso si annulla se e solo se

$$\mathcal{I} = 0$$

In tal caso, sopravvive solo il componente rotatorio $\vec{v}_{P\perp}$. □

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

N.B. Se ad un istante $\bar{t}$ il campo di velocità è elicoidale, gode delle proprietà della Sez 4.2.1.

Definizione 4.6.1. *Se ad un istante $\bar{t} \in I$ il campo di velocità è rotatorio, l'asse di Mozzi si dice asse d'istantanea rotazione (AIR) e i suoi punti hanno velocità nulla all'istante $\bar{t}$.*

Il termine istantanea si riferisce al fatto che il campo di velocità ad un istante precedente o successivo a $\bar{t}$, non solo può cambiare asse di Mozzi, ma può cambiare anche categoria.

Esempio 4.6.1. *Moto polare.*

Poichè $\vec{v}_O = \vec{0}\ \forall t \in I, \mathcal{I} = 0$, il campo di velocità è rotatorio e l'asse di Mozzi è asse d'istantanea rotazione. Quindi passa per O ed è parallelo a $\vec{\omega}(t)$, dunque la sua direzione dipende dal tempo.

Esempio 4.6.2. *Moto elicoidale*

Nel caso di moto elicoidale (rispettivamente rotatorio) l'asse di Mozzi non dipende dal tempo e coincide con l'asse del moto (rispettivamente asse di rotazione).

4.6.2 Campo delle accelerazioni di un rigido

Derivando rispetto al tempo la (4.6.1), otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O) + \vec{\omega} \times (\vec{v}_P - \vec{v}_O) = \\ &= \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O)) = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O) - |\omega|^2 (P - O)_\perp \ , \end{aligned} \tag{4.6.11}$$

dove con $(P - O)_\perp$ abbiamo denotato il componente del vettore $(P - O)$ ortogonale a $\vec{\omega}$, come nella (2.1.14). Si osservi che il termine $\dot{\vec{\omega}} \times (P - O)$ è un componente dell'accelerazione,appartenente al piano ortogonale al vettore $P - O$.

Esempio 4.6.3. *Moto rotatorio*
Se scegliamo O sull'asse di rotazione la (4.6.11) *si riduce a*

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{\omega}} \times (P - O) - |\omega|^2 (P - O)_\perp \ . \tag{4.6.12}$$

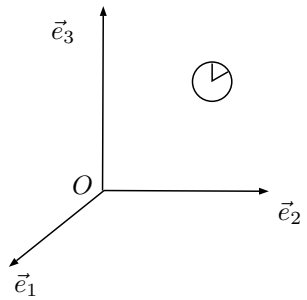
Si osservi che il termine $\dot{\vec{\omega}} \times (P - O)$ è un componente dell'accelerazione, ortogonale al piano passante per l'asse di rotazione e per il punto P e si annulla se $|\vec{\omega}|$ è costante nel tempo. Inoltre, il termine $-\omega^2 (P - O)_\perp$ rappresenta il componente *assipeto* dell'accelerazione, cioè il componente diretto da P all'asse di rotazione e ad esso ortogonale.

4.7 Cinematica Relativa

Sappiamo per esperienza quotidiana, che il moto dei corpi è un concetto relativo a un osservatore o riferimento spazio-temporale:

$$(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) + \text{orologio}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



In particolare, vedremo che la derivata rispetto al tempo di un vettore non è uguale per osservatori che si muovono uno rispetto all'altro di moto arbitrario. Quindi, i vettori velocità ed accelerazione dipendono dall'osservatore, come vedremo in seguito. Nel seguito, con abuso di linguaggio, identificheremo ogni osservatore con la terna rigida alla quale è solidale.

4.7.1 Formula di derivazione cinematica

Consideriamo un vettore dipendente dal tempo e osserviamo che il suo vettore derivato rispetto al tempo dipende dal riferimento scelto. Ad esempio, se consideriamo un vettore solidale a un rigido $\mathcal{R}$, questo avrà derivato nullo rispetto a una terna solidale a $\mathcal{R}$ o, come si usa dire, nel corpo, mentre avrà derivato non nullo rispetto a una terna fissa o, come si dice, nello spazio. Vediamo quale è in generale la relazione fra i due vettori derivati. A tale scopo, nella (4.5.6) prendiamo il punto P coincidente, di volta in volta, con l'estremo dei vettori $\big(O(t), \vec{e}_1(t)\big)$, $\big(O(t), \vec{e}_2(t)\big)$, $\big(O(t), \vec{e}_3(t)\big)$, cioè con gli estremi dei versori della terna $(\big(O(t), \vec{e}(t)\big)$ solidale a $\mathcal{R}$. Allora, si ottiene

$$\dot{\vec{e}}_k(t) = \vec{\omega} \times \vec{e}_k(t) \qquad k = 1, 2, 3 \ , \tag{4.7.1}$$

dove, per semplicità di notazione, abbiamo denotato con il puntino la $\frac{d}{dt}|_{\text{spazio}}$. Dunque, la derivata temporale di un versore è sempre ortogonale al versore stesso. Poi, consideriamo un generico vettore $\vec{u}(t) \in E_3$ e scomponiamolo sia sulla base fissa $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$, sia sulla base mobile $(\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$

$$\vec{u}(t) = U_1\vec{E}_1 + U_2\vec{E}_2 + U_3\vec{E}_3 = u_1\vec{e}_1(t) + u_2\vec{e}_2(t) + u_3\vec{e}_3(t)$$

Il vettore derivato rispetto al tempo, nello spazio è

$$\begin{aligned}
\tfrac{d\vec{u}}{dt}|_{\text{spazio}} &= \dot{U}_1\vec{E}_1 + \dot{U}_2\vec{E}_2 + \dot{U}_3\vec{E}_3 \\
&= \dot{u}_1\vec{e}_1(t) + \dot{u}_2\vec{e}_2(t) + \dot{u}_3\vec{e}_3(t) + u_1\dot{\vec{e}}_1(t) + u_2\dot{\vec{e}}_2(t) + u_3\dot{\vec{e}}_3(t) \\
&\overset{(4.7.1)}{=} (\dot{u}_1\vec{e}_1(t) + \dot{u}_2\vec{e}_2(t) + \dot{u}_3\vec{e}_3(t)) + u_1\,\vec{\omega} \times \vec{e}_1(t) + u_2\,\vec{\omega} \times \vec{e}_2(t) + u_3\,\vec{\omega} \times \vec{e}_3(t) \\
&= (\dot{u}_1\vec{e}_1(t) + \dot{u}_2\vec{e}_2(t) + \dot{u}_3\vec{e}_3(t)) + \vec{\omega} \times \vec{u}
\end{aligned}$$

Pertanto, segue che

Proposizione 4.7.1. *Sia $\vec{u}(t)$ un generico vettore di E_3 dipendente dal tempo e consideriamo due terne rigide in moto una rispetto all'altra. Per convenzione, chiameremo una la terna nello spazio, l'altra la terna nel corpo. Allora, i vettori derivati di $\vec{u}(t)$ soddisfano la relazione*

$$\frac{d\vec{u}}{dt}_{|spazio} = \frac{d\vec{u}}{dt}_{|corpo} + \vec{\omega} \times \vec{u} \ , \tag{4.7.2}$$

dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare della terna nel corpo rispetto a quella nello spazio.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Osserviamo che i vettori derivati, assoluto e relativo, di un vettore variabile nel tempo coincidono se e solo se:

- $\omega = \vec{0}$, cioè il moto di una terna rispetto all'altra è traslatorio;
- oppure $\vec{u} \parallel \vec{\omega}\ \forall t$, cioè il vettore da derivare è sempre diretto come l'asse di Mozzi.

Corollario 4.7.1. *Il vettore $\vec{\omega}$ ha derivati uguali nello spazio e nel corpo, cioè*

$$\dot{\vec{\omega}} := \frac{d\vec{\omega}}{dt}_{|spazio} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}_{|corpo} \tag{4.7.3}$$

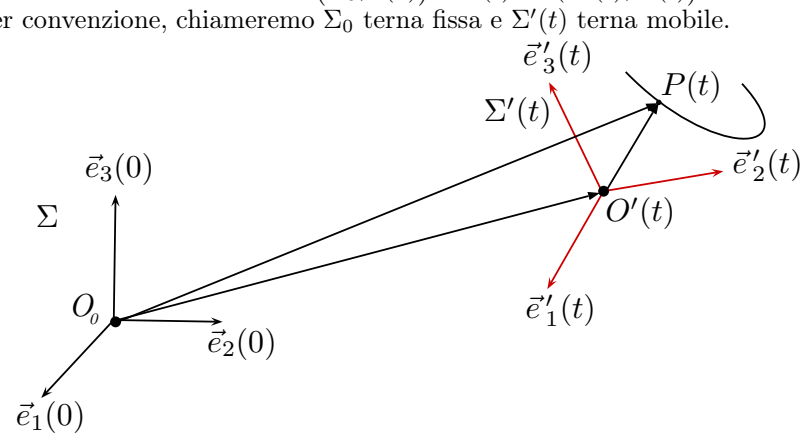
Esercizio 4.7.1. *Calcolare i vettori derivati rispetto al tempo dei versori della base mobile adattata alle coordinate cilindriche e sferiche, tramite la formula di derivazione cinematica* (4.7.2)

Esercizio 4.7.2. *Dimostrare che il modulo di ogni vettore $\vec{u}(t)$ ha derivate rispetto al tempo uguali nello spazio e nel corpo, cioè*

$$\frac{d|\vec{u}|}{dt}_{|spazio} = \frac{d|\vec{u}|}{dt}_{|corpo} \tag{4.7.4}$$

4.7.2 Composizione delle velocità

Consideriamo due terne $\Sigma := \big(O_0, \mathbf{e}(0)\big)$ e $\Sigma'(t) := \big(O'(t), \mathbf{e}'(t)\big)$ in moto rigido una rispetto all'altra. Per convenzione, chiameremo Σ_0 terna fissa e $\Sigma'(t)$ terna mobile.



Vogliamo studiare il moto di un punto materiale che si muove rispetto ad entrambe le terne e, in particolare, come la sua velocità viene misurata dai due osservatori Σ e Σ'. Denoteremo con

$$\vec{v}_P^{(ass)} : \qquad \text{la velocità di } P \text{ valutata da } \Sigma$$

$$(\vec{v}_{O'}, \vec{\omega}) : \qquad \text{la velocità di } O' \text{ e la velocità angolare di } \Sigma'(t) \text{ valutate da } \Sigma$$

$$\vec{v}_P^{(rel)} : \qquad \text{velocità di } P \text{ valutata da } \Sigma'(t)$$

Vale il

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Teorema 4.7.1 (Galileo, 1564-1642)**.**

$$\vec{v}_P^{(ass)} = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)} \ , \tag{4.7.5}$$

dove la velocità $\vec{v}_P^{(tr)}$ *è detta velocità di trascinamento di* P *in* $\Sigma'(t)$ *ed è pari a*

$$\vec{v}_P^{(tr)} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P - O') \ . \tag{4.7.6}$$

Dimostrazione. Scomponiamo il vettore posizione di P rispetto ad O come

$$P - O_0 = (P - O') + (O' - O_0)$$

e applichiamo la formula di derivazione cinematica (4.7.2) a tutti i suoi termini. Otterremo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}_{|\Sigma}(P - O_0) &= \frac{d}{dt}_{|\Sigma}(P - O') + \frac{d}{dt}_{|\Sigma}(O' - O_0) \\ &= \frac{d}{dt}_{|\Sigma'}(P - O') + \vec{\omega} \times (P - O') + \vec{v}_{O'} \\ &= \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{\omega} \times (P - O') + \vec{v}_{O'} \ . \end{aligned} \tag{4.7.7}$$

□

Osserviamo che la differenza tra le velocità di P in Σ e $\Sigma'(t)$ è data dal vettore $\vec{v}_P^{(tr)}$, che dipende dalla velocità di O', da $\vec{\omega}$ e dalla posizione di P rispetto ad O'. Se ad un istante fissato $\vec{v}_P^{(rel)} = \vec{0}$, il vettore $\vec{v}_P^{(tr)}$ rappresenta la velocità di un punto solidale alla terna $\Sigma'(t)$ che, quindi, viene trascinato nel moto di tale terna rispetto a Σ. Ciò spiega il motivo del termine velocità di trascinamento per la (4.7.6).

Casi particolari

- Moto traslatorio.

  Se la terna $\Sigma'(t)$ si muove di moto traslatorio rispetto a Σ, $\vec{\omega} = \vec{0}$. In questo caso

  $$\vec{v}_P^{(tr)} = \vec{v}_{O'} \ , \tag{4.7.8}$$

  quindi il campo della velocità di trascinamento ha una struttura uniforme.

- Moto rotatorio

  Se le due terne si muovono di moto rotatorio una rispetto all'altra, esiste un asse che rimane fisso sia in Σ, sia in $\Sigma'(t)$. Detto $(O_0 \equiv O' = O, \vec{e}_3(0) \equiv \vec{e}'_3(t))$ tale asse, si ha che $\vec{v}_{O'} = \vec{0}$ e $\vec{\omega} = \omega(t)\,\vec{e}_3$. Allora

  $$\vec{v}_P^{(tr)} = \omega(t)\,\vec{e}_3 \times (P - O) \ , \tag{4.7.9}$$

  quindi il campo della velocità di trascinamento ha una struttura rotatoria intorno all'asse $\vec{e}_3$.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

4.7.3 Composizione delle accelerazioni

Vogliamo studiare le accelerazioni del punto P misurate dai due osservatori Σ e $\Sigma'(t)$. Denoteremo con

$$\vec{a}_P^{(ass)} : \qquad \text{l'accelerazioni di } P \text{ , valutata da } \Sigma$$

$$(\vec{a}_{O'}, \dot{\vec{\omega}}) : \text{l'accelerazioni di } O' \text{ e l'accelerazione angolare di } \Sigma'(t) \text{ valutate da } \Sigma$$

$$\vec{a}_P^{(rel)} : \qquad \text{accelerazione di } P \text{ valutata da } \Sigma'(t)$$

Vale il

Teorema 4.7.2 (Coriolis, 1792-1843)**.**

$$\vec{a}_P^{(ass)} = \vec{a}_P^{(rel)} + \vec{a}_P^{(tr)} + \vec{a}_P^{(Cor)} \ , \tag{4.7.10}$$

dove $\vec{a}_P^{(tr)}$, $\vec{a}_P^{(Cor)}$ sono dette rispettivamente accelerazione di trascinamento e accelerazione di Coriolis (o complementare) di P e sono pari a

$$\vec{a}_P^{(tr)} = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times \big(\vec{\omega} \times (P - O')\big) \tag{4.7.11}$$

$$\vec{a}_P^{(Cor)} = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_P^{(rel)} \ . \tag{4.7.12}$$

Dimostrazione. Derivando rispetto al tempo la (4.7.5), otterremo

$$\frac{d}{dt}_{|\Sigma} \vec{v}_P = \frac{d}{dt}_{|\Sigma} \vec{v}_P^{(rel)} + \frac{d}{dt}_{|\Sigma} \vec{v}_P^{(tr)} \tag{4.7.13}$$

Tenendo conto di

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}_{|\Sigma} \vec{v}_P^{(rel)} &= \frac{d}{dt}_{|\Sigma'} \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{\omega} \times \vec{v}_P^{(rel)} \\ &= \vec{a}_P^{(rel)} + \vec{\omega} \times \vec{v}_P^{(rel)} \end{aligned} \tag{4.7.14}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}_{|\Sigma} \vec{v}_P^{(tr)} &= \frac{d}{dt}_{|\Sigma} \big(\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P - O')\big) = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times (\vec{v}_P - \vec{v}_{O'}) \\ &= \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times \big(\vec{v}_P^{(rel)} + \vec{\omega} \times (P - O')\big) \ . \end{aligned} \tag{4.7.15}$$

□

Osserviamo che la differenza tra l'accelerazione di P in Σ e in $\Sigma'(t)$ consta di 2 termini: il primo, $\vec{a}_P^{(tr)}$, dipende dall'accelerazione di O', da $\vec{\omega}$ e dalla sua derivata, dalla posizione di P rispetto a O'. Il secondo termine, $\vec{a}_P^{(Cor)}$, è ortogonale a $\vec{\omega}$ e alla velocità di P in $\Sigma'(t)$. È detto accelerazione di Coriolis. Se ad un dato istante, $\vec{v}_P^{(rel)} = \vec{0}$, il termine (4.7.11) è l'unico che sopravvive, quindi, rappresenta l'accelerazione di un punto solidale alla terna $\Sigma'(t)$; per questo motivo, esso viene detto accelerazione di trascinamento.

Casi particolari

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

- Moto traslatorio.

  Se la terna $\Sigma'(t)$ si muove di moto traslatorio rispetto a Σ, $\vec{\omega} = \vec{0}$ implica che

$$\vec{a}_P^{(tr)} = \vec{a}_{O'} \tag{4.7.16}$$

$$\vec{a}_P^{(Cor)} = \vec{0}\ . \tag{4.7.17}$$

  Quindi il campo dell'accelerazione di trascinamento è uniforme e quello dell'accelerazione di Coriolis è nullo. Inoltre, se il moto traslatorio è *rettilineo* ed *uniforme*, anche $\vec{a}_P^{(tr)} = \vec{0}$, quindi

$$\vec{a}_P^{(ass)} = \vec{a}_P^{(rel)} \qquad \forall P \in \mathcal{E}_3\ .$$

  Dunque, tutti gli osservatori che si muovono di reciproco moto *traslatorio rettilineo uniforme*, attribuiscono ad un generico punto materiale P la stessa accelerazione (Principio d'Invarianza Galileiana).

- Moto rotatorio

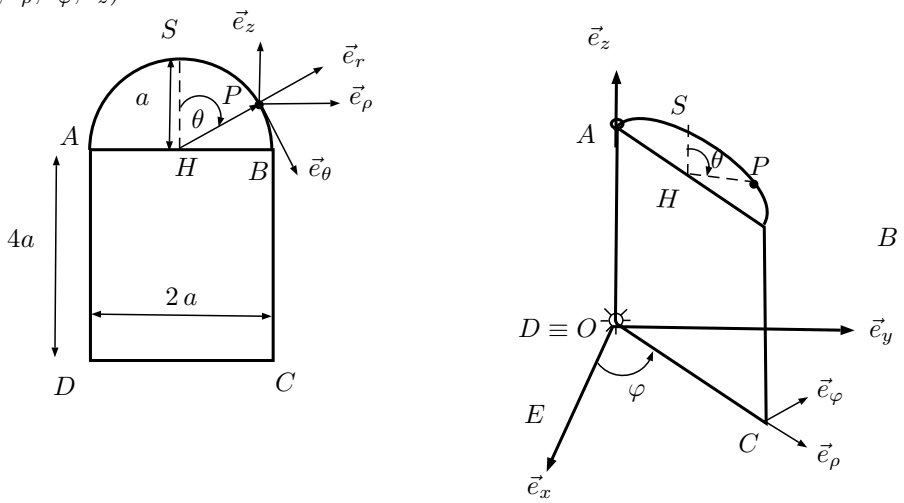
  Se la terna $\Sigma'(t)$ si muove di moto rotatorio rispetto a Σ, $O_0 \equiv O'$, $\vec{\omega} = \omega(t)\,\vec{e}_3$ implicano che

$$\vec{a}_P^{(tr)} = \dot{\omega}\,\vec{e}_3 \times (P - O) - |\vec{\omega}|^2 (P - O)_\perp\ , \tag{4.7.18}$$

$$\vec{a}_P^{(Cor)} = 2\omega\,\vec{e}_3 \times \vec{v}_P^{(rel)}\ . \tag{4.7.19}$$

  Quindi, il campo dell'accelerazione di trascinamento è la somma di un termine trasversale, dipendente dall'accelerazione angolare, che ha una struttura rotatoria intorno all'asse $\vec{e}_3$ e di un termine "assipeto" dipendente linearmente dalla distanza di P dall'asse di rotazione. Infine, l'accelerazione di Coriolis sta nel piano ortogonale all'asse di rotazione ed è ortogonale a $\vec{v}_P^{(rel)}$.

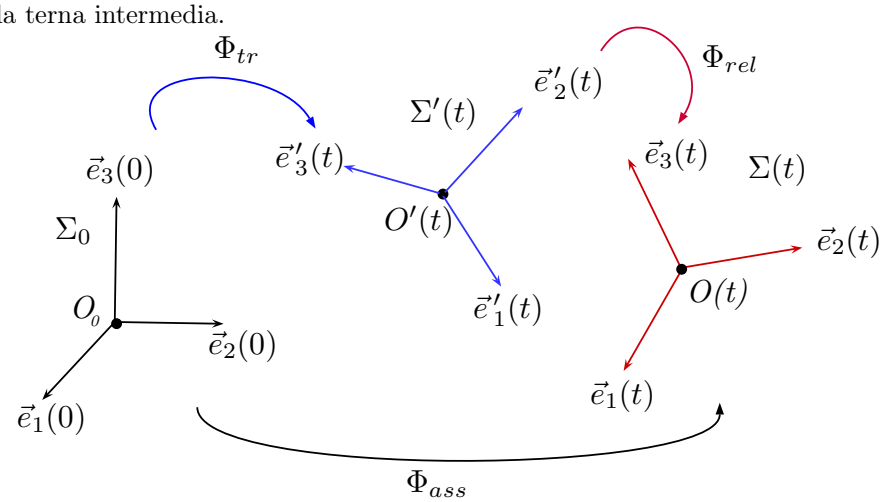
Esercizio 4.7.3. *Si consideri il modello del Tema d'esame del 29 Gennaio 2018. Si calcolino la velocità e l'accelerazione del punto P in funzione delle coordinate libere (φ, θ), applicando il Teorema di Galileo e quello di Coriolis alla terna fissa $\Sigma = (O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ e a quella mobile $\Sigma'(t) = (O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.*



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

4.7.4 Composizione delle velocità angolari

In questa sezione studieremo in dettaglio la composizione di due moti rigidi qualsiasi, della parte lineare dei loro componenti polari, degli operatori di spin e delle loro velocità angolari. Precisamente, consideriamo una terna fissa $\Sigma_0 = \big(O_0, \mathbf{e}(0)\big)$ e due terne in moto $\Sigma'(t) = \big(O'(t), \mathbf{e}'(t)\big)$ e $\Sigma(t) = \big(O(t), \mathbf{e}(t)\big)$. La terna $\Sigma'(t)$ sarà detta *intermedia*, la terna $\Sigma(t)$ *solidale*. Chiameremo moto di *trascinamento* Φ_{tr} e moto *assoluto* Φ_a, rispettivamente, quello delle terna intermedia e della terna solidale rispetto alla terna fissa. Chiameremo moto *relativo* Φ_{rel} quello della terna solidale rispetto alla terna intermedia.



Posto

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}'(t)[R_{rel}] \ , \qquad \mathbf{e}'(t) = \mathbf{e}(0)[R_{tr}] \ , \qquad \mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(0)[R_{ass}] \ , \tag{4.7.20}$$

i corrispondenti operatori di spin sono

$$A_{rel} = \dot{R}_{rel} R_{rel}^T \ , \qquad A_{tr} = \dot{R}_{tr} R_{tr}^T \ , \qquad A_{ass} = \dot{R}_{ass} R_{ass}^T \ . \tag{4.7.21}$$

Concatenando le prime due equazioni della (4.7.20) e confrontando il risultato con con la terza segue che la matrice di piazzamento del moto composto

$$\Phi_{ass} = \Phi_{rel} \circ \Phi_{tr}$$

è data da

$$[R_{ass}] = [R_{tr}][R_{rel}] \ . \tag{4.7.22}$$

Teorema 4.7.3 (Frisi 1728-1784)**.** *Detta $\vec{\omega}_{tr}$ la velocità angolare della terna intermedia rispetto alla terna fissa e $\vec{\omega}_{rel}$ la velocità angolare della terna solidale rispetto a quella intermedia, la velocità angolare della terna solidale rispetto a quella fissa è pari alla somma delle suddette velocità angolari*

$$\vec{\omega}_{ass} = \vec{\omega}_{tr} + \vec{\omega}_{rel} \ . \tag{4.7.23}$$

Dimostrazione. L'operatore di spin del moto assoluto è dato da

$$A_{ass} = \dot{R}_{ass} R_{ass}^T \ ,$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

quindi la matrice associata rispetto alla base fissa risulta per la (4.7.22)

$$
\begin{aligned}
(4.7.24)\quad [A_{ass}] &= \frac{d}{dt}\big([R_{tr}][R_{rel}]\big)\big([R_{tr}][R_{rel}]\big)^T = \big([\dot{R}_{tr}][R_{rel}] + [R_{tr}][\dot{R}_{rel}]\big)[R_{rel}]^T[R_{tr}]^T = \\
&= [\dot{R}_{tr}]\cancel{[R_{rel}][R_{rel}]^T}[R_{tr}]^T + [R_{tr}][\dot{R}_{rel}][R_{rel}]^T[R_{tr}]^T = [A_{tr}] + [R_{tr}][A_{rel}][R_{tr}]^{-1}
\end{aligned}
$$

La tesi si ottiene osservando che la matrice $[A_{tr}]$ è la matrice rappresentativa dell'operatore di spin nel moto di *trascinamento*, rispetto alla base fissa; $[A_{rel}]$ è la matrice rappresentativa dell'operatore di spin nel moto *relativo*, rispetto alla base *intermedia*, quindi $[R_{tr}][A_{rel}][R_{tr}]^T$ è la matrice rappresentativa dello stesso operatore rispetto alla base fissa. Infatti, in base alla (4.5.13)

$$
\vec{\omega}_{rel} \times \vec{y} = \mathbf{e}(0)[A_{rel}]^{\mathbf{e}(0)}_{\mathbf{e}(0)}[\vec{y}]^{\mathbf{e}(0)} = \mathbf{e}(0)[R_{tr}][A_{rel}][R_{tr}]^{-1}[\vec{y}]^{\mathbf{e}(0)} \overset{(4.7.20)}{=} \mathbf{e}'(t)[A_{rel}][\vec{y}]^{\mathbf{e}'(t)}
$$

□

Corollario 4.7.2. *Supponiamo che le due terne mobili siano entrambe solidali a un rigido. Allora R_{rel} è indipendente dal tempo, quindi $A_{rel} = 0_{E_3}$, $\vec{\omega}_{rel} = \vec{0}$ e $\vec{\omega}_{ass} = \vec{\omega}_{tr}$. Pertanto, le velocità angolari di tutte le terne solidali a un rigido coincidono.*

Esempio 4.7.1. *Consideriamo un rigido con un punto fisso O. Applicando il Teorema di Frisi alla terna fissa $\big(O, \mathbf{e}(0)\big)$, alle due terne intermedie $\big(O, \mathbf{e}'(t)\big)$ e $\big(O, \mathbf{e}''(t)\big)$, a quella solidale al rigido $\big(O, \mathbf{e}(t)\big)$, già utilizzate nella dimostrazione del Teorema di Eulero 4.3.1, si ricava che la velocità angolare $\vec{\omega}$ del moto polare, sulla terna non ortogonale $\big(O; \vec{e_3}(0), \vec{n}(t), \vec{e_3}(t)\big)$, assume la forma*

$$
(4.7.25)\qquad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e_3}(0) + \dot{\theta}\,\vec{n}(t) + \dot{\psi}\,\vec{e_3}(t)\ .
$$

Esercizio 4.7.4. *Verificare che la* (4.7.25) *equivale alla* (4.6.3) *e alla* (4.6.4).

4.8 Moto di precessione

In questa sezione, studieremo un caso particolare di moto polare che ha notevoli applicazioni al moto delle trottole e a quello del pianeta Terra: il moto di precessione.

Definizione 4.8.1. *Il moto di* precessione *è un moto rigido che preserva un punto O del modello (moto polare) e un angolo compreso tra due assi concorrenti in O, il primo fisso nello spazio, detto asse di precessione, il secondo solidale al rigido, detto asse di figura.*

Tale moto si può realizzare, per esempio, montando l'asse di figura del modello su un telaio rigido in modo che il modello sia libero di ruotare intorno a tale asse e vincolando, a sua volta, il telaio a ruotare intorno all'asse di precessione.

Il suo flusso sarà

$$
\Phi_t : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{E}_3, P_0 \mapsto P(t) = \Phi_t(O) + \hat{\Phi}_t(P_0 - O) = O + R_t(P_0 - O)\ ,
$$

dove l'operatore di rotazione R_t deve essere un caso particolare di quello del moto polare. Per determinare R_t, scegliamo come terna fissa $(O; \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ con l'asse $(O; \vec{E}_3)$ coincidente con l'asse di precessione e la terna solidale $(O; \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ con l'asse $(O; \vec{e}_3(t))$ coincidente con l'asse

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

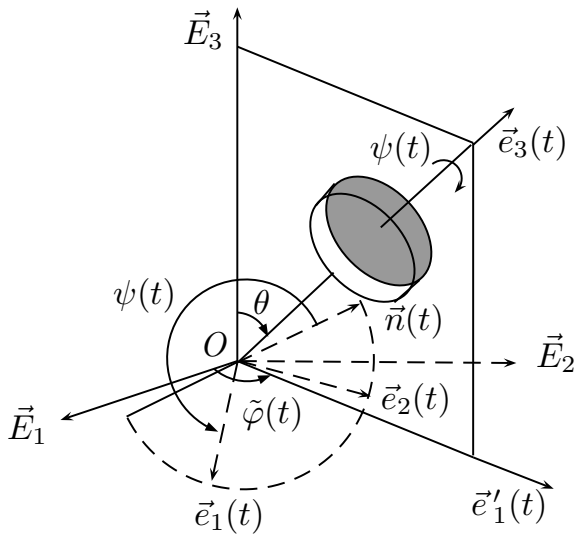


Figura 4.8.1: Moto di precessione

di figura, come nella Fig. 4.8.1. Come coordinate sovrabbondanti possiamo scegliere gli angoli di Eulero della terna solidale rispetto alla terna fissa. Possiamo calcolare il numero dei gradi di libertà con il metodo del bilancio, tenendo conto che l'equazione di vincolo è data da

$$\theta = cost$$

ed ha matrice Jacobiana di rango massimo. Dunque, il rigido così vincolato ha $l = 3 - 1 = 2$ gradi di libertà. Come coordinate libere possiamo prendere

- l'angolo $\tilde{\varphi}$ di rotazione del telaio, cioè l'angolo formato dal piano fisso $(O; \vec{E}_1, \vec{E}_3)$ e il piano mobile $(O; \vec{E}_3, \vec{e}_3(t))$, contenente sia l'asse di precessione sia l'asse di figura;
- l'angolo di Eulero ψ di rotazione del rigido intorno all'asse di figura, compreso tra $\vec{n}(t)$ ed $\vec{e}_1(t)$.

È facile convincersi che l'angolo $\tilde{\varphi}$ differisce dall'angolo di precessione φ di Eulero per una costante

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \pi/2 \ , \tag{4.8.1}$$

quindi la sua derivata rispetto al tempo coincide con quella di φ . Dunque, dal teorema di Eulero sul moto polare segue che

Proposizione 4.8.1. *Un moto di precessione si può sempre scomporre in modo unico in due moti rotatori, uno intorno all'asse fisso e uno intorno all'asse di figura.*

Allora, la matrice rappresentativa dell'operatore di rotazione R_t rispetto alla base fissa $\mathscr{B}_0 = (\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$, si calcola semplicemente sostituendo la (4.8.1) nella (4.3.12)

$$[R_t]^{\mathscr{B}_0} = \left[\begin{array}{c|c|c} -\sin\tilde{\varphi}\cos\psi - \cos\tilde{\varphi}\cos\theta\sin\psi & \sin\tilde{\varphi}\sin\psi - \cos\tilde{\varphi}\cos\theta\cos\psi & \cos\tilde{\varphi}\sin\theta \\ \hline \cos\tilde{\varphi}\cos\psi - \sin\tilde{\varphi}\cos\theta\sin\psi & -\cos\tilde{\varphi}\sin\psi - \sin\tilde{\varphi}\cos\theta\cos\psi & \sin\tilde{\varphi}\sin\theta \\ \hline \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{array}\right] \tag{4.8.2}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Analogamente, la matrice di spin del moto di precessione si calcola sostituendo la (4.8.1) e la sua derivata rispetto al tempo nella (4.6.2), ottenendo così

$$[A]^{\mathscr{B}_0} := [\dot{R}R^T]^{\mathscr{B}_0} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & -(\dot{\tilde{\varphi}} + \dot{\psi}\cos\theta) & \dot{\psi}\sin\tilde{\varphi}\sin\theta \\ \hline \dot{\tilde{\varphi}} + \dot{\psi}\cos\theta & 0 & -\dot{\psi}\cos\tilde{\varphi}\sin\theta \\ \hline -\dot{\psi}\sin\tilde{\varphi}\sin\theta & \dot{\psi}\cos\tilde{\varphi}\sin\theta & 0 \end{array}\right] , \tag{4.8.3}$$

e, quindi, il vettore velocità angolare

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\cos\tilde{\varphi}\sin\theta\,\vec{E}_1 + \dot{\psi}\sin\tilde{\varphi}\sin\theta\,\vec{E}_2 + (\dot{\tilde{\varphi}} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{E}_3 \ . \tag{4.8.4}$$

Una maniera più veloce di determinare $\vec{\omega}$ è quella di utilizzare il teorema di addizione delle velocità angolari. A tale scopo, introduciamo la terna intermedia $(O; \vec{e}\,'_1(t), \vec{n}(t), \vec{e}_3(0))$ con $\vec{e}\,'_1(t)$ e $\vec{n}(t)$ versori, rispettivamente, paralleli e ortogonali alla base del telaio e introduciamo la terna solidale $(O; \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$. Allora, si ha

$$\vec{\omega}_{tr} = \dot{\tilde{\varphi}}\vec{E}_3 \ , \qquad \vec{\omega}_{rel} = \dot{\psi}\vec{e}_3(t)$$

Dunque, la velocità angolare totale si può scrivere

$$\vec{\omega} = \dot{\tilde{\varphi}}\vec{E}_3 + \dot{\psi}\vec{e}_3(t) \ , \tag{4.8.5}$$

cioè somma di due componenti

- la velocità angolare di precessione intorno all'asse fisso $\vec{\omega}_{pr} = \dot{\tilde{\varphi}}\vec{E}_3$
- la velocità angolare di rotazione intorno all'asse di figura $\vec{\omega}_{rot} = \dot{\psi}\vec{e}_3(t)$.

Si noti che, scomponendo il versore dell'asse di figura sulla terna fissa, risulta

$$\vec{e}_3(t) = \sin\theta\big(\cos\tilde{\varphi}\,\vec{E}_1 + \sin\tilde{\varphi}\,\vec{E}_2\big) + \cos\theta\,\vec{E}_3 \ ,$$

quindi la (4.8.4) e la (4.8.5) coincidono.

Se $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, la precessione si distingue in

$\vec{\omega}_{pr} \cdot \vec{\omega}_{rot} =$

- >0: anterograda: i due componenti di $\vec{\omega}$ formano un angolo acuto
- <0: retrograda: i due componenti di $\vec{\omega}$ formano un angolo ottuso

Proprietà del moto di precessione:

(1) I versori $\vec{E}_3, \vec{\omega}, \vec{e}_3(t)$ sono complanari $\forall t \in I$;

(2) l'asse di figura $(O; \vec{e}_3(t))$ descrive un cono circolare di semiapertura θ intorno all'asse fisso $(O; \vec{E}_3)$, come nella Fig. 4.8.2;

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

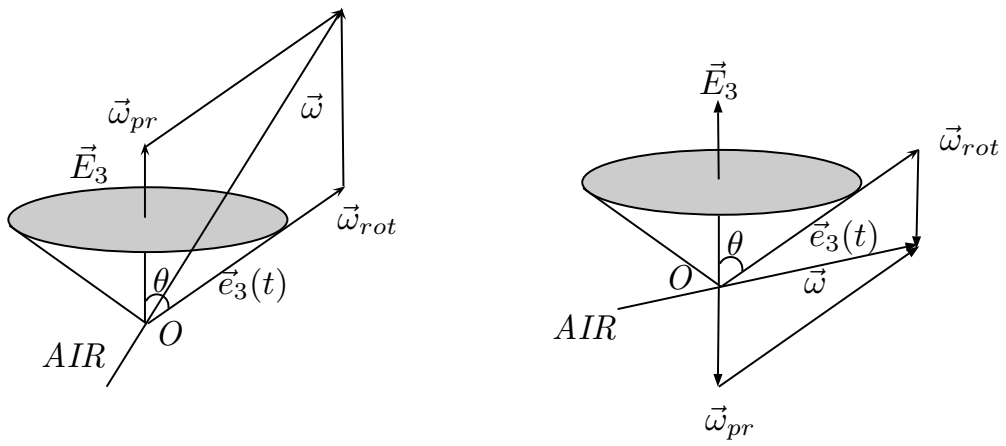


Figura 4.8.2: Coni di precessione anterograda e retrograda

(3) il campo delle velocità è rotatorio e l'AIR passa per il punto fisso O (come in ogni moto polare).

La scomposizione (4.8.5) caratterizza il moto di precessione all'interno della classe dei moti polari. Infatti, vale il seguente

Teorema 4.8.1. *Un moto polare è una precessione se e solo se esistono due versori, uno fisso nello spazio, $\vec{c}$, uno solidale al rigido, $\vec{k}(t)$, tali che*

$$\vec{\omega}(t) = \lambda(t)\vec{c} + \mu(t)\vec{k}(t) \ , \tag{4.8.6}$$

dove $\lambda, \mu : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni regolari del tempo.

Dimostrazione. Detto θ l'angolo compreso tra $\vec{c}$ e $\vec{k}(t)$, dimostriamo che esso è costante nel tempo. Infatti,

$$\frac{d}{dt}\big(\cos\theta(t)\big) = \frac{d}{dt}(\vec{c}\cdot\vec{k}) = \vec{c}\cdot\frac{d}{dt}\vec{k} \overset{(4.7.1)}{=} \vec{c}\cdot\vec{\omega}\times\vec{k} \overset{(4.8.6)}{=} 0$$

□

Se, in particolare, la precessione è *regolare* (o uniforme), cioè λ e μ sono costanti, vale la seguente

Proposizione 4.8.2. *In una precessione regolare*

- *il modulo della velocità angolare è costante;*
- *sono costanti gli angoli compresi tra due qualunque dei vettori $(\vec{c}, \vec{\omega}, \vec{k})$;*
- *l'AIR descrive due coni rotondi detti coni di Poinsot, uno intorno all'asse di precessione (cono fisso) e uno intorno all'asse di figura (cono mobile). Tali coni sono tangenti lungo la comune generatrice avente la direzione di $\vec{\omega}$ e rotolano senza strisciare uno sull'altro. Si vedano le Fig. 4.8.3 e 4.8.4*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

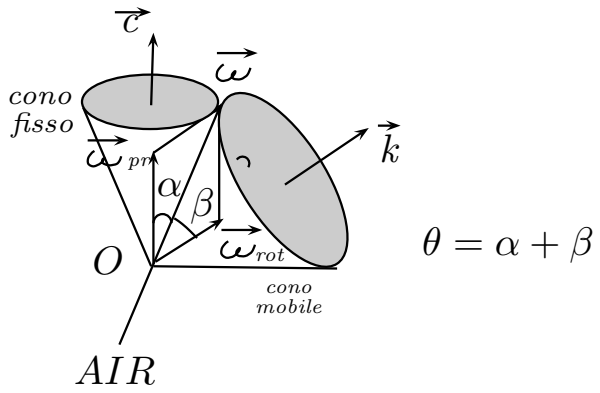


Figura 4.8.3: Coni di Poinsot: precessione anterograda

Dimostrazione. .

- Dalla (4.8.6) segue che $|\vec{\omega}|^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos\theta$. Dal fatto che θ, λ e μ sono costanti per ipotesi, segue la tesi.
- Detti α e β gli angoli compresi rispettivamente tra $\big(\vec{c}, \vec{\omega}\big)$ e $\big(\vec{\omega}, \vec{k}(t)\big)$, si ha

$$\cos\alpha = \frac{\vec{c}\cdot\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \frac{\lambda + \mu\cos\theta}{|\vec{\omega}|}\ , \qquad \cos\beta = \frac{\vec{k}(t)\cdot\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \frac{\mu + \lambda\cos\theta}{|\vec{\omega}|}\ .$$

- Dal punto precedente segue che, durante il moto, l'AIR descrive un cono rotondo di semi-apertura α intorno all'asse $\big(O; \vec{c}\big)$ e un altro cono di semi-apertura β intorno all'asse $\big(O; \vec{k}(t)\big)$. I due coni hanno in comune la generatrice coincidente con l'asse d'istantanea rotazione che, ricordiamo, è il luogo geometrico di tutti e soli i punti del rigido con velocità istantanea nulla.

□

Esempio 4.8.1. *Il moto di precessione retrograda, quasi-regolare della Terra, con angolo di inclinazione θ dell'asse terrestre di circa $23°$ rispetto all'asse fisso, ortogonale al piano dell'eclittica (orbita solare). Ha un periodo di circa 26.000 anni e causa un anticipo di circa $20'/$anno dell'arrivo degli equinozi. Tali giorni corrispondono alle due intersezioni dell'asse dei nodi con l'eclittica, quindi al momento in cui i raggi solari arrivano ortogonali all'asse terrestre. Tale anticipo è noto come precessione degli equinozi. Si veda la Fig. 4.8.5.*

4.9 Moto rigido piano

Definiamo moto rigido piano quello che lascia invariato l'insieme dei punti di un piano π solidale a $\mathcal{R}$. In altri termini, $\mathcal{R}$ possiede un piano π i cui punti si muovono parallelamente a un piano direttore fisso π', parallelo a π. Dunque, tutte le linee di corrente sono curve appartenenti a piani paralleli a π'. Abbiamo già incontrato un particolare esempio di moto piano: il moto rotatorio di un

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

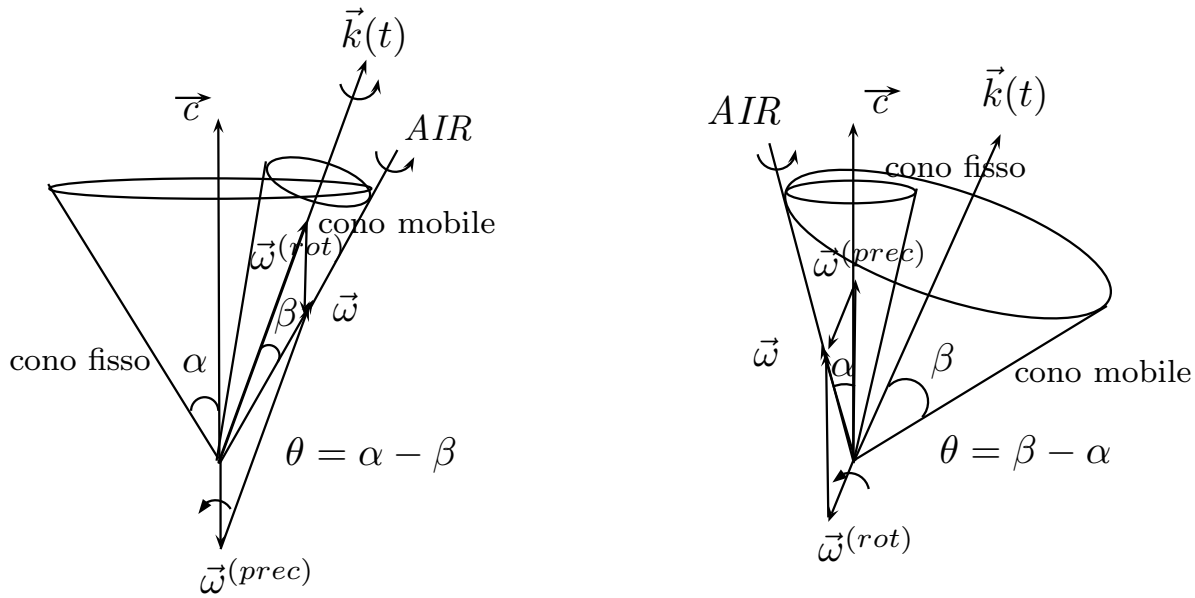


Figura 4.8.4: Coni di Poinsot: precessioni retrograde

rigido tridimensionale attorno ad un asse fisso. Un altro esempio è quello di una lamina vincolata a muoversi nel suo piano.

Teorema 4.9.1 (Eulero)**.** *Il più generale moto piano si può scomporre (in infiniti modi) in un moto traslatorio, con il vettore della traslazione sempre parallelo al piano direttore, e un moto rotatorio intorno ad un asse ortogonale al piano direttore. Quindi, scelto un arbitrario punto del rigido $O(t)$, il suo flusso Φ è dato da*

$$P(t) = \Phi_t(P_0) = \rho_t(\tau_{\vec{s}(t)}) = O(t) + R_t\Big(P_0 - \Phi_t^{-1}(O(t)\Big) = O_0 + \vec{s}(t) + R_t\,(P_0 - O_0)\ , \tag{4.9.1}$$

dove, $\forall t \in I$,

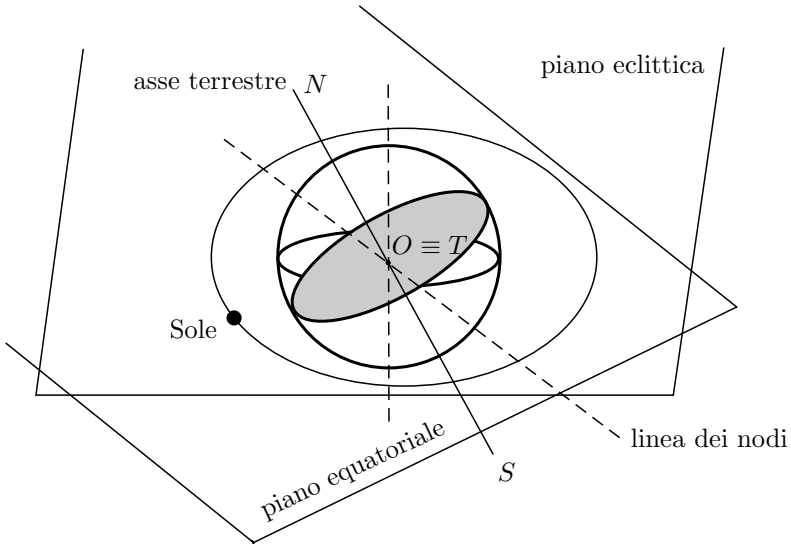
$$O_0 = \Phi_t^{-1}\big(O(t)\big)\ , \qquad \vec{s}(t) = \big(O(t) - O_0\big) \parallel \pi'\ , \qquad R_t = R_{(\varphi,\vec{k}\,)}\ \vec{k} \perp \pi' \qquad . \tag{4.9.2}$$

Di conseguenza, $\vec{\omega} = \omega(t)\,\vec{k}$ e il campo di velocità del rigido, o è traslatorio, se $\omega(\bar{t}) = 0$, oppure è rotatorio intorno all'AIR, che è sempre parallelo a $\vec{k}$. In questo caso, il punto Ω_π d'intersezione dell'AIR con una qualunque sezione piana π del rigido, parallela al piano direttore, è detto centro d'istantanea rotazione (CIR) relativo a π. La sua posizione è data dal vettore

$$\Omega_\pi - O = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{|\vec{\omega}|^2} \qquad\qquad O \in \pi\ . \tag{4.9.3}$$

Dimostrazione. Sappiamo dal Teorema 4.5.1 che il più generale moto rigido si scompone (in infiniti modi) in un moto traslatorio composto con un moto polare. Per il moto piano, la traslazione deve

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



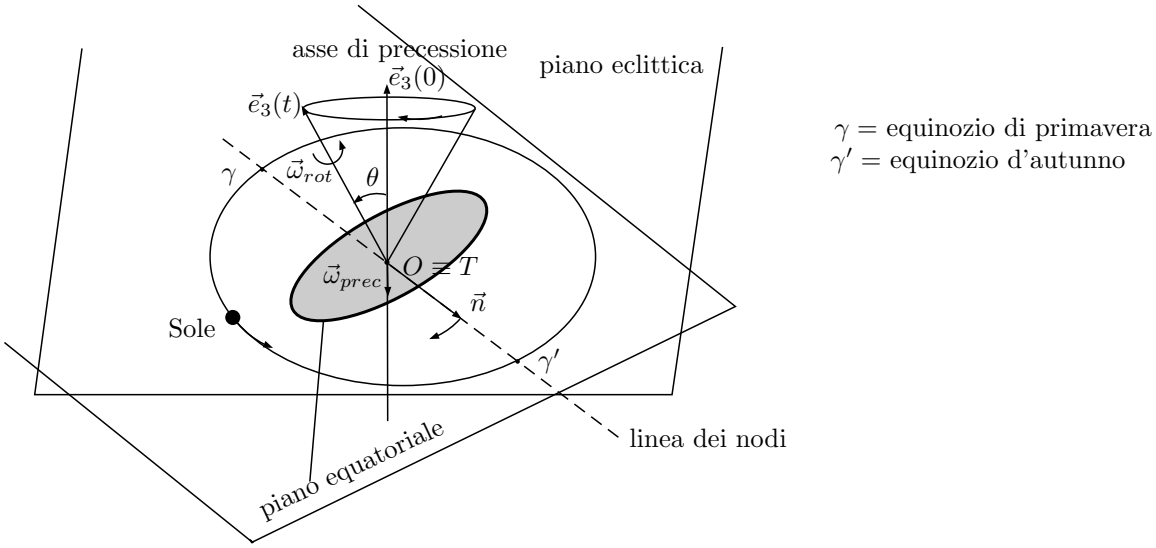


Figura 4.8.5: precessione degli equinozi

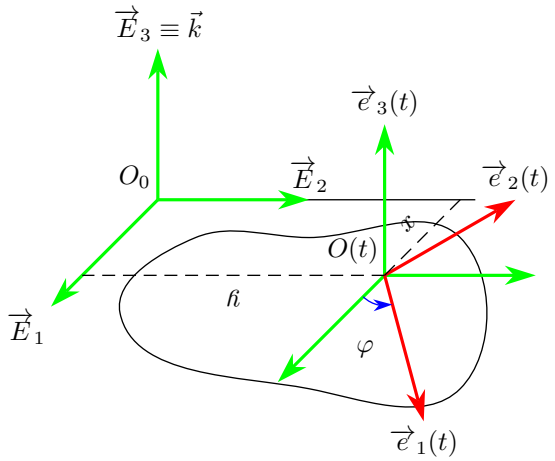
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

necessariamente essere parallela al piano direttore, mentre il moto polare, lasciando invariati tutti i piani solidali paralleli al piano direttore, deve essere necessariamente rotatorio intorno ad una asse ortogonale al piano invariante. Quindi, il suo flusso è dato dalla (4.9.1) con le condizioni (4.9.2). Naturalmente, la (4.9.2) comporta che la velocità angolare di un rigido che si muove di moto piano è sempre ortogonale al piano direttore. Tale proprietà, insieme al fatto che i punti di $\mathcal{R}$ hanno velocità parallela al piano direttore, implica che l'invariante scalare cinematico si annulla

$$\mathcal{I} = \vec{v}_P \cdot \omega\, \vec{k} = 0 \ . \tag{4.9.4}$$

Dunque, il campo di velocità non può essere elicoidale. □

N.B. Attenzione a non confondere il concetto di moto con quello di campo delle velocità (o atto di moto). Nel caso del moto piano il moto è roto-traslatorio, come abbiamo visto, mentre il campo di velocità è semplicemente traslatorio, oppure rotatorio.



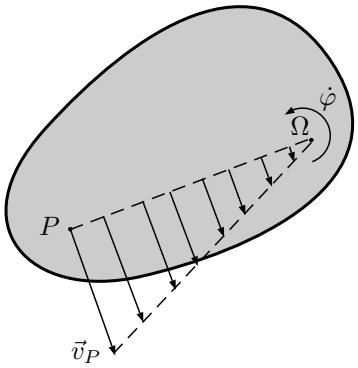
È chiaro che, per il moto piano, tutte le sezioni di $\mathcal{R}$ parallele a π si muovono anch'esse parallelamente al piano direttore π', dato che devono mantenere distanza invariata da π per il vincolo di rigidità. Quindi, il moto piano lascia invariata la *giacitura* di ogni piano di $\mathcal{R}$ parallelo a π. D'altra parte, nota la posizione di una sezione di $\mathcal{R}$ e quindi quella di 3 suoi punti non allineati, è determinata la configurazione di $\mathcal{R}$. Quindi, nel moto piano, non è restrittivo limitarsi a studiare il moto di una sezione del rigido appartenente al piano direttore. Dunque, scegliamo una sezione del rigido, chiamiamo π il piano solidale alla sezione e π' il piano contenente la stessa sezione ma immaginato fisso. Scelta una terna fissa su π' e una mobile solidale a π, come in figura, possiamo prendere come coordinate libere di $\mathcal{R}$ le coordinate cartesiane $\{(x, y)\}$ dell'origine $O(t)$ della terna mobile e il suo angolo di rotazione φ. Allora

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\, \vec{E}_3 \ . \tag{4.9.5}$$

Corollario 4.9.1. *Se $\vec{\omega}(\bar{t}) \neq \vec{0}$, il CIR è l'unico punto solidale a $\mathcal{R}$ e appartenente al piano π del moto che, all'istante $\bar{t}$, ha velocità nulla. Inoltre, vale che*

$$\vec{v}_P = \dot{\varphi}\, \vec{E}_3 \times (P - \Omega) \qquad \forall P \in \mathcal{R} \ . \tag{4.9.6}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



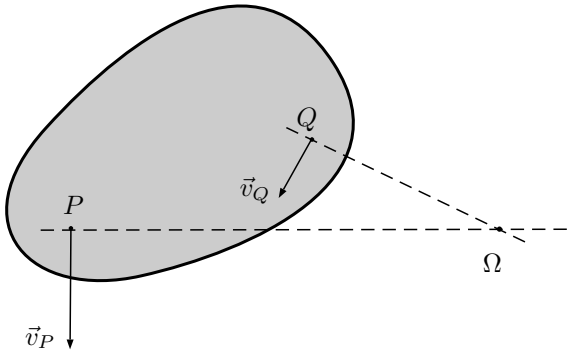
È chiaro che, se sono noti il CIR e la velocità angolare, cioè la coppia $(\Omega, \dot{\varphi})$, grazie alla (4.9.6) si può determinare la velocità di ogni punto del rigido, che avrà

- modulo pari a
$$|\vec{v}_P| = |\dot{\varphi}|\,\overline{\Omega P}\ ;$$
- direzione ortogonale al segmento ΩP;
- verso determinato dalla regola della mano destra.

Viceversa, dalla (4.9.6) segue un metodo per determinare la coppia $(\Omega, \dot{\varphi})$, noti i vettori velocità di 2 soli punti del rigido, P e Q, appartenenti alla sezione piana π.

Teorema 4.9.2 (Chasles, 1793-1880)**.** .

- *Se $\vec{v}_P$ non è parallela a $\vec{v}_Q$, il CIR è il punto d'intersezione delle rette passanti per P e Q e ortogonali, rispettivamente, alle loro velocità. Il modulo della velocità angolare risulta $|\dot{\varphi}| = \frac{|\vec{v}_P|}{\overline{\Omega P}}$.*



- *Se $\vec{v}_P$ e $\vec{v}_Q$ sono parallele, si possono verificare due casi.*
  - *$\vec{v}_P = \vec{v}_Q$, allora il campo di velocità è traslatorio (dimostrarlo per esercizio), $\dot{\varphi} = 0$ e il CIR non è definito;*

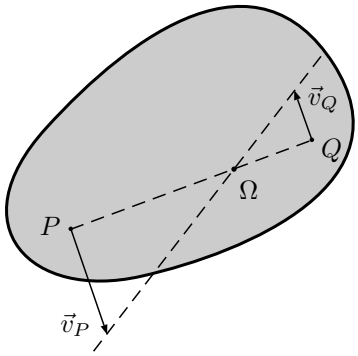
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

– *$\vec{v}_P \neq \vec{v}_Q$, allora, a causa della proprietà di equiproiettività, la retta congiungente i punti P e Q è ortogonale alle due velocità (dimostrarlo per esercizio). In questo caso, il CIR sta su tale congiungente, in modo che*

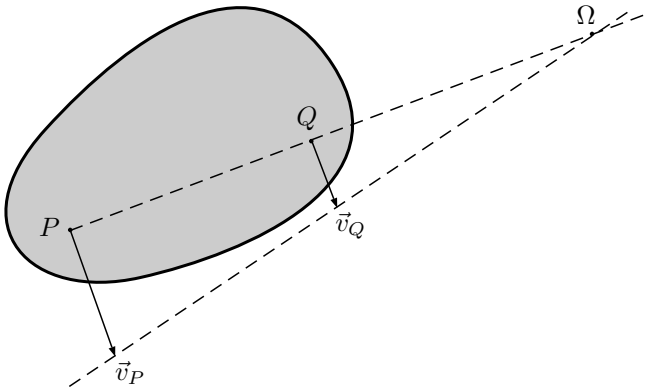
$$\frac{|\vec{v}_P|}{\overline{\Omega P}} = \frac{|\vec{v}_Q|}{\overline{\Omega Q}} = |\dot{\varphi}|$$

In particolare,

∗ *se le due velocità sono discordi, il CIR è interno al segmento PQ lo divide in parti direttamente proporzionali ai moduli delle velocità.*

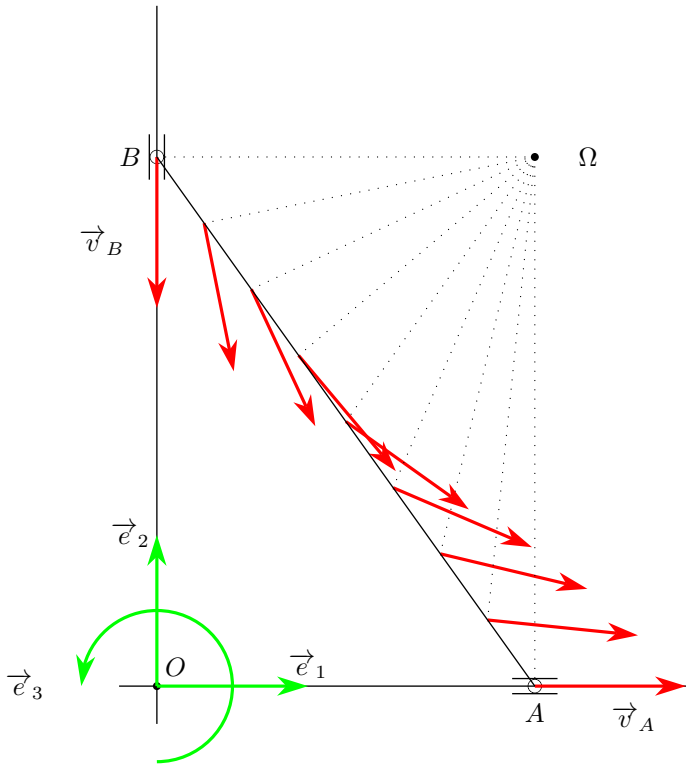


∗ *se le due velocità sono concordi, il CIR è esterno al segmento PQ, dalla parte del punto con velocità minore.*



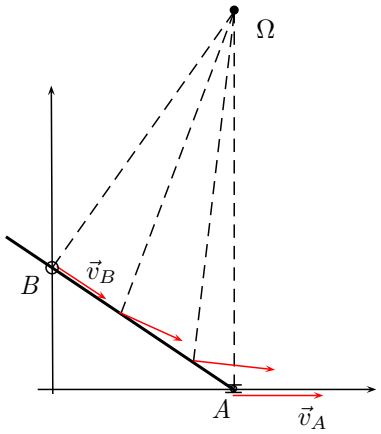
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Esempio: campo delle velocità di una scala con due appoggi

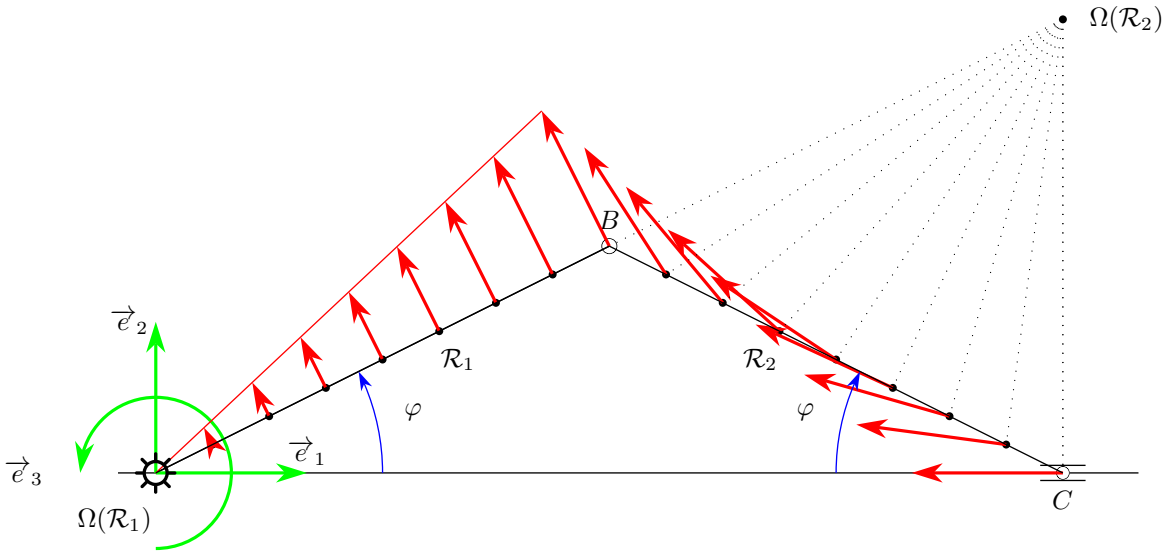


©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Esempio: campo delle velocità di un'asta appoggiata in A e infilata in B.

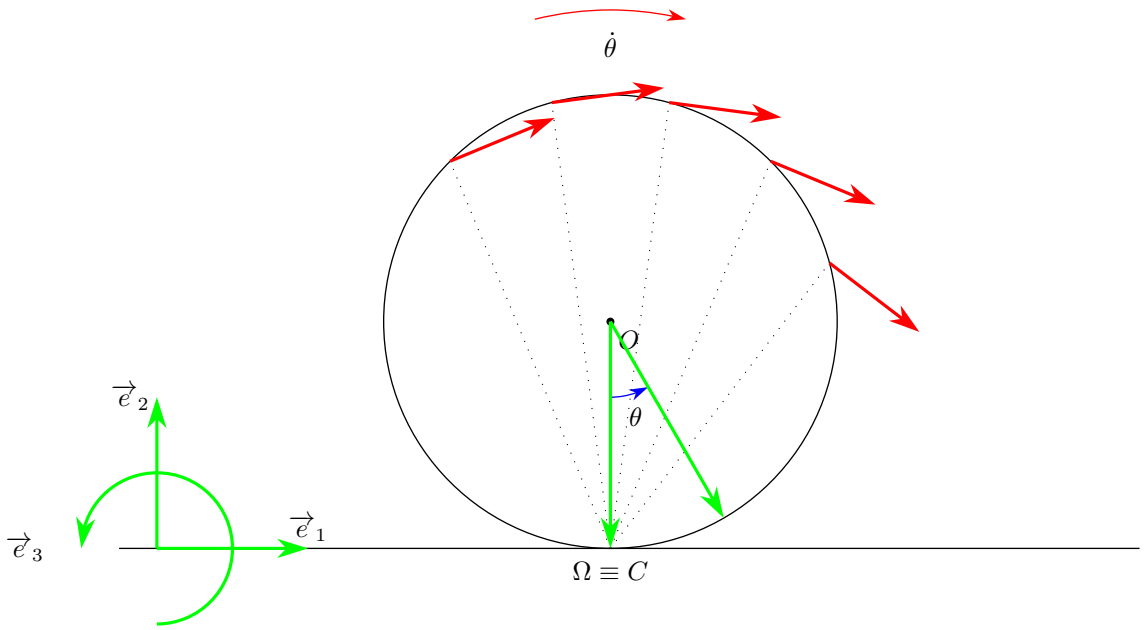


Esempio: campo delle velocità di un sistema biella-manovella



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Esempio: campo delle velocità di un disco in puro rotolamento



4.9.1 Accelerazioni del moto piano

Dalla (4.6.11), tenendo conto che la velocità angolare è sempre ortogonale al piano del moto e $(P-O)_\perp = P-O$, si ha

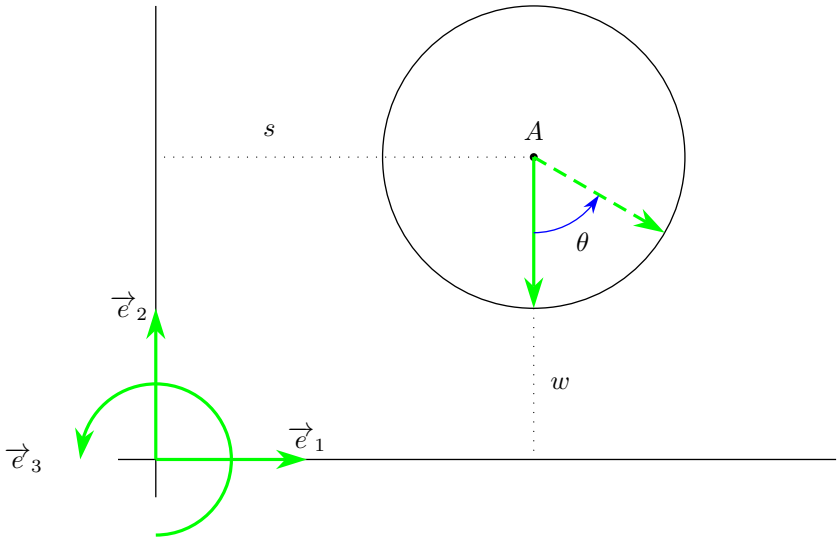
$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (P-O) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P-O)) = \vec{a}_O + \ddot{\varphi}\, \vec{E}_3 \times (P-O) - \dot{\varphi}^2 (P-O) \ , \tag{4.9.7}$$

dove P e O sono punti del rigido appartenenti a π.

4.9.2 Disco appoggiato su di una guida rettilinea

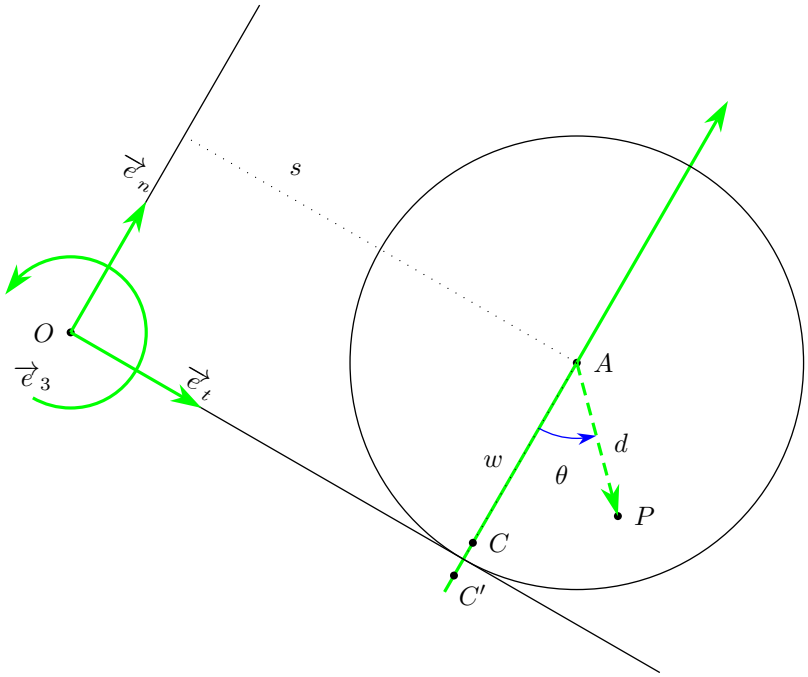
Consideriamo un disco di raggio R e di spessore trascurabile, vincolato a stare nel suo piano. Come tutti i rigidi piani ha 3 gradi di libertà. Come coordinate libere, possiamo prendere le due coordinate cartesiane del centro del disco e un angolo θ compreso tra un asse fisso e uno solidale al disco, ad esempio come nella figura.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Supponiamo, ora, che il disco sia ulteriormente vincolato a stare appoggiato su una guida rigida rettilinea (eventualmente mobile). Tale vincolo è semplice. Infatti, introducendo la terna fissa $(O; \vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_3)$ di figura e le coordinate sovrabbondanti $\{(s, w, \theta)\}$ possiamo rappresentare il vincolo unilatero come

$$w \geq R$$



La matrice Jacobiana corrispondente ha rango massimo, quindi possiamo concludere che

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

- $v = r = 0$ nelle configurazioni ordinarie

- $v = r = 1$ nelle configurazioni di confine.

Da ora in poi, studieremo il modello soltanto nelle configurazioni di confine ($l = 2$), scegliendo come coordinate libere $\{(s, \theta)\}$.

Prima di tutto, osserviamo che il contatto fra il disco e la guida individua 2 punti:

1. $C \in \mathcal{R}$, è il punto del rigido che ad un istante fissato $\bar{t}$ si trova a contatto con la guida;

2. $C' \in$ alla guida, è il punto della guida che allo stesso istante $\bar{t}$ si trova a contatto con il rigido.

Scriviamo la velocità del punto C all'istante $\bar{t}$. Poiché $C \in \mathcal{R}$, si ha

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (C - A) = \dot{s}\vec{e}_t + \dot{\theta}\vec{e}_3 \times (-R\vec{e}_n) = (\dot{s} + R\dot{\theta})\vec{e}_t \tag{4.9.8}$$

Sottolineamo che tale rappresentazione è una rappresentazione spaziale o euleriana, cioè fornisce la velocità del punto del disco che all'istante $\bar{t}$ passa per il corrispondente punto C' appartenente alla guida. Per calcolare l'accelerazione di C, utilizziamo la (4.9.7) per i punti C e A

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times (C - A) - |\vec{\omega}|^2 (C - A) = \ddot{s}\vec{e}_t + \ddot{\theta}\vec{e}_3 \times (-R\vec{e}_n) - \dot{\theta}^2(-R\vec{e}_n) = (\ddot{s} + R\ddot{\theta})\vec{e}_t + R\dot{\theta}^2\vec{e}_n \tag{4.9.9}$$

N.B. L'accelerazione del punto C del rigido a contatto con la guida non coincide con la derivata rispetto al tempo della (4.9.8) che è la velocità calcolata in C e non in un generico punto del rigido, ma con la derivata rispetto al tempo della velocità di un generico punto sul bordo del disco, valutata nel punto C. Infatti, preso un generico punto P sul disco a distanza d dal centro A e detto θ l'angolo tra i vettori $-\vec{e}_n$ e $P - A$ si ha

$$P - A = d(\sin\theta\,\vec{e}_t - \cos\theta\,\vec{e}_n) \Rightarrow (P - A)_{|\theta = 2k\pi} = -d\,\vec{e}_n \tag{4.9.10}$$

Allora, la velocità di P è data da

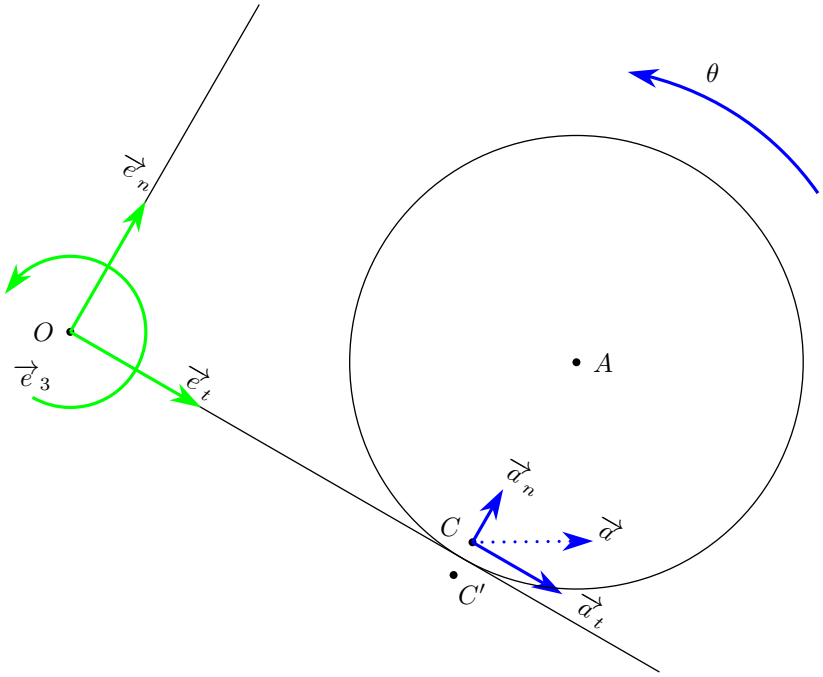
$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (P - A) = \dot{s}\vec{e}_t + \dot{\theta}\vec{e}_3 \times d(\sin\theta\,\vec{e}_t - \cos\theta\,\vec{e}_n) = \dot{s}\vec{e}_t + d\dot{\theta}(\sin\theta\,\vec{e}_n + \cos\theta\,\vec{e}_t) = (\dot{s} + d\dot{\theta}\cos\theta)\vec{e}_t + d\dot{\theta}\sin\theta\vec{e}_n\ , \tag{4.9.11}$$

quindi $\vec{v}_{P|\theta=2k\pi} = (\dot{s} + d\dot{\theta})\vec{e}_t$ e coincide con $\vec{v}_C$ se $d = R$. Inoltre

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P(\theta) = (\ddot{s} + d(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta))\vec{e}_t + d(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{e}_n \tag{4.9.12}$$

e quindi $\vec{a}_{P|\theta=2k\pi} = (\ddot{s} + d\ddot{\theta})\vec{e}_t + d\dot{\theta}^2\vec{e}_n$ e coincide con $\vec{a}_C$ se $d = R$.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



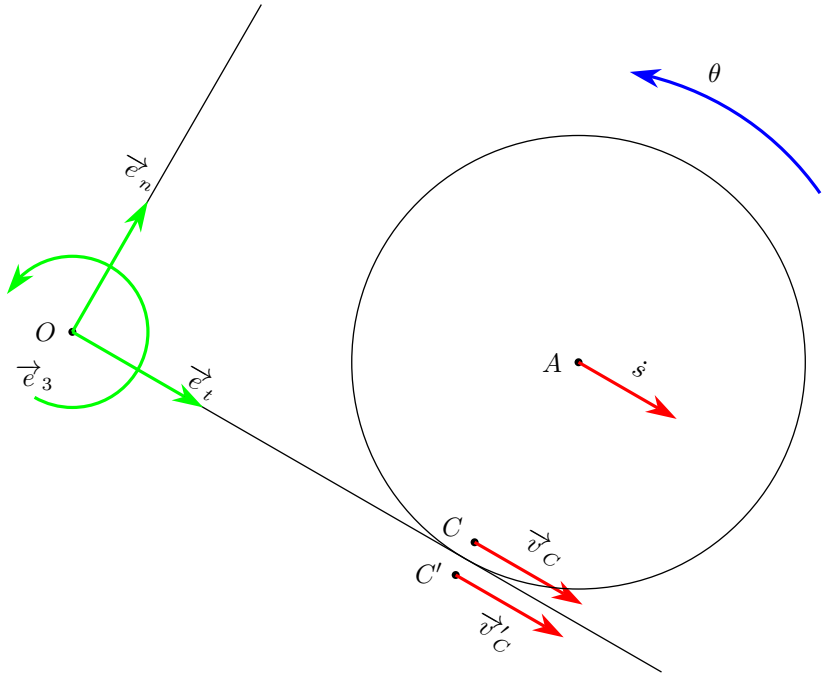
Nella prossima sezione studieremo la cinematica del disco nell' ipotesi che al vincolo d'appoggio si aggiunga il vincolo di puro rotolamento.

4.9.3 Vincolo di puro rotolamento

Supponiamo che il disco rotoli senza strisciare su una guida scabra, eventualmente mobile. Tale vincolo impone che

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C'} \ . \tag{4.9.13}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Disco su guida fissa

Da ora in poi, supponiamo che la guida sia fissa. Allora, dalla (4.9.13) segue che

$$\vec{v}_C = \vec{0} \tag{4.9.14}$$

cioè la velocità di tutti i punti del rigido che passano per il punto C' della guida è nulla. Pertanto, dalla (4.9.8) si ottiene

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = 0 \ , \tag{4.9.15}$$

cioè un vincolo sulle velocità lagrangiane $\{(\dot{s}, \dot{\theta})\}$, quindi di mobilità. Tuttavia, tale vincolo è integrabile rispetto al tempo e si riduce al vincolo *olonomo*

$$f(s, \theta) := s + R\theta - s_0 = 0 \qquad \theta \in \mathbb{R} \ , \tag{4.9.16}$$

che è un vincolo semplice poiché la matrice Jacobiana $J = [1, R]$ ha rango massimo.

N.B. Per gli scopi della prossima sezione, possiamo facilmente verificare che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \, \partial \theta} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \, \partial s}$$

cioè le derivate seconde miste sono uguali, come segue dalla regolarità del vincolo e dal Lemma di Schwarz.

Dunque, il vincolo di puro rotolamento toglie un ulteriore grado di libertà al disco appoggiato, che si riduce a un modello con un solo grado di libertà. Come coordinata libera, possiamo prendere

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

la coordinata θ e, per semplicità, porremo $s_0 = 0$, in modo che $s_{|\theta=0} = 0$. Dalla (4.9.9) ricaviamo che

$$\vec{a}_C = R\dot{\theta}^2\vec{e}_n \ , \tag{4.9.17}$$

cioè l'accelerazione del punto C si riduce al solo componenente ortogonale alla guida.

N.B. Possiamo classificare i moti di un disco appoggiato su di una guida in

1. rotolamento con slittamento: $|\dot{s}| < R|\dot{\theta}|$
2. puro rotolamento: $|\dot{s}| = R|\dot{\theta}|$
3. rotolamento con strisciamento: $|\dot{s}| > R|\dot{\theta}|$

Quindi, il puro rotolamento è interpretabile come la fase di transizione tra il regime di slittamento e quello di strisciamento.

Nel caso di puro rotolamento, la (4.9.11) si riduce a

$$\vec{v}_P = \dot{\theta}(d\cos\theta - R)\vec{e}_t + d\dot{\theta}\sin\theta\vec{e}_n \ , \tag{4.9.18}$$

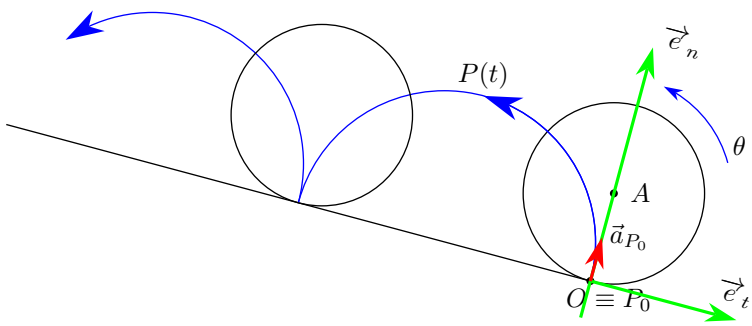
che si può integrare rispetto al tempo per ottenere

$$P(\theta(t)) = \big((d\sin\theta - R\theta + c_1)\vec{e}_t + (c_2 - d\cos\theta)\vec{e}_n\big) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Posto $P_0 = P_{|\theta=0} = \big(c_1\vec{e}_t + (c_2 - d)\vec{e}_n\big)$ possiamo scrivere il flusso del disco

$$\Phi(t, P_0) = (d\sin\theta(t) - R\theta(t))\vec{e}_t + d(1 - \cos\theta(t))\vec{e}_n + P_0 \ .$$

Ad esempio, scegliendo, $P_0 \equiv O$ tale equazione diventa l'equazione parametrica della *cicloide* disegnata in figura.



Tale traiettoria è quella di un punto luminoso fissato sulla ruota di una bicicletta che rotola senza strisciare nè slittare.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Centro d'istantanea rotazione del disco

Ricordiamo che il campo di velocità di un rigido piano è, negli istanti in cui $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, rotatorio, quindi ammette un punto Ω solidale che ha velocità istantanea nulla, il CIR. Nel caso del disco solo appoggiato su di una guida, denotato con C il punto del disco a contatto con la guida, l'equazione del CIR può scriversi come

$$\Omega - C = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_C}{|\vec{\omega}|^2} \ , \tag{4.9.19}$$

In particolare, se il moto è di puro rotolamento e la guida è fissa, $\vec{v}_C = \vec{0}$), quindi

$$\Omega \equiv C \ , \tag{4.9.20}$$

cioè il CIR coincide con il punto di contatto del disco con la guida. Osserviamo che, il CIR non è un punto fisso del disco (il disco non ha alcun punto fisso) nonostante $\vec{v}_C = \vec{0}$ nell'istante $\bar{t}$ in cui si trova a contatto con la guida. Infatti C ha un'accelerazione non nulla, pari a

$$\vec{a}_C = R\dot{\theta}^2 \vec{e}_n \ , \tag{4.9.21}$$

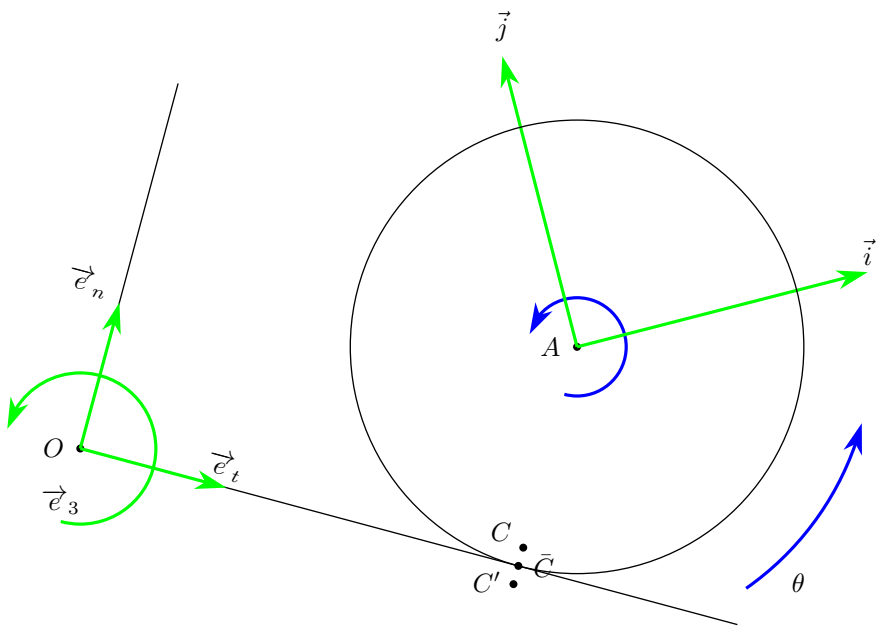
quindi sempre diretta nel verso positivo di $\vec{e}_n$. Pertanto, ad ogni istante il CIR cambia. Il luogo geometrico descritto dai CIR al variare del tempo è detto

1. base del moto, se visto da un osservatore fisso;

2. rulletta, se visto da un osservatore solidale a $\mathcal{R}$.

Nel caso di puro rotolamento si può osservare che la base è la retta coincidente con la guida rigida. Invece, la rulletta è la circonferenza coincidente con il bordo del disco, poichè la distanza tra il punto A solidale al rigido e i centri C si mantiene costante durante il moto. Si vede inoltre che durante il moto la rulletta rotola senza strisciare sulla base del moto, poichè le velocità dei punti di contatto C e C' sono uguali.

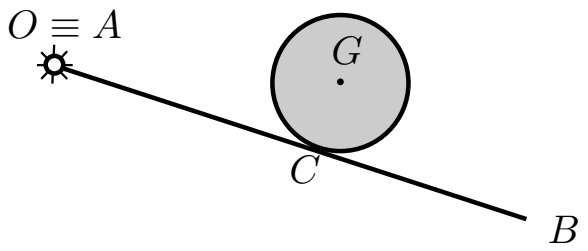
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Ora, è naturale introdurre un nuovo punto che sarà utile nel seguito: il punto *geometrico* $\bar{C}$ che percorre la base del moto "inseguendo" i punti di contatto C e, per tale ragione, sarà detto **polo mobile**. Mentre $\bar{C}$ è associato ad un intervallo di tempo, i punti di contatto C e C' sono associati ad istanti di tempo.

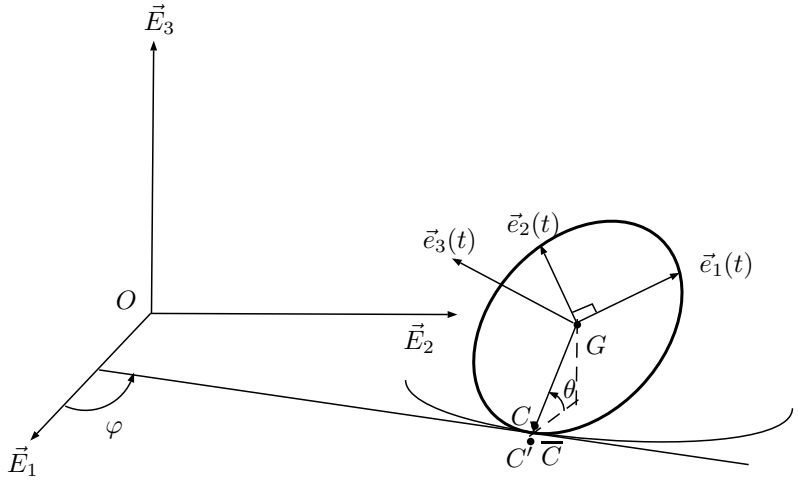
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Esercizio 4.9.1. *Si consideri il modello articolato della figura sottostante, costituito da un asta vincolata a ruotare in un piano tramite una cerniera cilindrica nell'estremo A e fissata in O, e da un disco, vincolato a rotolare sull'asta senza strisciare. Si calcolino la velocità angolare del disco, la velocità e l'accelerazione del suo centro G, del punto di contatto C e del polo mobile $\bar{C}$.*



4.10 Disco appoggiato su un piano

Consideriamo un disco di raggio a e spessore trascurabile, appoggiato su di un piano fisso o mobile e premettiamo alcune considerazioni geometriche e cinematiche di carattere generale.



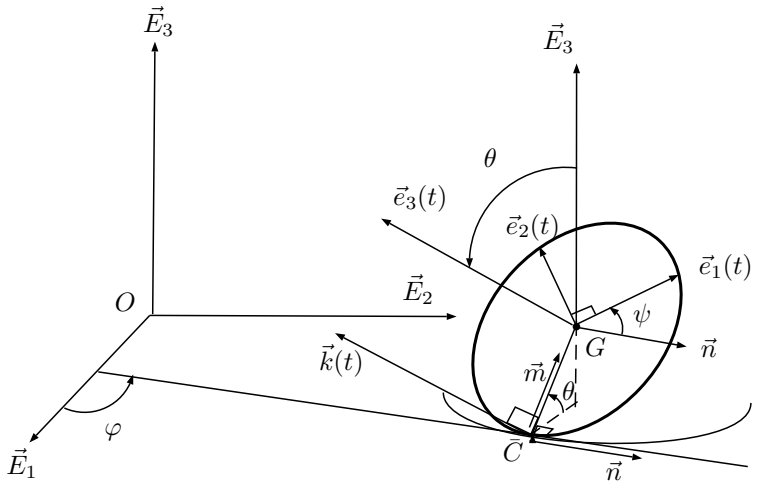
A parte la configurazione in cui il piano di vincolo e il piano del disco coincidono, il disco si appoggia sul piano in modo che la sua circonferenza sia tangente al piano, cioè in modo che la retta tangente alla circonferenza nel punto di contatto appartenga al piano di vincolo. Inoltre,

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

osserviamo che, nel contatto tra un corpo rigido e una curva o una superficie di vincolo, entrambe rigide, giocano un ruolo importante i seguenti punti:

- i punti *materiali* C solidali al rigido che, istante per istante, vengono a contatto con il vincolo;
- i punti *materiali* C' del vincolo che, istante per istante, vengono a contatto con il corpo rigido;
- il punto *geometrico* dello spazio $\bar{C}$ che "insegue" i punti di contatto, cioè che durante il moto del rigido, istante per istante, coincide con C e C'. Tale punto è detto *polo mobile*.

Questi tre punti, malgrado occupino la stessa posizione nello spazio ad ogni istante, sono di diversa natura, quindi hanno velocità diverse. Ad esempio, nel problema della Sezione precedente, il polo mobile $\bar{C}$ coincide con la proiezione ortogonale del centro del disco A sulla guida, quindi si muove lungo la guida con la stessa velocità di G, mentre, nel caso di puro rotolamento su guida fissa, $\vec{v}_C = \vec{v}_{C'} = \vec{0}$. Nel problema che stiamo esaminando, calcoleremo più avanti la velocità di C e $\bar{C}$.



Per iniziare l'analisi cinematica, determiniamo i gradi di libertà del disco con il metodo del bilancio. Il corpo rigido svincolato ha 6 gradi di libertà. Quindi, come coordinate sovrabbondanti, possiamo introdurre, ad esempio, le coordinate cartesiane (x_G, y_G, z_G) del centro del disco G, rispetto a una terna fissa $\Sigma = (O; \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ con O appartenente al piano di vincolo, il versore $\vec{E}_3$ ortogonale al piano, il versore $\vec{E}_1$ parallelo a detto piano ed $\vec{E}_2 = \vec{E}_3 \times \vec{E}_1$. Inoltre, per definire l'orientazione del disco nello spazio, possiamo prendere gli angoli di Eulero (φ, θ, ψ) formati, rispetto alla terna fissa, da una terna $(G; \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ solidale al disco, con $\vec{e}_3(t)$ ortogonale al disco, il versore $\vec{e}_1(t)$ scelto ad arbitrio nel piano nel disco ed $\vec{e}_2(t) = \vec{e}_3(t) \times \vec{e}_1(t)$. Oltre a tali due

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

terne, considereremo anche una terna intermedia con origine, istante per istante, nel polo mobile $\bar{C}$ e versori $(\vec{n}(t), \vec{m}(t), \vec{k}(t))$ con $\vec{n}(t)$ versore dei nodi, $\vec{k}(t) = \vec{e}_3(t)$ e $\vec{m}(t) = \vec{k}(t) \times \vec{n}(t)$. Tale terna sarà detta *stereonodale*, giacché include il versore dei nodi. Si osservi che le tre terne così definite coincidono rispettivamente con le terne $e(0)$, $e(t)$, $e''(t)$, già usate nella dimostrazione del Teorema di Eulero 4.3.1. Dunque, la trasformazione che manda la terna fissa in quella intermedia è la composizione delle sole precessione e nutazione

$$[\vec{n}(t)\,\vec{m}(t)\,\vec{k}(t)] = [\vec{E}_1\,\vec{E}_2\,\vec{E}_3][R_\varphi R_\theta]\ , \tag{4.10.1}$$

con la matrice

$$[R_\varphi R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\ . \tag{4.10.2}$$

Osserviamo che il vincolo (unilatero) di appoggio del disco sul piano costringe il centro del disco G a soddisfare la disequazione

$$z_G - a\sin\theta \geq 0 \tag{4.10.3}$$

Limitandoci a considerare le configurazioni di confine, cioè quelle in cui vale

$$z_G - a\sin\theta = 0\ , \tag{4.10.4}$$

poichè il vincolo è semplice possiamo concludere che il disco appoggiato ha 5 gradi di libertà. Quindi, possiamo prendere come coordinate lagrangiane, ad esempio, $(x_G, y_G, \varphi, \theta, \psi)$. Calcoliamo, in tali coordinate, la velocità angolare del disco e la velocità spaziale dei punti C solidali al disco che, istante per istante, vanno a contatto con il piano in $\bar{C}$. A tale scopo, ricordiamo che, poiché $C, G \in \mathcal{R}$, dalla (4.6.1) segue

$$\vec{v}_C = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (C - G) \qquad .$$

Quindi, in base al vincolo d'appoggio (4.10.4)

$$\vec{v}_G = \dot{x}_G\vec{E}_1 + \dot{y}_G\vec{E}_2 + a\cos\theta\,\dot{\theta}\vec{E}_3\ ,$$

grazie alla (4.5.16)

$$\vec{\omega} = (\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta)\vec{E}_1 + (\dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi)\vec{E}_2 + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{E}_3\ , \tag{4.10.5}$$

$$C - G = -a\,\vec{m}(t) \overset{(4.10.2)}{=} -a\big(-\sin\varphi\cos\theta\vec{E}_1 + \cos\varphi\cos\theta\vec{E}_2 + \sin\theta\vec{E}_3\big)$$

e

$$\vec{\omega} \times (C - G) = \begin{vmatrix} \vec{E}_1 & \vec{E}_2 & \vec{E}_3 \\ \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta & \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi & \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \\ a\sin\varphi\cos\theta & -a\cos\varphi\cos\theta & -a\sin\theta \end{vmatrix}\ .$$

Dunque, si trova

$$\begin{aligned} \vec{v}_C = &\Big(\dot{x}_G + a\big((\cos\theta\,\dot{\varphi} + \dot{\psi})\cos\varphi - \sin\varphi\sin\theta\,\dot{\theta}\big)\Big)\vec{E}_1 + \\ &+\Big(\dot{y}_G + a\big((\cos\theta\,\dot{\varphi} + \dot{\psi})\sin\varphi + \cos\varphi\sin\theta\,\dot{\theta}\big)\Big)\vec{E}_2\ . \end{aligned} \tag{4.10.6}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Calcoliamo, ora, la velocità del polo mobile $\bar{C}$. Il suo vettore posizione è dato da

$$\begin{aligned}\bar{C}-O =&(\bar{C}-G)+(G-O) = -a\,\vec{m}(t)+(x_G\vec{E}_1+y_G\vec{E}_2+a\sin\theta\vec{E}_3)\\ &\overset{(4.10.2)}{=}\big(-a(-\sin\varphi\cos\theta)+x_G\big)\vec{E}_1+\big(-a\cos\varphi\cos\theta+y_G\big)\vec{E}_2\end{aligned} \tag{4.10.7}$$

Dunque, la sua velocità è data da

(4.10.8)

$$\vec{v}_{\bar{C}} = \big(-a(-\cos\varphi\cos\theta\,\dot{\varphi}+\sin\varphi\sin\theta\,\dot{\theta})+\dot{x}_G\big)\vec{E}_1+\big(-a(-\sin\varphi\cos\theta\,\dot{\varphi}-\cos\varphi\sin\theta\,\dot{\theta})+\dot{y}_G\big)\vec{E}_2\ .$$

Confrontando la (4.10.6) con la (4.10.8), possiamo concludere che, introducendo le coordinate di $\bar{C}$

$$x_{\bar{C}} = x_G + a\sin\varphi\cos\theta\ , \qquad y_{\bar{C}} = y_G - a\cos\varphi\cos\theta\ , \tag{4.10.9}$$

la relazione tra le velocità di C e di $\bar{C}$ si può scrivere

$$\vec{v}_C = (\dot{x}_{\bar{C}}+a\dot{\psi}\cos\varphi)\vec{E}_1+(\dot{y}_{\bar{C}}+a\dot{\psi}\sin\varphi)\vec{E}_2 = \vec{v}_{\bar{C}}+a\,\dot{\psi}\,\vec{n}(t) \tag{4.10.10}$$

Vista la semplicità della (4.10.10) rispetto alla (4.10.6), conveniamo, da ora in poi, di sostituire le coordinate di G con quelle di $\bar{C}$ e di utilizzare quindi, come coordinate libere del modello le 5 coordinate $(x_{\bar{C}}, y_{\bar{C}}, \varphi, \theta, \psi)$ al posto di quelle originarie.

N.B. Osserviamo che la (4.10.10) si può ricavare più semplicemente, applicando il Teorema di Galileo 4.7.1 alla terna fissa e alla terna stereonodale. Infatti, con ovvie notazioni, vale

$$\vec{v}_C = \vec{v}_C^{(ass)} = \vec{v}_C^{(rel)} + \vec{v}_C^{(tr)} = \dot{\psi}\vec{k}(t)\times(C-G)+\vec{v}_{\bar{C}} = a\,\dot{\psi}\,\vec{n}+\vec{v}_{\bar{C}} \tag{4.10.11}$$

poiché il moto del disco relativamente alla terna stereonodale è rotatorio intorno all'asse $(G,\vec{k}(t))$, e la velocità di trascinamento di C coincide con la velocità dell'origine $\bar{C}$ della terna stereonodale.

N.B. Si osservi che la (4.10.10) non dipende dall'angolo di nutazione θ. Quindi, coincide con la velocità di C calcolata nella particolare configurazione in cui $\theta = \pi/2$. In tale configurazione il calcolo è semplificato dal fatto che C e $\bar{C}$ coincidono con il piede della proiezione ortogonale di G sul piano. Per esercizio, rifare il calcolo di $\vec{v}_C$ in questa maniera.

4.10.1 Puro rotolamento

Ora aggiungiamo il vincolo di puro rotolamento richiedendo che il disco rotoli senza strisciare sul piano di vincolo. Ciò impone che le velocità dei punti di contatto del rigido e del piano siano uguali

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C'}\ .$$

Se, in più, supponiamo che il piano di vincolo sia fermo rispetto alla terna Σ, allora $\vec{v}_C = \vec{0}$ e, per la (4.10.10), segue che

$$\vec{v}_{\bar{C}} = -a\,\dot{\psi}\,\vec{n}(t) \tag{4.10.12}$$

o che, equivalentemente, devono essere soddisfatti i due vincoli di mobilità

$$\dot{x}_{\bar{C}} + a\cos\varphi\,\dot{\psi} = 0 \tag{4.10.13}$$

$$\dot{y}_{\bar{C}} + a\sin\varphi\,\dot{\psi} = 0\ , \tag{4.10.14}$$

Studiamo in dettaglio i suddetti vincoli di mobilità e dimostriamo che non sono integrabili, cioè non derivano da vincoli olonomi. A tale scopo, presentiamo una condizione necessaria e sufficiente per la (locale) integrabilità di una classe rilevante di vincoli di mobilità, nella seguente

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Proposizione 4.10.1. *Consideriamo un modello meccanico olonomo con l gradi di libertà e coordinate libere $(q_1, \ldots, q_l)$. Supponiamo che sia soggetto a un vincolo addizionale di mobilità regolare $g(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = 0$, affine nelle velocità generalizzate*

$$g(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \sum_{i=1}^{l} a_i(\boldsymbol{q}, t)\dot{q}_i + b(\boldsymbol{q}, t) \ , \tag{4.10.15}$$

dove $\boldsymbol{q} := (q_1, \ldots, q_l)$ e $\dot{\boldsymbol{q}} := (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_l)$. Allora, esso è localmente integrabile se e solo se in ogni intorno dello spazio delle configurazioni $\mathcal{C}_V$ sono soddisfatte le condizioni di compatibilità

$$\frac{\partial a_j}{\partial q_k} = \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \ , \frac{\partial a_j}{\partial t} = \frac{\partial b}{\partial q_j} \qquad j, k = 1, \ldots, l \ . \tag{4.10.16}$$

In particolare, se tutte le funzioni a_i sono indipendenti dal tempo deve risultare $b = 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo la necessità delle suddette condizioni. Supponiamo che esista un vincolo olonomo e bilatero

$$f(\boldsymbol{q}, t) = 0$$

tale che

$$g(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{q}, t) = \sum_{i}^{l} \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.10.17}$$

Confrontando tale equazione con la (4.10.15), devono valere

$$a_j(\boldsymbol{q}, t) = \frac{\partial f}{\partial q_j} \ , \qquad b(\boldsymbol{q}, t) = \frac{\partial f}{\partial t} \ .$$

Dal Lemma di Schwarz, segue che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_j} \ , \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_j} \qquad j, k = 1, \ldots, l \tag{4.10.18}$$

e quindi le (4.10.16). Si può dimostrare (ma non lo facciamo qui) che tali condizioni sono anche sufficienti a garantire la locale integrabilità. Non affrontiamo qui il problema dell'integrabilità globale. □

Le condizioni (4.10.18) possono essere espresse in forma più compatta nel modo seguente. Infatti, se consideriamo la matrice jacobiana $J(a)$ dei coefficienti $a_j(\boldsymbol{q}, t)$ e il vettore derivato (parzialmente) rispetto al tempo degli stessi coefficienti, possiamo concludere che il vincolo (4.10.15) è integrabile se e solo se

$$J(a) = \left[\frac{\partial a_i}{\partial q_j}\right] \text{ è simmetrica et } \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_l}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial b}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial b}{\partial q_l} \end{bmatrix} \ .$$

Tornando al vincolo (4.10.13), verifichiamo se le (4.10.16) sono soddisfatte. Considerato che le coordinate libere sono $\mathbf{q} = (x_{\bar{C}}, y_{\bar{C}}, \varphi, \theta, \psi)$, risulta

$$a_1 = 1 \ , a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = a\cos\varphi, b = 0$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Dunque,

$$\frac{\partial a_5}{\partial q_3} = -a \sin\varphi \neq \frac{\partial a_3}{\partial q_5} = 0$$

quindi il primo vincolo non è integrabile. Analogamente, succede per il vincolo (4.10.14).

Esercizio 4.10.1. *Verificare che anche il vincolo* (4.10.14) *non è integrabile.*

Esercizio 4.10.2. *Verificare che, nel caso del vincolo* (4.9.15)*, le* (4.10.16) *sono soddisfatte.*

Esercizio 4.10.3. *Classificare il campo di velocità del disco in puro rotolamento su di un piano.*

4.11 Classificazione dei moti rigidi

Nella tabella seguente, ricapitoliamo tutti i moti rigidi studiati, classificati in base ai loro componenti elementari.

Tabella 4.11.1: Alcuni moti rigidi

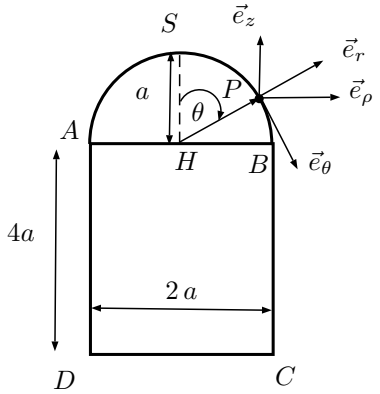
Moti traslatori: $\tau_{\vec{s}}$	Moti polari: σ_O	Moti rototraslatori: $\tau_{\vec{s}} \circ \rho_{(\varphi,\vec{k})}$, $\dot{\vec{k}} = \vec{0}$	Moti rigidi: $\tau_{\vec{s}} \circ \sigma_O$
Moti curvilinei: $\vec{s}(t) = s(t)\,\vec{u}(t)\,\vec{u}$	Moti polari: $\rho_\psi \circ \rho_\theta \circ \rho_\varphi$	Moti roto-traslatori	
Moti rettilinei: $\vec{s}(t) = s(t)\,\vec{u}$	Moti di precessione: $\rho_\psi \circ \rho_\varphi$	Moti elicoidali: $(\vec{s} \parallel \vec{k})$	
Moti rettilinei uniformi: $\vec{s}(t) = (s_0 + v_0 t)$	Moti rotatori: ρ_φ	Moti piani: $(\vec{s} \perp \vec{k})$	

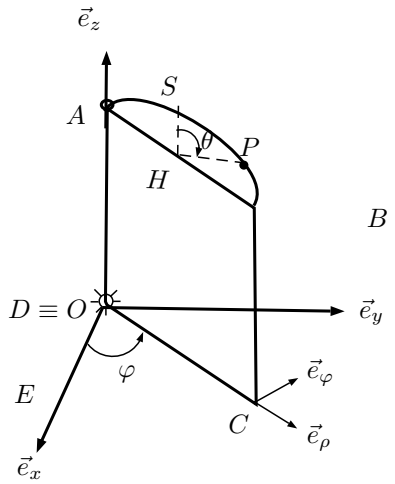
Osserviamo che le classi non sono disgiunte: per esempio un moto rotatorio è anche un particolare moto piano.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

4.12 Soluzione degli esercizi

Esercizio 4.7.3





Per iniziare, consideriamo le due terne:

$$\Sigma = (O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

$$\Sigma' = (O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$$

e le legge di trasformazione fra di esse

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

Applichiamo al modello il Teorema di Galileo, considerando la terna Σ come fissa e Σ' come intermedia. Allora,

$$\vec{v}_P^{(ass)} = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)}$$

Calcoliamo $\vec{v}_P^{(rel)}$, cioè la velocità di P relativa a Σ'. Il moto di P rispetto a Σ' è un moto lungo l'arco circolare AB sul piano del telaio e di centro H. Quindi, la sua velocità sarà tangente all'arco AB e proporzionale al prodotto del raggio per $\dot{\theta}$. Allora, per esprimerla in forma semplice, conviene introdurre una terna ortonormale adattata al punto P,

$$\Sigma'' = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$$

legata a Σ' dalla legge di trasformazione

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\, \vec{e}_\rho - \sin\theta\, \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \end{cases}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Su tale terna, la velocità relativa di P è

$$\vec{v}_P^{(rel)} = a\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = a\,\dot{\theta}(\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_z)\ .$$

Calcoliamo la velocità di trascinamento di P, cioè la velocità di P immaginato solidale al telaio

$$\vec{v}_P^{(tr)} = \cancel{\vec{v}_A} + \vec{\omega}\times(P-A)\ ,$$

dove ω è la velocità angolare della terna Σ' e quindi del telaio, che compie un moto rotatorio attorno all'asse fisso $(O,\vec{e}_z)$. Quindi,

$$\omega = \dot{\varphi}\vec{e}_z$$

e

$$P-A = (P-H)+(H-A) = a\vec{e}_r + a\vec{e}_\rho\ .$$

Dunque,

$$\vec{v}_P^{(tr)} = \dot{\varphi}\vec{e}_z\times a(\vec{e}_r+\vec{e}_\rho) = a\dot{\varphi}(\vec{e}_z\times\vec{e}_r+\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho) = a\dot{\varphi}(\sin\theta+1)\vec{e}_\varphi\ .$$

Allora,

$$\begin{aligned}\vec{v}_P^{(ass)} &= a[\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}(\sin\theta+1)\vec{e}_\varphi] = a[\dot{\theta}(\cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_z) + \dot{\varphi}(\sin\theta+1)\vec{e}_\varphi]\\ &= a[\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}(1+\sin\theta)\sin\varphi]\vec{e}_x + a[\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}(1+\sin\theta)\cos\varphi]\vec{e}_y - a\dot{\theta}\sin\theta\vec{e}_z\ .\end{aligned}$$

Ora, applichiamo al modello il Teorema di Coriolis per calcolare l'accelerazione di P. Sappiamo che

$$\vec{a}_P^{(ass)} = \vec{a}_P^{(rel)} + \vec{a}_P^{(tr)} + \vec{a}_P^{(Cor)}\ .$$

Allora,

$$\begin{aligned}\vec{a}_P^{(rel)} = \dot{\vec{v}}_P^{(rel)} &= a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + a\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta\\ &= a(\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2\vec{e}_r) = a\ddot{\theta}(\cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_z) - a\dot{\theta}^2(\sin\theta\vec{e}_\rho + \cos\theta\vec{e}_z)\\ &= a[(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\ \sin\theta)\vec{e}_\rho - (\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\ \cos\theta)\vec{e}_z]\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_P^{(tr)} &= \cancel{\vec{a}_A} + \dot{\vec{\omega}}\times(P-A) - |\vec{\omega}|^2(P-A)_\perp\\ &= \ddot{\varphi}\vec{e}_z\times a(\vec{e}_r+\vec{e}_\rho) - \dot{\varphi}^2 a(\sin\theta+1)\vec{e}_\rho\\ &= a\ddot{\varphi}(\sin\theta+1)\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2 a(\sin\theta+1)\vec{e}_\rho\end{aligned}$$

e

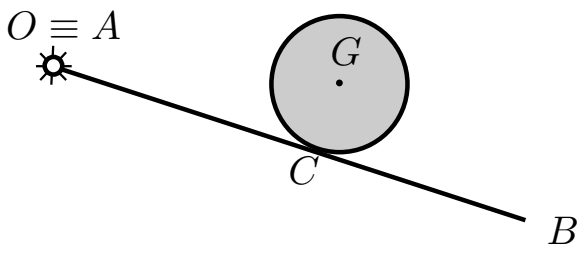
$$\vec{a}_P^{(Cor)} = 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}_P^{(rel)} = 2\dot{\varphi}\vec{e}_z\times a\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = 2a\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)\vec{e}_\varphi = 2a\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_\varphi\ .$$

Dunque,

$$\vec{a}_P^{(ass)} = a[(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\ \sin\theta) - \dot{\varphi}^2(1+\sin\theta)]\vec{e}_\rho + a[\ddot{\varphi}(\sin\theta+1) + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta]\vec{e}_\varphi - a(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\ \cos\theta)\vec{e}_z\ .$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Esercizio 4.9.1



Il sistema meccanicoè costituito da 2 corpi rigidi vincolati fra loro tramite un vincolo di puro rotolamento.

Calcoliamo i gradi di libertá del modello con il metodo del *bilancio*. I gradi di libertà per 2 rigidi liberi nel piano sono $g = 3 + 3 = 6$. I gradi di vincolo sono pari a 2 per la cerniera cilindrica fissa più altri 2 per il vincolo di puro rotolamento. Allora $v = 4 = r$ è il grado di vincolo sia apparente, sia effettivo (dimostrarlo per esercizio). Quindi, $l = g - r = 2$. Dopo aver studiato il metodo dei *congelamenti successivi* nel Cap. 5, si può verificare il risultato con tale metodo.

Scegliamo 2 coordinate libere per il sistema dei 2 corpi rigidi, per esempio le coordinate polari (ρ, φ) del polo mobile $\bar{C}$ che corre lungo l'asta, con $0 \leq \varphi < 2\pi$ e $0 \leq \rho \leq L$. È chiaro che φ individua univocamente la configurazione dell'asta, mentre ρ quella del disco. Ora dobbiamo calcolare i vettori posizione e le velocità dei punti $\bar{C}$, G e la velocità angolari dei 2 rigidi in funzione delle 2 coordinate libere (ρ, φ). Considerando una terna adattata al problema, cioè $(O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$, abbiamo

$$\bar{C} - O = \rho \vec{e}_\rho \ , \qquad G - O = (G - \bar{C}) + (\bar{C} - O) = R\vec{e}_\varphi + \rho \vec{e}_\rho$$

Derivando rispetto al tempo, otteniamo le velocità:

$$\vec{v}_{\bar{C}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \ , \qquad \vec{v}_G = R\dot{\vec{e}}_\varphi + \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = (\dot{\rho} - R\dot{\varphi})\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \ . \tag{4.12.1}$$

Per calcolare la velocità angolare del disco, ricorriamo alla cinematica relativa, considerando una terna fissa (O, Σ_0), una terna intermedia solidale all'asta $(O, \Sigma') = (O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ e una terna solidale al disco $(G; \Sigma(t) = (G; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Per il Teorema di Frisi,

$$\vec{\omega}^{(disco,ass)} = \vec{\omega}^{(disco,rel)} + \vec{\omega}^{(tr)} \ .$$

Introducendo come coordinata *sovrabbondante* l'angolo di rotazione del disco θ rispetto alla terna (O, Σ'), si può scrivere $\vec{\omega}^{(disco,rel)} = \dot{\theta}\vec{k}$. D'altra parte, per il vincolo di puro rotolamento risulta

$$\vec{0} = \vec{v}^{(rel)}_{C'} = \vec{v}^{(rel)}_{C} = (\dot{\rho} + R\dot{\theta})\vec{e}_\rho$$

Dunque, si ottiene $\vec{\omega}^{(disco,rel)} = -\frac{\dot{\rho}}{R}\vec{k}$, quindi

$$\vec{\omega}^{(disco,ass)} = -\frac{\dot{\rho}}{R}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{k} = (\dot{\varphi} - \frac{\dot{\rho}}{R})\vec{k} \ .$$

Si osservi, che la velocità del punto di contatto del disco con l'asta è

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C'} = \vec{\omega}^{(asta)} \times (C - O) = \dot{\varphi}\vec{k} \times \rho\vec{e}_\rho = \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \ ,$$

diversa da $\vec{v}_{\bar{C}}$. Naturalmente, anche le formule (4.12.1) si possono ricavare tramite la cinematica relativa. Lo si verifichi per esercizio e si calcolino anche le accelerazioni dei punti C, $\bar{C}$ e G.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Capitolo 5

Principio dei lavori virtuali

In questo capitolo presenteremo un metodo molto generale per determinare le condizioni di equilibrio di un modello meccanico soggetto a vincoli "lisci". Tale metodo viene utilizzato anche in Scienza delle Costruzioni e in altri rami dell'Ingegneria. Premettiamo alcune considerazioni cinematiche.

5.1 Moti possibili e moti virtuali

Consideriamo un punto materiale P soggetto a r vincoli semplici, compatibili ed efficaci, eventualmente dipendenti dal tempo

$$f_\nu\big(P, \vec{v}_P, t\big) = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, r \ . \tag{5.1.1}$$

Definiremo moti *possibili* di P tutti i moti *compatibili* con i vincoli, cioè le applicazioni regolari γ da un intervallo di tempo $I \subset \mathbb{R}$ a valori in $\mathcal{E}_3$

$$\gamma : I \to \mathcal{E}_3 \ , t \mapsto P(t)$$

le quali soddisfano le (5.1.1)

$$f_\nu\big(P(t), \dot{P}(t), t\big) = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, r \ , \qquad \forall t \in I \ .$$

E' chiaro che tra tutti i moti possibili è incluso il moto effettivo di P individuato univocamente dalla sollecitazione attiva su P e dalle sue condizioni iniziali $\big(P(t_0), \dot{P}(t_0)\big)$. Accanto alla classe dei moti possibili, considereremo un'altra classe di moti, quella dei moti *virtuali* che indicheremo con

$$\beta : I \to \mathcal{E}_3 \ , \tau \mapsto P(\tau) \ .$$

In questo caso, per evitare confusione, il moto del modello sarà parametrizzato dal parametro τ invece di t. Tali moti sono definiti come tutti quelli *compatibili* con i vincoli, immaginati fissi ad un istante di tempo fissato τ_0, quindi come i moti che soddisfano le equazioni

$$f_\nu(P(\tau), \dot{P}(\tau), \tau_0) = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, r \ , \qquad \tau_0 \in I \ .$$

È ovvio che, se tutti i vincoli sono indipendenti dal tempo, l'insieme dei moti virtuali coincide con quello dei moti possibili. Ma, se c'è qualche vincolo dipendente dal tempo, i due insiemi non coincidono. Osserviamo che le definizioni precedenti hanno esclusivamente carattere cinematico, cioè prescindono da qualunque sollecitazione attiva applicata al punto P.

5.2 Spostamenti possibili e virtuali

Consideriamo le posizioni del punto P lungo un moto possibile, al tempo t_0 e al tempo $t_0 + \Delta t$. Il vettore applicato $(P, \overrightarrow{\Delta P})$, con

$$\overrightarrow{\Delta P} = P(t_0 + \Delta t) - P(t_0) \ ,$$

è detto spostamento finito di P nell'intervallo Δt, a partire dalla posizione $P(t_0)$. Sviluppiamo in serie di Taylor rispetto a Δt l'applicazione differenziabile a valori vettoriali $P(t)$ e prendiamone la parte lineare che indicheremo con

$$\overrightarrow{\partial P} := \frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial t} \partial t \ . \tag{5.2.1}$$

Chiameremo il vettore applicato $(P, \overrightarrow{\partial P})$ spostamento *possibile* linearizzato (o infinitesimo) del punto P all'istante t_0. Tra tutti gli spostamenti possibili linearizzati ci sarà lo spostamento effettivo (linearizzato) che indicheremo con $(P, \overrightarrow{dP})$, dove

$$\overrightarrow{dP} := \overrightarrow{\dot{P}(t_0)} dt$$

e $P(t)$ denoterà il moto effettivo di P.

N.B. Il secondo membro della (5.2.1) rappresenta la parte lineare in ∂t dell'incremento della applicazione $P(t)$. Esso è detto differenziale dell'applicazione.

Introduciamo ora un altro tipo di spostamento linearizzato che si rivelerà di grande utilità sia in Statica sia in Dinamica e che, al contario degli spostamenti possibili, prescinde dall'eventuale moto dei vincoli. Consideriamo lo spostamento di P lungo un generico moto virtuale

$$P(\tau_0 + \Delta\tau) - P(\tau_0)$$

e prendiamone la parte lineare che indicheremo con

$$\overrightarrow{\delta P} := \frac{\overrightarrow{\delta P}}{\delta \tau} \delta \tau \ .$$

Il vettore applicato $(P, \overrightarrow{\delta P})$ è detto spostamento *virtuale* del punto P all'istante τ_0. Il simbolo δ viene usato per non confondere il differenziale *virtuale* (o a tempo bloccato) con il differenziale usuale (5.2.1).

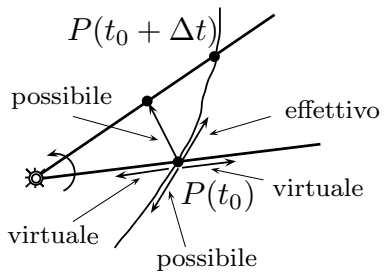
N.B. La differenza tra gli spostamenti virtuali e quelli possibili è che i primi non tengono conto del moto di eventuali vincoli mobili. In altri termini, per gli spostamenti virtuali, la variazione della posizione di P è fatta con i vincoli "congelati" al tempo τ_0. È, quindi, una variazione immaginata a titolo di prova e per questo merita l'aggettivo di virtuale.

N.B. Dalla definizione segue che gli spostamenti virtuali dipendono esclusivamente dal sistema materiale e dalla geometria del vincolo mentre non hanno niente a che fare con eventuali forze attive agenti sul sistema, né con il moto dei vincoli. Invece, gli spostamenti possibili dipendono anche dal moto dei vincoli (ma non dipendono dalla sollecitazione attiva).

Esempio 5.2.1. *Vincolo mobile: asta rotante in un piano.*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Consideriamo il modello dato da un punto materiale P scorrevole lungo l'asta, rotante con un moto assegnato, intorno a un asse fisso passante per il suo estremo O e ortogonale all'asta. Tale modello ha 1 grado di libertà poiché il vincolo è un appoggio semplice.



$(P, \overrightarrow{\partial P})$: spostamento possibile
$(P, \overrightarrow{dP})$: spostamento effettivo
$(P, \overrightarrow{\delta P})$: spostamento virtuale

Indichiamo con (ρ, φ) le coordinate (sovrabbondanti) di P rispetto a un riferimento polare piano $(O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$. Il moto assegnato del vincolo sarà dato da:

$$\varphi = \varphi\,(t) \tag{5.2.2}$$

I moti possibili possono essere scritti

$$P(t) = O + \vec{x}_P(t) = O + \rho(t)\vec{e}_\rho(t) \qquad \forall t \in I\ , \tag{5.2.3}$$

dove $\rho(t)$ è una funzione arbitraria di t, mentre $\vec{e}_\rho(t)$ è determinato dalla (5.2.2). Invece, i moti virtuali sono dati da

$$P(\tau) = O + \vec{x}_P(\tau) = O + \rho(\tau)\vec{e}_\rho(\tau_0) \qquad \forall \tau \in I\ , \tag{5.2.4}$$

dove $\rho(\tau)$ è una funzione arbitraria di τ, mentre $\vec{e}_\rho(\tau_0)$ è il versore $\vec{e}_\rho$ all'istante τ_0. Dunque, tenendo conto delle (2.4.5), gli spostamenti possibili saranno dati da

$$\overrightarrow{\partial P} = \partial \vec{x}_P = (\dot{\rho}\vec{e}_\rho(t) + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi(t))\,\partial t = \partial\rho\ \vec{e}_\rho(t) + \rho\ \partial\varphi\ \vec{e}_\varphi(t) \qquad \forall\ \partial\rho \tag{5.2.5}$$

mentre quelli virtuali da

$$\overrightarrow{\delta P} = \delta \vec{x}_P = \dot{\rho}\vec{e}_\rho(\tau_0)\delta\tau = \delta\rho\ \vec{e}_\rho(\tau_0)\ , \qquad \forall\ \delta\rho \tag{5.2.6}$$

poichè il versore $\vec{e}_\rho$, che è parallelo all'asta, è congelato insieme al vincolo.

Dalla (5.2.6) segue immediatamente che $\delta\vec{x}_P$ è un vettore parallelo a $\vec{e}_\rho$ e di modulo arbitrario; dalla (5.2.5) segue che gli spostamenti possibili hanno una componente arbitraria lungo $\vec{e}_\rho$, mentre hanno una componente lungo $\vec{e}_\varphi$ pari a $\rho\,\partial\varphi$, determinata dalla (5.2.2).

Ora, studieremo un modello più complesso del semplice punto materiale. Consideriamo un insieme di punti $\mathcal{B}$, le configurazioni del quale indicheremo sinteticamente con $\mathcal{P}$.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Definizione 5.2.1. *Si dice insieme (o campo) degli spostamenti* possibili *del modello $\mathcal{B}$, in breve spostamento* possibile *di $\mathcal{B}$, a partire da una configurazione iniziale $\mathcal{P}(t_0)$, l'insieme di tutti gli spostamenti* possibili *dei punti $P \in \mathcal{B}$. Esso sarà denotato con*

$$\left(\mathcal{P}, \overrightarrow{\partial\mathcal{P}}\right) = \{(P, \partial\vec{x}_P)\}_{P\in\mathcal{B}}$$

N.B. L'insieme degli spostamenti possibili di $\mathcal{B}$ dipende esclusivamente dal modello stesso e dai vincoli a cui esso è soggetto. Invece, non ha niente a che fare con le forze *attive* agenti su di esso.

Definizione 5.2.2. *Si dice insieme degli spostamenti* virtuali *di un modello $\mathcal{B}$, in breve spostamento* virtuale *di $\mathcal{B}$, a partire da una configurazione di riferimento $\mathcal{P}(\tau_0)$, l'insieme di tutti gli spostamenti* virtuali *dei punti $P \in \mathcal{B}$. Esso sarà denotato con*

$$\left(\mathcal{P}, \overrightarrow{\delta\mathcal{P}}\right) = \{(P, \delta\vec{x}_P)\}_{P\in\mathcal{B}}$$

N.B. Se tutti i vincoli sono indipendenti dal tempo, o come si dice in breve sono "fissi", ogni spostamento virtuale di $\mathcal{B}$ è anche uno spostamento possibile e viceversa. Quindi, in Statica gli spostamenti virtuali coincidono con gli spostamenti possibili.

5.3 Vincoli unilateri e spostamenti virtuali irreversibili

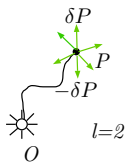
Diamo qui un cenno agli spostamenti virtuali permessi da vincoli olonomi (o di posizione) unilateri. Premettiamo la seguente

Definizione 5.3.1. *Diremo che il campo degli spostamenti virtuali $\overrightarrow{\delta\mathcal{P}}$ di un sistema meccanico è reversibile se anche il suo opposto, $\left(-\overrightarrow{\delta\mathcal{P}}\right)$, è virtuale; altrimenti diremo che è irreversibile.*

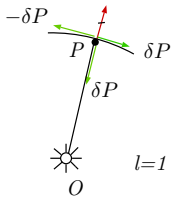
Come nell'esempio del pendolo a filo di pag. 28, un vincolo semplice unilatero è espresso matematicamente da una disequazione

$$f(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t) \leq 0 \tag{5.3.1}$$

È intuitivo che la situazione è molto diversa nelle configurazioni ordinarie, in cui la relazione (5.3.1) è soddisfatta come disuguaglianza stretta da quelle di confine, in cui la (5.3.1) è soddisfatta come eguaglianza. Infatti, per quanto riguarda gli spostamenti virtuali, nelle configurazioni ordinarie il vincolo è come se non esistesse; quindi gli spostamenti virtuali sono tutti quelli concessi al sistema privo del vincolo, dunque sono tutti reversibili. Invece, nelle configurazioni di confine, il vincolo limita gli spostamenti virtuali concessi al sistema e ne permette alcuni che sono irreversibili (quelli che portano il sistema da una configurazione di confine ad una ordinaria) impedendo gli spostamenti opposti.



Configurazione ordinaria



Configurazione di confine

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

In generale, si può dimostrare che

Proposizione 5.3.1. *In un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi e bilateri ogni campo di spostamenti virtuali è reversibile.*

Dimostrazione. I punti del modello $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)$ devono soddisfare le relazioni (5.3.1) come equazioni, quindi

$$0 = f\left(\vec{x}_1 + \delta\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N + \delta\vec{x}_N, \tau\right) = \cancel{f\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, \tau\right)} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta f}{\delta \vec{x}_i} \cdot \delta\vec{x}_i \ . \tag{5.3.2}$$

Allora, se lo spostamento $(\delta\vec{x}_1, \ldots, \delta\vec{x}_N)$ soddisfa la (5.3.2), quindi è virtuale, anche lo spostamento opposto $(-\delta\vec{x}_1, \ldots, -\delta\vec{x}_N)$ la soddisfa, quindi è virtuale anch'esso. □

5.4 Campo degli spostamenti virtuali di un rigido

Se consideriamo un moto rigido virtuale $\vec{x}(\tau, P)$, cioè un moto compatibile con eventuali vincoli e parametrizzato dal parametro τ, se nella (4.5.6) moltiplichiamo ambo i membri per $\delta\tau$, otteniamo

$$\delta\vec{x}_P = \delta\vec{x}_O + \vec{\omega}^{(vir)}\delta\tau \times (\vec{x}_P - \vec{x}_O) \qquad \forall O, P \in \mathcal{R}$$

Introducendo il vettore spostamento virtuale polare $\vec{\epsilon} := \vec{\omega}^{(vir)}\delta\tau$, si può scrivere

$$\delta\vec{x}_P = \delta\vec{x}_O + \vec{\epsilon} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_O) \qquad \forall O, P \in \mathcal{R} \tag{5.4.1}$$

Il vettore $\vec{\epsilon}$ è parallelo a $\vec{\omega}^{(vir)}$ e si può esprimere, nel caso più generale, tramite gli angoli di Eulero, osservando che,

$$\dot{\varphi}\delta\tau = \delta\varphi \ , \dot{\theta}\delta\tau = \delta\theta \ , \dot{\psi}\delta\tau = \delta\psi \ .$$

Così, dalle (4.6.3), (4.6.4), (4.7.25) si ottengono le espressioni di $\vec{\epsilon}$ sulla terna fissa, su quella solidale e su quella intermedia, rispettivamente

(5.4.2)

$$\begin{aligned}\vec{\epsilon} &= (\delta\theta\cos\varphi + \delta\psi\sin\varphi\sin\theta)\vec{e_1}(0) + (\delta\theta\sin\varphi - \delta\psi\sin\theta\cos\varphi)\vec{e_2}(0) + (\delta\varphi + \delta\psi\cos\theta)\vec{e_3}(0) = \\ &= (\delta\theta\cos\psi + \delta\varphi\sin\psi\sin\theta)\vec{e_1}(t) + (-\delta\theta\sin\psi + \delta\varphi\sin\theta\cos\psi)\vec{e_2}(t) + (\delta\psi + \delta\varphi\cos\theta)\vec{e_3}(t) = \\ &= \delta\varphi\,\vec{e_3}(0) + \delta\theta\,\vec{n}(t) + \delta\psi\,\vec{e_3}(t) \ .\end{aligned}$$

5.5 Gradi di mobilità di un modello meccanico

Introduciamo ora il nuovo concetto di gradi di *mobilità* e vediamo qual è la sua relazione con il concetto di gradi di *libertà*.

Definizione 5.5.1. *Diremo gradi di mobilità m il numero degli spostamenti virtuali reversibili e indipendenti concessi dai vincoli a un qualunque modello meccanico.*

È chiaro che per un sistema meccanico libero, il numero dei gradi di mobilità coincide con quello dei gradi di libertà. Inoltre, per i sistemi vincolati con vincoli olonomi, il numero dei gradi di vincolo effettivo r coincide con il numero degli spostamenti *impediti* dai vincoli; quindi, il numero

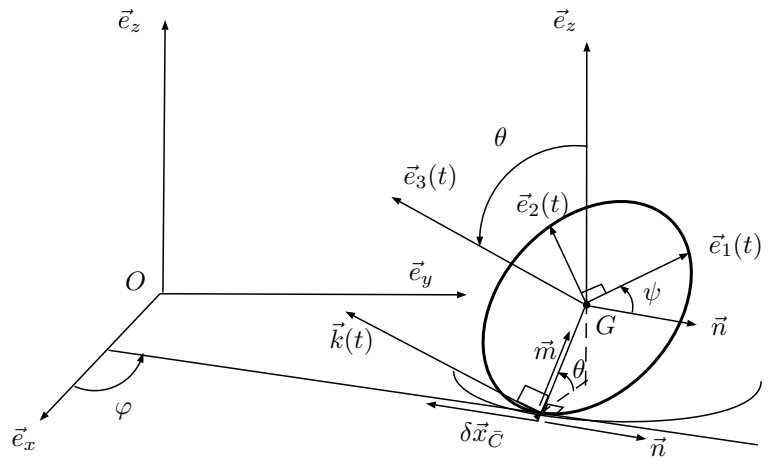
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

degli spostamenti virtuali reversibili e indipendenti coincide con il numero dei gradi di libertà del sistema.

Non è così in presenza di vincoli anolonomi. Riprendiamo l'esempio del disco in puro rotolamento su un piano (vedi la Sez. 4.10). In questo caso, moltiplicando per $\delta\tau$ le equazioni (4.10.13) e (4.10.14) segue che

$$\delta x_{\bar{C}} = -a\cos\varphi\,\delta\psi\ , \qquad \delta y_{\bar{C}} = -a\sin\varphi\,\delta\psi\ , \tag{5.5.1}$$

quindi il numero degli spostamenti virtuali indipendenti è pari a 3 ed è minore di $l = 5$. Ciò è dovuto al fatto che il vincolo è anolonomo.



Dunque, nel caso si sistemi anolonomi, i vincoli di mobilità non integrabili riducono il numero dei gradi di mobilità del sistema senza ridurre quello dei gradi di libertà.

Infine, le configurazioni a vincoli inefficaci, come nell'esempio 3.5.2, corrispondono al fatto che il sistema ammette più spostamenti virtuali che gradi di libertà. Dunque, ricapitolando la situazione, si ha

Gradi di mobilità	Vincoli
$m < l$	anolonomi
$m = l$	olonomi
$m > l$	inefficaci

Questa osservazione suggerisce un nuovo metodo per il calcolo dei gradi di libertà di un modello olonomo: il metodo dei *congelamenti successivi.* Esso permette di contare facilmente il numero dei gradi di mobilità del modello. Tale metodo consiste nel congelare successivamente tutti i suoi spostamenti virtuali *reversibili*; il minimo numero di spostamenti virtuali congelati, necessari affinchè il modello non ammetta più alcun spostamento virtuale, coincide con il numero dei gradi di libertà del modello.

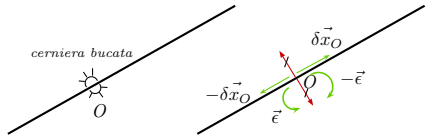
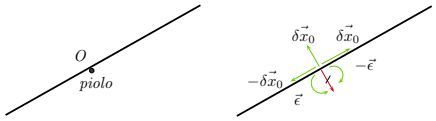
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

5.6 Vincoli piani

Presentiamo alcuni esempi di vincoli unilateri e bilateri agenti su un sistema rigido piano. Poichè $\vec{\omega}^{(vir)} = \dot{\varphi}\vec{E}_3$, il vettore $\vec{\epsilon}$ è pari a $\vec{\epsilon} = \vec{\omega}^{(vir)}\delta\tau = \dot{\varphi}\delta\tau\vec{E}_3 = \delta\varphi\,\vec{E}_3$ ed è uno spostamento rotatorio ortogonale al piano del moto. Nella figura è rappresentato da un arco orientato nel verso della rotazione.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

=

Cerniera bucata o anellino (bilatero)		$v = 1$, $l = 2$
Appoggio su un piolo (unilatero)		configurazione di confine
Cerniera scorrevole (bilatero)		$v = 1$, $l = 2$
Carrello con cerniera (unilatero)		configurazione di confine
Semicerniera scorrevole (unilatero)		configurazione di confine
Cerniera fissa (bilatero)		$v = 2$, $l = 1$
Pattino (bilatero)		$v = 2$, $l = 1$
Incastro		$v = 3$, $l = 0$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

5.7 Vincoli nello spazio

I gradi di libertà di un rigido libero sono $g = 6$, il suo spazio delle configurazioni: $\mathcal{C}_L = \{(x_A, y_A, z_A, \theta_1, \theta_2, \theta_3)\}$. Sotto elencheremo gli spostamenti impediti e quelli virtuali residui.

- Appoggio su una superficie
  $\theta_1 = \varphi, \theta_2 = \theta, \theta_3 = \psi$

  Spostamenti impediti:

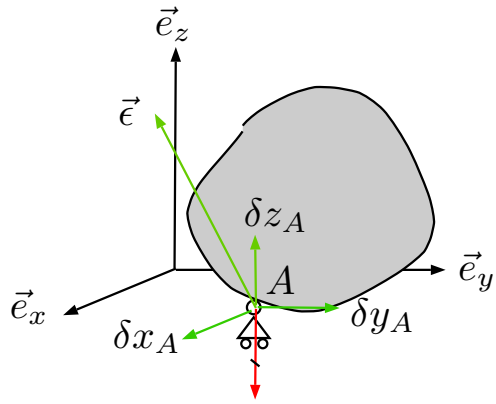
  $$\delta z_A \, \vec{e}_z, \quad \delta z_A < 0$$

  $$v = 1$$

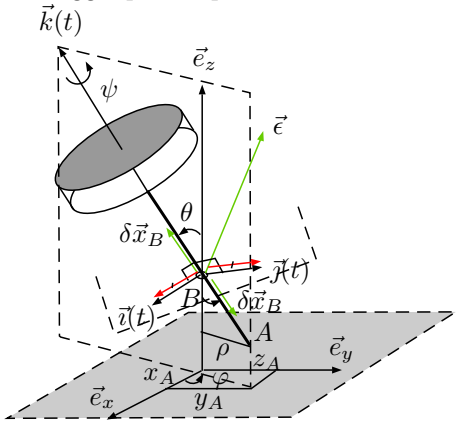
  Spostamenti virtuali indipendenti:

  $$\left(\delta x_A \, \vec{e}_x, \delta y_A \, \vec{e}_y, \vec{\epsilon} = \delta\varphi \, \vec{e_z} + \delta\theta \, \vec{n}(t) + \delta\psi \, \vec{e_3}(t)\right)$$

  $$l = 5$$



- Passaggio per un punto o anellino fisso o cerniera sferica bucata fissa



  $$\theta_1 = \varphi, \theta_2 = \theta, \theta_3 = \psi$$

  Spostamenti impediti:

  $$(\delta x_B \, \vec{\imath}, \delta x_B \, \vec{\jmath})$$

  $$v = 2$$

  Spostamenti virtuali indipendenti:

  $$(\delta x_B \, \vec{k}, \vec{\epsilon} = \delta\varphi \, \vec{e_z} + \delta\theta \, \vec{n}(t) + \delta\psi \, \vec{k}(t))$$

  $$l = 4$$

- Cerniera sferica scorrevole lungo un asse fisso
  $\theta_1 = \varphi, \theta_2 = \theta, \theta_3 = \psi$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Spostamenti impediti:

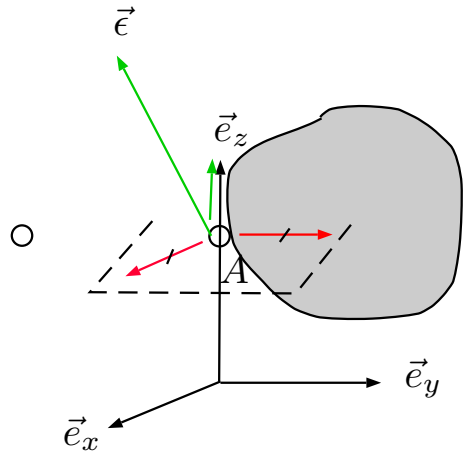
$$(\delta x_A\,\vec{e}_x, \delta y_A\,\vec{e}_y)$$

$$v = 2$$

Spostamenti virtuali indipendenti:

$$(\delta z_A\,\vec{e}_z, \vec{\epsilon} = \delta\varphi\,\vec{e_z}z + \delta\theta\,\vec{n}(t) + \delta\psi\,\vec{e_3}(t))$$

$$l = 4$$



- Cerniera sferica fissa
  $\theta_1 = \varphi, \theta_2 = \theta, \theta_3 = \psi$

  Spostamenti impediti:

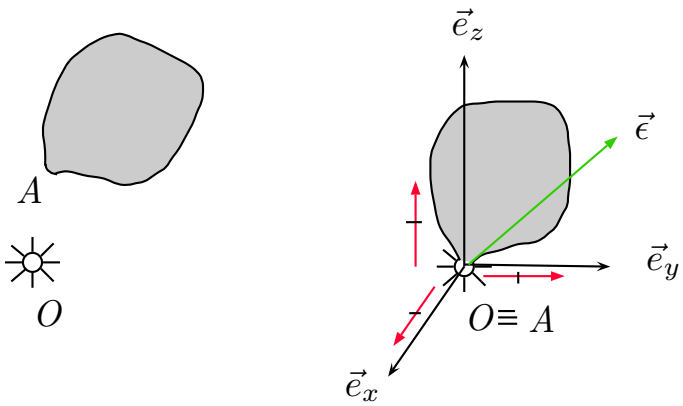
$$(\delta x_A\,\vec{e}_x, \delta y_A\,\vec{e}_y, \delta z_A\vec{e}_z)$$

$$v = 3$$

Spostamenti virtuali indipendenti:

$$\vec{\epsilon} = \delta\varphi\,\vec{e_z} + \delta\theta\,\vec{n}(t) + \delta\psi\,\vec{e_3}(t)$$

$$l = 3$$



- Cerniera cilindrica scorrevole lungo un asse fisso o collare cilindrico

  Spostamenti impediti:

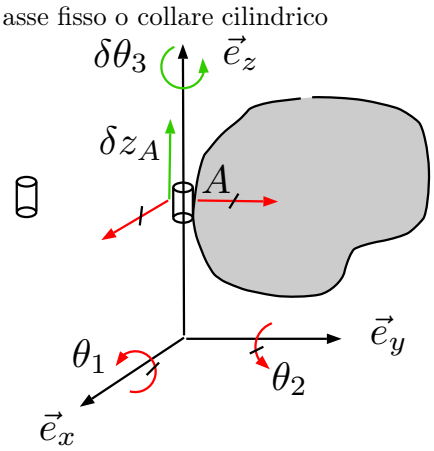
$$(\delta x_A\,\vec{e}_x, \delta y_A\,\vec{e}_y, \delta\theta_1\,\vec{e}_x, \delta\theta_2\,\vec{e}_y)$$

$$v = 4$$

Spostamenti virtuali indipendenti:

$$(\delta z_A\vec{e}_z, \vec{\epsilon} = \delta\theta_3\,\vec{e}_z)$$

$$l = 2$$



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

- Cerniera cilindrica fissa

  Spostamenti impediti:

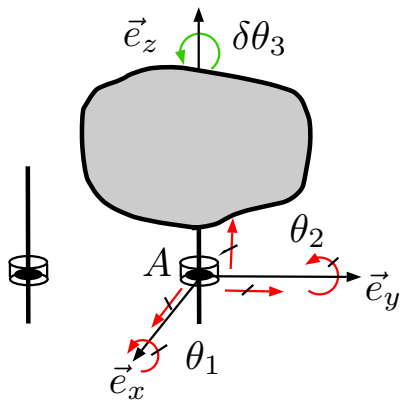
  $$(\delta x_A\,\vec{e}_x, \delta y_A\,\vec{e}_y, \delta z_A\,\vec{e}_z, \delta\theta_1\,\vec{e}_x, \delta\theta_2\,\vec{e}_y)$$

  $$v = 5$$

  Spostamenti virtuali indipendenti:

  $$\vec{\epsilon} = \delta\theta_3\,\vec{e}_z$$

  $$l = 1$$



- Incastro scorrevole lungo un asse fisso o pattino

  Spostamenti impediti:

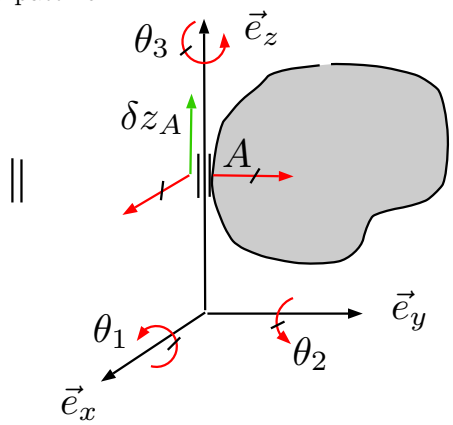
  $$(\delta x_A\,\vec{e}_x, \delta y_A\,\vec{e}_y, \vec{\epsilon})$$

  $$v = 5$$

  Spostamenti virtuali indipendenti:

  $$\delta z_A \vec{e}_z$$

  $$l = 1$$



- Incastro

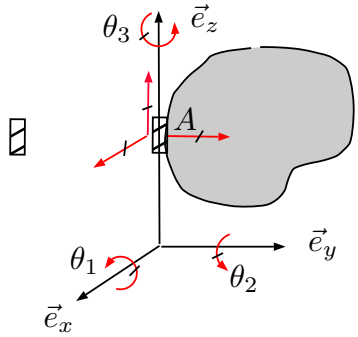
  Spostamenti impediti:

  $$(\delta x_A\,\vec{e}_x, \delta y_A\,\vec{e}_y, \delta z_A\,\vec{e}_z, \vec{\epsilon})$$

  $$v = 6$$

  Spostamenti virtuali indipendenti: nessuno.

  $$l = 0$$



5.8 Lavoro virtuale

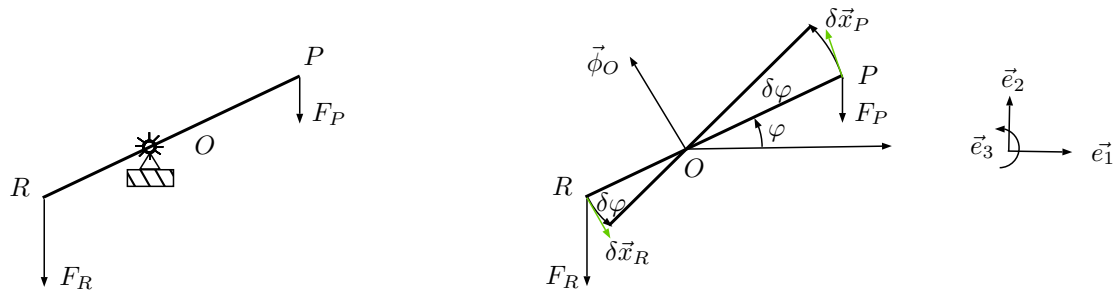
Definizione 5.8.1. *Si dice lavoro virtuale infinitesimo (o linearizzato) di un insieme di forze agenti su un sistema materiale $\mathcal{B}$ la grandezza scalare definita da*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$$LV = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \delta \vec{x}_P \ , \tag{5.8.1}$$

dove $\{\delta \vec{x}_P\}_{P \in \mathcal{B}}$ *è un insieme di spostamenti virtuali dei punti del modello* $\mathcal{B}$.

Esempio 5.8.1. *Leva soggetta a due forze parallele applicate agli estremi.*



In questo caso il lavoro virtuale è dato da

$$LV = \vec{F_P} \cdot \delta \vec{x_P} + \vec{F_R} \cdot \delta \vec{x_R} + \vec{\phi}_O \cdot \cancel{\delta \vec{x_O}} \tag{5.8.2}$$

N.B. Nella formula precedente la reazione vincolare è incognita ma il suo lavoro virtuale è nullo poiché è nullo $\delta \vec{x_O}$ (essendo O fisso).

Calcoliamo ora gli spostamenti virtuali $\delta \vec{x}_P$ e $\delta \vec{x}_R$ in funzione delle coordinate libere del sistema. La leva, con fulcro in O, ha 1 grado di libertà (nel piano). Scegliendo come coordinata libera l'angolo φ di figura, $\vec{x_P}(\varphi + \delta\varphi)$ denoterà il vettore posizione del punto P in una configurazione variata. Quindi, lo spostamento virtuale del punto P (rispettivamente R) è dato dal differenziale del vettore posizione di P (rispettivamente R) rispetto alla coordinata libera φ poiché

$$\Delta \vec{x_P} = \vec{x_P}(\varphi + \delta\varphi) - \vec{x_P}(\varphi) = \frac{\delta \vec{x_P}}{\delta \varphi} \delta\varphi + \vec{o}(\delta\varphi) \ ,$$

dove $\vec{o}(\delta\varphi)$ indica i termini dello sviluppo in serie di Taylor, di grado superiore al primo in $\delta\varphi$. Allora,

$$\begin{aligned} \vec{x_P} &= d_P (\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2) \ , & \delta \vec{x_P} &= d_P (-\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2)\, \delta\varphi \\ \vec{x_R} &= -d_R (\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2) \ , & \delta \vec{x_R} &= -d_R (-\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2)\, \delta\varphi \end{aligned}$$

N.B. In questo caso il vincolo $\begin{cases} x_O = 0 \\ y_O = 0 \end{cases}$ è indipendente dal tempo e quindi il differenziale virtuale coincide con il differenziale usuale.

Ora possiamo calcolare il lavoro virtuale. Tenuto conto che $\vec{F_P} = -F_P \vec{e}_2$, $\vec{F_R} = -F_R \vec{e}_2$, si ottiene

$$\begin{aligned} LV &= -F_P \vec{e}_2 \cdot d_P (-\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2)\, \delta\varphi - F_R \vec{e}_2 \cdot d_R (\sin\varphi\, \vec{e}_1 - \cos\varphi\, \vec{e}_2)\, \delta\varphi \\ &= -F_P d_P \cos\varphi\, \delta\varphi + F_R d_R \cos\varphi\, \delta\varphi \\ &= \cos\varphi\, (F_R d_R - F_P d_P)\, \delta\varphi \end{aligned} \tag{5.8.3}$$

Esercizio 5.8.1. *Calcolare gli spostamenti virtuali di* P *ed* R *tramite la* (5.4.1).

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

5.8.1 Lavoro virtuale su un rigido

Un'altra conseguenza del teorema di Poisson è che il lavoro virtuale della sollecitazione agente su un rigido assume una particolare forma

Proposizione 5.8.1. *Il lavoro virtuale delle forze agenti su un rigido assume la forma*

$$LV = \vec{R} \cdot \delta\vec{x}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\epsilon} \qquad \forall O \in \mathcal{R} \ , \tag{5.8.4}$$

dove $\vec{R}$ è il vettore risultante di tali forze e $\vec{M}_O$ il momento risultante rispetto al polo O.

Dimostrazione. Sostituendo nella formula generale l'espressione (5.4.1) si trova

$$\begin{aligned} LV &= \sum_{P\in\mathcal{R}} \vec{F}_P \cdot (\delta\vec{x}_O + \vec{\epsilon} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_O)) \\ &= \sum_{P\in\mathcal{R}} \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_O + \sum_{P\in\mathcal{R}} \vec{F}_P \cdot \vec{\epsilon} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_O)) \\ &= \left(\sum_{P\in\mathcal{R}} \vec{F}_P\right) \cdot \delta\vec{x}_O + \sum_{P\in\mathcal{R}} \vec{\epsilon} \cdot (\vec{x}_P - \vec{x}_O) \times \vec{F}_P \\ &= \vec{R} \cdot \delta\vec{x}_O + \vec{\epsilon} \cdot \sum_{P\in\mathcal{R}} (\vec{x}_P - \vec{x}_O) \times \vec{F}_P \end{aligned}$$

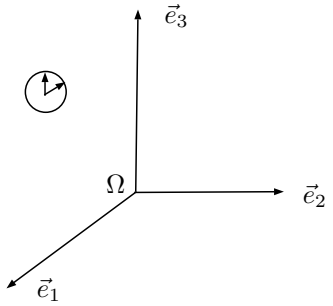
e quindi la tesi. □

Esercizio 5.8.2. *Ritrovare la* (5.8.3) *mediante la* (5.8.4).

5.9 Equilibrio dei sistemi materiali

È un concetto relativo a un osservatore o riferimento spazio-temporale:

$$(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) + \text{orologio}$$



Definizione 5.9.1. *Un sistema materiale è in equilibrio $\forall t \in I = [t_1, t_2]$ se conserva la stessa configurazione (i.e. se tutte le sue parti conservano la stessa posizione rispetto all'osservatore)*

Esempio 5.9.1. *Punto materiale libero* (P, m)

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

1. *Condizione necessaria all'equilibrio è:*

$$\overrightarrow{F}_P = \overrightarrow{0} \quad \forall t \in I,$$

(principio d'inerzia di G. Galilei (1564-1642)).

2. *Condizione sufficiente a garantire l'equilibrio è:*

$$\overrightarrow{F}_P = \overrightarrow{0} \quad \forall t \in I \qquad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_P(t_1) = \overrightarrow{0}.$$

N.B. La 1 e la 2 valgono anche in un riferimento non inerziale, a patto di considerare tutte le forze misurate, anche quelle d'inerzia (centrifuga, Coriolis, etc.).

Esempio 5.9.2. *Punto materiale vincolato* (P, m)

1. *Condizione necessaria all'equilibrio è:*

$$\overrightarrow{F}_P + \vec{\phi}_P = \overrightarrow{0} \quad \forall t \in I,$$

2. *Condizione sufficiente a garantire l'equilibrio è:*

$$\overrightarrow{F}_P + \vec{\phi}_P = \overrightarrow{0} \quad \forall t \in I \qquad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_P(t_1) = \overrightarrow{0},$$

dove con $\vec{\phi}_P$ *abbiamo indicato il risultante delle reazioni vincolari sul punto* P.

5.10 Principio dei lavori virtuali

Introduciamo la seguente classificazione delle *sollecitazioni* agenti su un qualunque modello meccanico:

attive: non sono dovute a vincoli;

reattive: l'insieme di forze che, sostituite ai vincoli, ne realizzano gli stessi effetti meccanici *(Postulato delle Reazioni Vincolari).*

Nel seguito indicheremo con:

$$LV^{(att)} = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P^{(att)} \cdot \delta\vec{x}_P \qquad \text{il lavoro virtuale delle forze attive } \vec{F}_P\ ,$$

$$LV^{(reatt)} = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{\phi}_P^{(reatt)} \cdot \delta\vec{x}_P \qquad \text{il lavoro virtuale delle reazioni vincolari } \vec{\phi}_P\ .$$

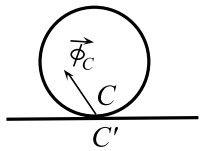
Introduciamo, ora, un'ulteriore classificazione dei vincoli, che formalizza il concetto di vincoli "lisci".

Definizione 5.10.1. *Chiameremo vincoli non dissipativi (o perfetti, o ideali) quei vincoli le cui reazioni vincolari compiono un lavoro virtuale non negativo (o non resistente), cioè*

$$LV^{(reatt)} = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{\phi}_P^{(reatt)} \cdot \delta\vec{x}_P \geq 0 \qquad \forall \delta\mathcal{P} \tag{5.10.1}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Si osservi che tale classe include (strettamente) i vincoli privi di attrito, ma comprende anche i vincoli scabri che non dissipano energia, come ad esempio il vincolo di puro rotolamento tra 2 curve, tra 2 superfici o di una curva sopra una superficie. Per realizzare tale vincolo le curve o le superfici devono essere scabre (come sa chiunque abbia guidato un veicolo sull'asfalto bagnato o ghiacciato). Tuttavia, la (5.10.1) è ugualmente soddisfatta poiché (come abbiamo già accennato a pag. 27) il vincolo di puro rotolamento richiede $\vec{v}_C = \vec{v}_{C'}$, quindi, $\partial \vec{x_C} = \partial \vec{x_{C'}}$, ma, persino se il vincolo è mobile, vale



$$\delta \vec{x_C} = \delta \vec{x_{C'}} = \vec{0} \Rightarrow LV^{(reatt)} = \vec{\phi}_C^{(reatt)} \cdot \delta \vec{x}_C = 0$$

N.B. Il vincolo di puro rotolamento è non dissipativo se si fa l'ipotesi che le sollecitazioni reattive siano equivalenti a una sola forza $\vec{\phi}_C$ applicata nel punto C. Invece, se si ammette che il vincolo eserciti anche una *coppia* d'attrito $\vec{\Gamma}$, detto attrito di rotolamento, il vincolo cessa di essere non dissipativo poiché, sulla base della (5.8.4), il lavoro virtuale delle sollecitazioni reattive diventa

$$LV^{(reatt)} = \vec{\phi}_C^{(reatt)} \cdot \cancel{\delta \vec{x}_C} + \vec{\Gamma} \cdot \vec{\epsilon} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\epsilon} \, ,$$

che può risultare negativo.

Enunciamo, ora, il principio dei lavori virtuali nella sua forma più generale, valida anche per i sistemi meccanici soggetti a vincoli anolonomi.

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una configurazione $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_V$ sia di equilibrio per un sistema meccanico soggetto a vincoli fissi e *non dissipativi* è che il lavoro delle forze attive, per ogni insieme di spostamenti virtuali a partire da $\mathcal{P}$, sia NON positivo, cioè

$$LV^{(att)} = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P^{(att)} \cdot \delta \vec{x_P} \leq 0 \qquad \forall \quad \delta \mathcal{P} \, , \tag{5.10.2}$$

dove $\delta \mathcal{P} = \{\delta \vec{x}_P\}_{P \in \mathcal{B}}$.

Dimostrazione. Dimostriamo la necessità. Se $\mathcal{B}$ è in equilibrio nella configurazione $\mathcal{P}$, lo è ogni suo punto P, quindi

$$\vec{F}_P^{(att)} + \vec{\phi}_P^{(reatt)} = \vec{0} \qquad \forall P \in \mathcal{B} \tag{5.10.3}$$

Valutiamo il segno del $LV^{(att)}$

$$LV^{(att)} = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P^{(att)} \cdot \delta \vec{x}_P \overset{(5.10.3)}{=} \sum_{P \in \mathcal{B}} \left(-\vec{\phi}_P^{(reatt)} \right) \cdot \delta \vec{x_P} = -LV^{(reatt)} \overset{(5.10.1)}{\leq} 0 \qquad \forall \quad \delta \vec{x}_P$$

Non dimostriamo la sufficienza del PLV ma l'accettiamo come principio a priori confermato dall'evidenza di secoli di risultati sperimentali. □

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

N.B. Supponiamo che valga la relazione (5.10.2). Allora, se il lavoro virtuale è calcolato in corrispondenza di un insieme di spostamenti virtuali $\delta\mathcal{P}$ reversibile, le disuguaglianze (5.10.1) e (5.10.2) si riducono ad eguaglianze. Infatti, scelto un insieme $\delta\mathcal{P} = \{(P, \delta\vec{x_P})\}_{P\in\mathcal{B}}$ di spostamenti virtuali tutti reversibili, devono valere contemporaneamente

$$\sum_{P\in\mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_P \leq 0 \ , \tag{5.10.4}$$

$$\sum_{P\in\mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot (-\delta\vec{x_P}) \leq 0 \ . \tag{5.10.5}$$

Ma se la (5.10.4) e la (5.10.5) sono entrambe verificate, l'unica possibilità è che esse siano verificate come uguaglianze. Quindi, la (5.10.2), valutata sugli insiemi di spostamenti virtuali reversibili si riduce

$$\sum_{P\in\mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_P = 0 \qquad \forall \quad \delta\mathcal{P} \text{ reversibile.} \tag{5.10.6}$$

Analogo discorso si può fare per la (5.10.1). Pertanto, la classe dei vincoli non dissipativi e bilateri è definita da

$$LV^{(reatt)} = \sum_{P\in\mathcal{B}} \vec{\phi}_P^{(reatt)} \cdot \delta\vec{x}_P = 0 \qquad \forall \quad \delta\mathcal{P} \text{ reversibile.} \tag{5.10.7}$$

Esempio 5.10.1. *La leva.*

Il lavoro virtuale delle forze attive agenti sulla leva è stato calcolato nella (5.8.3). Dunque, essendo i vincoli bilateri, il PLV equivale all'equazione

$$\cos\varphi\,(F_R\, d_R - F_P\, d_P)\,\delta\varphi = 0 \qquad \forall \quad \delta\varphi$$

Le soluzioni di tale equazione forniscono tutte e sole le configurazioni di equilibrio della leva. Quindi:

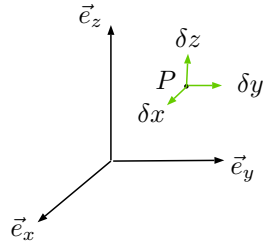
1. $\cos\varphi = 0 \Leftarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$
2. $\frac{F_R}{F_P} = \frac{d_P}{d_R} \qquad \forall\ \varphi$ (legge della leva)

In conclusione, la leva è in equilibrio se e solo se:

1. essa è parallela alla potenza e alla resistenza qualunque esse siano;
2. in qualunque configurazione, a condizione che la potenza F_P e la resistenza F_R siano inversamente proporzionali ai rispettivi bracci.

Esempio 5.10.2. *Punto materiale libero in $\mathcal{E}_3$*

$l = 3$
$c.l. = \{(x, y, z)\}$



$$\vec{x_P} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$
$$\delta\vec{x_P} = \delta x\vec{e}_x + \delta y\vec{e}_y + \delta z\vec{e}_z$$
$$\vec{F_P} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$$

Poichè il punto materiale P non è soggetto ad alcun vincolo, i suoi spostamenti virtuali sono

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

completamente arbitrari. Quindi, il lavoro virtuale è dato da

$$\begin{aligned} LV &= \vec{F_P} \cdot \delta \vec{x_P} = (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z) \cdot (\delta x \vec{e}_x + \delta y \vec{e}_y + \delta z \vec{e}_z) \\ &= F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \end{aligned}$$

Dal PLV segue che la condizione necessaria e sufficiente all'equilibrio è

$$F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = 0 \qquad \forall \delta x, \delta y, \delta z \ . \tag{5.10.8}$$

Osserviamo che, dovendo valere la (5.10.8) $\forall \delta x, \delta y, \delta z$, ed essendo queste variazioni del tutto arbitrarie, deve valere, per esempio, per $\delta x = \varepsilon \neq 0$ e $\delta y = \delta z = 0$. In tal caso la (5.10.8) implica che

$$F_x = 0 \ .$$

Analogamente, scegliendo $\delta x = \delta z = 0$ e $\delta y = \varepsilon \neq 0$, deve essere

$$F_y = 0$$

e scegliendo $\delta_x = \delta_y = 0$, $\delta z = \varepsilon \neq 0$,

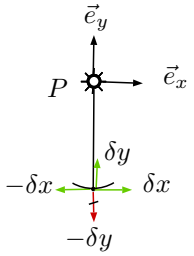
$$F_z = 0 \ .$$

Quindi, il PLV per un punto libero *equivale* all'equazione della statica del punto:

$$\vec{F_P} = \vec{0} \ .$$

Illustriamo, ora, nell'esempio seguente la necessità del segno di disuguaglianza nella (5.10.2)

Esempio 5.10.3. *Pendolo a filo inestensibile.*



Il PLV è una condizione necessaria all'equilibrio. Quindi, nella configurazione della figura, che è di equilibrio, deve risultare

$$LV \leq 0 \qquad \forall \quad \delta P$$

Consideriamo i casi seguenti.

1. $\delta \vec{x_P} = \delta x \, \vec{e}_x$, reversibile
$$LV = -F \vec{e}_y \cdot \delta x \, \vec{e}_x = 0 \qquad \text{OK}$$

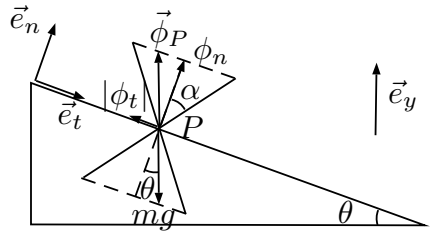
2. $\delta \vec{x_P} = \delta y \, \vec{e}_y \quad \delta y > 0$, irreversibile
$$LV = -F \vec{e}_y \cdot \delta y \, \vec{e}_y = -F \, \delta y < 0 \quad \text{OK}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Nel primo caso il lavoro virtuale è nullo perché lo spostamento virtuale è reversibile. Nel secondo caso è negativo perché lo spostamento virtuale è irreversibile; infatti il filo è un vincolo unilatero e lo spostamento $\delta\vec{x_P} = \delta y\, \vec{e}_y$ porta il punto P da una configurazione di confine a una configurazione ordinaria.

Spiegheremo, ora, la necessità dell'ipotesi dei vincoli non dissipativi nell'enunciato del PLV. Consideriamo il seguente esempio.

Esempio 5.10.4. *Punto materiale su una guida inclinata scabra di attrito f_s.*



$\vec{e}_n \cdot \vec{e}_y = \cos\theta$

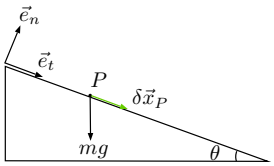
In condizioni di equilibrio limite
$\frac{|\phi_t|}{|\phi_n|} = \tan\alpha$

Supponiamo che il punto P sia in equilibrio sulla guida. Allora la reazione vincolare $\vec{\phi}$ deve equilibrare la forza peso. Poiché dalla relazione di Coulomb $\frac{|\phi_t|}{|\phi_n|} \leq f_s$ segue che la reazione $\vec{\phi} = \phi_t\vec{e}_t + \phi_n\vec{e}_n$ è contenuta nel triangolo d'attrito di semi-ampiezza $\alpha = \arctan f_s$, l'angolo θ d'inclinazione della guida deve soddisfare la relazione

$$\theta \leq \alpha = \arctan f_s$$

Calcoliamo il LV della forza attiva (il peso) in corrispondenza di uno spostamento virtuale tangente alla guida e dato da

$$\delta\vec{x}_P = \delta s\ \vec{e}_t \qquad \delta s > 0\ .$$



Allora risulta

$$\begin{aligned} LV^{(att)} &= \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_P = mg\,(\sin\theta\vec{e}_t - \cos\theta\vec{e}_n) \cdot \delta s\,\vec{e}_t \\ &= mg\sin\theta\,\delta s > 0 \end{aligned}$$

Dunque, il PLV non è soddisfatto nonostante che il punto P sia in equilibrio: il motivo è che l'ipotesi di vincoli non dissipativi è stata violata.

Vediamo, ora, un'applicazione del PLV al calcolo dell'equilibrio di un rigido soggetto sia a un vincolo unilatero sia a un vincolo bilatero.

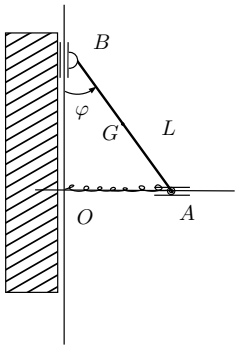
Esempio 5.10.5. *Asta pesante omogenea nel piano verticale con due appoggi lisci.*

Vincoli lisci: in B una *semicerniera* scorrevole (unilatero) e in A una cerniera scorrevole (bilatero). Scelte come coordinate sovrabbondanti $\{(x_B, y_A, \varphi)\}$, le equazioni vincolari si possono scrivere

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$$\begin{cases} x_B = 0 \\ y_A = 0 \end{cases} .$$

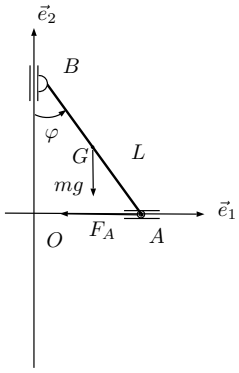
Il modello ha 1 grado di libertà; possiamo scegliere come coordinata libera l'angolo φ di figura, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Anche y_B sarebbe andata bene, ma non x_A che non soddisfa il criterio di biunivocità con le configurazioni del modello.



configurazioni ordinarie:
$g = 3, v = r = 2 \Rightarrow l = 1$

$$c.l. = \varphi \quad 0 < \varphi < \pi \quad \delta\varphi \text{ arbitrario}$$

configurazioni di confine:
$\varphi = 0 \Rightarrow \delta\varphi \geq 0$ irreversibile
$\varphi = \pi \Rightarrow \delta\varphi \leq 0$ irreversibile



$\vec{F}_A = -c\vec{x_A} = -cL\sin\varphi\,\vec{e}_1$
$\vec{F}_G = -mg\,\vec{e}_2$

Diagramma delle forze attive

$LV^{(att)} = \vec{F_G} \cdot \delta\vec{x_G} + \vec{F_A} \cdot \delta\vec{x_A}$
$\vec{x}_A = L\sin\varphi\,\vec{e}_1$, $\quad \delta\vec{x}_A = L\cos\varphi\delta\varphi\,\vec{e}_1$
$\vec{x}_G = \frac{L}{2}(\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2)$, $\quad \delta\vec{x_G} = \frac{L}{2}(\cos\varphi\delta\varphi\,\vec{e}_1 - \sin\varphi\delta\varphi\,\vec{e}_2)$
Dunque,

$$LV^{(att)} = -mg\,\vec{e}_2 \cdot \frac{L}{2}(\cos\varphi\delta\varphi\,\vec{e}_1 - \sin\varphi\delta\varphi\,\vec{e}_2) - cL\sin\varphi\,\vec{e}_1 \cdot L\cos\varphi\,\delta\varphi\,\vec{e}_1 \tag{5.10.9}$$

$$= mg\frac{L}{2}\sin\varphi\delta\varphi - cL^2\sin\varphi\cos\varphi\delta\varphi \tag{5.10.10}$$

Quindi, dal PLV segue che le condizioni di equilibrio dell'asta sono date da:

- se $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$, $\sin\varphi\left(mg\frac{L}{2} - cL^2\cos\varphi\right)\delta\varphi \leq 0$ $\quad \begin{cases} \forall\delta\varphi \geq 0 & \text{se } \varphi = 0 \\ \forall\delta\varphi \leq 0 & \text{se } \varphi = \pi \end{cases}$
- se $0 < \varphi < \pi$, $\cancel{\sin\varphi}\left(mg\frac{L}{2} - cL^2\cos\varphi\right)\delta\varphi = 0 \qquad \forall\,\delta\varphi$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

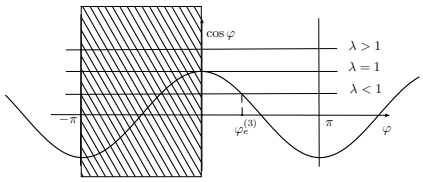
Si noti che la prima disequazione è soddisfatta come equazione: ciò implica che $\varphi_e^{(1)} = 0$ e $\varphi_e^{(2)} = \pi$ sarebbero di equilibrio anche con vincoli bilateri. Nella seconda equazione, scegliendo $\delta\varphi \neq 0$, possiamo dividere per $\delta\varphi$ e ottenere

$$L\left(\frac{mg}{2} - cL\cos\varphi\right) = 0$$

Tale equazione equivale a

$$\cos\varphi = \frac{mg}{2cL}$$

Risolviamola per via grafica nell'intervallo $0 < \varphi < \pi$



$$\lambda = \frac{mg}{2cL}$$

Dunque, nell'intervallo $0 \leq \varphi \leq \pi$, le configurazioni di equilibrio sono $\varphi_e^{(1)} = 0$, $\varphi_e^{(2)} = \pi$ e, se $\lambda = \frac{mg}{2cL} < 1$, anche

$$\varphi_e^{(3)} = \arccos\frac{mg}{2cL}$$

Variazione sull'esempio 5.10.5

Supponiamo ora che il vincolo in A sia unilatero (semicerniera scorrevole) in modo che la coordinata libera vari come

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

In questo caso il PLV equivale a

- se $\varphi = 0$ (conf. confine) $\quad \sin\varphi\left(mg\frac{L}{2} - cL^2\cos\varphi\right)\delta\varphi \leq 0 \qquad \forall\delta\varphi \geq 0$
- se $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (conf. confine) $\quad \cancel{\sin\varphi}\left(mg\frac{L}{2} - cL^2\cos\varphi\right)\delta\varphi \leq 0 \qquad \forall\delta\varphi \leq 0$
- se $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (conf. ordinarie) $\quad \cancel{\sin\varphi}\left(mg\frac{L}{2} - cL^2\cos\varphi\right)\delta\varphi = 0 \qquad \forall\delta\varphi$

La prima e la terza relazione hanno come soluzioni, rispettivamente, $\varphi_e^{(1)}$ e $\varphi_e^{(3)}$ del caso precedente. La seconda equazione diventa

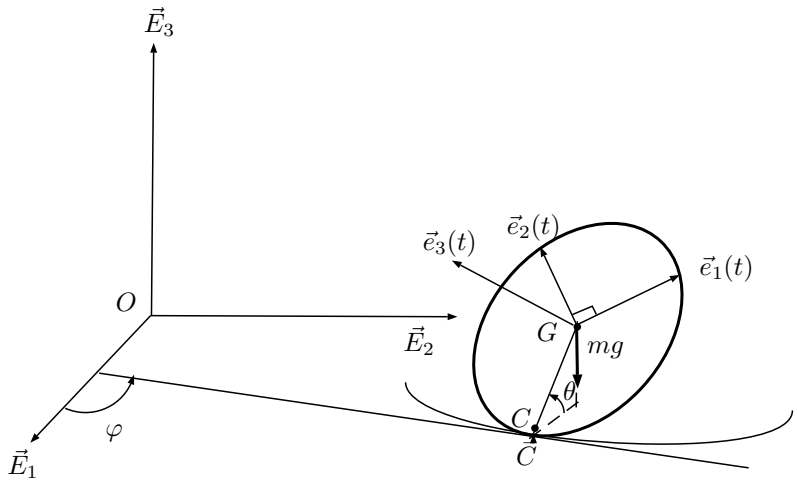
$$\text{se } \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad mg\frac{L}{2}\delta\varphi \leq 0 \qquad \forall\delta\varphi \leq 0\ , \tag{5.10.11}$$

ed è sempre soddisfatta essendo $\delta\varphi \leq 0$. Ciò implica che $\varphi_e^{(2)} = \frac{\pi}{2}$ è una configurazione di equilibrio.

N.B. Si noti che, a differenza della configurazione di equilibrio $\varphi_e^{(1)} = 0$ esistente anche quando il vincolo in A è bilatero, la configurazione $\varphi_e^{(2)} = \frac{\pi}{2}$ è di equilibrio solo quando il vincolo in A diventa unilatero. Ciò è conseguenza del fatto che (5.10.11) è verificata come diseguaglianza e non come eguaglianza.

Esempio 5.10.6. *Disco pesante in puro rotolamento su un piano orizzontale.*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Nelle configurazioni di confine in cui il disco è appoggiato nel solo punto $\bar{C}$ le coordinate libere sono $(x_{\bar{C}}, y_{\bar{C}}, \varphi, \theta, \psi)$, con $(x_{\bar{C}}, y_{\bar{C}}) \in \mathbb{R}^2$, $0 < \theta < \pi$ e $0 \leq \psi < 2\pi$.

Il lavoro virtuale delle forze attive è

$$LV^{(att)} = \vec{F_G} \cdot \delta\vec{x}_G = m\vec{g} \cdot \delta\vec{x}_G = -mg\vec{E}_3 \cdot (\delta x_G \vec{E}_1 + \delta y_G \vec{E}_2 + \delta z_G \vec{E}_3) = -mg\,\delta z_G$$

Dato che

$$z_G = a \sin\theta \qquad \Rightarrow \delta z_G = a\cos\theta\delta\theta \ ,$$

risulta

$$LV^{(att)} = -mga\cos\theta\,\delta\theta$$

Per il PLV le configurazioni di equilibrio sono tutte e sole quelle in cui vale l'equazione (5.10.6), cioè

$$-mga\cos\theta\,\delta\theta = 0 \qquad \forall\,\delta\theta$$

Dunque, le configurazioni di equilibrio sono

$$\boldsymbol{q}_e = (x_{\bar{C}}, y_{\bar{C}}, \varphi, \theta = \frac{\pi}{2}, \psi) \ ,$$

cioè tutte quelle in cui il piano del disco è verticale.

5.11 PLV per un sistema olonomo

Vogliamo dimostrare che, per un modello soggetto a soli vincoli fissi, non dissipativi, olonomi e bilateri, il PLV equivale a tante equazioni pure (non contenenti le reazioni vincolari) di equilibrio quanti sono i gradi di libertà del sistema. La dimostrazione si basa sul fatto che, nel caso di r vincoli olonomi e fissi, possiamo introdurre $l = (g - r)$ coordinate generalizzate (o libere o lagrangiane) $(q_1, \ldots, q_l)$ tramite il sistema (3.3.8). Allora, i vettori posizione di ogni punto del sistema materiale e i relativi spostamenti virtuali si possono scrivere nella forma:

$$\vec{x}_P = \vec{x}_P\,(q_1, \ldots, q_l) \Rightarrow \delta\vec{x}_P = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \vec{x_P}}{\partial q_i}\delta q_i \ . \tag{5.11.1}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Dunque, il lavoro virtuale di qualunque tipo di forze (sia attive che reattive) si può scrivere

$$\begin{aligned} LV &= \sum_{P\in\mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_P = \sum_{P\in\mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial q_i} \delta q_i \right) \\ &= \sum_{P\in\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{l} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{l} \delta q_i \left(\sum_{P\in\mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial q_i} \right) \end{aligned}$$

Si noti che nell'ultimo passaggio sono state scambiate le due sommatorie. Ora, definendo le grandezze scalari

$$Q_i := \sum_{P\in\mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial q_i} \ , \tag{5.11.2}$$

dette *forze generalizzate* o *componenti lagrangiane* della sollecitazione, otteniamo l'espressione del lavoro virtuale in termini delle coordinate lagrangiane e delle loro variazioni (o differenziali)

$$LV = \sum_{i=1}^{l} Q_i \delta q_i \ . \tag{5.11.3}$$

Se non ci sono altri vincoli, le variazioni δq_i sono del tutto arbitrarie. Questa è la differenza sostanziale tra la (5.11.3) e la (5.8.1). Infatti, a differenza delle δq_i, le variazioni $\delta\vec{x}_P$ sono *virtuali*, quindi devono essere compatibili con i vincoli.

Invece, se sono presenti altri vincoli, le variazioni δq_i non sono più arbitrarie. Tuttavia, se i vincoli addizionali sono olonomi, si può ripetere il procedimento del sistema (3.3.8) riducendo ulteriormente il numero delle coordinate generalizzate. Invece, se ci sono vincoli anolonomi, tale procedura non si può effettuare poiché tali vincoli non sono integrabili . In conseguenza, le variazioni $(\delta q_1, \ldots, \delta q_l)$ non saranno arbitrarie (vedi, ad esempio, le Eq. (5.5.1)).

La (5.11.3) comporta che, nel caso di vincoli fissi e non dissipativi, *olonomi* e *bilateri*, il PLV si può scrivere

$$\sum_{i=1}^{l} Q_i^{(att)} \delta q_i = 0 \qquad \forall\ (\delta q_1, \ldots, \delta q_l) \ . \tag{5.11.4}$$

Data l'arbitrarietà delle δq_i, tale equazione equivale al sistema di l equazioni

$$Q_i^{(att)}\left(q_1, \ldots, q_l\right) = 0 \qquad i = 1, \ldots, l \ , \tag{5.11.5}$$

dette *equazioni pure d'equilibrio*. Infatti, scegliendo $\delta q_i \neq 0$ e $0 = \delta q_1 = \delta q_2 = \ldots = \delta q_{i-1} = \delta q_{i+1} = \ldots = \delta q_l, i = 1, \ldots, l$, si ricavano le (5.11.5). Dal punto di vista analitico, risolvere tale sistema equivale a trovare gli zeri comuni alle funzioni $Q_1, \ldots Q_l$.

Introducendo il concetto di campo delle forze lagrangiane, definito dal "vettor" a l componenti

$$\mathbf{Q} = \left[Q_1, \ldots, Q_l\right]^T \ , \tag{5.11.6}$$

nelle suddette ipotesi il PLV si può esprimere dicendo che:

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

PLV per i sistemi olonomi: per un sistema olonomo a vincoli fissi, non dissipativi e bilateri, le configurazioni di equilibrio sono tutte e sole quelle in cui si annulla il campo delle forze lagrangiane.

Si noti che tale formulazione è analoga a quella della statica di un punto materiale, con la differenza che in quel caso, ad annullarsi, è il risultante delle forze ordinarie (fisiche) nello spazio affine euclideo $\mathcal{E}_3$.

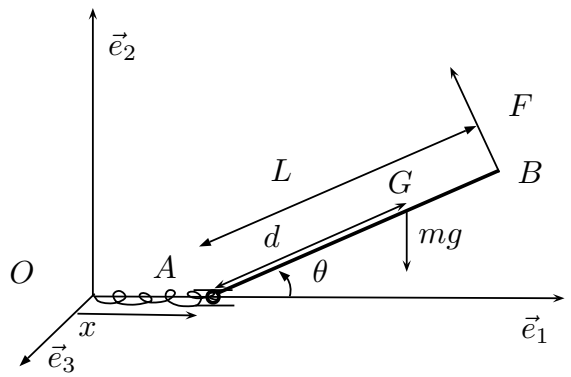
Per il calcolo del campo delle forze lagrangiane (5.11.6) possiamo usare due metodi. Il primo consiste nell'applicare la definizione

$$Q_i := \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F_P} \cdot \frac{\partial \vec{x_P}}{\partial q_i} \ ;$$

il secondo consiste nel calcolare il lavoro virtuale e poi identificare le Q_i come i coefficienti della 1-forma differenziale

$$LV = \sum_{i=1}^{l} Q_i \delta q_i \ .$$

Come applicazione della formulazione suddetta, scriviamo le equazioni pure di equilibrio per il sistema seguente.



Esempio 5.11.1.

Consideriamo l'asta della figura, vincolata con una cerniera cilindrica scorrevole lungo l'asse $(O; \vec{e}_1)$, a stare nel piano verticale $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Supponiamo che i vincoli siano lisci e bilateri. Trovare tutte le (eventuali) configurazioni di equilibrio.

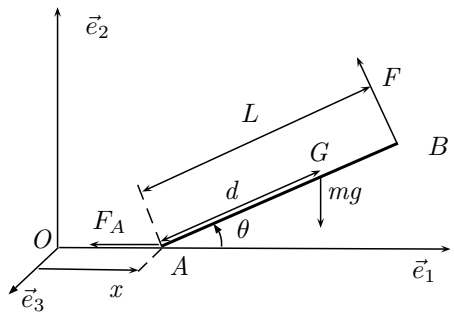
1. Analisi cinematica: gradi di libertà e coordinate libere.
   L' equazione di vincolo è $y_A = 0$, indipendente dal tempo (vincolo fisso). Quindi il vincolo è semplice, $(v = r = 1)$. Pertanto,

   $$l = g - v = 3 - 1 = 2$$

   coordinate libere: $\big(x = x_A, \theta\big) \qquad x \in \mathbb{R},\ -\pi < \theta \leq \pi, \qquad \mathcal{C}_V = \mathbb{R} \times S^1$

2. Analisi delle forze attive:

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



molla	$\vec{F}_A = -c\,(A-O) = -cx\vec{e}_1$
follower	$\vec{F}_B = \frac{F}{L}\vec{e}_3 \times (B-A) = F(-\sin\theta\ \vec{e}_1 + \cos\theta\ \vec{e}_2)$
peso	$m\vec{g} = -mg\vec{e}_2$

Calcoliamo le 2 componenti lagrangiane della sollecitazione attiva applicando il primo metodo.

$$Q_x = \vec{F}_A \cdot \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial x} + \vec{F}_G \cdot \frac{\partial \vec{x}_G}{\partial x} + \vec{F}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial x} \tag{5.11.7}$$

$$Q_\theta = \vec{F}_A \cdot \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \theta} + \vec{F}_G \cdot \frac{\partial \vec{x}_G}{\partial \theta} + \vec{F}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial \theta} \tag{5.11.8}$$

Le forze attive sono date da $\vec{F}_A = -cx\vec{e}_1$, $\vec{F}_G = -mg\vec{e}_2$, $\vec{F}_B = F\,(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2)$. I vettori posizione dei punti di applicazione delle forze attive e i loro derivati sono

$$\begin{array}{lll}
\vec{x_A} = x\vec{e}_1 \quad ; & & \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial x} = \vec{e}_1\ , \quad \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \theta} = \vec{0} \\
\vec{x_G} = \vec{x_A} + (\vec{x_G} - \vec{x_A}) = x\vec{e}_1 + d(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2) & ; & \frac{\partial \vec{x}_G}{\partial x} = \vec{e}_1\ , \quad \frac{\partial \vec{x}_G}{\partial \theta} = d(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2) \\
\vec{x_B} = \vec{x_A} + (\vec{x_B} - \vec{x_A}) = x\vec{e}_1 + L(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2) & ; & \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial x} = \vec{e}_1\ , \quad \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial \theta} = L(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2)
\end{array}$$

Quindi, le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva sono

(5.11.9)

$$\begin{aligned}
Q_x &= (-cx\vec{e}_1 - mg\vec{e}_2 + F\,(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2)) \cdot \vec{e}_1 = -cx - F\sin\theta \\
Q_\theta &= -cx\vec{e}_1 \cdot \vec{0} - mg\vec{e}_2 \cdot d(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2) + F\,(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2) \cdot L(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2)) \\
&= -mgd\cos\theta + FL
\end{aligned}$$

Applichiamo il secondo metodo e calcoliamo il LV delle forze attive

$$LV = \vec{R}^{(att)} \cdot \delta\vec{x}_A + \vec{M}_A^{(att)} \cdot \vec{\epsilon}$$

Gli spostamenti virtuali dei punti di applicazione delle forze sono

$$\begin{aligned}
\vec{R}^{(att)} &= \vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_B = -cx\vec{e}_1 - mg\vec{e}_2 + F\,(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2) \\
\vec{M}_A^{(att)} &= (\vec{x}_G - \vec{x}_A) \times m\vec{g} + (\vec{x}_B - \vec{x}_A) \times \vec{F}_B = (-mgd\cos\theta + FL)\,\vec{e}_3 \\
\delta\vec{x}_A &= \delta x\,\vec{e}_1 \\
\vec{\epsilon} &= \delta\theta\,\vec{e}_3
\end{aligned}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Dunque

$$\begin{aligned} LV &= \big(-cx\vec{e}_1 - mg\vec{e}_2 + F\left(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2\right)\big) \cdot \delta x\, \vec{e}_1 \\ &+ \left(-mgd\cos\theta + FL\right)\vec{e}_3 \cdot \delta\theta\, \vec{e}_3 = \\ &= \left(-cx - F\sin\theta\right)\delta x + \left(-mgd\cos\theta + FL\right)\delta\theta \end{aligned}$$

Quindi, i coefficienti delle variazione delle coordinate libere coincidono con le (5.11.9). Vediamo qual è, in questo esempio, il significato fisico delle forze generalizzate. Osserviamo, a posteriori, che

$$Q_x = \vec{R}^{(att)} \cdot \vec{e}_1 = \vec{R} \cdot \vec{e}_1$$
$$Q_\theta = \vec{M}_A^{(att)} \cdot \vec{e}_3 = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_3$$

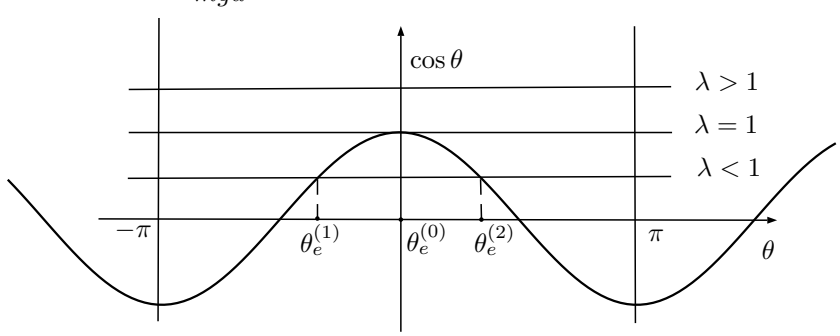
Dunque, Q_x è la componente lungo l'asse orizzontale del risultante di tutte le forze attive agenti sull'asta; Q_θ è la componente lungo l'asse $\vec{e}_3$ del momento risultante di tutte le forze attive, calcolato rispetto al polo mobile A.

Pertanto, le equazioni pure di equilibrio sono

$$\begin{cases} -cx - F\sin\theta = 0 \\ -mgd\cos\theta + FL = 0 \end{cases} \tag{5.11.10}$$

Risolvo il sistema (5.11.10) rispetto alle incognite (x, θ). Inizio dalla seconda equazione che contiene solo l'incognita θ.

$$\cos\theta = \frac{FL}{mgd} = \lambda > 0$$



se $\lambda > 1 \nexists$ soluzione $\Rightarrow$ Non esiste alcuna configurazione di equilibrio: il momento del peso non è mai sufficiente a equilibrare il momento del carico follower $\vec{F}_A$.

se λ=1$\Rightarrow$1 soluzione $\theta_e^{(0)} = 0$

se $\lambda < 1 \Rightarrow$2 soluzioni $\begin{cases} \theta_e^{(1)} = -\theta_e^{(2)} = -\arccos\lambda < 0 & -\frac{\pi}{2} < \theta_e^{(1)} < 0 \\ \theta_e^{(2)} = \arccos\lambda > 0 & 0 < \theta_e^{(2)} < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

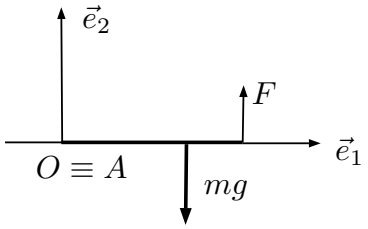
Dall'equazione (8.5.10) ricavo la x_e:

$$x_e = -\frac{F}{c}\sin\theta_e = \begin{cases} \text{se } \lambda = 1 & x_e^{(0)} = 0 \\ \text{se } \lambda < 1 & \begin{cases} x_e^{(1)} = \frac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2} \\ x_e^{(2)} = -\frac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2} \end{cases} \end{cases}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

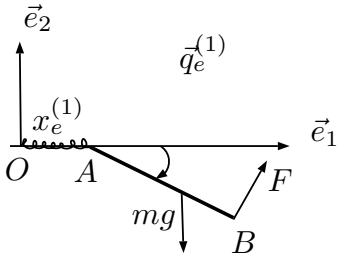
Denotate le configurazioni di equilibrio con $\mathbf{q}_e = (x_e, \theta_e)$, possiamo riassumere i risultati ottenuti : se $\lambda = 1 \Leftrightarrow FL = mgd$

$$\mathbf{q}_e^{(0)} = (0, 0)$$

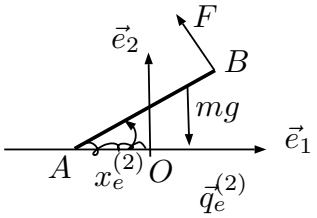


se $\lambda < 1 \Leftrightarrow FL < mgd$

$$\mathbf{q}_e^{(1)} = \left(\frac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2}, -\arccos\lambda, \right)$$

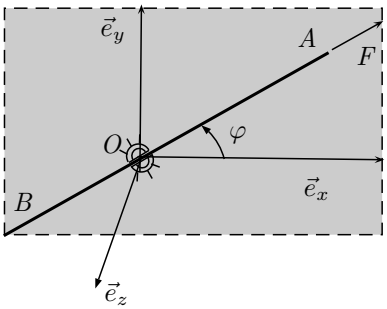


$$\mathbf{q}_e^{(2)} = \left(-\frac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2}, \arccos\lambda, \right)$$



Esercizio 5.11.1. *Calcolare le forze generalizzate nell'esempio* (5.10.5) *e spiegarne il significato fisico.*

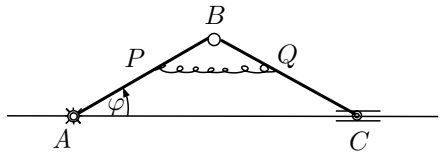
Esercizio 5.11.2. *Consideriamo un'asta di lunghezza L e massa m, passante per una cerniera cilindrica "bucata" liscia con asse ortogonale al piano verticale e fissata nel punto O. Sull'asta agisce, oltre al peso proprio, un carico di punta F. Determinare le eventuali configurazioni di equilibrio.*



Concludiamo lo studio del PLV con una applicazione ad un sistema *articolato* soggetto al peso e ad una coppia di forze interne.

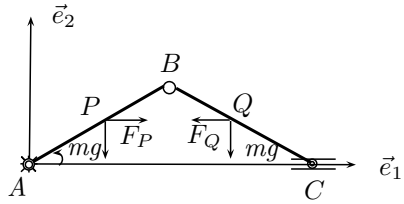
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Esempio 5.11.2. *Biella-manovella pesante con molla interna*



Piano verticale, vincoli lisci e bilateri, aste uguali ed omogenee di massa m e lunghezza L; $\overline{AP} = \overline{BP}$, $\overline{BQ} = \overline{CQ}$.

Il sistema biella-manovella è un sistema con 1 grado di libertà per $-\pi < \varphi \leq \pi$. Infatti, $g = 3 \cdot 2$ e $v = 2 + 2 + 1$, quando i vincoli sono efficaci. Si ricordi che, se $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, i vincoli sono inefficaci. Consideriamo il diagramma delle sole forze attive



$$\vec{F}_P = -c(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) = -\vec{F}_Q$$

e calcoliamo il LV

$$LV = \left(\vec{F}_P - mg\vec{e}_2\right) \cdot \delta\vec{x}_P + \left(\vec{F}_Q - mg\vec{e}_2\right) \cdot \delta\vec{x}_Q$$

$\vec{x}_P = \frac{L}{2}(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2)$

$\vec{x}_Q - \vec{x}_P = L\cos\varphi\vec{e}_1$

$\vec{x}_Q = \vec{x}_P + (\vec{x}_Q - \vec{x}_P) = \frac{L}{2}(\cos\varphi\vec{e}_1 + sin\varphi\vec{e}_2) + L\cos\varphi\vec{e}_1$
$= \frac{L}{2}(3\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2)$

$\delta\vec{x}_P = \frac{L}{2}(-\sin\varphi\vec{e}_1 + cos\varphi\vec{e}_2)\delta\varphi$

$\delta(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) = -L\sin\varphi\,\vec{e}_1\,\delta\varphi$

$\delta\vec{x}_Q = \frac{L}{2}(-3\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2)\delta\varphi$

Allora

$$\begin{aligned}
LV &= \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_P + \vec{F}_Q \cdot \delta\vec{x}_Q - mg\vec{e}_2 \cdot (\delta\vec{x}_P + \delta\vec{x}_Q) \\
&= \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_P - \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_Q - mg\vec{e}_2 \cdot \delta\left(\vec{x}_P + \vec{x}_Q\right) \\
&= \vec{F}_P \cdot \delta\left(\vec{x}_P - \vec{x}_Q\right) - mg\vec{e}_2 \cdot \frac{L}{2}\left(-4\sin\varphi\vec{e}_1 + 2\cos\varphi\vec{e}_2\right)\delta\varphi \\
&= cL\cos\varphi\,\vec{e}_1 \cdot L\sin\varphi\,\vec{e}_1\,\delta\varphi - mgL\cos\varphi\,\delta\varphi \\
&= \left(cL^2\sin\varphi\cos\varphi - mgL\cos\varphi\right)\delta\varphi \\
&= L\cos\varphi\left(cL\sin\varphi - mg\right)\delta\varphi
\end{aligned}$$

Pertanto, l'unica componente lagrangiana della sollecitazione attiva è:

$$Q_\varphi = L\cos\varphi\left(cL\sin\varphi - mg\right) \ ,$$

che si annulla se

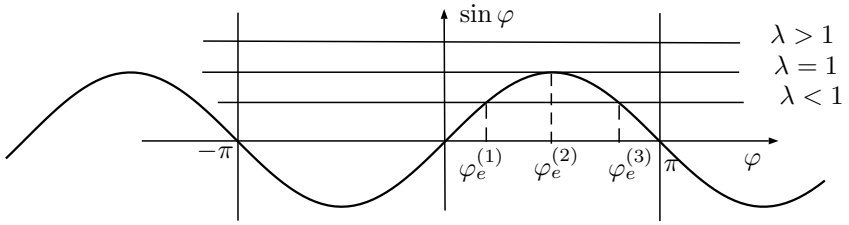
$$\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \qquad \text{(vincoli inefficaci)}$$

oppure, se

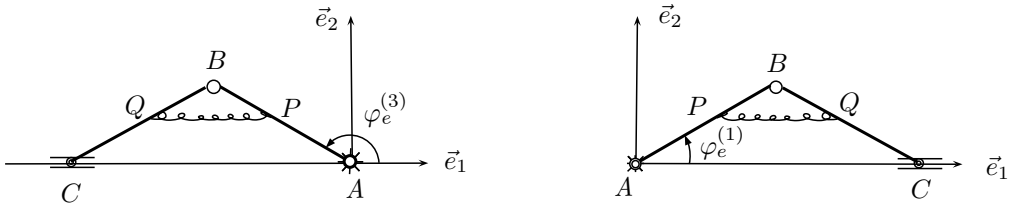
$$\sin\varphi = \frac{mg}{cL}$$

Risolviamo l'ultima equazione con il solito metodo grafico, ponendo $\frac{mg}{cL} = \lambda$.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Dunque, le uniche configurazioni di equilibrio a vincoli efficaci, $\varphi_e^{(1)}$, $\varphi_e^{(3)}$ esistono se $mg < cL$, cioè se il peso non è troppo elevato rispetto alla forza di richiamo della molla. Esse sono rappresentate graficamente da



Lavoro virtuale di una coppia Newtoniana

Nell'esempio precedente possiamo constatare che il lavoro della coppia di forze generata dalla molla, che agisce tra due punti interni al sistema, è diverso da zero, benché la coppia sia a braccio nullo, come in tutte le interazioni newtoniane. Dunque, possiamo affermare che in un caso generico il lavoro virtuale di una coppia a braccio nullo può essere diverso da zero. Precisamente, consideriamo

$$\vec{F}_P = f(P,Q)vers(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \qquad f > 0$$

$$\vec{F}_P = f(P,Q)vers(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \qquad f < 0$$

dove f è una funzione di P e Q. Il lavoro virtuale della coppia è dato da:

$$\begin{aligned} LV &= \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_P + \vec{F}_Q \cdot \delta\vec{x}_Q = \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_P - \vec{F}_P \cdot \delta\vec{x}_Q = \\ &= \vec{F}_P \cdot \delta\left(\vec{x}_P - \vec{x}_Q\right) = f\left(P,Q\right)\frac{\vec{x}_P - \vec{x}_Q}{|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|} \cdot \delta\left(\vec{x}_P - \vec{x}_Q\right) = \\ &= \frac{f(P,Q)}{|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|}\,\frac{1}{2}\delta\left(|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|^2\right) \end{aligned}$$

Esempio 5.11.3. *Molla di richiamo.*

$$\vec{F}_P = -c(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) = -c|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|vers(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \overset{f(P,Q)=-c|\vec{x}_P-\vec{x}_Q|}{\Longrightarrow} LV = -\tfrac{1}{2}c\delta(|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|^2)\ .$$

Quindi, in generale, possiamo concludere che il LV di una coppia a braccio nullo è uguale a zero se e solo se

$$|\vec{x}_P - \vec{x}_Q| = \text{costante}\ ,$$

cioè se la distanza tra i due punti di applicazione delle forze P e Q rimane invariata. Da ciò segue immediatamente che

Proposizione 5.11.1. *In un rigido, il lavoro virtuale di tutte le forze interne è nullo.*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

5.12 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 5.11.1

Applicando il secondo metodo, dall'equazione (5.10.9) segue che

$$Q_\varphi = \sin\varphi \left(mg\frac{L}{2} - cL^2\cos\varphi \right)$$

Illustriamo il significato fisico di Q_φ. A tale scopo, calcoliamo il momento di tutte le forze rispetto al centro d'istantanea rotazione C:

$$\begin{aligned} \vec{M}_C &= (\vec{x_G} - \vec{x_C}) \times (mg\vec{e}_2) + (\vec{x_A} - \vec{x_C}) \times \vec{F}_A \\ &= -\tfrac{L}{2}(\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) \times (-mg\vec{e}_2) + (-L\cos\varphi\vec{e}_2) \times (-cL\sin\varphi\vec{e}_1) \\ &= (mg\tfrac{L}{2}\sin\varphi - cL^2\sin\varphi\cos\varphi)\vec{e}_3 \end{aligned} \tag{5.12.1}$$

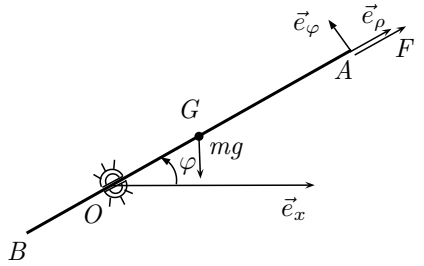
È evidente che :

$$Q_\varphi \equiv \vec{M}_C \cdot \vec{e}_3 \equiv \vec{M}_C^{(att)} \cdot \vec{e}_3$$

In questo caso, quindi, la forza generalizzata associata alla coordinata libera φ coincide con il momento (scalare) risultante delle forze esterne, calcolato rispetto al polo C.

Esercizio 5.11.2 Il modello è un rigido con 2 gradi di libertà. Infatti, applicando il metodo dei congelamenti successivi, basta osservare che per congelare l'asta bisogna congelare 2 spostamenti virtuali indipendenti: lo scorrimento dell'asta dentro la cerniera cilindrica e la rotazione dell'asta intorno all'asse della cerniera. Dunque, possiamo ridurci al piano ortogonale all'asse della cerniera, passante per O e prendere come coordinate libere, le coordinate del punto A rispetto al riferimento polare $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$.

Poichè il modello è olonomo ed è vincolato con vincoli fissi, non dissipativi e bilateri, possiamo utilizzare le equazioni pure per determinare gli equilibri. A tale scopo, dobbiamo calcolare le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva (Q_ρ, Q_φ).



Facciamolo, a partire dalla definizione 5.11.2, separando il contributo del carico follower da quello della forza peso (per motivi che vedremo nel prossimo capitolo)

$$Q_\rho^{(foll)} = \vec{F}_A \cdot \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \rho}\ , \qquad Q_\rho^{(peso)} = \vec{F}_G \cdot \frac{\partial \vec{x}_G}{\partial \rho}$$

$$Q_\varphi^{(foll)} = \vec{F}_A \cdot \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \varphi}\ , \qquad Q_\varphi^{(peso)} = \vec{F}_G \cdot \frac{\partial \vec{x}_G}{\partial \varphi}$$

Le forze attive sono:

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$$\vec{F}_A = F\vec{e}_\rho \ , \vec{F}_G = -mg\vec{e}_y = -mg(\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi) \ ,$$

mentre i vettori posizione sono

$$\vec{x}_A = \rho\vec{e}_\rho \ , \vec{x}_G = (\rho - \frac{L}{2})\vec{e}_\rho \ .$$

Tenendo conto delle (2.4.2) e (4.7.6), i loro derivati risultano

$$\frac{\partial\vec{x}_A}{\partial\rho} = \vec{e}_\rho \ , \frac{\partial\vec{x}_G}{\partial\rho} = \vec{e}_\rho$$

$$\frac{\partial\vec{x}_A}{\partial\varphi} = \rho\vec{e}_\varphi = \rho\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial\vec{x}_G}{\partial\varphi} = (\rho - \frac{L}{2})\vec{e}_\varphi$$

Dunque

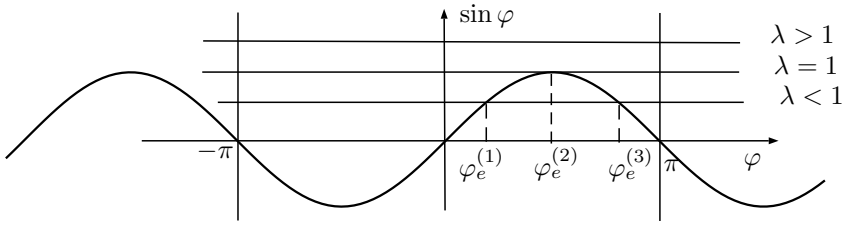
(5.12.2) $$Q_\rho^{(foll)} = F\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = F \ , \qquad Q_\rho^{(peso)} = -mg(\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi)\cdot\vec{e}_\rho = -mg\sin\varphi$$

(5.12.3)
$$Q_\varphi^{(foll)} = F\vec{e}_\rho \cdot \rho\vec{e}_\varphi = 0, \qquad Q_\varphi^{(peso)} = -mg(\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi)\cdot(\rho - \frac{L}{2})\vec{e}_\varphi = -mg\cos\varphi(\rho - \frac{L}{2}) \ .$$

Pertanto, le equazioni pure di equilibrio sono

(5.12.4) $$\begin{cases} F - mg\sin\varphi = 0 \\ -mg\cos\varphi(\rho - \frac{L}{2}) = 0 \end{cases}$$

Risolviamo la prima equazione con il solito metodo grafico, ponendo $\frac{F}{mg} = \lambda > 0$.



Dunque, le soluzioni $\mathbf{q}_e = (\rho_e, \varphi_e)$ esistono se e solo se $F \leq mg$, cioè se il carico di punta non supera il peso dell'asta. Precisamente,

$$\text{se} \quad \lambda = 1 \qquad \varphi_e^{(2)} = \frac{\pi}{2} \qquad 0 < \rho < L$$

$$\text{se} \quad \lambda < 1 \qquad \varphi_e^{(1)} = \arcsin\lambda \ , \varphi_e^{(3)} = \pi - \arcsin\lambda \qquad \rho = \frac{L}{2}$$

Concludendo, le configurazioni di equilibrio sono:

(5.12.5) $$\text{se} \quad \lambda = 1 \qquad \mathbf{q}_e^{(2)} = \left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) \qquad 0 < \rho < L$$

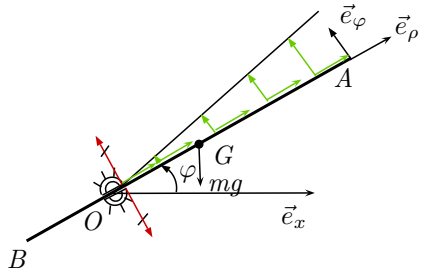
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$$\text{se} \quad \lambda < 1 \qquad \mathbf{q}_e^{(1)} = \left(\frac{L}{2}, \arcsin\lambda\right) \ , \quad \mathbf{q}_e^{(3)} = \left(\frac{L}{2}, \pi - \arcsin\lambda\right) \ .$$

N.B. Osserviamo che, qualunque sia la configurazione dell'asta, lo spostamento virtuale del punto del rigido che passa per la cerniera bucata è diretto come l'asta. Infatti, detto P un generico punto dell'asta a distanza d dall'estremo A

$$\vec{x}_P = (\rho - d)\vec{e}_\rho \ , \quad \delta\vec{x}_P = \delta\rho\,\vec{e}_\rho + (\rho - d)\delta(\vec{e}_\rho) = \delta\rho\,\vec{e}_\rho + (\rho - d)\delta\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

Quindi, se $P \equiv O \Leftrightarrow d = \rho$, lo spostamento virtuale di P si riduce a $\delta\vec{x}_P = \delta\rho\,\vec{e}_\rho$, cioè risulta parallelo all'asta.



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Capitolo 6

Sollecitazioni conservative

In questo capitolo, studieremo i modelli meccanici soggetti a una sollecitazione *attiva* rappresentabile da una funzione scalare, detta *energia potenziale*, che sarà usata in Statica per lo studio degli equilibri e della loro stabilità e in Dinamica per ricavare le equazioni di Lagrange in forma conservativa.

6.1 Richiami sui campi di forze conservative

Richiamiamo alcuni concetti sui campi di forze già studiati in Analisi II (vedi [Omari e Trombetta]), adattandoli alla Meccanica Razionale. A tale scopo, penseremo il campo di forza agente su un punto materiale (P, m) posto in uno spazio affine euclideo $\mathcal{E}_n$.

Definizione 6.1.1. *Un campo di forze posizionali è un'applicazione differenziabile (di classe almeno C^1) da un aperto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_n$ a valori nello spazio vettoriale euclideo soggiacente E_n*

$$\vec{F} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_n \to E_n, \quad P \mapsto \vec{F}(P)$$

Esempio 6.1.1.

1. *Campo della forza peso (in piccolo) su una particella di massa m*

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{E}_3 \qquad \vec{F}(P) = m\vec{g} \qquad \text{campo uniforme.}$$

2. *Campo della forza peso (in grande) su una particella di massa m*

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}_3 \setminus \{O\} \qquad \vec{F}(P) = -GmM_T \frac{P - O}{|P - O|^3} \ ,$$

   dove O indica il centro della Terra, G la costante di gravitazione universale e M_T la massa della Terra.

3. *Campo di una forza elastica di centro O e di costante c, applicata in P*

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{E}_3 \qquad \vec{F}(P) = -c(P - O) \ .$$

N.B. Si osservi che i campi di forza 2 e 3 sono *centrali*, cioè sono campi vettoriali tali che:

- in ogni punto il vettore del campo è radiale, cioè è diretto verso un punto fisso dello spazio detto centro; quindi ammette la rappresentazione

$$\vec{F}(P) = F(P)\, vers(P - O) \ .$$

- La componente scalare del campo, $F(P)$, dipende solo dal modulo del vettore $P - O$ e non dalla sua direzione. Quindi il campo si rappresenta

$$\vec{F}(P) = F\big(|P - O|\big) vers(P - O)$$

Pertanto, possiamo dire che un campo centrale è un campo radiale a simmetria sferica.

Definizione 6.1.2. *Un campo di forze posizionali $\vec{F}$, definito in un aperto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_n$, si dice localmente conservativo se esiste un aperto stellato U e una funzione scalare (di classe C^2)*

$$V : U \subseteq \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

tale che risulti

$$\vec{F}(P) = \operatorname{grad}(-V(P)) \qquad P \in U \ , \tag{6.1.1}$$

dove grad *denota l'operatore gradiente in $\mathcal{E}_n$ e la funzione V si dice energia potenziale del campo di forze $\vec{F}$. In un riferimento cartesiano $(O; \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$, l'operatore* grad *è rappresentato da*

$$\operatorname{grad} = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ ,$$

quindi la (6.1.1) *si specializza a*

$$F_i = \frac{\partial(-V)}{\partial x_i} \ . \tag{6.1.2}$$

N.B. Osserviamo che se la funzione energia potenziale esiste, essa è definita a meno di una costante additiva.

Proposizione 6.1.1. *I campi uniformi, cioè quelli indipendenti dal posto e quindi rappresentabili da*

$$\vec{F}(P) = c\,\vec{u} \qquad c \in \mathbb{R}, \qquad |\vec{u}| = 1$$

sono conservativi ed ammettono energia potenziale data da

$$V(P) = -c\vec{u} \cdot (P - O) \qquad O \in \mathcal{E}_n$$

Dimostrazione. Basta verificare la (6.1.1). Infatti, posto $P - O = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$ e $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i$, si ha

$$\operatorname{grad} V(P) = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-c \sum_{k=1}^{n} u_k x_k \right) = -c \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i \sum_{k=1}^{n} u_k \delta_{ki} = -c \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i u_i = -c\vec{u}$$

□

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Esempio 6.1.2. *Il campo della forza peso (in piccolo) al punto 1 dell' Esempio 6.1.1 è un campo uniforme. La sua energia potenziale sarà, quindi,*

$$V(P) = -m\vec{g} \cdot (P - O)$$

Proposizione 6.1.2. *Ogni campo centrale in $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_3$ è (localmente) conservativo. Infatti, in coordinate polari sferiche $(O; r, \theta, \varphi)$, ammette la rappresentazione*

$$\vec{F}(P) = F(r)\,\vec{e}_r(\theta, \varphi)$$

ed energia potenziale data da

$$V(P) = -\int F(r)\,dr$$

Dimostrazione. È facile verificare la (6.1.1) utilizzando l'espressione dell'operatore gradiente in coordinate polari sferiche:

$$\text{grad} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

□

Esempio 6.1.3.

1. *Campo di Kepler-Coulomb*

$$\vec{F}(P) = \frac{c}{r^2}\vec{e}_r = c\,\frac{P - O}{|P - O|^3}\ , \qquad V(P) = \frac{c}{r} = \frac{c}{|P - O|} \qquad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2. *Campo elastico*

$$\vec{F}(P) = -cr\vec{e}_r = -c(P - O)\ , \qquad V(P) = \frac{c}{2}r^2 = \frac{c}{2}\,|P - O|^2 \qquad c \in \mathbb{R}^+$$

Richiamiamo, ora, il test da effettuare su un dato campo di forze posizionali per decidere se è, o meno, localmente conservativo.

Proposizione 6.1.3. *Un campo di forze posizionali definito in un aperto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_n$ è localmente conservativo se e solo esiste un aperto stellato $U \subseteq \mathcal{A}$ nel quale si verifica che*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad \forall i,\, j = 1, \ldots, n\ , \tag{6.1.3}$$

dove le x_i sono le coordinate cartesiane del punto P in un riferimento cartesiano $(O; \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$.

Dimostrazione. Per il solo se vedi [Omari e Trombetta]. □

Corollario 6.1.1. *Un campo di forze posizionali definito in $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_3$ è localmente conservativo se e solo se il suo rotore è nullo:*

$$\text{rot}\vec{F}(P) = \vec{0}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Dimostrazione. Vedi [Omari e Trombetta]. Si ricorda che

$$\mathrm{rot}\vec{F}(P) = \nabla \times \vec{F}(P) = det \begin{bmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix}$$

□

N.B. In Meccanica Razionale si usa una nozione di campo conservativo (localmente) più debole di quella utilizzata in Analisi (globalmente conservativo). Questo spiega il fatto che, nei testi di Analisi, la condizione (6.1.1) è solo necessaria ma non sufficiente a garantire la conservatività (globale) di un campo vettoriale.

Esercizio 6.1.1. *Verificare che il rotore dei campi uniformi e dei campi centrali dell'Esempio 6.1.1 è nullo.*

Daremo ora una definizione di campo conservativo che è equivalente alla (6.1.1) nello spazio $\mathcal{E}_n$ ma, che al contrario della (6.1.1), si presta a una facile generalizzazione nello spazio delle configurazioni di un sistema olonomo.

Consideriamo il lavoro virtuale di un campo di forze $\vec{F}$ su un punto materiale P

$$LV = \vec{F}(P) \cdot \delta\vec{x}_P$$

Osserviamo che, se il campo è conservativo secondo la (6.1.1), il lavoro virtuale si può scrivere

$$LV = \mathrm{grad}\left(-V(P)\right) \cdot \delta\vec{x}_P = \delta\left(-V(P)\right)$$

Su tali basi possiamo enunciare la caratterizzazione seguente:

Proposizione 6.1.4. *Un campo di forze posizionali è localmente conservativo se e solo se il suo lavoro virtuale è un differenziale (localmente) esatto, cioè se e solo se esiste una funzione $V : U \subseteq \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, di classe C^2, tale che*

$$LV = \delta\left(-V\right) \ , \tag{6.1.4}$$

dove U è un aperto stellato (o semplicemente connesso).

6.2 Sollecitazione conservativa

Passiamo ora dallo studio dei campi di forze agenti su un punto materiale allo studio della sollecitazione attiva agente su un modello $\mathcal{B}$ più generale, costituito, ad esempio, da più punti materiali, da uno o più rigidi, da combinazioni dei precedenti, etc.. L'ipotesi che faremo è che i vincoli a cui $\mathcal{B}$ è soggetto siano *olonomi*. In questo caso, lo spazio delle configurazioni di $\mathcal{B}$ ha una struttura di varietà differenziabile, dove non ha senso parlare del gradiente di un campo scalare. Pertanto, non possiamo usare la (6.1.1) per definire i modelli conservativi. Invece, potremo utilizzare la (6.1.4). Quindi diremo che:

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Definizione 6.2.1. *Un modello meccanico soggetto a vincoli olonomi e fissi, definito nello spazio delle configurazioni* $\mathcal{C}_V$, $\dim \mathcal{C}_V = l$, *si dice soggetto a una sollecitazione attiva localmente conservativa se il lavoro virtuale di tale sollecitazione è un differenziale localmente esatto, cioè se esiste una funzione* $V : U \subseteq \mathcal{C}_V \to \mathbb{R}$, *di classe* C^2, *tale che*

$$LV^{(att)} = \delta\,(-V) = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial\,(-V)}{\partial q_k} \delta q_k \ , \tag{6.2.1}$$

dove U *è un aperto stellato (o semplicemente connesso). La funzione* $V(q_1, \ldots, q_l)$ *si dice energia potenziale del modello.*

Proposizione 6.2.1. *Nelle ipotesi della definizione precedente, un modello meccanico è soggetto a una sollecitazione attiva conservativa se e solo se si verifica che*

$$Q_i^{(att)}\,(q_1, \cdots, q_l) = \frac{\partial}{\partial q_i}\,(-V(q_1, \ldots, q_l)) \qquad i = 1, \cdots, l \ . \tag{6.2.2}$$

Dimostrazione. Viene dal fatto che per i sistemi olonomi il lavoro virtuale della sollecitazione attiva è dato dalla (5.11.3) che qui riscriviamo

$$LV^{(att)} = \sum_{k=1}^{l} Q_k^{(att)} \delta q_k$$

□

Dalla Proposizione precedente, ricaviamo un test da applicare al campo delle forze generalizzate per deciderne la conservatività o meno.

Proposizione 6.2.2. *Nelle ipotesi della Def.* (6.2.1), *un modello* $\mathcal{B}$ *è localmente conservativo se e solo se esiste un aperto stellato* $U \subseteq \mathcal{C}_V$ *dove si verifica identicamente che*

$$\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \qquad j,\ k = 1, \ldots, l \tag{6.2.3}$$

Dimostrazione. La necessità è una diretta conseguenza del lemma di Schwartz applicato alla funzione energia potenziale V. Infatti, se esiste V definita in U e di classe C^2, in ogni punto di U deve verificarsi che

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \qquad j,\ k = 1, \ldots, l$$

e quindi la tesi, tenuto conto della (6.2.2). La dimostrazione della sufficienza si basa sul Lemma di Poincaré per le forme differenziali ed esula dal contenuto di questo corso. □

N.B. Le $l(l-1)/2$ condizioni (6.2.3) sono equivalenti al fatto che la matrice Jacobiana delle forze generalizzate

$$[Jac(Q)]_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}$$

è una matrice simmetrica.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Esempio 6.2.1. *Energia potenziale del peso proprio.*

La sollecitazione della forza peso applicata a un qualunque modello meccanico $\mathcal{B}$ è conservativa e ha energia potenziale pari a

$$V = -M\vec{g}\cdot(G-O)\ , \tag{6.2.4}$$

dove M è la massa totale del modello, O un arbitrario punto fisso di $\mathcal{E}_3$ e $G-O := \frac{\sum_{P\in\mathcal{B}} m_P\,(P-O)}{M}$ il vettore posizione del suo baricentro *rispetto ad O. Infatti,*

$$LV^{(peso)} = \sum_{P\in\mathcal{B}} m_P\,\vec{g}\cdot\delta P = \vec{g}\cdot\sum_{P\in\mathcal{B}} m_P\,\delta P = M\vec{g}\cdot\frac{\sum_{P\in\mathcal{B}} m_P\,\delta(P-O)}{M} = M\vec{g}\cdot\delta(G-O) = \delta\big(M\vec{g}\cdot(G-O)\big)$$

Esempio 6.2.2. *Macchine semplici: sono modelli olonomi a vincoli fissi, con 1 grado di libertà.*

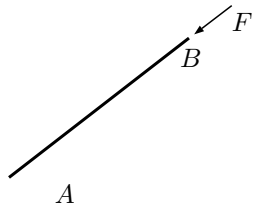
La sollecitazione di forze attive posizionali, agente su una macchina semplice è conservativa. Infatti, in tal caso, il lavoro virtuale è dato da

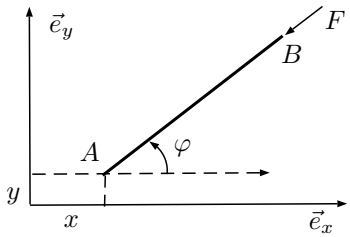
$$LV^{(att)} = \sum_{P\in\mathcal{B}} \vec{F_P}\cdot\delta\vec{x_P} = Q\,(q)\,\delta q$$

e l'energia potenziale $V\,(q)$ è data da

$$V\,(q) = -\int Q\,(q)\,\delta q$$

Esempio 6.2.3. *Consideriamo un'asta libera in un piano orizzontatale liscio e soggetta a un carico di punta F ("follower"). Vogliamo stabilire se tale sollecitazione è conservativa oppure non conservativa.*





Il sistema materiale è un rigido libero nel piano, quindi ha 3 gradi di libertà. Scegliamo come coordinate libere le coordinate cartesiane $(x,\ y)$ del punto A e l'angolo φ formato dal versore $\vec{e}_x$ e dall'asta. Dunque:

$$\mathbf{q} = (x,\,y,\,\varphi) \qquad \vec{F}_B = -F\,vers\,(B-A) = -F\,(\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y)$$

Determiniamo ora il campo delle forze lagrangiane

$$\mathbf{Q} = [Q_x,\,Q_y,\,Q_\varphi]^T$$

I metodo.

$$\vec{x}_B = (x + L\cos\varphi)\,\vec{e}_x + (y + L\sin\varphi)\,\vec{e}_y$$

$$\frac{\partial\vec{x}_B}{\partial x} = \vec{e}_x, \quad \frac{\partial\vec{x}_B}{\partial y} = \vec{e}_y, \quad \frac{\partial\vec{x}_B}{\partial\varphi} = L\,(-\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y)$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$$
\begin{aligned}
Q_x &= \vec{F}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial x} = -F\left(\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y\right) \cdot \vec{e}_x = -F\cos\varphi \\
Q_y &= \vec{F}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial y} = -F\left(\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y\right) \cdot \vec{e}_y = -F\sin\varphi \\
Q_\varphi &= -F\left(\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y\right) \cdot L\left(-\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y\right) = 0
\end{aligned}
$$

II metodo.

$$
LV = \vec{F}_B \cdot \delta \vec{x}_B
$$

$$
\begin{aligned}
\delta \vec{x}_B &= \left(\delta x - L\sin\varphi\delta\varphi\right)\vec{e}_x + \left(\delta y + L\cos\varphi\delta\varphi\right)\vec{e}_y \\
LV &= -F\left(\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y\right) \cdot \left[\left(\delta x - L\sin\varphi\delta\varphi\right)\vec{e}_x + \left(\delta y + L\cos\varphi\delta\varphi\right)\vec{e}_y\right] \\
&= -F\left[\cos\varphi\left(\delta x - L\sin\varphi\delta\varphi\right) + \sin\varphi\left(\delta y + L\cos\varphi\delta\varphi\right)\right] \\
&= \underbrace{-F\cos\varphi}_{Q_x}\delta x - \underbrace{F\sin\varphi}_{Q_y}\delta y + \underbrace{0}_{Q_\varphi}\delta\varphi
\end{aligned}
$$

Dunque:

$$
\begin{aligned}
Q_x &= -F\cos\varphi \\
Q_y &= -F\sin\varphi \\
Q_\varphi &= 0\ .
\end{aligned}
$$

Ricapitolando, il campo delle forze (attive) lagrangiane è dato da

$$
\mathbf{Q} = \left[-F\cos\varphi,\ -F\sin\varphi,\ 0\right]
$$

Il test che assicura la (locale) conservatività del campo $\mathbf{Q}$ *è dato dall'eguaglianza delle "derivate in croce" delle componenti* (6.2.3)

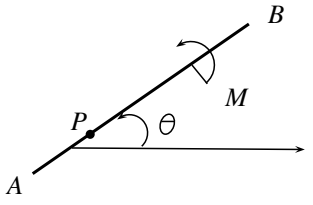
$$
\frac{\partial Q_x}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial Q_y}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial Q_\varphi}{\partial x} \stackrel{?}{=} \frac{\partial Q_x}{\partial \varphi} \quad , \quad \frac{\partial Q_\varphi}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial Q_y}{\partial \varphi}
$$

È immediato verificare che mentre la prima identità è soddisfatta la seconda e la terza non lo sono. In conclusione la sollecitazione non è conservativa.

Esercizio 6.2.1. *Dire cosa succede se l'asta dell'esempio precedente è soggetta alla stessa sollecitazione, ma è vincolata con:*

1. *un appoggio liscio bilatero del punto* A *sull'asse* $(O, \vec{e}_x)$
2. *una cerniera fissa in* A *e in* O.

Esempio 6.2.4. *Coppia costante e uniforme su un rigido piano.*



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Consideriamo l'asta AB libera nel piano di figura ($l = 3$) e soggetta all'azione di una coppia uniforme di momento $\vec{M} = M\vec{e}_3$. Scelto un generico punto P dell'asta, calcoliamo il lavoro virtuale della coppia. Esso è dato da

$$LV = \cancel{\vec{R}} \cdot \delta\vec{x}_P + \vec{M}_P \cdot \vec{\epsilon} = M\vec{e}_3 \cdot \delta\theta\vec{e}_3 = M\delta\theta = \delta(M\theta) \ .$$

Pertanto, una coppia uniforme agente su un rigido piano ammette un'energia potenziale data da

$$V(\theta) = -M\theta \ . \tag{6.2.5}$$

Si noti, quindi, che una coppia follower risulta (localmente) conservativa, mentre una forza follower, in generale, non lo è.

6.3 Energia potenziale di una molla

In questa sezione, calcoleremo il lavoro virtuale di molle lineari di tipo diverso: molle interne ed esterne con centro fisso e mobile e vedremo sotto quali condizioni tali molle ammettono energia potenziale. Infine, considereremo anche la sollecitazione di molle angolari o, come si dice impropriamente, molle di torsione.

6.3.1 Molle lineari interne

Sono molle i cui estremi sono fissati a due punti P e Q interni a un modello meccanico $\mathcal{B}$, ad esempio quello dell'esempio 5.11.2. Esse esercitano sul modello una coppia di forze a braccio nullo. Nell'esempio 5.11.3 ne abbiamo già calcolato il lavoro virtuale

$$LV^{(molla)} = -\tfrac{1}{2}c\delta(|P-Q|^2)$$

$P, Q \in \mathcal{B}$

È immediato concludere che tali molle ammettono un'energia potenziale *complessiva* data da

$$V^{(molla)} = \frac{1}{2}c\,|P-Q|^2$$

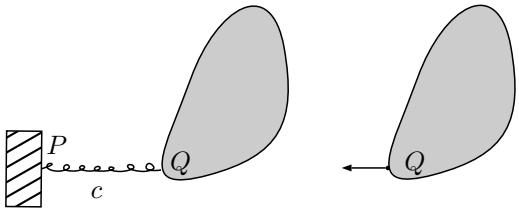
6.3.2 Molle lineari esterne

Se invece la molla agisce su un punto Q di $\mathcal{B}$ ed ha l'altro estremo P fissato all'esterno del modello, si ha che

$$LV^{(molla)} = \vec{F}_Q \cdot \delta\vec{x}_Q = -c(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) \cdot \delta\vec{x}_Q$$

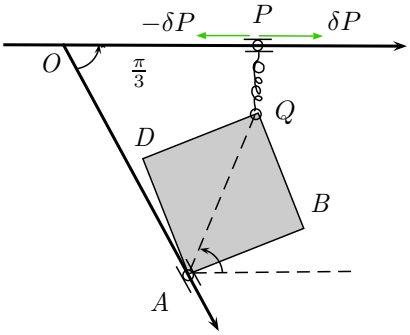
Consideriamo 2 casi:

a) l'estremo P è fisso $\Rightarrow \delta\vec{x}_P = \vec{0}$



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

b) l'estremo P è mobile su una traiettoria sempre ortogonale alla molla $\Rightarrow (\vec{x_Q} - \vec{x_P}) \cdot \delta\vec{x}_P = 0$



In entrambi i casi il LV si può scrivere come un differenziale esatto

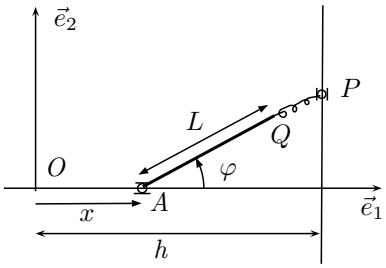
$$LV^{(molla)} = -c(\vec{x_Q} - \vec{x_P}) \cdot \delta(\vec{x_Q} - \vec{x_P}) = -\frac{1}{2}c\delta(|\vec{x_Q} - \vec{x_P}|^2)$$

Pertanto, la molla ammette energia potenziale data, anche in questi casi, da

$$V^{(molla)} = \frac{1}{2}c\,|Q - P|^2 \ .$$

c) Invece, se l'estremo P è mobile su una traiettoria diversa da quella del caso b) non è detto che la molla ammetta energia potenziale, come si verifica nell'esempio seguente.

Esempio 6.3.1. *Molla non conservativa (follower)*



$l = 2$, $\mathbf{q} = (x, \varphi)$
piano orizzontale

Calcoliamo le componenti lagrangiane della sollecitazione della molla

$$Q_x = \vec{F}_Q \cdot \frac{\partial \vec{x}_Q}{\partial x} \tag{6.3.1}$$

$$Q_\varphi = \vec{F}_Q \cdot \frac{\partial \vec{x}_Q}{\partial \varphi} \tag{6.3.2}$$

dove $\vec{F}_Q = -c(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) = c(\vec{x}_P - \vec{x}_Q)$. Poichè

$$\vec{x}_Q - \vec{x}_A = L(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2)$$

$$\vec{x}_P - \vec{x}_A = (h - x)\,\vec{e}_1 + (h - x)\tan\varphi\,\vec{e}_2$$

segue che

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$$\vec{x}_Q - \vec{x}_O = (\vec{x}_Q - \vec{x}_A) + (\vec{x}_A - \vec{x}_O) = (x + L\cos\varphi)\,\vec{e}_1 + L\sin\varphi\,\vec{e}_2$$

$$\vec{x}_P - \vec{x}_Q = (\vec{x}_P - \vec{x}_A) + (\vec{x}_A - \vec{x}_Q) = (h - x - L\cos\varphi)\,\vec{e}_1 + ((h-x)\tan\varphi - L\sin\varphi)\,\vec{e}_2$$

Dunque

$$\frac{\partial \vec{x}_Q}{\partial x} = \vec{e}_1 \tag{6.3.3}$$

$$\frac{\partial \vec{x}_Q}{\partial \varphi} = L(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2) \tag{6.3.4}$$

Allora, le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva risultano

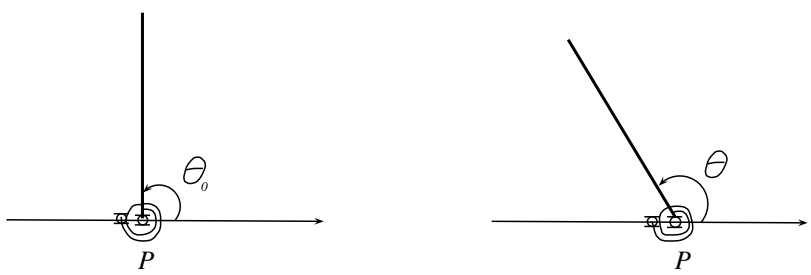
$$\begin{aligned} Q_x &= c\Big((h - x - L\cos\varphi)\,\vec{e}_1 + ((h-x)\tan\varphi - L\sin\varphi)\,\vec{e}_2\Big)\cdot\vec{e}_1 = c(h - x - L\cos\varphi) \\ Q_\varphi &= c\Big((h - x - L\cos\varphi)\,\vec{e}_1 + ((h-x)\tan\varphi - L\sin\varphi)\,\vec{e}_2\Big)\cdot L(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2) = 0 \end{aligned}$$

È evidente che $\frac{\partial Q_\varphi}{\partial x} \neq \frac{\partial Q_x}{\partial \varphi}$, quindi la sollecitazione della molla NON è conservativa.

6.3.3 Molle Angolari

Le molle angolari sono costituite da avvolgimenti metallici che giacciono in un piano (piano della molla) e si avvolgono intorno ad un asse ortogonale al piano (asse della molla). Dopo essere state deformate per allungamento dell'avvolgimento, esse esercitano un momento di richiamo diretto come l'asse e proporzionale all'angolo di rotazione dell'avvolgimento.

Esempio 6.3.2. *Molla angolare su un rigido piano.*



Consideriamo la molla angolare agente sull'asta vincolata a stare nel piano del foglio, come nella figura. Essa esercita una sollecitazione attiva che si riduce a una coppia di momento $\vec{M} = -c(\theta - \theta_0)\vec{e}_3$, cioè lineare nella variazione tra la coordinata θ e la configurazione θ_0 in cui la molla è a riposo. Tale sollecitazione è localmente conservativa poichè il suo lavoro virtuale è dato da

$$LV = \cancel{\vec{R}}\cdot\delta\vec{x}_P + \vec{M}_P\cdot\vec{\epsilon} = -c(\theta-\theta_0)\vec{e}_3\cdot\delta\theta\vec{e}_3 = -c(\theta-\theta_0)\delta\theta = -c\delta\big(\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)^2\big)\ .$$

Pertanto, ammette un'energia potenziale data da

$$V(\theta) = \frac{1}{2}c\big(\theta - \theta_0\big)^2\ . \tag{6.3.5}$$

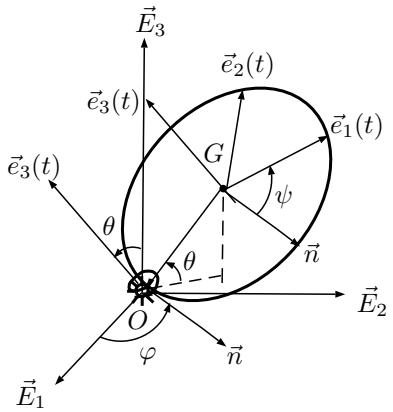
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Si noti l'analogia formale tra la (6.3.5) e l'energia potenziale delle molle lineari data da

$$V(x) = \frac{1}{2}c(x - x_0)^2 \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \ ,$$

dove x_0 è l'ascissa del punto in cui la forza della molla si annulla.

Esempio 6.3.3. *Molla angolare su un rigido nello spazio.*



Consideriamo la molla angolare agente sul disco come nella figura. Essa esercita una sollecitazione attiva che si riduce a una coppia di momento $\vec{M} = -c(\psi - \psi_0)\vec{e}_3(t)$, dove ψ è l'angolo di rotazione propria del disco e ψ_0 l'angolo di riposo della molla. Scegliendo $\vec{e_1}(t)$ in modo che $\psi_0 = 0$, troviamo che il suo lavoro virtuale è dato da

$$LV = \cancel{\vec{R}}\cdot\delta\vec{x}_P + \vec{M}_P\cdot\vec{\epsilon} = -c\psi\vec{e}_3(t)\cdot(\delta\varphi\vec{E}_3 + \delta\theta\vec{n} + \delta\psi\vec{e}_3(t)) = -c\psi(\delta\varphi\cos\theta + \delta\psi) = -c(\psi\cos\theta\,\delta\varphi + \psi\delta\psi) \ .$$

Pertanto, le forze generalizzate sono

$$Q_\varphi = -c\psi\cos\theta \tag{6.3.6}$$

$$Q_\theta = 0 \tag{6.3.7}$$

$$Q_\psi = -c\psi \tag{6.3.8}$$

È immediato verificare che esse non soddisfano le condizioni (6.2.3), quindi la sollecitazione non è conservativa, dunque non ammette energia potenziale.

Esercizio 6.3.1. *Supponiamo che sul disco dell'esempio precedente agisca una coppia di momento $\vec{M} = M\vec{e}_3(t)$ con $M \in \mathbb{R}$. Verificare che, persino in questo caso, la sollecitazione attiva non è conservativa.*

6.4 Energia potenziale ed equilibri

Vediamo ora come si traducono le equazioni pure di equilibrio, e quindi il PLV, per i sistemi olonomi soggetti a sollecitazione conservativa.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

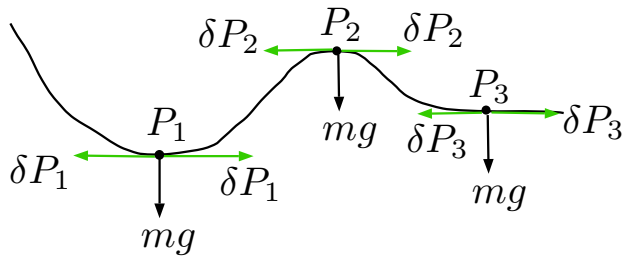
Teorema 6.4.1. *Stazionarietà dell'energia potenziale.*
Si consideri un sistema materiale con vincoli olonomi, non dissipativi, bilateri e fissi, soggetto a una sollecitazione conservativa. Sia $V(q_1, \ldots, q_l)$ la sua energia potenziale definita e regolare in un aperto U dello spazio delle configurazioni. Le configurazioni di equilibrio in U sono tutte e solo quelle che rendono stazionaria la funzione V

$$\delta V(q_1, \ldots, q_l) = 0 \ . \tag{6.4.1}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è una immediata conseguenza delle equazioni pure di equilibrio (5.11.5) e della (6.2.2). □

6.5 Criterio statico di stabilità

Consideriamo un punto materiale P pesante, vincolato ad appartenere ad una curva liscia S con un vincolo bilatero e supponiamo che esistano i tre equilibri di figura P_1, P_2 e P_3.



L'esperienza ci dice che i tre equilibri sono di "qualità" diversa. Infatti, se perturbiamo l'equilibrio P_1 variando di "poco" la posizione e la velocità del punto materiale constatiamo che esso compie un moto che non si allontana da P_1. Invece, se perturbiamo gli equilibri P_2 e P_3 il punto materiale si allontana "molto" dalla configurazione di equilibrio. Vogliamo ora introdurre un criterio che discrimini questi diversi comportamenti. A questo scopo, useremo il concetto di lavoro. Ma quale lavoro? Non possiamo certo usare il lavoro virtuale dato che, tutti e tre i punti di equilibrio sono caratterizzati dall'avere

$$LV = m\vec{g} \cdot \delta\vec{x}_P = 0 \qquad \forall\ \delta\vec{x}_P \text{ virtuale}$$

Dobbiamo allora considerare un altro tipo di lavoro: non un lavoro elementare (o infinitesimo) ma un lavoro *finito*. Introduciamo le seguenti notazioni:

$\mathbf{q}_e$, configurazione di equilibrio nello spazio $\mathcal{C}_V$;

$\mathbf{q}_v$, configurazione variata, o "vicina", o perturbata, appartenente ad un opportuno intorno di $\mathbf{q}_e$, $I(\mathbf{q}_e)$.

Consideriamo inoltre un qualunque moto virtuale $\mathbf{q}(\tau)$, cioè un moto solo immaginato (visto che siamo in statica) ma compatibile con i vincoli, il quale partendo da $\mathbf{q}_e$ termina in $\mathbf{q}_v$:

$$\mathbf{q}(\tau) \quad \forall \tau \in [\tau_0,\ \tau_1] \quad \text{t.c. } \mathbf{q}(\tau_0) = \mathbf{q}_e,\ \mathbf{q}(\tau_1) = \mathbf{q}_v$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Calcoliamo ora il lavoro compiuto dalle forze attive agenti sul punto P lungo tale moto $\mathbf{q}(\tau)$

$$L(\mathbf{q}_e \to \mathbf{q}_v) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \pi^{(vir)}(\tau)\,\delta\tau\ , \tag{6.5.1}$$

dove $\pi^{(vir)}$ denota la potenza virtuale delle forze attive ed è definita da

$$\pi^{(vir)} := \sum_{P\in\mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \vec{v}_P^{(vir)} \qquad \vec{v}_P^{(vir)} := \frac{\delta\vec{x}_P}{\delta\tau} \quad \text{velocità del punto } P \text{ lungo un moto virtuale.} \tag{6.5.2}$$

L'idea è che il segno di tale lavoro distingue i tre diversi equilibri, P_1, P_2 e P_3:

1. P_1, $L\left(\mathbf{q}_e^{(1)} \to \mathbf{q}_v\right) < 0$ (resistente) $\forall \mathbf{q}_v \in I\left(\mathbf{q}_e^{(1)}\right)$
2. P_2, $L\left(\mathbf{q}_e^{(2)} \to \mathbf{q}_v\right) > 0$ (motore) $\forall \mathbf{q}_v \in I\left(\mathbf{q}_e^{(2)}\right)$
3. P_3, $L\left(\mathbf{q}_e^{(3)} \to \mathbf{q}_v\right) = 0$ (nullo) $\forall \mathbf{q}_v \in I\left(\mathbf{q}_e^{(3)}\right)$

In base alle evidenze sperimentali, adotteremo il seguente criterio di stabilità

Criterio statico di stabilità. Sia $\mathcal{B}$ un sistema olonomo a vincoli fissi, bilateri e non dissipativi, soggetto a una sollecitazione conservativa. Sia $\mathbf{q}_e$ una sua configurazione di equilibrio. Condizione sufficiente affinché $\mathbf{q}_e$ sia di equilibrio *stabile* è che esista un intorno di $\mathbf{q}_e$, $U(\mathbf{q}_e)$, tale che $\forall \mathbf{q}_v \in U(\mathbf{q}_e)$ il lavoro delle forze attive durante un *qualsiasi* moto virtuale che unisce $\mathbf{q}_e$ a $\mathbf{q}_v$ sia strettamente negativo

$$L(\mathbf{q}_e \to \mathbf{q}_v) < 0 \qquad \forall \mathbf{q}(\tau)$$

Mostreremo, ora, come il criterio si traduca in criterio operativo, in termini dell'energia potenziale $V(\mathbf{q})$ del sistema $\mathcal{B}$. A questo scopo, calcoliamo la funzione integranda dell'integrale (6.5.1), cioè la potenza virtuale delle forze attive (6.5.2).

Ricordiamo che, essendo in Statica, non ci sono moti effettivi; per questo parliamo di moto, velocità e potenza virtuali. Calcoliamo la velocità virtuale di un punto P. Per un modello $\mathcal{B}$ olonomo con vincoli fissi si ha

$$\vec{x}_P = \vec{x}_P(q_1(\tau), \ldots, q_l(\tau))$$

che, derivata rispetto al tempo virtuale τ, fornisce

$$\vec{v}_P^{(vir)} = \frac{\delta\vec{x}_P}{\delta\tau} = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial\vec{x}_P}{\partial q_k}\frac{\delta q_k}{\delta\tau}\ .$$

Dunque

$$\pi^{(vir)}(\tau) = \sum_{P\in\mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \left(\sum_{k=1}^{l} \frac{\partial\vec{x}_P}{\partial q_k}\frac{\delta q_k}{\delta\tau}\right) = \sum_{k=1}^{l} \frac{\delta q_k}{\delta\tau}\left(\sum_{P\in\mathcal{B}} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial\vec{x}_P}{\partial q_k}\right) = \sum_{k=1}^{l} Q_k \frac{\delta q_k}{\delta\tau}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Allora

$$L(\mathbf{q}_e \to \mathbf{q}_v) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\sum_{k=1}^{l} Q_k(\mathbf{q}) \frac{\delta q_k}{\delta \tau} \right) \delta\tau \tag{6.5.3}$$

Poiché la sollecitazione attiva sul sistema meccanico è per ipotesi conservativa la (6.5.3) diventa

$$\begin{aligned} L(\mathbf{q}_e \to \mathbf{q}_v) &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\sum_{k=1}^{l} \frac{\partial}{\partial q_k} (-V(\mathbf{q})) \frac{\delta q_k}{\delta \tau} \right) \delta\tau = \\ &= -\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\delta V}{\delta \tau} (\mathbf{q}(\tau)) \delta\tau \\ &= -\int_{\mathbf{q}_e}^{\mathbf{q}_v} \delta V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{q}_e) - V(\mathbf{q}_v) \end{aligned}$$

Osserviamo che, il lavoro delle forze attive non dipende dal particolare moto virtuale compiuto dal sistema per andare da $\mathbf{q}_e$ a $\mathbf{q}_v$, ma solo dalla configurazione iniziale e finale, tramite l'energia potenziale del sistema. Ritroviamo qui una proprietà dei campi di forza conservativi, generalizzata alla sollecitazione conservativa agente su un modello meccanico a vincoli olonomi.

Teorema 6.5.1. *(Lagrange-Dirichlet) Nelle stesse ipotesi del Criterio statico di stabilità, poiché*

$$L(\mathbf{q}_e \to \mathbf{q}_v) = V(\mathbf{q}_e) - V(\mathbf{q}_v) \ ,$$

possiamo concludere che $\mathbf{q}_e$ è di equilibrio stabile se l'energia potenziale del sistema ha un minimo (relativo) stretto in $\mathbf{q}_e$.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che se $V(\mathbf{q}_e)$ è minimo (relativo) stretto allora $L(\mathbf{q}_e \to \mathbf{q}_v) < 0 \quad \forall \mathbf{q}_v \in U(\mathbf{q}_e)$. □

N.B. La condizione del Teorema precedente è solo sufficiente per la stabilità dell'equilibrio, ma non necessaria. In altre parole, possono esistere configurazioni di equilibrio stabile in cui $V(\mathbf{q})$ non è minimo.

Esempio 6.5.1. *Consideriamo l'energia potenziale di un sistema con 1 g.l. e coordinata libera x, data da*

$$V(x) = \begin{cases} x^5 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

La funzione è di classe C^2, $V(0) = 0$ e si può dimostrare che il punto $x = 0$ è di equilibrio stabile malgrado non sia punto di minimo.

Su questo argomento, un risultato importante è dato dal teorema di Chetaev il quale afferma

Teorema 6.5.2. *(Chetaev) Se $V(\mathbf{q})$ è una funzione analitica in $\mathbf{q}_e$, cioè sviluppabile in serie di Taylor in un intorno opportuno di $\mathbf{q}_e$, se $\mathbf{q}_e$ NON è un punto di minimo (relativo) stretto per V, allora $\mathbf{q}_e$ è una configurazione di equilibrio instabile.*

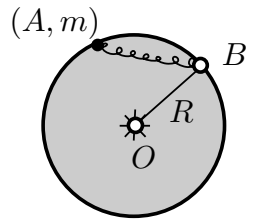
Dunque nelle ipotesi del Teorema di Chetaev, che sono sempre soddisfatte negli esempi ed esercizi che trattiamo, si può concludere:

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Teorema 6.5.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $\mathbf{q}_e$ *sia di equilibrio stabile è che esso sia un punto di minimo stretto per l'energia potenziale del sistema.*

N.B. Il Teorema di Lagrange-Dirichlet e il Teorema di Chetaev valgono per modelli meccanici con un numero finito di gradi di libertà ($l < \infty$) che, del resto, sono gli unici modelli che trattiamo in questo corso. Invece, non valgono, almeno in questa forma, per un continuo deformabile, come si vedrà nel corso di Scienza delle Costruzioni.

Esempio 6.5.2. *Si consideri il sistema della figura costituito da un disco rigido di raggio* R *e di massa* M*, vincolato con una cerniera cilindrica fissa in un piano verticale, e da una particella di massa* m *vincolata a scorrere sul bordo del disco e soggetta alla forza di una molla fissata in un punto* B *del bordo del disco. Tenendo conto che tutti i vincoli sono lisci, trovare le eventuali configurazioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.*



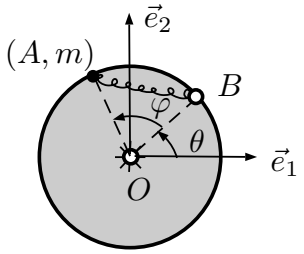
Disco+1 punto$\Rightarrow g = 3 + 2 = 5$
cerniera O+ appoggio di A$\Rightarrow v = 2 + 1 = 3$

$$l = 5 - 3 = 2$$

Il modello ha due gradi di libertà (come si calcola anche congelando successivamente la rotazione del disco e lo scorrimento di A sul bordo del disco).

Scegliamo come coordinate libere i 2 angoli di figura $-\pi < \theta \leq \pi$ e $-\pi < \varphi \leq \pi$, in modo che $\mathbf{q} = (\theta, \varphi)$.

$-\pi < \theta \leq \pi$
$-\pi < \varphi \leq \pi$
$\mathcal{C}_V = S^1 \times S^1 = T^2$



$$\vec{x}_A = R\Big(\cos(\theta + \varphi)\vec{e}_1 + \sin(\theta + \varphi)\vec{e}_2\Big)$$
$$\vec{x}_B = R\left(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2\right)$$

Il sistema è soggetto alla forza peso (sul disco e sulla particella A) e alla forza elastica esercitata dalla molla interna su A e su B, tutte forze conservative. Inoltre i vincoli sono lisci, fissi e bilateri; quindi la sollecitazione attiva è conservativa, come, del resto, si può verificare calcolando il campo delle forze lagrangiane (come faremo nell'Esempio 6.5.3).

Ora, invece, calcoleremo direttamente l'energia potenziale del sistema $V(\theta, \varphi)$:

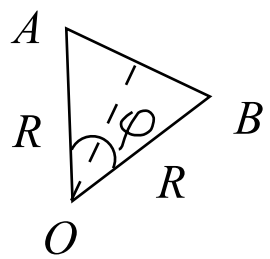
$$V(\theta, \varphi) = V^{(peso)} + V^{(molla)}$$

$$\begin{aligned} V^{(peso)} &= -m\vec{g} \cdot \vec{x}_A - M\vec{g} \cdot \vec{x}_O = mg\vec{e}_2 \cdot R\left(\cos(\theta + \varphi)\,\vec{e}_1 + \sin(\theta + \varphi)\,\vec{e}_2\right) = mgR\sin(\theta + \varphi) \\ V^{(molla)} &= \frac{1}{2}c\left|\vec{x}_A - \vec{x}_B\right|^2 = cR^2\left(1 - \cos\varphi\right) \end{aligned}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$$
\begin{aligned}
|\vec{x}_A - \vec{x}_B|^2 &= \Big| R\Big(\cos(\theta+\varphi) - \cos\theta\Big)\vec{e}_1 + R\Big(\sin(\theta+\varphi) - \sin\theta\Big)\vec{e}_2 \Big|^2 \\
&= R^2\Big(\big(\cos(\theta+\varphi) - \cos\theta\big)^2 + \big(\sin(\theta+\varphi) - \sin\theta\big)^2\Big) \\
&= R^2\Big(\cos^2(\theta+\varphi) + \cos^2\theta - 2\cos(\theta+\varphi)\cos\theta + \sin^2(\theta+\varphi) + \sin^2\theta - 2\sin(\theta+\varphi)\sin\theta\Big) \\
&= R^2\Big(2 - 2\big(\cos(\theta+\varphi)\cos\theta + \sin(\theta+\varphi)\sin\theta\big)\Big) \\
&= 2R^2\Big(1 - \cos\big(\cancel{\theta} + \varphi - \cancel{\theta}\big)\Big) = 2R^2(1-\cos\varphi)
\end{aligned}
$$

N.B. La lunghezza del lato AB del triangolo AOB si può anche calcolare più velocemente per via trigonometrica mediante il Teorema del coseno (pag.5), oppure tenendo conto che il triangolo AOB è isoscele, quindi



$$\overline{AB}^2 = 4R^2(\sin\tfrac{\varphi}{2})^2 = 2R^2(1-\cos\varphi)$$

Dunque, l'energia potenziale del sistema è data da

$$V(\theta,\varphi) = mgR\sin(\theta+\varphi) + cR^2(1-\cos\varphi) \tag{6.5.4}$$

Cerchiamo i punti stazionari. Poiché

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \theta} &= mgR\cos(\theta+\varphi) = -Q_\theta \\
\frac{\partial V}{\partial \varphi} &= mgR\cos(\theta+\varphi) + cR^2\sin\varphi = -Q_\varphi
\end{aligned}
$$

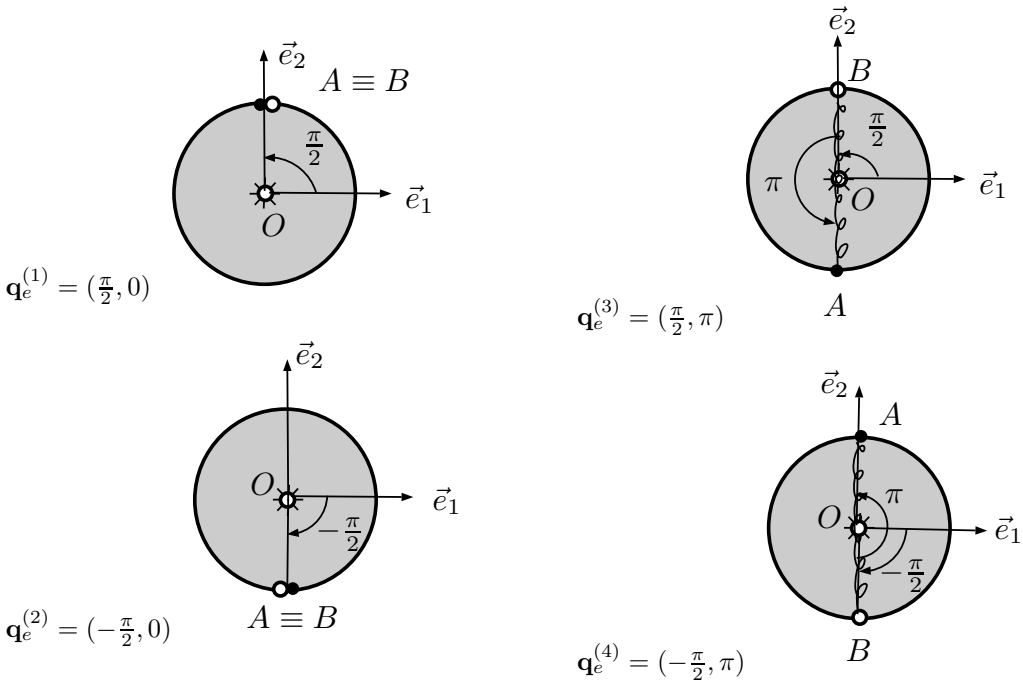
essi sono dati dalla soluzione del sistema

$$
\begin{cases} mgR\cos(\theta+\varphi) = 0 \\ mgR\cos(\theta+\varphi) + cR^2\sin\varphi = 0 \end{cases}
\quad\Leftrightarrow\quad
\begin{cases} \cos(\theta+\varphi) = 0 \\ \sin\varphi = 0 \end{cases}
\qquad \varphi = 0,\,\pi
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi = 0 \quad \theta &= \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \\
\varphi = \pi \quad \theta &= \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

In conclusione, le configurazioni di equilibrio $\mathbf{q}_e = (\theta_e, \varphi_e)$ sono date da:

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Ora verifichiamone la stabilità. A questo scopo, calcoliamo la matrice Hessiana di $V(\theta, \varphi)$:

$$\mathcal{H}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} -mgR\sin(\theta+\varphi) & -mgR\sin(\theta+\varphi) \\ -mgR\sin(\theta+\varphi) & -mgR\sin(\theta+\varphi) + cR^2\cos\varphi \end{bmatrix}$$

e valutiamola nelle configurazioni di equilibrio

$$\mathcal{H}_e^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -mgR\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\frac{cR}{mg} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\det \mathcal{H}_e^{(1)}}{(-mgR)^2} = -\frac{cR}{mg} < 0 \ , \ H_{11}^{(1)} < 0,$$

$$\mathcal{H}_e^{(2)}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) = mgR\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\frac{cR}{mg} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\det \mathcal{H}_e^{(2)}}{(mgR)^2} = \frac{cR}{mg} > 0 \ , \ H_{11}^{(2)} > 0 \ ,$$

$$\mathcal{H}_e^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = mgR\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\frac{cR}{mg} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\det \mathcal{H}_e^{(3)}}{(mgR)^2} = -\frac{cR}{mg} < 0 \ , \ H_{11}^{(3)} > 0,$$

$$\mathcal{H}_e^{(4)}\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right) = -mgR\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\frac{cR}{mg} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\det \mathcal{H}_e^{(4)}}{(-mgR)^2} = \frac{cR}{mg} > 0 \ , \ H_{11}^{(4)} < 0 \ .$$

In base agli studi fatti nel corso di Analisi II [Omari e Trombetta] sulla segnatura della forma quadratica associata alla matrice Hessiana e la natura dei punti stazionari di una funzione scalare (in questo caso $V(\theta, \varphi)$), i dati precedenti possono essere riassunti nella tabella seguente

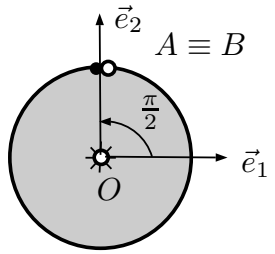
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

equilibri	$\det \mathcal{H}_e$	H_{11}	segnatura	Punto stazionario	stabilità
$\vec{q}_e^{(1)}$	$-$		indefinita	sella	instabile
$\vec{q}_e^{(2)}$	$+$	$+$	positiva	min.	stabile
$\vec{q}_e^{(3)}$	$-$		indefinita	sella	instabile
$\vec{q}_e^{(4)}$	$+$	$-$	negativa	max	instabile

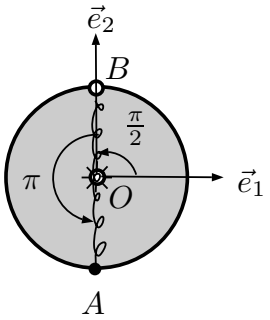
Ai fini della stabilità degli equilibri, i casi precedenti si riducono a due:

$$\begin{cases} H_{11} > 0 \quad \text{et} \det \mathcal{H}_e > 0 \Rightarrow \text{stabilità} \\ \text{altrimenti} \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \text{instabilità} \end{cases}$$

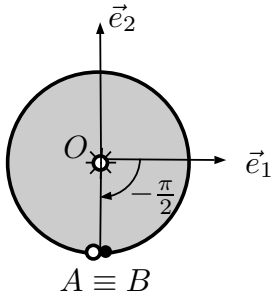
Ricapitolando i risultati ottenuti sopra,



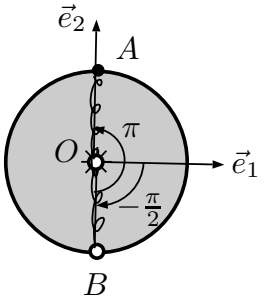
$\mathbf{q}_e^{(1)} = (\frac{\pi}{2}, 0)$
instabile



$\mathbf{q}_e^{(3)} = (\frac{\pi}{2}, \pi)$
instabile



$\mathbf{q}_e^{(2)} = (-\frac{\pi}{2}, 0)$
stabile



$\mathbf{q}_e^{(4)} = (-\frac{\pi}{2}, \pi)$
instabile

Metodo sistematico per il calcolo dell'energia potenziale

Qui illustriamo il metodo sistematico per il calcolo di V nel caso del modello con 2 gradi di libertà dell'esempio precedente.

Esempio 6.5.3.

Calcoliamo le forze generalizzate per il modello dell'Esempio 6.5.2 con il I metodo, facendo riferimento alla figura 6.5.1.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

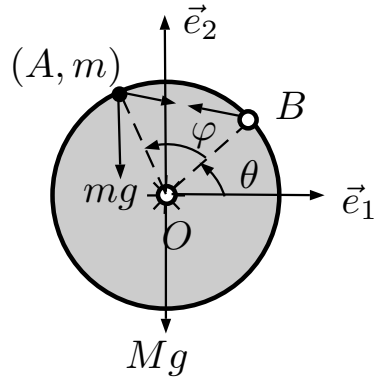


Figura 6.5.1: Diagramma delle forze attive

$$
\begin{aligned}
Q_\theta &= \Big(m\vec{g} + \vec{F}_A\Big) \cdot \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \theta} + \vec{F}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial \theta} + M\vec{g} \cdot \cancel{\frac{\partial \vec{x}_O}{\partial \theta}} \\
Q_\varphi &= \Big(m\vec{g} + \vec{F}_A\Big) \cdot \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \varphi} + \vec{F}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial \varphi} + M\vec{g} \cdot \cancel{\frac{\partial \vec{x}_O}{\partial \varphi}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \theta} &= R\big(-\sin(\theta+\varphi)\,\vec{e}_1 + \cos(\theta+\varphi)\,\vec{e}_2\big) = \frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \varphi} \\
\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial \theta} &= R\big(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2\big), \qquad \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial \varphi} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_A &= -c\,(\vec{x}_A - \vec{x}_B) = -cR\big((\cos(\theta+\varphi) - \cos\theta)\,\vec{e}_1 + (\sin(\theta+\varphi) - \sin\theta)\,\vec{e}_2\big) \\
\vec{F}_B &= -\vec{F}_A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_\theta &= \Bigg(-mg\vec{e}_2 - cR\Big(\big(\cos(\theta+\varphi) - \cos\theta\big)\vec{e}_1 + \big(\sin(\theta+\varphi) - \sin\theta\big)\vec{e}_2\Big)\Bigg) \cdot R\Big(-\sin(\theta+\varphi)\,\vec{e}_1 + \cos(\theta+\varphi)\,\vec{e}_2\Big) + \\
&\quad + cR\Big(\Big(\cos(\theta+\varphi) - \cos\theta\Big)\vec{e}_1 + \Big(\sin(\theta+\varphi) - \sin\theta\Big)\vec{e}_2\Big) \cdot R\big(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2\big) = \\
&= -mgR\cos(\theta+\varphi) - cR^2\Big(\big(\cancel{\cos(\theta+\varphi)} - \cancel{\cos\theta}\big)\big(-\sin(\theta+\varphi)\big) + \big(\cancel{\sin(\theta+\varphi)} - \cancel{\sin\theta}\big)\cos(\theta+\varphi)\Big) + \\
&+ cR^2\Big(\big(\cancel{\cos(\theta+\varphi)} - \cancel{\cos\theta}\big)(-\sin\theta) + \big(\cancel{\sin(\theta+\varphi)} - \cancel{\sin\theta}\big)\cos\theta\Big) \\
&= -mgR\cos(\theta+\varphi)
\end{aligned}
$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$$
\begin{aligned}
Q_\varphi &= \Big(-mg\vec{e}_2 - cR\Big(\big(\cos(\theta+\varphi)-\cos\theta\big)\vec{e}_1 + \big(\sin(\theta+\varphi)-\sin\theta\big)\vec{e}_2\Big)\cdot \\
&\quad \cdot R\Big(-\sin(\theta+\varphi)\,\vec{e}_1 + \cos(\theta+\varphi)\,\vec{e}_2\Big) = \\
&= -mgR\cos(\theta+\varphi) - cR^2\Big(-\sin(\theta+\varphi)\big(\cancel{\cos(\theta+\varphi)}-\cos\theta\big) + \cos(\theta+\varphi)\big(\cancel{\sin(\theta+\varphi)}-\sin\theta\big)\Big) \\
&= -mgR\cos(\theta+\varphi) - cR^2\big(\sin(\theta+\varphi)\cos\theta - \cos(\theta+\varphi)\sin\theta\big) = \\
&= -mgR\cos(\theta+\varphi) - cR^2\sin\big(\cancel{\theta}+\varphi-\cancel{\theta}\big) = \\
&= -mgR\cos\big(\theta+\varphi\big) - cR^2\sin\varphi
\end{aligned}
$$

Ora, verifichiamo che il test di conservatività (6.2.3) sia soddisfatto

$$
\frac{\partial Q_\theta}{\partial\varphi} = mgR\sin(\theta+\varphi) = \frac{\partial Q_\varphi}{\partial\theta} \qquad \forall\,(\theta,\varphi)\in\mathcal{C}_V
$$

Pertanto, esiste in $\mathcal{C}_V$ la funzione energia potenziale $V(\theta,\,\varphi)$ che possiamo calcolare integrando il sistema di equazioni alle derivate parziali

$$
\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial\theta} = mgR\cos(\theta+\varphi) \\ \frac{\partial V}{\partial\varphi} = mgr\cos(\theta+\varphi) + cR^2\sin\varphi \end{cases} \tag{6.5.5}
$$

con il metodo di *variazione delle funzioni arbitrarie*. Dalla I Eq. (6.5.5) ricaviamo che

$$
V(\theta,\,\varphi) = mgR\int\cos(\theta+\varphi)\,d\theta + F(\varphi) = mgR\sin(\theta+\varphi) + F(\varphi) \tag{6.5.6}
$$

Si osservi che ora V è determinata a meno di una funzione incognita, $F(\varphi)$, della sola coordinata φ. Per determinare tale funzione, calcoliamo la derivata parziale della (6.5.6) rispetto alla coordinata φ

$$
\frac{\partial V}{\partial\varphi} = mgR\cos(\theta+\varphi) + F'(\varphi)
$$

e richiediamo che essa soddisfi la II equazione delle (6.5.5), cioè

$$
\cancel{mgR\cos(\theta+\varphi)} + F'(\varphi) = \cancel{mgR\cos(\theta+\varphi)} + cR^2\sin\varphi\ .
$$

Questa è una equazione differenziale ordinaria nella funzione incognita $F(\varphi)$, la cui soluzione generale è

$$
F(\varphi) = -cR^2\cos\varphi + \text{cost} \Rightarrow V \equiv (6.5.4)
$$

Esercizio 6.5.1. *Dire se la sollecitazione agente sui modelli degli esempi 5.11.1 e 5.11.2 e dell'esercizio 5.11.2 è conservativa; in caso affermativo calcolare l'energia potenziale e discutere la stabilità degli equilibri.*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

6.6 Soluzione degli esercizi

Esercizio 6.2.1 .

1. Non conservativa.
2. Conservativa poiché $l = 1$. L'energia potenziale è $V(\varphi) = cost$, poiché $Q_\varphi = 0$. Quindi, l'asta è in equilibrio $\forall \varphi \in \mathcal{C}_V = S^1$.

Esercizio 6.5.1 .

Esempio 5.11.1 Non conservativa, poiché $\frac{\partial Q_x}{\partial \varphi} \neq \frac{\partial Q_\varphi}{\partial x}$.

Esempio 5.11.2 La sollecitazione agente sul modello biella-manovella è conservativa poiché $l = 1$. L'energia potenziale è pari a

$$V(\varphi) = -\int Q_\varphi \delta\varphi = -\int L\cos\varphi(cL\sin\varphi - mg)\,\delta\varphi = mgL\sin\varphi + c\frac{L^2}{2}\cos^2\varphi$$

Discutiamo la stabilità dei due equilibri $\varphi_e = \pm\frac{\pi}{2}$, che esistono qualunque siano i valori dei parametri e di $\varphi_e^{(1)} = \arcsin\lambda$, $\varphi_e^{(3)} = \pi - \varphi_e^{(1)}$, che esistono solo se $\lambda = \frac{mg}{cL} < 1$. A tale scopo, studiamo il segno della derivata seconda dell'energia potenziale

$$V''(\varphi) = -(cL^2\cos 2\varphi + mgL\sin\varphi) = cL^2(2\sin^2\varphi - 1) - mgL\sin\varphi = cL^2(2\sin^2\varphi - 1 - \lambda\sin\varphi),$$

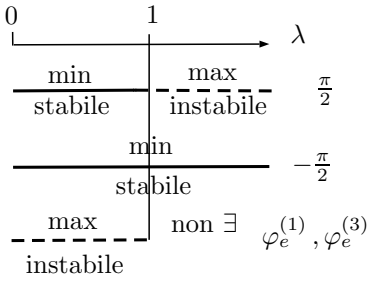
nelle configurazioni di equilibrio. Allora, valgono le disuguaglianze seguenti

$$V''(\frac{\pi}{2}) = cL^2(1-\lambda) > 0 \qquad \text{se } \lambda < 1$$

$$V''(-\frac{\pi}{2}) = cL^2(1+\lambda) > 0 \qquad \forall\lambda$$

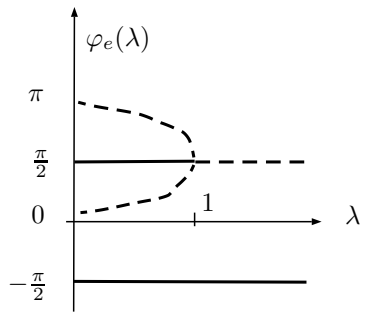
$$V''(\varphi_e^{(1)}) = V''(\varphi_e^{(3)}) = cL^2(\lambda^2 - 1) < 0 \qquad \text{se } 0 < \lambda < 1\ ,$$

e quindi la stabilità illustrata dai diagrammi



I risultati ottenuti si possono riassumere nel cosiddetto diagramma di biforcazione

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



dove si conviene di disegnare con un tratto continuo gli equilibri stabili e con uno discontinuo quegli instabili. Si noti che la stabilità di una stessa configurazione di equilibrio può dipendere dal valore di un parametro; in questo esempio la stabilità di $\varphi_e = \frac{\pi}{2}$ dipende dal valore di λ. Cosa succede in $\varphi = \pi/2$ se $\lambda = 1$?

Esercizio 5.11.2 La sollecitazione attiva del carico di punta è data da

$$Q_\rho = F \qquad Q_\varphi = 0 \ ,$$

ed è conservativa, poichè

$$\frac{\partial Q_\rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \rho} = 0 \qquad \forall \ (\theta, \varphi) \in \mathcal{C}_V$$

Dunque, integrando il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \rho} = -F \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \tag{6.6.1}$$

si ottiene che la sua energia potenziale è

$$V^{(foll)} = -F\rho \ .$$

N.B. Questo esempio dimostra che non sempre un carico follower è *non* conservativo, come si potrebbe pensare. Quindi, si deve verificarlo caso per caso.

La sollecitazione del peso è conservativa e la sua energia potenziale si può calcolare usando la (6.2.4).

Quindi

$$V^{(peso)} = -m\vec{g} \cdot \vec{x}_G = mg\vec{e}_2 \cdot (\rho - \frac{L}{2})\vec{e}_\rho = mg \sin\varphi \, (\rho - \frac{L}{2}) \ , \tag{6.6.2}$$

e l'energia potenziale totale risulta

$$V = V^{(foll)} + V^{(peso)} = -F\rho + mg \sin\varphi \, (\rho - \frac{L}{2}) \ .$$

Per determinare la stabilità degli equilibri, scriviamo la matrice Hessiana di V

$$\mathcal{H}\,(\rho,\, \varphi) = \begin{bmatrix} 0 & mg\cos\varphi \\ mg\cos\varphi & -mg(\rho - \frac{L}{2})\sin\varphi \end{bmatrix} \ ,$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

e valutiamola nelle configurazioni di equilibrio (5.12.5)

$$\mathcal{H}_e^{(1)}\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = mg \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\rho - \frac{L}{2}) \end{bmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{H}_e^{(1)} = 0 \ ,$$

$$\mathcal{H}_e^{(2)}\left(\frac{L}{2}, \arcsin\lambda\right) = mg \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1-\lambda^2} \\ \sqrt{1-\lambda^2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{H}_e^{(1)} < 0 \ , \text{se } \lambda \neq 1$$

$$\mathcal{H}_e^{(3)}\left(\frac{L}{2}, \pi - \arcsin\lambda\right) = mg \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{1-\lambda^2} \\ -\sqrt{1-\lambda^2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{H}_e^{(1)} < 0 \ , \text{se } \lambda \neq 1$$

Dunque, la situazione è la seguente

equilibri	$\det \mathcal{H}_e$	segnatura	Punto stazionario	stabilità
$\vec{q}_e^{(1)}$	0	?	?	dubbio
$\vec{q}_e^{(2)}$	$-$	indefinita	sella	instabile
$\vec{q}_e^{(3)}$	$-$	indefinita	sella	instabile

N.B Nei casi in cui $\det \mathcal{H}_e = 0$ o, rispettivamente, $\mathcal{H}_e$ è uguale alla matrice nulla (in questo esempio per $\lambda = 1$) la forma quadratica è semidefinita positiva o, rispettivamente, è nulla. Allora, niente si può dire sulla qualità dei punti stazionari, senza ricorrere ai termini di ordine superiore dello sviluppo di Taylor o ad altri metodi ad hoc.

Esercizio 6.6.1. *Calcolare l'energia potenziale* (6.6.2) *utilizzando il metodo sistematico esposto nella sezione precedente.*

Soluzione. L'energia potenziale della forza peso si può calcolare risolvendo il sistema di EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \rho} = -Q_\rho^{(peso)} = mg\sin\varphi \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -Q_\varphi^{(peso)} = mg\cos\varphi(\rho - \frac{L}{2}) \end{cases} \tag{6.6.3}$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$V(\rho, \varphi) = mg\rho\sin\varphi + F(\varphi) \tag{6.6.4}$$

Richiedendo che la (6.6.4) soddisfi la seconda Eq.(6.6.3), si determina la funzione arbitraria $F(\varphi)$. Precisamente, sostituendo

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = mg\rho\cos\varphi + F'(\varphi)$$

nella seconda della (6.6.3) si ottiene la EDO

$$\cancel{mg\rho\cos\varphi} + F'(\varphi) = mg\cos\varphi(\cancel{\rho} - \frac{L}{2}) \ ,$$

da cui

$$F(\varphi) = -mg\frac{L}{2}\sin\varphi \ .$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Capitolo 7

Forze applicate su un rigido

Nel Cap. 5 abbiamo visto che il PLV è una condizione necessaria e sufficiente all'equilibrio di un modello meccanico soggetto a vincoli fissi e non dissipativi. Ciò che conta, quindi, è il lavoro virtuale dell'insieme delle forze attive per il calcolo degli equilibri ed il lavoro virtuale dell'insieme delle forze reattive per la definizione dei vincoli non dissipativi. Insomma, non sono le singole forze applicate che contano, bensì il loro *lavoro virtuale* complessivo. Conviene, allora, introdurre la seguente

Definizione 7.0.1. *Diremo che due insiemi di forze* $\mathcal{S} = \{(A_i, \vec{F}_i)\}$ *ed* $\mathcal{S}' = \{(A'_i, \vec{F}'_i)\}$*, applicate sullo stesso modello meccanico vincolato sono equivalenti e scriveremo in simboli*

$$\mathcal{S} \sim \mathcal{S}' \ ,$$

se producono lo stesso lavoro virtuale per ogni insieme di spostamenti virtuali del modello

$$\sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{A}_i = \sum \vec{F'}_i \cdot \delta\vec{A'}_i \qquad \forall\ \delta\vec{A}_i \quad ,\forall\ \delta\vec{A'}_i \tag{7.0.1}$$

7.1 Insiemi di forze equivalenti su un rigido

Sappiamo che, nel caso di un rigido $\mathcal{R}$, il lavoro virtuale di un insieme di forze applicate si calcola come

$$LV = \vec{R} \cdot \delta\vec{x}_{O'} + \vec{M}_{O'} \cdot \vec{\epsilon} \qquad\qquad O' \in \mathcal{R} \ . \tag{7.1.1}$$

Possiamo quindi enunciare la seguente proposizione di semplice dimostrazione

Proposizione 7.1.1. *Due insiemi di forze* $\mathcal{S}$ *e* $\mathcal{S}'$ *agenti su un rigido sono equivalenti se*

$$\vec{R} = \vec{R}\,' \tag{7.1.2}$$

e se $\exists$ *un punto* $O \ \in \mathcal{E}_3$ *tale che*

$$\vec{M}_O = \vec{M}'_O \tag{7.1.3}$$

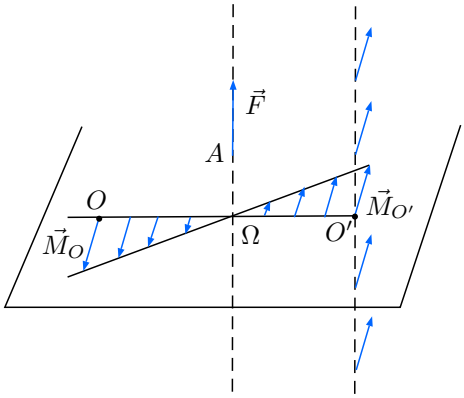


Figura 7.2.1: Campo dei momenti di una singola forza: struttura rotatoria

Dimostrazione. Basta dimostrare che se valgono la (7.1.2) e la (7.1.3), la (7.1.3) è verificata anche per un punto O' appartenente al rigido. Ciò è assicurato dal fatto che, nelle suddette ipotesi, la (7.1.3) vale per un polo del tutto arbitrario, grazie alla formula di trasporto. Infatti:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \times \vec{R} \tag{7.1.4}$$

$$\vec{M}'_{O'} = \vec{M}'_O + (O - O') \times \vec{R}' \ .$$

Dunque, se $\vec{R} = \vec{R}'$ e $\vec{M}_O = \vec{M}'_O \Rightarrow \vec{M}_{O'} = \vec{M}'_{O'} \qquad \forall O'$. □

Dunque, possiamo concludere che insiemi *diversi* di forze applicate su un rigido, ma aventi lo stesso risultante e lo stesso momento risultante, hanno lo stesso effetto meccanico ai fini dell'equilibrio di un corpo rigido. Per tale motivo, i due vettori $\left(\vec{R}, \vec{M}_O\right)$ si dicono vettori caratteristici per l'insieme $\mathcal{S}$.

7.2 Insiemi elementari di forze su un rigido

In questa sezione faremo vedere che il più generale insieme di forze applicate ad un rigido è equivalente a uno dei quattro insiemi elementari che elencheremo nel seguito. Di tutti gli insiemi elementari di vettori applicati, disegneremo il campo dei momenti, cioè il momento risultante calcolato rispetto a ciascun punto dello spazio e rappresentato come un vettore applicato allo stesso punto. A tale scopo, utilizzeremo la formula di trasporto (7.1.4).

7.2.1 Singola forza

Nel caso di una singola forza $\mathcal{S} = \{(A, \vec{F})\}$, il momento di $\vec{F}$ rispetto a qualsiasi polo O si può sempre scrivere

$$\vec{M}_O = (A - O) \times \vec{F} = \big((A - \Omega) + (\Omega - O)\big) \times \vec{F} = (\Omega - O) \times \vec{F} \qquad \Omega \in r \ , \tag{7.2.1}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

dove Ω è un qualunque punto di r, retta d'azione di $\vec{F}$. Allora, scegliendo Ω come il punto d'intersezione di r con il piano passante per O e ortogonale r, è facile osservare che il campo dei momenti ha una struttura rotatoria e gode delle seguenti proprietà:

- la retta d'azione di $\vec{F}$ è il luogo di tutti e soli i punti a momento nullo;
- il momento di $\vec{F}$ rispetto a un punto O fuori dalla retta d'azione, giace nel piano ortogonale a r e passante per O, e ha modulo proporzionale alla distanza di O da r;
- il momento di $\vec{F}$ rispetto ai punti che stanno su una parallela a r non varia.

Il campo dei momenti di una singola forza è rappresentato nella Fig. 7.2.1.

7.2.2 Coppia

Invece, nel caso di una coppia, il campo dei momenti è uniforme, cioè non dipende dal polo, come abbiamo già osservato nel Cap. 2. Quindi, se $\vec{M} \neq \vec{0}$, non esiste alcun punto dello spazio rispetto al quale il momento si annulla ed esso si può rappresentare come in Fig. 7.2.2.

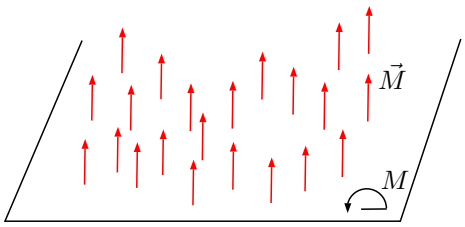


Figura 7.2.2: Campo dei momenti di una coppia di forze: struttura uniforme

7.2.3 Torsore

Introduciamo, ora, il terzo degli insiemi elementari, cioè il torsore.

Definizione 7.2.1. *L'insieme di forze $\mathcal{S} = \{(A, \vec{F}), \vec{M}\}$, costituito da una singola forza $(A, \vec{F})$ e da una coppia di momento $\vec{M}$ parallelo a $\vec{F}$, si dice torsore. Esso è caratterizzato dall'equazione*

$$\vec{F} \times \vec{M} = \vec{0} \ .$$

Il campo dei momenti di un torsore, illustrato nella Fig. 7.2.3, è la somma vettoriale del campo uniforme della coppia e del campo dei momenti della singola forza

$$\vec{M}_O = \vec{M} + (A - O) \times \vec{F} \ . \tag{7.2.2}$$

La retta di applicazione della forza $\vec{F}$ si dice *asse* del torsore. È facile osservare che il campo dei momenti ha una struttura elicoidale e gode delle seguenti proprietà:

- l'asse del torsore è il luogo di tutti e soli i punti rispetto ai quali il momento del torsore è minimo (in modulo) ed è parallelo all'asse;

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

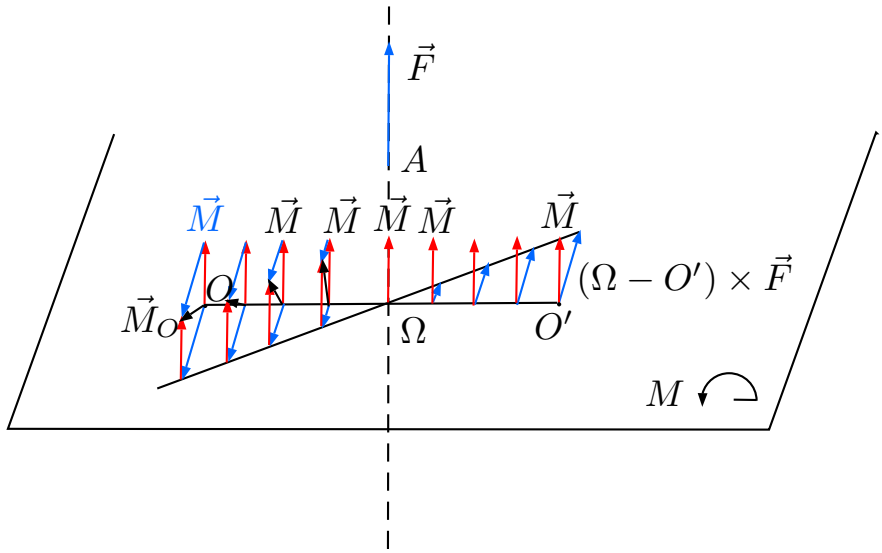


Figura 7.2.3: Campo dei momenti di un torsore: struttura elicoidale

- il momento del torsore rispetto a un punto O fuori dall'asse, è tangente alla superficie del cilindro circolare passante per O e avente come asse l'asse del torsore;
- il momento del torsore rispetto ai punti che stanno su una parallela all'asse del torsore non varia.

7.2.4 Insieme nullo o equilibrato

È quello formato dal vettore nullo applicato in un punto qualsiasi e si indica con $\{\vec{0}\}$. Quindi, ha risultante e momento risultante nulli. Ad esempio, una coppia di forze a braccio nullo.

7.3 Caso generale

Studiamo, ora, il campo dei momenti di un generico insieme di forze. A tale scopo, conviene introdurre i seguenti *invarianti*.

Definizione 7.3.1. .

- *Invariante* scalare *statico*
$$\mathcal{I} := \vec{M}_O \cdot \vec{R} \qquad O \in \mathcal{E}_3$$
- *Invariante* vettoriale *statico*
$$\vec{M}_{\parallel} := \Big(\vec{M}_O \cdot vers(\vec{R})\Big) vers(\vec{R}) = \frac{\mathcal{I}}{|\vec{R}|^2}\vec{R} \ ,$$
che coincide con il componente di $\vec{M}_O$ parallelo a $\vec{R}$.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

È immediato osservare che $\mathcal{I}$ e, quindi $\vec{M}_{\parallel}$, non dipendono dal polo O. Infatti, se scegliamo un diverso polo O', dalla formula di trasporto (2.7.4) segue che

$$\mathcal{I}_{O'} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \left(\vec{M}_O + (O - O') \times \vec{R}\right) \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} + \cancel{(O - O') \times \vec{R} \cdot \vec{R}} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = \mathcal{I}_O \ .$$

Teorema 7.3.1 (Esistenza dell'asse centrale)**.** *Per ogni insieme $\mathcal{S}$ di forze applicate con $\vec{R} \neq \vec{0}$, esiste una retta parallela ad $\vec{R}$, detta asse centrale di $\mathcal{S}$, rispetto ai punti della quale il momento risultante è minimo. L'equazione parametrica di tale asse è*

$$\Omega - O = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \ . \tag{7.3.1}$$

Dimostrazione. Scelto un qualunque polo O, scomponiamo $\vec{M}_O$ nel suo componente $\vec{M}_{\parallel}$ parallelo ad $\vec{R}$ e in quello ortogonale $\vec{M}_{\perp}(O)$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_{\perp}(O) \ , \tag{7.3.2}$$

e cerchiamo un punto Ω rispetto al quale il momento risultante sia minimo o, equivalentemente, rispetto al quale si annulli $\vec{M}_{\perp}(\Omega)$. A tale scopo, utilizziamo la formula di trasporto nella (7.3.2), ottenendo

$$\cancel{\vec{M}_{\parallel}} + \vec{M}_{\perp}(O) = \cancel{\vec{M}_{\parallel}} + \vec{M}_{\perp}(\Omega) + (\Omega - O) \times \vec{R}$$

Richiedere che $\vec{M}_{\perp}(\Omega) = \vec{0}$, equivale a chiedere che Ω risolva l'equazione vettoriale

$$(\Omega - O) \times \vec{R} = \vec{M}_{\perp}(O)$$

Tale equazione è stata risolta nel Cap. 2 (vedi Eq. (2.1.15)) e le sue soluzioni sono tutti e soli i punti della retta di equazione parametrica (7.3.1) (vedi Eq. (2.1.17)). □

Teorema 7.3.2 (di classificazione)**.** *Gli insiemi $\mathcal{S}$ di forze applicate ad un rigido possono essere suddivisi in quattro classi di equivalenza, come illustrato nella tabella seguente*

Tabella 7.3.1: Classificazione degli insiemi di forze su un rigido

$\mathcal{I} = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$	$\vec{R}$	$\vec{M}_O$	Categoria	$\mathcal{S}$
$\neq 0$			Torsore	$\{(\Omega, \vec{R}), \vec{M}_{\parallel}\}$
$= 0$	$\neq 0$		Vettore	$\{(\Omega, \vec{R})\}$
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	Coppia	$\{\vec{M}_O\}$
$= 0$	$= 0$	$= 0$	Nullo	$\{\vec{0}\}$

Dimostrazione. .

1. Se l'invariante scalare $\mathcal{I}$ è non nullo, $\vec{R} \neq \vec{0}$, quindi esiste l'asse centrale di $\mathcal{S}$ per il Teo 7.3.1. In tal caso, $\mathcal{S}$ equivale al torsore il cui asse coincide con l'asse centrale di $\mathcal{S}$ e il cui momento è pari all'invariante vettoriale $\vec{M}_{\parallel}$ di $\mathcal{S}$.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

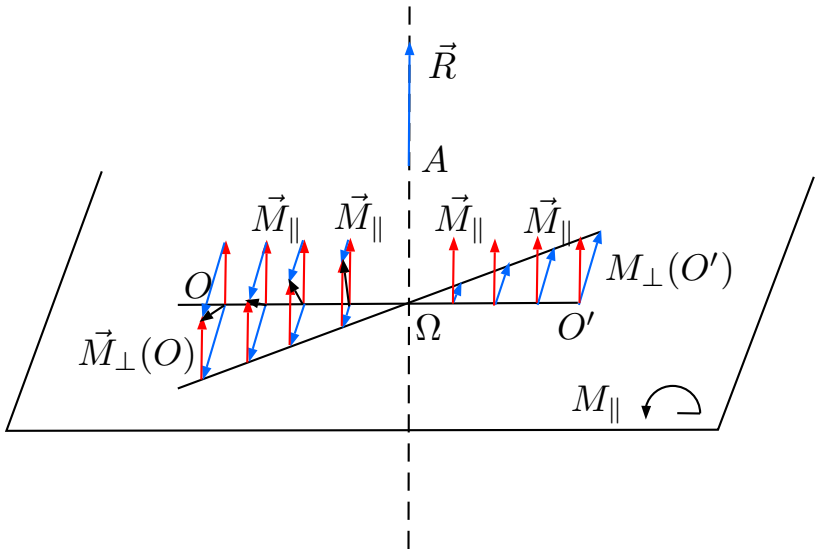


Figura 7.3.1: Asse centrale di un insieme di forze

2. Se l'invariante scalare $\mathcal{I}$ è nullo **et** $\vec{R}$ è non nullo, allora $\mathcal{S}$ equivale a un singolo vettore $\vec{R}$ applicato in un punto dell'asse centrale. In tal caso, $\mathcal{S}$ è detto insieme di forze *a risultante equivalente*.

3. Se $\mathcal{I} = 0$ **et** $\vec{R} = \vec{0}$ **et** $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, allora $\mathcal{S}$ equivale ad una coppia il cui momento è pari a $\vec{M}_O$, essendo O un polo qualsiasi.

4. Se $\mathcal{I} = 0$ **et** $\vec{R} = \vec{0}$ **et** $\vec{M}_O = \vec{0}$, allora $\mathcal{S}$ equivale a l'insieme nullo. Ad esempio, una coppia di forze a braccio nullo.

□

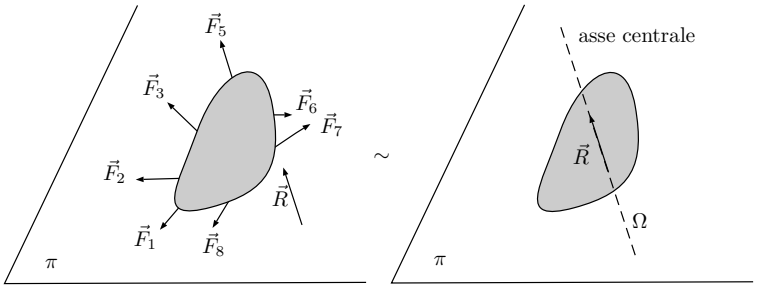
7.4 Insiemi di forze a risultante equivalente

Gli insiemi di forze equivalenti a un singolo vettore applicato sono detti, anche, insiemi a *risultante equivalente*.Vediamone tre esempi rilevanti: le forze complanari, forze concorrenti e forze parallele.

7.4.1 Forze complanari.

Consideriamo un qualunque insieme di forze complanari, insieme che ricorre in tutti i problemi di meccanica delle lamine soggette a forze nel loro piano.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



In questo caso, $\vec{R} \in \pi$, $\vec{M}_O \perp \pi \quad \forall O \in \pi$.

Proposizione 7.4.1. *Poiché per ogni insieme $\mathcal{S}$ di forze complanari il momento risultante $\vec{M}_O$ rispetto a un qualsiasi polo appartenente al piano, è ortogonale a $\vec{R}$, risulta che $\mathcal{I} = 0$. Quindi, $\mathcal{S}$ equivale a :*

1. *se $\vec{R} \neq \vec{0} \Rightarrow \mathcal{S} \sim$ singola forza $\left\{\left(\Omega, \vec{R}\right)\right\}$;*
2. *se $\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0} \Rightarrow \mathcal{S} \sim$ coppia di momento ortogonale a π;*
3. *se $\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \mathcal{S} \sim$ coppia a braccio nullo.*

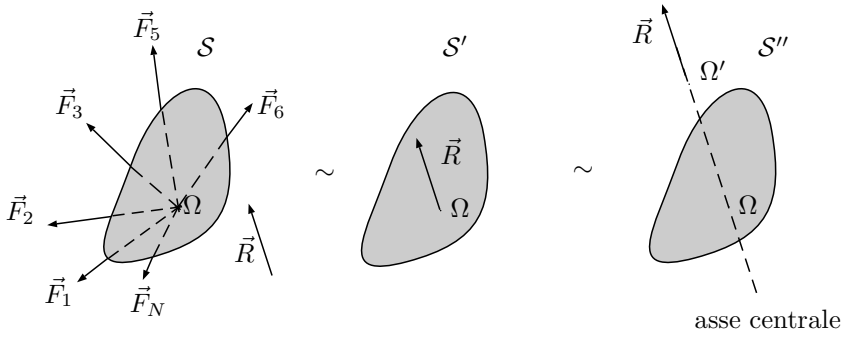
In conclusione, nel caso 1. esiste un'intera retta parallela a $\vec{R}$, rispetto ai punti della quale il momento risultante di $\mathcal{S}$ si annulla. È l'asse centrale dell'insieme delle forze complanari e passa per il punto

$$\Omega - O = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} \ ,$$

che appartiene al piano. Quindi, l'asse centrale di un insieme di forze complanari giace nel piano delle forze.

7.4.2 Forze concorrenti

Consideriamo un insieme di forze concorrenti in un punto Ω dello spazio $\mathcal{E}_3$. Poiché $\vec{M}_\Omega = \vec{0}$, esso ha invariante scalare nullo, $\mathcal{I} = \vec{M}_\Omega \cdot \vec{R} = 0$. Allora equivale all'insieme equilibrato se $\vec{R} = \vec{0}$, invece è un insieme a risultante equivalente se $\vec{R} \neq \vec{0}$.



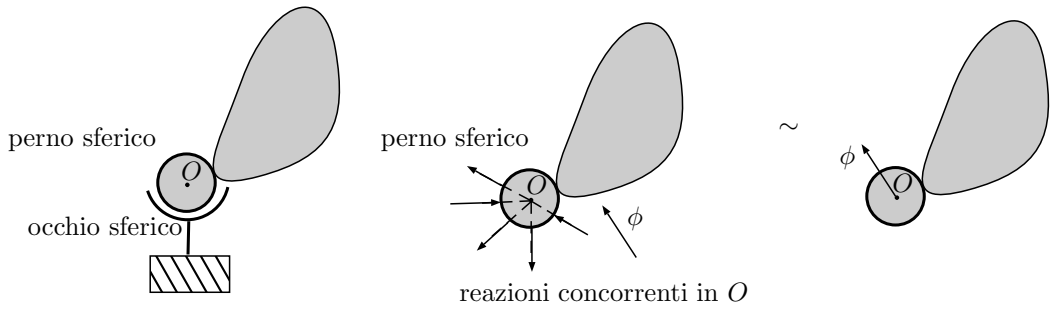
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$\mathcal{S}$	$\sim$	$\mathcal{S}'$
$\vec{R}$		$\vec{R}' = \vec{R}$
$\vec{M}_\Omega = \vec{0}$		$\vec{M}'_\Omega = \vec{0}$

N.B. Se scelgo come punto di applicazione del risultante $\vec{R}$ un qualunque punto Ω' delll'asse centrale, ottengo un altro sistema equivalente $\mathcal{S}'' = \left\{\left(\Omega', \vec{R}\right)\right\}$, quindi

$$\mathcal{S} \sim \mathcal{S}' \sim \mathcal{S}'' \ .$$

Esempio 7.4.1. *Reazioni vincolari di una cerniera sferica liscia "estesa".*



7.4.3 Forze parallele

Consideriamo un insieme di forze parallele in $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{S} = \{(A_i, F_i\vec{e})\}_{i=1,\dots N}$. In tal caso, il vettore risultante è

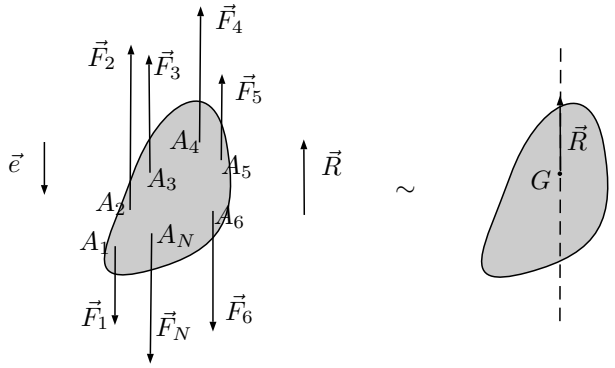
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} F_i\,\vec{e} = R\,\vec{e}\ , \qquad R = \sum_{i=1}^{N} F_i\ .$$

Allora, il momento risultante rispetto a un qualsiasi polo O risulta

$$\vec{M}_O = \sum (A_i - O) \times F_i\,\vec{e} = \left(\sum (A_i - O)\,F_i\right) \times \vec{e} \Rightarrow \vec{M}_O \perp \vec{e}$$

Quindi, l'invariante scalare è $\mathcal{I} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot R\,\vec{e} = 0$.

Allora, se $\vec{M}_O \neq \vec{0}$ ed $\vec{R} = \vec{0}$, l'insieme delle forze equivale ad una coppia il cui piano è un qualsiasi piano ortogonale a $\vec{M}_O$ (quindi contenente il versore $\vec{e}$). Se, invece $\vec{R} \neq \vec{0}$, l'insieme equivale al suo risultante applicato in un punto dell'asse centrale.



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Dimostriamo, ora, che esiste un punto privilegiato G dell'asse centrale. Sappiamo che rispetto a G il momento risultante di $\mathcal{S}$ deve essere nullo. Allora, risolvendo l'equazione

$$\vec{M}_G = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{M}_O + (O - G) \times \vec{R} = \vec{0}$$

$$\sum (A_i - O) \times F_i \vec{e} + (O - G) \times R\vec{e} = \vec{0}$$

$$\left(\sum F_i (A_i - O) + R (O - G)\right) \times \vec{e} = \vec{0} \ ,$$

troviamo che la soluzione più semplice è

$$G - O = \frac{\sum F_i (A_i - O)}{R} \ . \tag{7.4.1}$$

Il punto G è detto centro delle forze parallele, per un motivo che vedremo tra poco.

Esempio 7.4.2. *Baricentro := centro delle forze peso*

$$G - O = \frac{\sum m_i g (A_i - O)}{\sum m_i g} = \frac{\sum m_i (A_i - O)}{\sum m_i}$$

N.B. Quando il baricentro esiste, cioè quando il campo delle forza peso si può approssimare come un campo di forze parallele, esso coincide con il centro di massa, definito da

$$C - O = \frac{\sum m_i (A_i - O)}{\sum m_i} \ ,$$

il quale dipende solo dalla distribuzione di massa del modello e non dalle forze applicate. Quindi, possiamo affermare che

Proposizione 7.4.2. *Se il modello $\mathcal{B}$ è rigido, $G \equiv C$ è solidale a $\mathcal{B}$.*

Quiz. Il continente Africano e una navicella spaziale lontana dalla Terra hanno un baricentro? E un centro di massa?

In un riferimento cartesiano $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ le coordinate del centro di forze parallele, per un sistema materiale discreto, sono date da

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N F_i x_i}{\sum_{i=1}^N F_i} \ , \qquad y_G = \frac{\sum_{i=1}^N F_i y_i}{\sum_{i=1}^N F_i} \ , \qquad z_G = \frac{\sum_{i=1}^N F_i z_i}{\sum_{i=1}^N F_i} \ .$$

Per un sistema continuo la (7.4.1) deve essere modificata in:

$$G - O = \frac{\int_{\mathcal{B}} (P - O) f(P) \, \mathrm{d}\mathcal{R}}{\int_{\mathcal{B}} f(P) \, \mathrm{d}\mathcal{R}} \tag{7.4.2}$$

dove $f(P)$ è la funzione densità (scalare) di forza o forza specifica definita da

$$f(P) := \lim_{\Delta\mathcal{R} \to 0} \frac{f(\Delta\mathcal{R})}{\Delta\mathcal{R}} \qquad \Rightarrow \qquad R = \int_{\mathcal{B}} f(P) \, \mathrm{d}\mathcal{R} \ ,$$

dove $\mathrm{d}\mathcal{R}$ è l'elemento infinitesimo di volume, o di superficie o di linea.

La (7.4.2), in un riferimento cartesiano $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, si scrive:

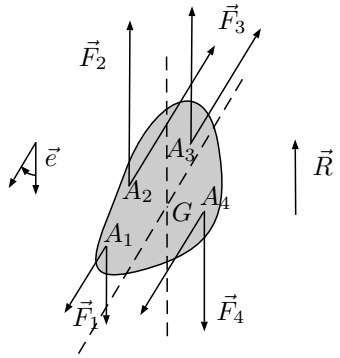
$$x_G = \frac{\int_{\mathcal{B}} x(P) f(P) \, \mathrm{d}\mathcal{R}}{\int_{\mathcal{B}} f(P) \, \mathrm{d}\mathcal{R}} \ , \ y_G = \frac{\int_{\mathcal{B}} y(P) f(P) \, \mathrm{d}\mathcal{R}}{\int_{\mathcal{B}} f(P) \, \mathrm{d}\mathcal{R}} \ , \ z_G = \frac{\int_{\mathcal{B}} z(P) f(P) \, \mathrm{d}\mathcal{R}}{\int_{\mathcal{B}} f(P) \, \mathrm{d}\mathcal{R}}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

7.5 Proprietà del centro G delle forze parallele

Elenchiamo alcune proprietà (senza dimostrarle tutte) del centro delle forze parallele, che ci saranno utili per facilitarne il calcolo.

1. G non dipende da $\vec{e}$, cioè dalla direzione comune alle forze applicate. Quindi, se, ad esempio, ruoto tutti i vettori $\vec{F_i}$ dello stesso angolo θ intorno allo stesso asse, lasciando invariati i punti di applicazione A_i e le componenti scalari F_i, ottengo un nuovo insieme di forze parallele che ha un nuovo asse centrale ma lo stesso centro di forze G. Dunque G è il punto di intersezione degli assi centrali che si ottengono per tutte le direzioni di $\vec{e}$, a parità di (A_i, F_i). Questo è il motivo della parola centro ed è anche il motivo per cui G è un punto caratteristico di un corpo rigido e non dell'insieme di forze.



2. G non dipende da O. Infatti, se scelgo un altro punto O' come polo "di servizio" e calcolo $(G' - O') \Rightarrow (G' - G) = \vec{0}$ (verificare per esercizio).

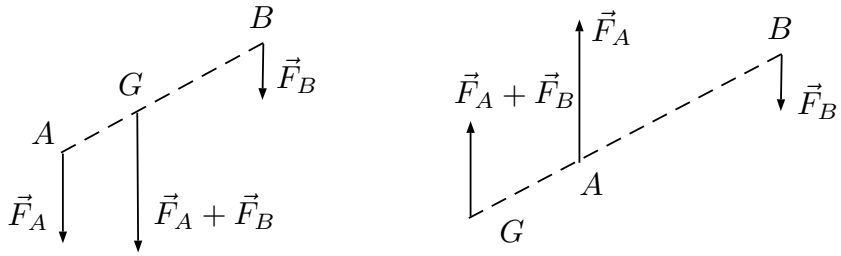
3. G non varia se amplifico (o smorzo) tutte le forze $\vec{F_i}$ di uno stesso fattore scalare $c \in \mathbb{R}$

$$\vec{F_i} \Rightarrow G \quad , \quad c\vec{F_i} \Rightarrow G$$

Esempio 7.5.1. *Grazie a questa proprietà il baricentro coincide con il centro di massa.*

4. Per un sistema di 2 forze parallele, G sta sulla congiungente i 2 punti di applicazione, è interno se le 2 forze sono concordi, esterno se sono discordi, dalla parte della forza che ha modulo maggiore Precisamente, vale la relazione

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = \frac{|F_B|}{|F_A|}$$



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(A, \vec{F_A}\right), \left(B, \vec{F_B}\right) \right\} \sim \mathcal{S}' = \left\{ \left(G, \vec{F_A} + \vec{F_B}\right) \right\}$$

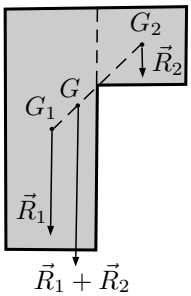
Infatti,

$$G - O = \frac{F_A(A-O) + F_B(B-O)}{F_A + F_B} \overset{O \equiv A}{=} \frac{F_B}{F_A + F_B}(B - A) \ .$$

Quindi,

$$\overline{AG} = \frac{|F_B|}{|F_A + F_B|}\,\overline{AB} \ , \qquad \overline{BG} = \frac{|F_A|}{|F_A + F_B|}\,\overline{AB} \ .$$

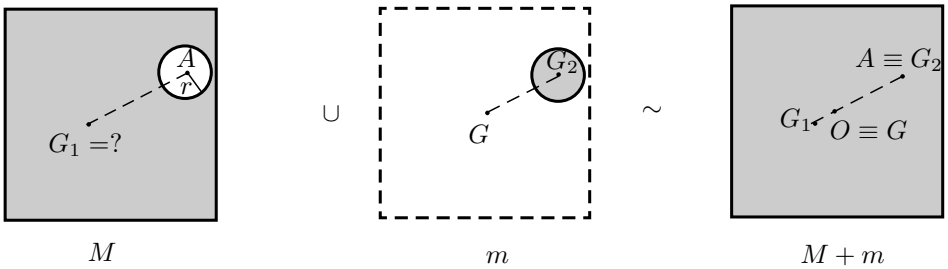
5. Proprietà distributiva. Ripartendo $\mathcal{S}$ in 2 sottoinsiemi disgiunti:



Profilo ad L (omogeneo)

$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$,
se $\mathcal{S}_1 \sim \left\{ (G_1, \vec{R}_1) \right\}$ e $\mathcal{S}_2 \sim \left\{ (G_2, \vec{R}_{2)} \right\}$,
allora
$\mathcal{S} \sim \left\{ \left(G, \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2\right) \right\}$, dove G è calcolato in base alla proprietà 4.

Esempio 7.5.2. *Consideriamo una lamina quadrata omogenea bucata di massa M e lato a, in cui è praticato un foro circolare di raggio $r < a/\sqrt{\pi}$ e centro A. Determiniamo il baricentro della lamina.*



Si può procedere utilizzando la proprietà distributiva 5. Allora,

$$G - O = \frac{M(G_1 - O) + m(G_2 - O)}{M + m}$$

Risolvendo l'equazione precedente rispetto a $(G_1 - O)$ si ottiene

$$G_1 - O = \frac{(M+m)(G-O) - m(G_2 - O)}{M} = \frac{(S_1 + S_2)(G - O) - S_2(G_2 - O)}{S_1} \ , \tag{7.5.1}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

dove con S_1, S_2 abbiamo indicato rispettivamente l'area della superficie della lamina bucata e l'area della superficie del foro. Si osservi che la posizione del baricentro G_1 non dipende dalla densità di massa (supposta uniforme) ma solo dalle superfici in gioco, oltre che dalla posizione di G e di G_2.

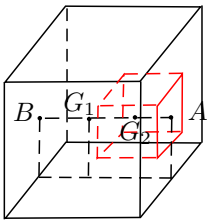
Scegliendo $O \equiv G$, segue che

$$G_1 - O = -\frac{m}{M}(G_2 - O) = -\frac{S_2}{S_1}(G_2 - O) = -\frac{\pi r^2}{a^2 - \pi r^2}(A - O)$$

Dunque, G_1 sta sulla congiungente di G con G_2, esternamente al segmento GG_2 dalla parte di G, a una distanza da G pari a $\frac{\pi r^2}{a^2-\pi r^2}\,\overline{GG_2}$.

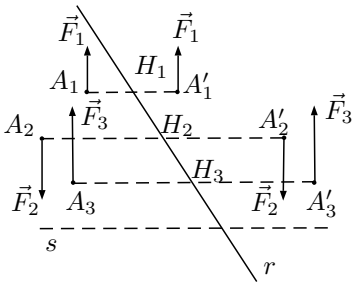
L'equazione (7.5.1) si può anche interpretare come un'applicazione della proprietà distributiva in cui si attribuisce una massa *negativa* a quella asportata dal foro, di densità pari a quella della massa residua.

Esercizio 7.5.1. *Calcolare il baricentro di un cubo omogeneo di lato a al quale è stato asportato il cubetto di lato b come nella figura. Il punto A è il centro comune alle facce dei due cubi che sono tangenti.*



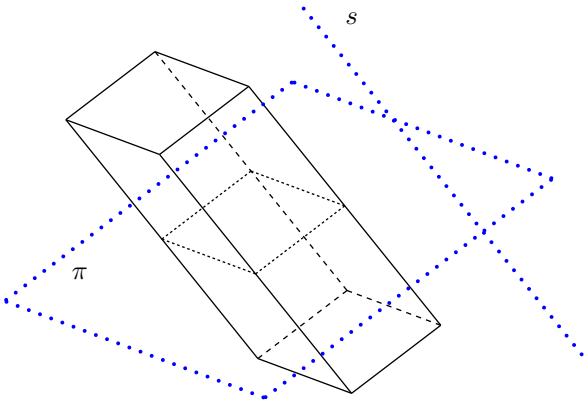
6. Proprietà di simmetria materiale: se esiste un asse o un piano di simmetria materiale allora G appartiene all'asse o al piano.

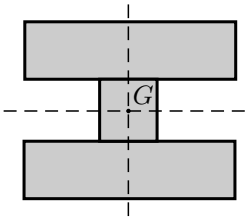
Definizione 7.5.1. *Asse r (rs. piano π) di simmetria obliqua materiale coniugato a una direzione s.*



simmetria geometrica: $\overline{A_iH_i} = \overline{A'_iH_i} \quad \forall A_i$
simmetria materiale: $F'_i = F_i$ se il modello è discreto, $f(A_i)\,dV = f(A'_i)\,dV'$ se il modello è continuo.
Se r e s sono ortogonali, r è un asse di simmetria ortogonale.

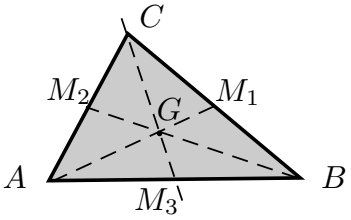
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.





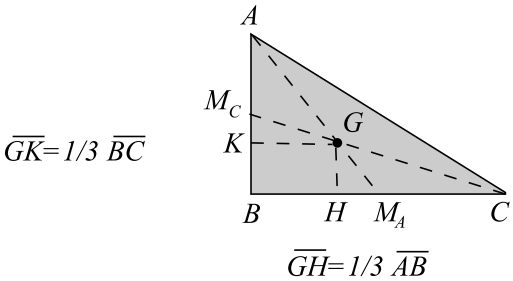
Esempio 7.5.3. *Profilo ad H omogeneo*

Esempio 7.5.4. *Baricentro di una lamina triangolare omogenea.*



Le mediane sono assi di simmetria geometrica coniugate alla direzione dei rispettivi lati. Dunque, G coincide con il baricentro geometrico e quindi divide le mediane in modo che, ad esempio, $\frac{\overline{AG}}{\overline{GM_1}} = 2$

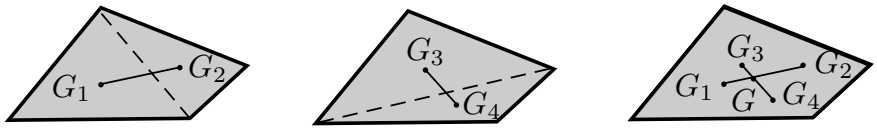
Esercizio 7.5.2. *Dimostrare che il baricentro di una lamina omogenea a forma di triangolo rettangolo si trova a una distanza da ogni cateto pari a* $1/3$ *della lunghezza dell'altro cateto.*



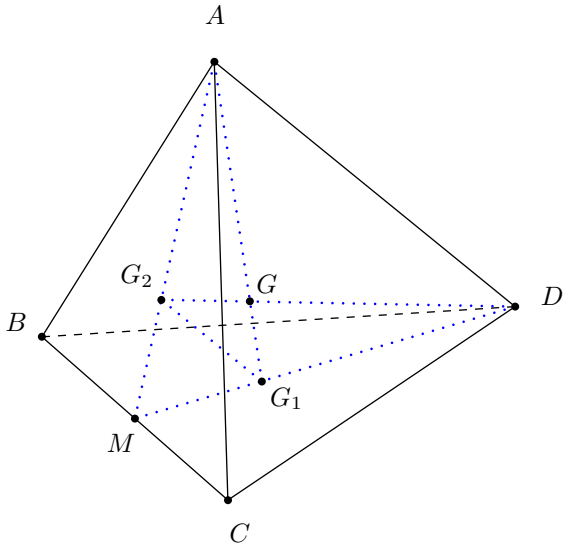
Esempio 7.5.5. *Baricentro di una lamina quadrangolare omogenea:*

$$G \equiv G_1G_2 \cap G_3G_4$$

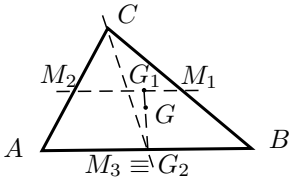
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Esercizio 7.5.3. *Dimostrare che il baricentro di un tetraedro omogeneo appartiene ai segmenti che uniscono un vertice al baricentro della faccia opposta.*



Esercizio 7.5.4. *Dimostrare che il baricentro di un telaio triangolare omogeneo non coincide con il baricentro geometrico del triangolo, tranne nel caso di un triangolo equilatero.*

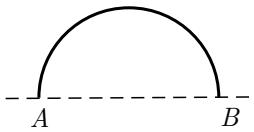


7. Involucro convesso di forze parallele e *concordi*: G appartiene all'involucro convesso dei punti di applicazione delle forze.

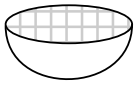
Definizione 7.5.2. *l'involucro (o inviluppo) convesso è l'insieme convesso minimale (è contenuto in tutti i convessi contenenti i punti di applicazione) che include tutti i punti di applicazione delle forze.*

Esempio 7.5.6. *Arco semicircolare*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Esempio 7.5.7. *Guscio sferico*



8. I teorema di Pappo-Guldino: baricentro di un arco.

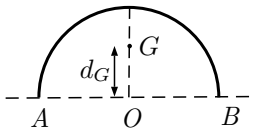
   Assegnata una curva semplice e regolare γ, l'area A della superficie di rotazione ottenuta ruotando γ intorno ad un asse che non la intersechi in punti interni, è data da

   $$A = 2\pi L(\gamma)\, d_G \ , \tag{7.5.2}$$

   dove d_G è la distanza del baricentro G dall'asse di rotazione e $L(\gamma)$ è la lunghezza della curva.

   Esempio 7.5.8. *Arco omogeneo semicircolare. Per le proprietà 6 e 7, G sta sul raggio ortogonale al diametro AB. Detta d_G la distanza di G dal centro O, per la proprietà 8 segue che*

   $$d_G = 4\pi R^2 \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\pi R} = \frac{2}{\pi}R$$



9. II teorema di Pappo-Guldino: baricentro di una lamina.

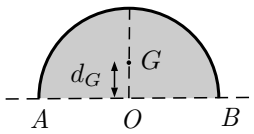
   Assegnata una superficie regolare S, il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando S intorno ad un asse che non la intersechi in punti interni, è data da

   $$V = 2\pi A(S)\, d_G \ , \tag{7.5.3}$$

   dove d_G è la distanza del baricentro G dall'asse di rotazione e $A(S)$ è l'area della superficie.

   Esempio 7.5.9. *Lamina omogenea semicircolare. Per le proprietà 6 e 7, G sta sul raggio ortogonale al diametro AB. Detta d_G la distanza di G dal centro O, per la proprietà 9 segue che*

   $$d_G = \frac{4\pi R^3}{3}\frac{1}{2\pi}\frac{2}{\pi R^2} = \frac{4}{3\pi}R$$

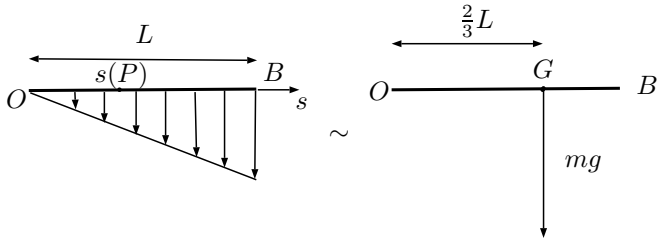


©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Baricentro per un'asta non omogenea

Consideriamo un'asta non omogenea di lunghezza L e massa m. Per individuare un suo punto introduciamo l'ascissa curvilinea $s(P)$ con origine nell'estremo O. Supponiamo che la funzione densità di massa definita da $\rho(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m(s)}{\Delta s}$ dipenda linearmente da s

$$\rho\left(s\right) = a\frac{s}{L} \qquad (a > 0)$$



L'ascissa del baricentro G si trova calcolando il seguente integrale di linea

$$s\left(G\right) = \frac{\int_0^L \rho\left(s\right) s(P) \mathrm{d}s}{\int_0^L \rho\left(s\right) \mathrm{d}s} = \frac{1}{m}\int_0^L a\frac{s^2}{L}\mathrm{d}s = \frac{a}{mL}\left[\frac{s^3}{3}\right]_0^L = \frac{a}{mL}\frac{L^3}{3} = \frac{aL^2}{3m}$$

È possibile esprimere il risultato in termini della sola lunghezza totale. A tale scopo, eliminiamo la costante a calcolando

$$m = \int_0^L \rho\left(s\right) \mathrm{d}s = \int_0^L a\frac{s}{L}\mathrm{d}s = \frac{a}{L}\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^L = \frac{aL^2}{2L} = \frac{a}{2}L \Rightarrow a = \frac{2m}{L}$$

Quindi, l'ascissa di G risulta essere

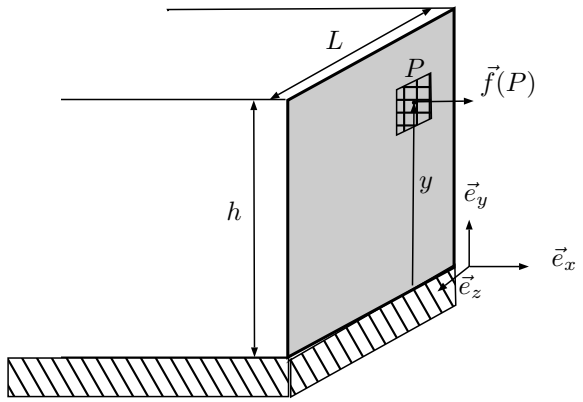
$$s\left(G\right) = \frac{2\cancel{m}L^2}{3\cancel{m}L} = \frac{2}{3}L\ ,$$

indipendente dalla massa m e dalla costante a.

Esercizio 7.5.5. *Calcolare il baricentro se* $\rho\left(s\right) = \frac{as^2}{L}$. *Soluzione:* $s\left(G\right) = \frac{3}{4}L$

Esercizio 7.5.6. *Trovare il centro S delle forze parallele esercitate dalla pressione dell'acqua, di peso specifico p, sulla faccia della paratia di altezza h e larghezza L della figura, sapendo che la forza specifica per unità di superficie è data da $\vec{f}(P) = p(h - y(P))\,\vec{e}_x$, dove $y(P)$ denota la quota del generico punto P, misurata a partire dal fondo. Il punto S è detto centro di spinta. Inoltre, determinare il vettore risultante delle forze parallele.*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Capitolo 8

Equazioni cardinali della statica dei sistemi meccanici

In questo capitolo presentiamo un metodo più generale del PLV, per studiare l'equilibrio dei modelli meccanici.

8.1 Classificazione delle sollecitazioni agenti in un sistema meccanico

Dapprima, consideriamo i seguenti tipi di forze e di coppie: di contatto o a distanza, di volume o di superficie, concentrate o distribuite.

Di contatto o a distanza. Le sollecitazioni di **contatto** sono quelle che agiscono tra due corpi a contatto: ad esempio quelle che esercitiamo con le mani e con i piedi, o quella del vento su una vela. Le forze (coppie) a **distanza** sono quelle che agiscono senza contatto tra i corpi: ad esempio forza di gravità e la forza elettromagnetica.

Di superficie o di volume. Le sollecitazioni di **superficie** sono quelle che agiscono solo sulla superficie di un corpo: la forza dell'acqua sulla carena di una nave, la forza del vento su una vela, la resistenza aerodinamica su di un veicolo. Le forze di **volume** sono invece quelle che agiscono su ogni parte di un corpo: ad esempio la forza peso, la forza elettromagnetica, la forza d'inerzia centrifuga dovuta a un riferimento in rotazione.

Concentrate o distribuite. Le forze **concentrate** sono quelle che agiscono su i singoli punti di un corpo, le forze **distribuite** sono quelle che agiscono su tutta una parte (o su tutto) il corpo e si assegnano tramite una funzione densità di forza. Analogamente, le coppie concentrate sono quelle dovute all'azione di forze concentrate, mentre quelle distribuite sono dovute all'azione di forze distribuite e si assegnano mediante una funzione densità di momento.

Ai fini delle Equazioni Cardinali della Statica, sarà fondamentale la seguente classificazione delle sollecitazioni:

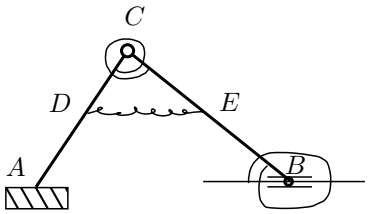
attive: non sono dovute a vincoli;

reattive: l'insieme di forze che, sostituite ai vincoli, ne realizzano gli stessi effetti meccanici. Il fatto che sia sempre possibile sostituire i vincoli con un insieme di forze applicate (parzialmente incognite) è noto come *Postulato delle Reazioni Vincolari*.

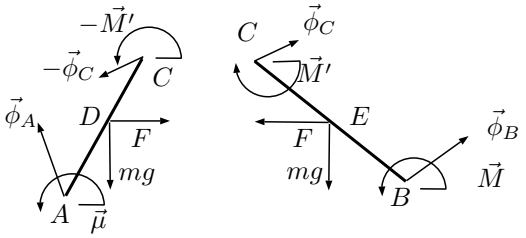
esterne: quelle che agenti esterni esercitano sul modello;

interne: che si esplicano tra parti interne del modello.

Esempio 8.1.1. *2 aste + 1 incastro+ 1 appoggio+ 1 cerniera interna, nel piano verticale.*

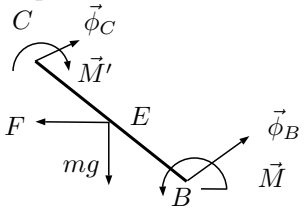


FORZE	*ESTERNE*	*INTERNE*
attive	*peso proprio dell'asta*	*molla in D ed E*
reattive	*appoggio in B, incastro in A*	*cerniera in C, vincoli di rigidità*
COPPIE	*ESTERNE*	*INTERNE*
attive	*molla applicata in B*	*molla applicata in C*
reattive	*incastro in A*	*vincoli di rigidità*



N.B. La classificazione delle sollecitazioni interne ed esterne dipende dai confini del modello.

Esempio 8.1.2. *Se considero la sola asta BC del modello precedente*



FORZE	*ESTERNE*	*INTERNE*
attive	*peso asta, molla in E*	
reattive	*appoggio in B, cerniera in C*	*vincoli di rigidità*
COPPIE	*ESTERNE*	*INTERNE*
attive	*molla in B, molla in C*	
reattive		*vincoli di rigidità*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

8.2 Sollecitazioni interne

Studiamo le proprietà delle forze interne a un qualsiasi modello meccanico $\mathcal{B}$.

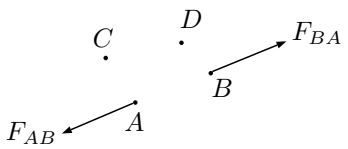
Teorema 8.2.1. *Delle forze interne. Se la sollecitazione attiva (rispettivamente reattiva) interna a un qualsiasi modello materiale $\mathcal{B}$ è di tipo Newtoniano, cioè soddisfa il principio di azione e reazione, allora ha risultante e momento risultante nulli, cioè valgono le equazioni*

$$\vec{R}^{(int,att)} = \vec{0}, \quad \vec{M}_O^{(int,att)} = \vec{0} \tag{8.2.1}$$

$$\vec{R}^{(int,reatt)} = \vec{0}, \quad \vec{M}_O^{(int,reatt)} = \vec{0} \tag{8.2.2}$$

Dimostrazione. Valutiamo

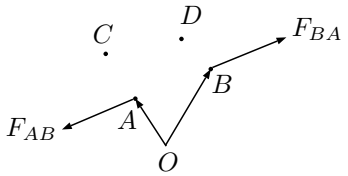
$$\vec{R}^{(int,att)} = \sum_{P\in\mathcal{B}} \vec{F}_P^{(int,att)} = \left(\cancel{\vec{F}}_{AB} + \cancel{\vec{F}}_{AC} + \dots\right) + \left(\cancel{\vec{F}}_{BA} + \cancel{\vec{F}}_{BC} + \dots\right) + \left(\cancel{\vec{F}}_{CA} + \cancel{\vec{F}}_{CB} + \dots\right) + \dots + (\dots\dots) = \vec{0}$$



Discorso analogo vale per $\vec{R}^{(int,reatt)}$. A parole: poiché le forze attive (rs. reattive) interne a un sistema materiale sono un insieme di coppie il loro vettore risultante è nullo.

Valutiamo

$$\begin{aligned}\vec{M}_O^{(int,att)} &= \sum_{P\in\mathcal{B}} (P-O)\times\vec{F}_P^{(int,att)} = (A-O)\times\left(\vec{F}_{AB}+\vec{F}_{AC}+\dots\right) + (B-O)\times\left(\vec{F}_{BA}+\vec{F}_{BC}+\dots\right) + \cdots \\ &= ((A-O)-(B-O))\times\vec{F}_{AB} + \cdots = \vec{0}\end{aligned}$$



Discorso analogo vale per $\vec{M}_O^{(int,reatt)}$. A parole: poiché le forze attive (rs. reattive) interne sono un insieme di coppie a braccio nullo, il momento della singola coppia è nullo e quindi il momento risultante di tutte le forze attive (rs. reattive) interne è nullo.

□

8.2.1 Sollecitazione interne in un rigido

Proposizione 8.2.1. *In un rigido il lavoro virtuale delle forze interne attive e quello delle forze interne reattive sono entrambi nulli.*

Dimostrazione. Basta ricordare che in un rigido $\mathcal{R}$ il lavoro virtuale si può calcolare come

$$LV = \vec{R}\cdot\delta\vec{x}_O + \vec{M}_O\cdot\vec{\epsilon} \qquad O\in\mathcal{R}\ . \tag{8.2.3}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Pertanto, sostituendo nella (8.2.3) le (8.2.1) ed (8.2.2) si ottiene la tesi. □

È facile ricavare, con una procedura analoga a quella usata per ricavare la (8.2.3), la formula per la potenza (possibile, virtuale, effettiva) di una sollecitazione agente su un rigido

$$\Pi = \vec{R} \cdot \vec{v}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\omega} \ , \qquad O \in \mathcal{R} \ . \tag{8.2.4}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\Pi &= \sum_{P \in \mathcal{R}} \vec{F}_P \cdot (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_O)) \\
&= \sum_{P \in \mathcal{R}} \vec{F}_P \cdot \vec{v}_O + \sum_{P \in \mathcal{R}} \vec{F}_P \cdot \vec{\omega} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_O)) \\
&= \left(\sum_{P \in \mathcal{R}} \vec{F}_P \right) \cdot \vec{v}_O + \sum_{P \in \mathcal{R}} \vec{\omega} \cdot (\vec{x}_P - \vec{x}_O) \times \vec{F}_P \\
&= \vec{R} \cdot \vec{v}_O + \vec{\omega} \cdot \sum_{P \in \mathcal{R}} (\vec{x}_P - \vec{x}_O) \times \vec{F}_P \ .
\end{aligned}$$

Un espediente mnemonico per ricordare la (8.2.4) è quello di dividere la (8.2.3) rispettivamente per $(\partial t, \delta\tau, dt)$.

Tenendo conto delle (8.2.1), (8.2.2), dalla (8.2.4) segue immediatamente

Proposizione 8.2.2. *In un rigido, la potenza (possibile, virtuale, effettiva) delle forze interne attive e quella delle forze interne reattive sono entrambe nulle.*

8.3 Equazioni cardinali della statica dei sistemi

Dato un osservatore qualunque, utilizzando il *principio di inerzia* e il *principio di azione e reazione* possiamo dimostrare il seguente

Teorema 8.3.1. *Se un sistema di punti materiali $\mathcal{B}$ è in equilibrio allora valgono le ECS*

$$\vec{R}^{(est)} = \vec{0} \ , \qquad \vec{M}_O^{(est)} = \vec{0} \ . \tag{8.3.1}$$

Dimostrazione. Se $\mathcal{B}$ è in equilibrio allora ogni $P \in \mathcal{B}$ è in equilibrio. Quindi $\forall t \in I$ e $\forall P \in \mathcal{B}$ vale che

I ECS

$$\vec{0} = \vec{F}_P = \vec{F}_P^{(int)} + \vec{F}_P^{(est)} \Rightarrow$$

$$\vec{0} = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P^{(int)} + \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P^{(est)} = \vec{R}^{(int)} + \vec{R}^{(est)} \overset{(8.2.1),(8.2.2)}{=} \vec{R}^{(est)}$$

II ECS

$$\vec{0} = \vec{F}_P = \vec{F}_P^{(int)} + \vec{F}_P^{(est)} \Rightarrow$$

$$\vec{0} = \sum_{P \in \mathcal{B}} (P - O) \times \vec{F}_P = \sum_{P \in \mathcal{B}} (P - O) \times \vec{F}_P^{(int)} + \sum_{P \in \mathcal{B}} (P - O) \times \vec{F}_P^{(est)} = \vec{M}_O^{(int)} + \vec{M}_O^{est} \overset{(8.2.1),(8.2.2)}{=} \vec{M}_O^{(est)}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

□

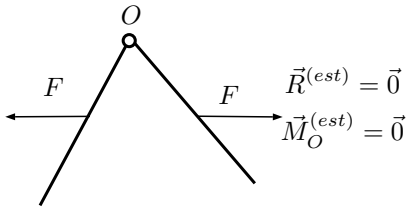
N.B. Se la I ECS è soddisfatta e la II ECS è soddisfatta per un polo fissato O, allora la II è soddisfatta per qualsiasi punto di $\mathcal{E}_3$, poiché

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \times \vec{R} = \vec{M}_O = \vec{0}$$

N.B. Abbiamo ricavato le ECS per un sistema di punti materiali. Lo stesso procedimento si può utilizzare se il modello è un rigido o un sistema articolato. In generale, riterremo valide le ECS per qualunque modello materiale $\mathcal{B}$.

Quiz. Sono le ECS sufficienti a garantire l'equilibrio di un sistema inizialmente in quiete? NO!

Esempio 8.3.1.



ma il compasso non è in equilibrio!

Dimostreremo ora, che le ECS sono sufficienti a garantire l'equilibrio di un rigido, inizialmente in quiete. Il motivo è che il lavoro virtuale delle forze interne a un rigido è nullo grazie ai vincoli di rigidità, i quali mantengono invariate le distanze mutue tra i punti. Possiamo affermare che

Teorema 8.3.2. *Le Equazioni Cardinali della Statica sono sufficienti a garantire l'equilibrio di un rigido.*

Dimostrazione. Si procede in due passi.

1. Supponiamo di studiare l'equilibrio di un rigido privo di vincoli. In questo caso, se in una data configurazione sono soddisfatte le ECS segue che, scelto un polo $O \in \mathcal{R}$,

$$\vec{R}^{(est)} = \vec{0} \textbf{ et } \vec{M}_O^{(est)} = \vec{0} \Rightarrow LV^{est} = 0$$

   Poichè il rigido è privo di vincoli esterni e, in più, il lavoro virtuale delle forze attive *interne* è nullo per la Prop. 8.2.1, si ha

$$0 = LV^{(est)} = LV^{(est,att)} + \cancel{LV^{(est,reatt)}} = LV^{(est,att)} + LV^{(int,att)} = LV^{(att)} \ ,$$

   cioè che il lavoro virtuale di tutte le forze attive agenti sul rigido è nullo. Allora, il PLV è soddisfatto e ciò garantisce l'equilibrio del rigido nella configurazione data.

2. Ora, supponiamo che il rigido sia vincolato in modo qualsiasi e che in una configurazione valgano le ECS

$$\vec{R}^{(est,att+reatt)} = \vec{0} \textbf{ et } \vec{M}_O^{(est,att+reatt)} = \vec{0}$$

   Introdurre il contributo delle reazioni vincolare equivale a considerare il rigido privo di vincoli e soggetto alla sollecitazione di tutte le forze esterne, sia attive, sia reattive. Se tale sollecitazione è equilibrata, per il punto 1 il rigido è in equilibrio.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

□

Comunque, se il modello è composto da più corpi rigidi vale il seguente

Corollario 8.3.1. *Le ECS sono condizione necessaria all'equilibrio di un qualunque sistema materiale e sono sufficienti se sono soddisfatte per ciascuna componente rigida del sistema (a patto che sia inizialmente in quiete).*

8.4 Sollecitazione reattiva su un rigido

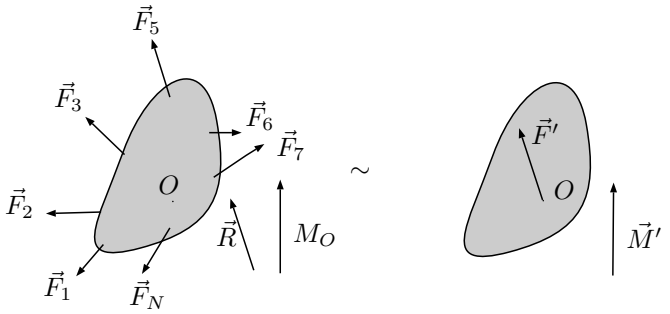
Abbiamo già visto nel Cap. 7 che il più generale insieme di forze applicate ad un rigido $\mathcal{S}$, per quanto complicato possa essere, si può sempre ridurre a uno delle quattro classi di equivalenza del Teo. 7.3.2. Comunque, nel caso di un torsore e di un singolo vettore applicato, il punto di applicazione del risultante di $\mathcal{S}$ non può essere scelto ad arbitrio ma deve appartenere all'asse centrale. Presentiamo qui un altro tipo di riduzione che pemette di scegliere in modo completamente arbitrario il punto di applicazione del risultante.

Proposizione 8.4.1. *Ogni insieme $\mathcal{S}$ di forze applicate a un rigido è equivalente a un insieme $\mathcal{S}'$ costituito dal risultante (eventualmente nullo) di $\mathcal{S}$ applicato in un punto qualunque O e da una coppia $\vec{M}'$ (eventualmente nulla) pari al momento risultante di $\mathcal{S}$ rispetto a O. In formule*

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(A_i, \vec{F}_i \right) \right\}_{i=1,\dots,N} \sim \mathcal{S}' = \left\{ \left(O, \vec{F}' \right), \vec{M}' \right\}$$

$$\left(\vec{R}, \vec{M}_O \right) \qquad (\vec{F}' = \vec{R}, \vec{M}' = \vec{M}_O) \tag{8.4.1}$$

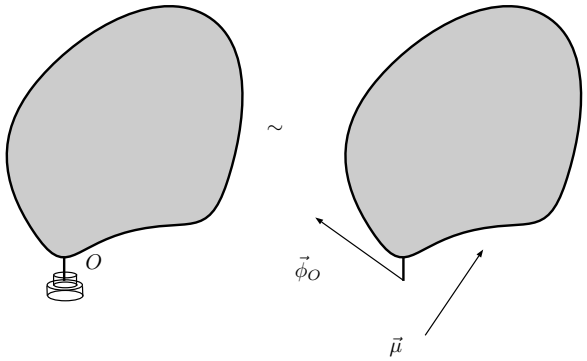
È ovvio dalla (8.4.1) *che $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$.*



N.B. È chiaro che tale riduzione dipende dalla scelta del polo O. Esso è un qualunque punto dello spazio, anche mobile, anche non appartenente al rigido.

Da quanto detto sopra, anche l'insieme delle reazioni vincolari su un *rigido* si può sempre ridurre al risultante $\vec{\phi}$ applicato ad un qualunque polo O ed a una coppia di reazione $\vec{\mu}$, pari al momento risultante delle reazioni rispetto a O.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



$$\mathcal{S}^{(reatt)} = \left\{ \left(O, \vec{\phi} = \vec{R}^{(reatt)} \right), \vec{\mu} = \vec{M}_O^{(reatt)} \right\}$$

A questo proposito osserviamo che, in Meccanica Razionale, si trascurano le dimensioni del vincolo modellizzato come puntiforme e si sceglie proprio tale punto O, comune al vincolo e al rigido, come punto di applicazione del risultante delle reazioni vincolari. In tal modo, si rinuncia a determinare le singole reazioni vincolari sui diversi punti del vincolo (oggetto di studio nei corsi successivi) e ci si accontenta di calcolare solo il vettore risultante $\vec{\phi}_O$ e la coppia di reazione $\vec{\mu}$.

Dunque, il lavoro virtuale della sollecitazione reattiva può essere calcolato come

$$LV^{(reatt)} = \vec{\phi}_O \cdot \delta\vec{x}_O + \vec{\mu} \cdot \vec{\epsilon}\,.$$

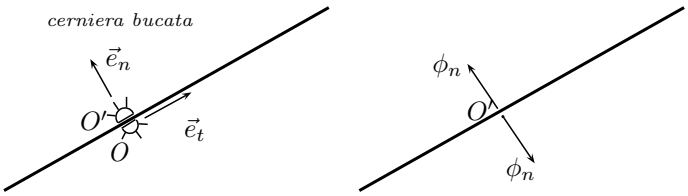
Inoltre, se il vincolo è non dissipativo vale

$$\vec{\phi}_O \cdot \delta\vec{x}_O + \vec{\mu} \cdot \vec{\epsilon} \geq 0 \qquad \forall\, \delta\vec{x}_O, \forall\vec{\epsilon} \quad \text{virtuali}$$

e se il vincolo è anche bilatero, vale l'uguaglianza. Sotto analizzeremo le reazioni vincolari di alcuni vincoli non *dissipativi*, piani e spaziali ricordando, che le reazioni vincolari rimangono incognite parziali sia in statica, sia in dinamica.

8.4.1 Vincoli piani non dissipativi

Passaggio bilatero per un punto



Poiché $\delta\vec{x}_{O'} = \delta s\, \vec{e}_t$, $\vec{\epsilon} = \delta\varphi\, \vec{e}_3$, il vincolo è non dissipativo se e solo se

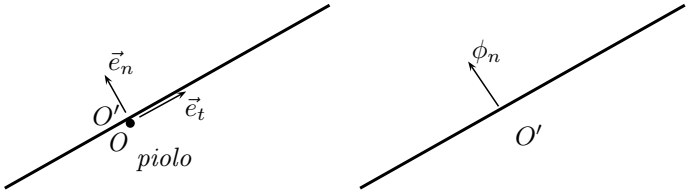
$$0 = \vec{\phi}_{O'} \cdot \delta s\, \vec{e}_t + \vec{\mu} \cdot \delta\varphi\, \vec{e}_3 \qquad \forall \delta s, \forall \delta\varphi \in \mathbb{R}$$

Pertanto, le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\phi}_{O'} \cdot \vec{e}_t & = 0 \\ \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\phi}_{O'} \perp \vec{e}_t \\ \vec{\mu} \in \pi \end{array} \right. \tag{8.4.2}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Passaggio unilatero per un punto



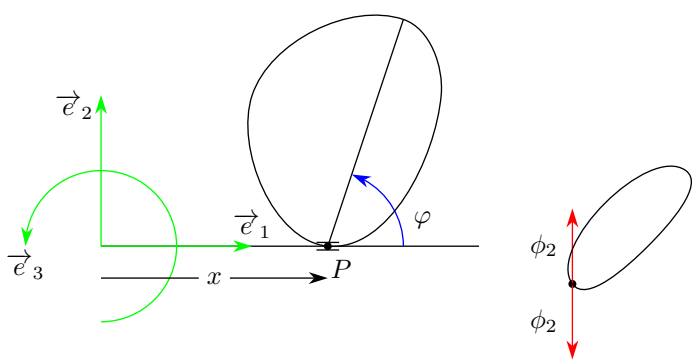
Poiché $\delta\vec{x}_{O'} = \delta s\,\vec{e}_t + \delta y\,\vec{e}_n$, $\vec{\epsilon} = \delta\varphi\,\vec{e}_3$, il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 \leq \vec{\phi}_{O'} \cdot (\delta s\,\vec{e}_t + \delta y\,\vec{e}_n) + \vec{\mu} \cdot \delta\varphi\,\vec{e}_3 \qquad \forall \delta s, \delta\varphi \in \mathbb{R} \qquad \forall \delta y \geq 0$$

Pertanto, le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$\begin{cases} \vec{\phi}_{O'} \cdot \vec{e}_t & = 0 \\ \vec{\phi}_{O'} \cdot \vec{e}_n & \geq 0 \\ \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\phi}_{O'} \perp \vec{e}_t \\ \vec{\phi}_{O'} \text{ concorde a } \vec{e}_n \\ \vec{\mu} \in \pi \end{cases}$$

Cerniera cilindrica scorrevole bilatera



Poichè $\delta\vec{x}_P = \delta x\vec{e}_1$, $\vec{\epsilon} = \delta\varphi\vec{e}_3$ il vincolo è non dissipativo se e solo se

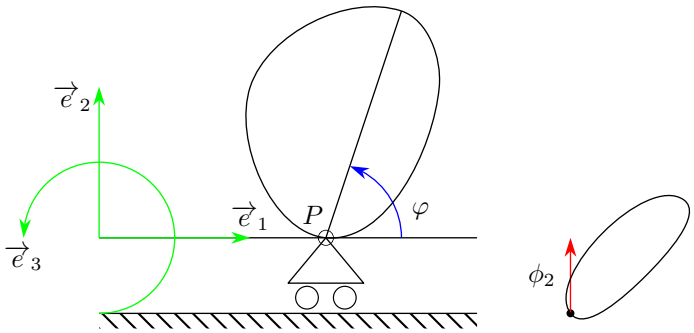
$$0 = \vec{\phi}_P \cdot \delta x\vec{e}_1 + \vec{\mu} \cdot \delta\varphi\vec{e}_3 \qquad \forall \delta x, \forall \delta\varphi \in \mathbb{R}$$

Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$\begin{cases} \vec{\phi}_P \cdot \vec{e}_1 & = 0 \\ \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\phi}_P \perp \vec{e}_1 \\ \vec{\mu} \in \pi \end{cases} \tag{8.4.3}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Cerniera cilindrica scorrevole unilatera



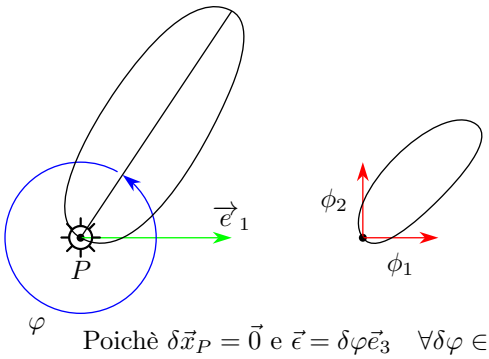
Poichè $\delta\vec{x}_P = \delta x\vec{e}_1 + \delta y\vec{e}_2$,$\forall\delta x \in \mathbb{R}, \forall\delta y \geq 0$ e $\vec{\epsilon} = \delta\varphi\vec{e}_3$,$\forall\delta\varphi \in \mathbb{R}$ il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 \leq \vec{\phi}_P \cdot (\delta x\vec{e}_1 + \delta y\vec{e}_2) + \vec{\mu} \cdot \delta\varphi\vec{e}_3 \qquad \forall\delta x, \forall\delta\varphi \in \mathbb{R}\ , \quad \forall\delta y \geq 0\ .$$

Le soluzioni di tale disequazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$\begin{cases} \vec{\phi}_P \cdot \vec{e}_1 & = 0 \\ \vec{\phi}_P \cdot \vec{e}_2 & \geq 0 \\ \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\phi}_P \perp \vec{e}_1 \\ \vec{\phi}_P \text{ concorde a } \vec{e}_2 \\ \vec{\mu} \in \pi \end{cases} .$$

Cerniera cilindrica fissa bilatera



Poichè $\delta\vec{x}_P = \vec{0}$ e $\vec{\epsilon} = \delta\varphi\vec{e}_3 \quad \forall\delta\varphi \in \mathbb{R}$ il vincolo è non dissipativo se e solo se

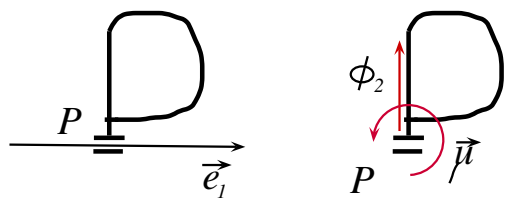
$$0 = \vec{\phi}_P \cdot \delta\vec{x}_P + \vec{\mu} \cdot \delta\varphi\vec{e}_3 \qquad \forall\delta\varphi \in \mathbb{R}\ .$$

Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$\begin{cases} \vec{\phi}_P = \text{qualsiasi} \\ \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\phi}_P = \text{qualsiasi} \\ \vec{\mu} \in \pi \end{cases} . \tag{8.4.4}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Pattino bilatero



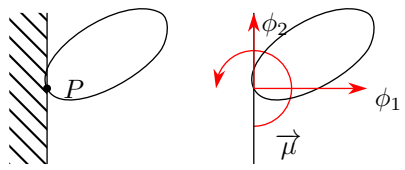
Poichè $\delta\vec{x}_P = \delta x\,\vec{e}_1$ e $\vec{\epsilon} = \vec{0}$, il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 = \vec{\phi}_P \cdot \delta x\,\vec{e}_1 + \vec{\mu} \cdot \cancel{\vec{\epsilon}}\,.$$

Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$\begin{cases} \vec{\phi}_P \perp \vec{e}_1 \\ \vec{\mu} = \text{qualsiasi} \end{cases} \tag{8.4.5}$$

Incastro bilatero



Poichè $\delta\vec{x}_P = \vec{0}$ e $\vec{\epsilon} = \vec{0}$ il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 = \vec{\phi}_P \cdot \cancel{\delta\vec{x}_P} + \vec{\mu} \cdot \cancel{\vec{\epsilon}}\,.$$

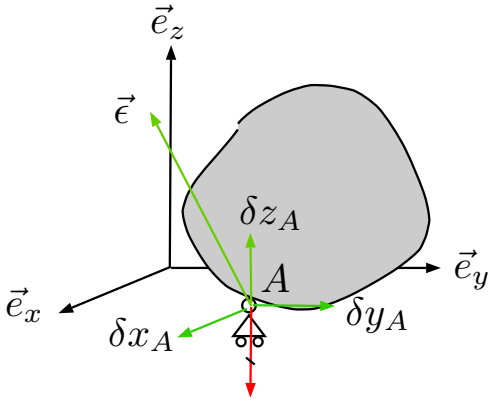
Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$\begin{cases} \vec{\phi}_P = \text{qualsiasi} \\ \vec{\mu} = \text{qualsiasi} \end{cases} \tag{8.4.6}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

8.4.2 Vincoli spaziali non dissipativi

Appoggio unilatero su di un piano



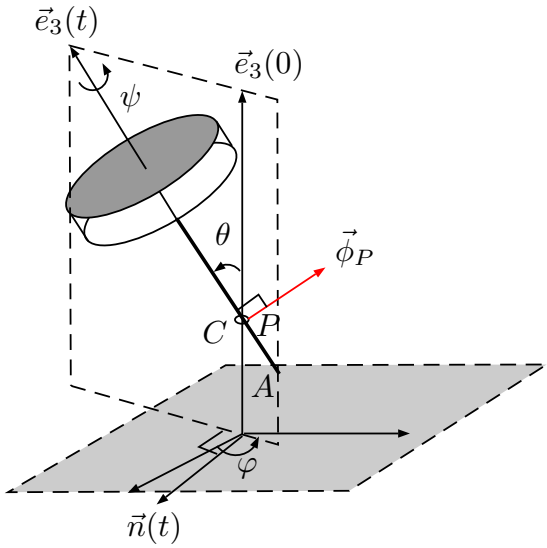
Poichè $\delta\vec{x}_A = \delta x_A\,\vec{e}_x + \delta y_A\vec{e}_y + \delta z_A\vec{e}_z$ con $\delta z_A \geq 0$ ed $\vec{\epsilon} \in E_3$, il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 \leq \vec{\phi}_A \cdot (\delta x_A\,\vec{e}_x + \delta y_A\vec{e}_y + \delta z_A\vec{e}_z) + \vec{\mu}\cdot\vec{\epsilon} \qquad \forall\,\delta x_A, \delta y_A \in \mathbb{R},\ \delta z_A \geq 0\ , \forall\vec{\epsilon} \in E_3\ .$$

Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$\begin{cases} \vec{\phi}_A \cdot \vec{e}_x = 0 \\ \vec{\phi}_A \cdot \vec{e}_y = 0 \\ \vec{\phi}_A \cdot \vec{e}_z \geq 0 \\ \vec{\mu} = \vec{0} \end{cases} \tag{8.4.7}$$

Anellino fisso o cerniera sferica "bucata" fissa



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

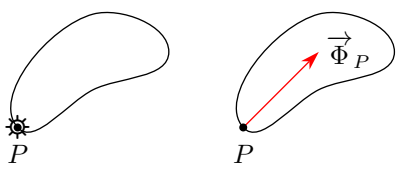
Poichè $\delta\vec{x}_P = \delta s\,\vec{e}_3(t)$ ed $\vec{\epsilon} \in E_3$, il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 = \vec{\phi}_P \cdot \delta s\,\vec{e}_3(t) + \vec{\mu} \cdot \vec{\epsilon} \qquad \forall \delta s \in \mathbb{R}\ , \forall \vec{\epsilon} \in E_3\ .$$

Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\phi}_P \cdot \vec{e}_3(t) = 0 \\ \vec{\mu} = \vec{0} \end{array} \right. \tag{8.4.8}$$

Cerniera sferica fissa



Poichè $\delta\vec{x}_P = \vec{0}$ e $\vec{\epsilon} \in E_3$ il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 = \vec{\phi}_P \cdot \cancel{\delta\vec{x}_P} + \vec{\mu} \cdot \vec{\epsilon} \qquad \forall \vec{\epsilon} \in E_3$$

Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\phi}_P = \text{qualsiasi} \\ \vec{\mu} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Cerniera sferica scorrevole: per esercizio

Cerniera cilindrica fissa

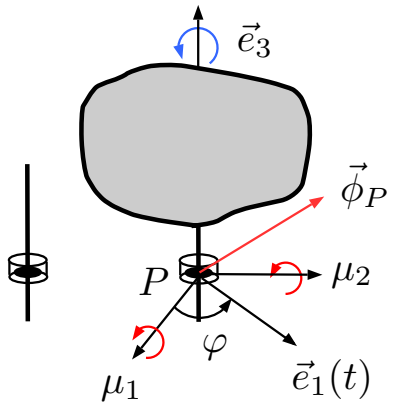
Poichè $\delta\vec{x}_P = \vec{0}$, $\vec{\epsilon} = \delta\varphi\vec{e}_3$ il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 = \vec{\phi}_P \cdot \delta\vec{x}_P + \vec{\mu} \cdot \delta\varphi\vec{e}_3 \qquad \forall \delta\varphi \in \mathbb{R}$$

Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\phi}_P = \text{qualsiasi} \\ \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 = 0 \Leftrightarrow \vec{\mu} \in \pi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \end{array} \right.$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Cerniera cilindrica scorrevole o collare cilindrico: per esercizio.

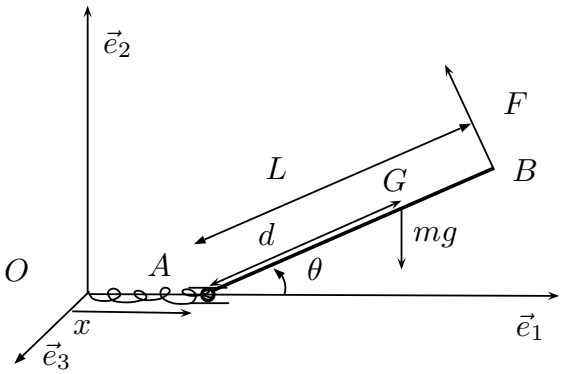
8.5 Problemi della statica dei modelli

La statica studia principalmente due problemi:

diretto: date le sollecitazioni agenti su un modello, trovare le eventuali configurazioni di equilibrio e determinare le reazioni vincolari che, come abbiamo visto, sono a priori parzialmente incognite, in quelle configurazioni;

inverso (o del controllo): assegnata una configurazione, determinare quali valori devono assumere alcuni parametri del modello (lunghezza di aste, rigidezza di molle, intensità di forze) affinché tale configurazione sia di equilibrio.

Riprendiamo il problema diretto dell'Esempio 5.11.1 già trattato con il PLV



Esempio 8.5.1.

Consideriamo l'asta della figura, vincolata con una cerniera cilindrica scorrevole lungo l'asse $(O;\vec{e}_1)$*, a stare nel piano verticale* $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$*. Supponiamo che i vincoli siano lisci e bilateri.*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Trovare:

1. Tutte le eventuali configurazioni di equilibrio.

2. Le reazioni dei vincoli sul modello in equilibrio.

   (a) Analisi cinematica: gradi di libertà e coordinate libere.
   L' equazione di vincolo è $y_A = 0$, indipendente dal tempo (vincolo fisso). Quindi il vincolo è semplice, $(v = r = 1)$. Pertanto,

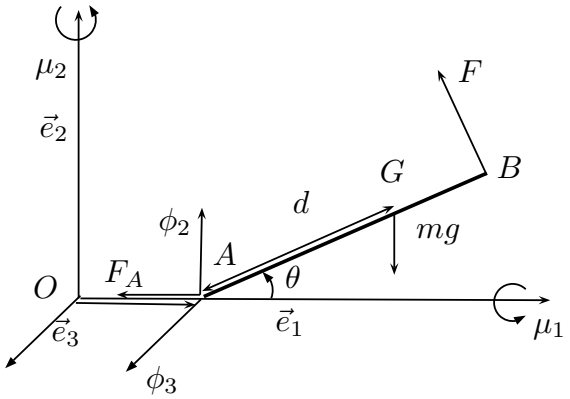
$$l = g - v = 3 - 1 = 2$$

   coordinate libere: $(\theta, x = x_O)$ $\qquad -\pi < \theta \leq \pi,\ x \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{C}_V = S^1 \times \mathbb{R}$

   (b) Analisi delle forze *esterne*

attive		reattive
molla	$\vec{F}_A = -c\,(A - O) = -cx\vec{e}_1$	$\mathcal{S}^{(r)} = \left\{\left(A, \vec{\phi}\right), \vec{\mu}\right\}, \vec{\phi}_A \cdot \vec{e}_1 \overset{(8.4.3)}{=} 0, \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 \overset{(8.4.3)}{=} 0$
follower	$\vec{F}_B = \frac{F}{L}\vec{e}_3 \times (B - A) = F(-\sin\theta\ \vec{e}_1 + \cos\theta\ \vec{e}_2)$	
peso	$m\vec{g} = -mg\vec{e}_2$	

Diagramma delle forze o di corpo libero



Scomponiamo le reazioni vincolari sulla base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$\vec{\phi}_A = \phi_2\,\vec{e}_2 + \phi_3\,\vec{e}_3\ , \qquad \vec{\mu} = \mu_1\,\vec{e}_1 + \mu_2\,\vec{e}_2\ ,$$

dove, con ϕ_2, ϕ_3, e μ_1 μ_2, abbiamo denotato le componenti scalari (non il modulo) della reazione $\vec{\phi}_A$ e, rispettivamente, della coppia $\vec{\mu}$. Il segno di tali componenti, a priori incognito, verrà determinato dalle equazioni.

1. Equilibrio

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

poiché il sistema è rigido, le ECS sono sufficienti a garantire l'equilibrio. Quindi le configurazioni di equilibrio $\mathbf{q_e} = (\theta_e, x_e)$ sono tutte e sole le soluzioni del sistema delle 2 equazioni vettoriali

$$\begin{cases} \vec{R}^{est}\left(x, \theta, \phi_2, \phi_3, \mu_1, \mu_2\right) = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{est}\left(x, \theta, \phi_2, \phi_3, \mu_1, \mu_2, \right) = \vec{0} \end{cases} , \tag{8.5.1}$$

nelle 6 incognite $(x, \theta, \phi_2, \phi_3, \mu_1, \mu_2,)$. La scelta di A come polo del momento ne semplifica il calcolo poiché $\vec{\phi}_A$ e $\vec{F}_A$ non danno contributo. Quindi, i lati sinistri del sistema (8.5.1) sono

$$\vec{R}^{(est)} = \vec{R}^{(est,att)} + \vec{R}^{(est,reatt)} = \vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_B + \vec{\phi}_A \tag{8.5.2}$$

$$\vec{M}_A^{(est)} = \vec{M}_A^{(est,att)} + \vec{M}_A^{(est,reatt)} = (G - A) \times m\vec{g} + (B - A) \times \vec{F}_B + \vec{\mu} \ . \tag{8.5.3}$$

equivalenti alle 6 equazioni scalari

$$\vec{R} \cdot \vec{e}_1 = 0 \qquad -cx - F\sin\theta = 0 \tag{8.5.4}$$

$$\vec{R} \cdot \vec{e}_2 = 0 \qquad -mg + F\cos\theta + \phi_2 = 0 \tag{8.5.5}$$

$$\vec{R} \cdot \vec{e}_3 = 0 \qquad \phi_3 = 0 \tag{8.5.6}$$

$$\vec{M}_A \cdot \vec{e}_1 = 0 \qquad \mu_1 = 0 \tag{8.5.7}$$

$$\vec{M}_A \cdot \vec{e}_2 = 0 \qquad \mu_2 = 0 \tag{8.5.8}$$

$$\vec{M}_A \cdot \vec{e}_3 = 0 \qquad -mgd\cos\theta + FL = 0 \tag{8.5.9}$$

Si osservi che in *questo caso*, poiché il modello è *piano* e le forze attive sono *complanari*, il sistema si disaccoppia in

$$\phi_3 = 0 \ , \quad \mu_1 = 0 \ , \quad \mu_2 = 0 \ ,$$

e nel sistema delle 3 equazioni scalari nelle 3 incognite (x_e, θ_e, ϕ_2),

$$\vec{R} \cdot \vec{e}_1 = 0 \qquad -cx - F\sin\theta = 0 \tag{8.5.10}$$

$$\vec{R} \cdot \vec{e}_2 = 0 \qquad -mg + F\cos\theta + \phi_2 = 0 \tag{8.5.11}$$

$$\vec{M}_A \cdot \vec{e}_3 = 0 \qquad -mgd\cos\theta + FL = 0 \ , \tag{8.5.12}$$

Tale sistema è lineare nella reazione vincolare ϕ_2 ma non lineare nella coordinata libera θ.

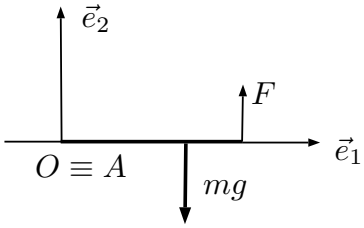
La (8.5.10) e la (8.5.12) non contengono la sollecitazione reattiva: la (8.5.10), poiché l'unica reazione in A è ortogonale a $\vec{e}_1 \Leftrightarrow \vec{\phi}_A \cdot \vec{e}_1 = 0$, la (8.5.12), grazie alla scelta del polo nel punto di applicazione della reazione vincolare. Per tale ragione, si dicono equazioni pure di equilibrio e coincidono con le (5.12.4), che abbiamo già risolto nel Cap. 5, Esempio 5.11.1.

Riscriviamo le soluzioni, cioè le configurazioni di equilibrio $\mathbf{q}_e = (\theta_e, x_e)$:

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

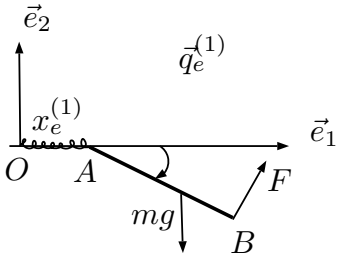
se $\lambda = 1 \Leftrightarrow FL = mgd$

$$\mathbf{q}_e^{(0)} = (0, 0)$$

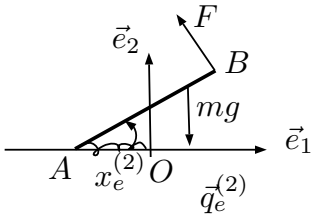


se $\lambda < 1 \Leftrightarrow FL < mgd$

$$\mathbf{q}_e^{(1)} = \left(-\arccos\lambda, \frac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2}\right)$$



$$\mathbf{q}_e^{(2)} = \left(\arccos\lambda, -\frac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2}\right)$$



2. Reazioni vincolari

Dall'equazione (8.5.11) ricaviamo la reazione vincolare:

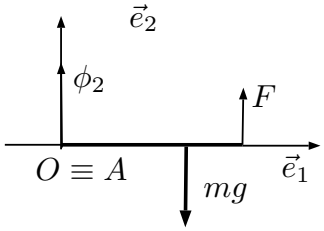
$$\phi_2 = mg - F\cos\theta = mg - F\lambda \qquad \text{se } \lambda \leq 1$$

Allora, possiamo riassumere i risultati ottenuti:

se $\lambda = 1 \Leftrightarrow FL = mgd$

$$\mathbf{q}_e^{(0)} = (0, 0)$$

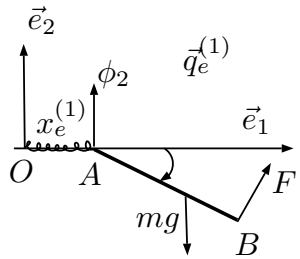
$$\phi_2 = mg - F = mg\left(1 - \frac{d}{L}\right) > 0 \ , \phi_3 = 0 \ , \mu_1 = 0 \ , \mu_2 = 0$$



se $\lambda < 1 \Leftrightarrow FL < mgd$

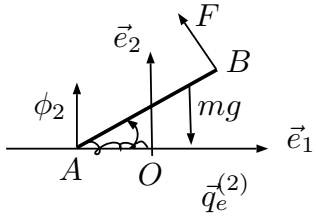
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$$\mathbf{q}_e^{(1)} = \left(-\arccos\lambda, \frac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2} \right)$$



$$\phi_2 = mg - \lambda F \ , \phi_3 = 0 \ , \mu_1 = 0 \ , \mu_2 = 0$$

$$\mathbf{q}_e^{(2)} = \left(\arccos\lambda, -\frac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2} \right)$$



Quiz. Qual è il verso di $\vec{\phi}_A$? La sua componente scalare è data da

$$\phi_2 = mg\left(1 - \lambda\frac{F}{mg}\right) = mg\left(1 - \lambda^2\frac{d}{L}\right) \ ,$$

che ha segno positivo se e solo se

$$\lambda^2 < \frac{L}{d} \Leftrightarrow \lambda < \sqrt{\frac{L}{d}} \ .$$

Tale condizione è soddisfatta poiché $\sqrt{\frac{L}{d}} > 1$ e $\lambda < 1$, pertanto segue che:

$$\lambda < 1 < \sqrt{\frac{L}{d}} \ .$$

Dunque, in questo problema, $\phi_2 > 0$, quindi $\vec{\phi}_A$ è sempre concorde al versore $\vec{e}_2$, quindi è diretta verso l'alto.

Supponiamo, ora, che la guida sia scabra. Sperimentalmente è stato osservato che, per un rigido 3D come nella Figura 8.5.1, oltre al componente reattivo ortogonale al vincolo, $\vec{\phi}_n$, esiste anche un componente tangente al vincolo, $\vec{\phi}_t$, che soddisfa la relazione di Coulomb:

$$\frac{\left|\vec{\phi}_t\right|}{\left|\vec{\phi}_n\right|} \leq \nu_s \qquad \nu_s\text{: coefficiente di attrito statico} \tag{8.5.13}$$

Le condizioni nelle quali si realizza l'uguaglianza nella (8.5.13), si chiamano condizioni *di equilibrio limite*. Dunque, nel nostro problema, la reazione in A si scompone come $\vec{\phi}_A = \phi_1\,\vec{e}_1 + \phi_2\,\vec{e}_2 + \phi_3\,\vec{e}_3$ e vale la relazione $\frac{|\phi_1|}{\sqrt{\phi_2^2+\phi_3^2}} \leq \nu_s$; in condizioni di equilibrio limite $|\phi_1| = \nu_s\sqrt{\phi_2^2+\phi_3^2}$.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

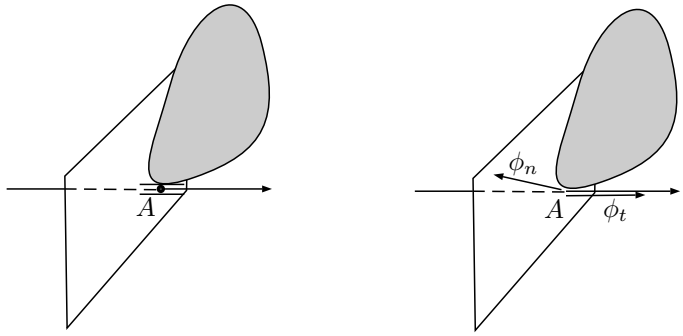


Figura 8.5.1: Reazioni di un appoggio semplice lungo una guida scabra

Allora, le ECS e la relazione di Coulomb si scrivono

$$\phi_1 - cx - F\sin\theta = 0 \tag{8.5.14}$$

$$\phi_2 - mg + F\cos\theta = 0 \tag{8.5.15}$$

$$\phi_3 = 0 \tag{8.5.16}$$

$$\mu_1 = 0 \tag{8.5.17}$$

$$\mu_2 = 0 \tag{8.5.18}$$

$$-mgd\cos\theta + FL = 0 \tag{8.5.19}$$

$$|\phi_1| = \nu_s\sqrt{\phi_2^2 + \phi_3^2} \tag{8.5.20}$$

poiché le (8.5.15)–(8.5.19) sono invariate, le soluzioni per θ_e e le componenti della sollecitazione reattiva ϕ_2, ϕ_3, μ_1, μ_2, assumono gli stessi valori del caso senza attrito.

$$\theta_e = \left\{\theta_e^{(0)} = 0,\ \theta_e^{(1)} = -\arccos\lambda,\ \theta_e^{(2)} = \arccos\lambda\right\} \qquad \lambda = \frac{FL}{mgd} \leq 1$$

$$\phi_2 = mg - F\lambda = mg\left(1 - \lambda^2\frac{d}{L}\right) > 0\ , \quad \phi_3 = 0\ , \quad \mu_1 = 0\ , \quad \mu_2 = 0\ .$$

poiché ϕ_2 è sempre positiva all'equilibrio, possiamo scrivere la (8.5.14) e la (8.5.20) nel modo seguente:

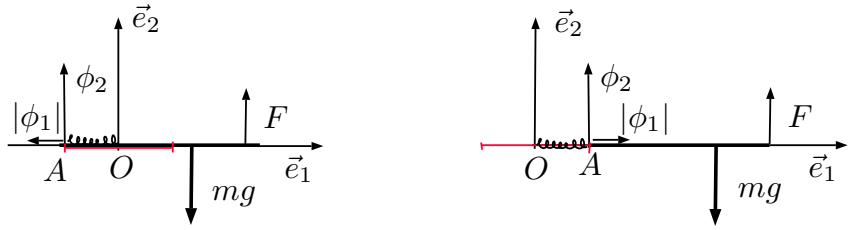
$$\begin{cases} x = -\frac{F}{c}\sin\theta + \frac{\phi_1}{c} \\ \\ |\phi_1| = \nu_s|\phi_2| = \nu_s\phi_2 \Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = \nu_s\phi_2 & \text{se } \phi_1 > 0 \\ \phi_1 = -\nu_s\phi_2 & \text{se } \phi_1 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Allora, in condizioni di equilibrio limite $\mathbf{q}_e = (\theta_e, \bar{x}_e)$, si ha:

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

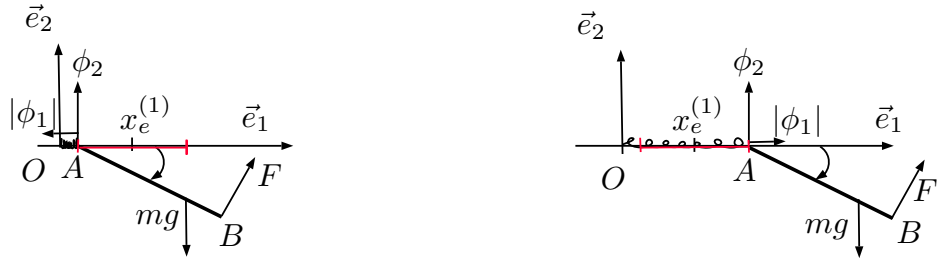
1. se $\lambda = 1$, $\theta_e^{(0)} = 0$ $\quad \phi_2 = mg\left(1 - \frac{d}{L}\right)$, $\quad \phi_3 = 0$, $\quad \mu_1 = 0$, $\quad \mu_2 = 0$

   $\phi_1 = \pm\nu_s mg\left(1 - \frac{d}{L}\right)$ $\quad \overline{x}_e^{(0)} = \pm\frac{\phi_1}{c} = \pm\nu_s\frac{mg}{c}\left(1 - \frac{d}{L}\right) = \pm\Delta x_e$



2. se $0 < \lambda < 1$, $\theta_e^{(1)} = -\arccos\lambda$ $\quad \phi_2 = mg\left(1 - \lambda^2\frac{d}{L}\right)$, $\quad \phi_3 = 0$, $\quad \mu_1 = 0$, $\quad \mu_2 = 0$

   $\phi_1 = \pm\nu_s mg\left(1 - \lambda^2\frac{d}{L}\right)$ $\quad \overline{x}_e^{(1)} = x_e^{(1)} \pm \Delta x_e$



3. se $0 < \lambda < 1$, $\theta_e^{(2)} = \arccos\lambda$ $\quad \phi_2 = mg\left(1 - \lambda^2\frac{d}{L}\right)$, $\quad \phi_3 = 0$, $\quad \mu_1 = 0$, $\quad \mu_2 = 0$

   $\phi_1 = \pm\nu_s mg\left(1 - \lambda^2\frac{d}{L}\right)$ $\quad \overline{x}_e^{(2)} = x_e^{(2)} \pm \Delta x_e$

Dunque, in condizioni di equilibrio limite ogni configurazione di equilibrio del caso senza attrito si duplica, cioè le configurazioni di equilibrio raddoppiano. Invece, nelle condizioni di equilibrio non limite, $\mathbf{q}_e = (\theta_e, \bar{\bar{x}}_e)$, è facile convincersi che le configurazioni di equilibrio diventano infinite, poiché coincidono con tutti i punti degli intervalli aventi come estremi le configurazioni di equilibrio limite, e come centri le configurazioni di equilibrio in assenza di attrito:

1. se $\lambda = 1$, $\theta_e^{(0)} = 0$, $-\Delta x_e \leq \overline{\overline{x}}_e^{(0)} \leq \Delta x_e$

2. se $0 < \lambda < 1$, $\theta_e^{(1)} = -\arccos\lambda$, $x_e^{(1)} - \Delta x_e \leq \overline{\overline{x}}_e^{(1)} \leq x_e^{(1)} + \Delta x_e$

3. se $0 < \lambda < 1$, $\theta_e^{(2)} = \arccos\lambda$, $x_e^{(2)} - \Delta x_e \leq \overline{\overline{x}}_e^{(2)} \leq x_e^{(2)} + \Delta x_e$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

In conclusione, abbiamo constatato che la presenza di attrito "favorisce" l'equilibrio. Ecco perché trascurare l'attrito vuol dire mettersi nella situazione più sfavorevole per l'equilibrio e quindi in quella di maggior sicurezza. È quello che faremo da ora in poi.

N. B. Se la guida è scabra, le ECS sono l'unico metodo che possiamo usare per studiare gli equilibri di un sistema meccanico. Infatti, l'uso del PLV richiede l'ipotesi di vincoli *non dissipativi*.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

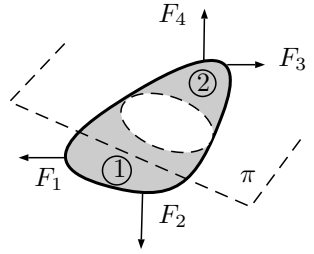
Capitolo 9

Sollecitazioni interne in un rigido in equilibrio

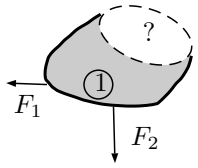
In questo capitolo, faremo alcuni cenni alle forze interne che si esplicano in un modello rigido in equilibrio. Vedremo che i vincoli di rigidità tra due parti di un rigido possono essere schematizzati come insiemi di forze e di coppie di azione e reazione che le due parti esercitano una sull'altra. Scomponendo in modo opportuno il risultante e il momento risultante di tale insieme di forze, definiremo la forza *normale*, quella di *taglio*, il *momento torcente* e il *momento flettente*.

9.1 Azioni interne in un rigido 3D in equilibrio

Consideriamo un rigido $\mathcal{R}$ in equilibrio sotto l'azione di un insieme di forze esterne $\mathcal{S} = \left\{(A_i, \vec{F_i})\right\}_{i=1,\cdots,N}$ equivalente al sistema equilibrato. Sia π un piano che seziona (virtualmente) il rigido e non contiene alcuno dei punti di applicazione dei carichi concentrati, in modo che $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.



$\mathcal{S}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} = \{?\}$



$\mathcal{S}^{(est\to\mathcal{R})} = \left\{(A_i, \vec{F_i})\right\}_{i=1,\cdots,N} \sim \{\vec{0}\}$ $\qquad$ $\mathcal{S}^{(est\to\mathcal{R}_1)} = \left\{(A_1, \vec{F_1}), (A_2, \vec{F_2}))\right\}$

La parte $\mathcal{R}_1$ del rigido è ovviamente in equilibrio ma le forze esterne a cui solo essa è soggetta sono date dall'insieme $\mathcal{S}^{(est\to\mathcal{R}_1)}$. Se il sistema $\mathcal{S}^{(est\to\mathcal{R}_1)}$ non è nullo, condizione necessaria all'equilibrio della parte $\mathcal{R}_1$ è che il sistema $\mathcal{S}^{(est\to\mathcal{R}_1)}$ sia equilibrato da un altro sistema di forze applicate. Tale insieme non può che essere dato dalle azioni che la parte $\mathcal{R}_2$ esercita sulla parte $\mathcal{R}_1$ attraverso la

sezione e sarà denotato da

$$\mathcal{S}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}$$

La condizione necessaria di equilibrio della parte $\mathcal{R}_1$ si può esprimere simbolicamente

$$\mathcal{S}^{(est\to\mathcal{R}_1)} \cup \mathcal{S}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \sim \mathcal{S}^{(est\to\mathcal{R})} \sim \{\vec{0}\}$$

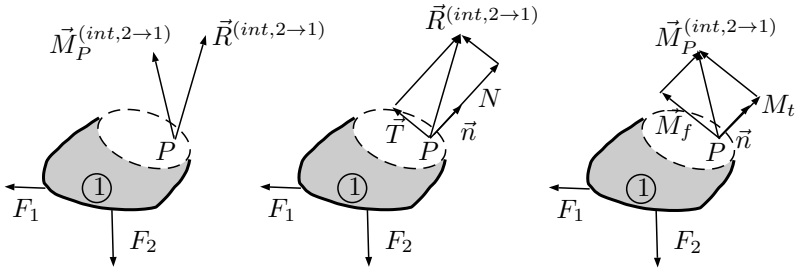
Poiché un insieme di forze applicate a un rigido si può sempre ridurre a una forza e ad una coppia possiamo affermare

$$\mathcal{S}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \sim \left\{\left(P, \vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}\right), \vec{M} = \vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}\right\} ,$$

dove P è un punto qualsiasi che, convenzionalmente, sceglieremo appartenente alla sezione π_1. Allora, la condizione necessaria di equilibrio della parte $\mathcal{R}_1$ è data dalle due equazioni vettoriali

$$\vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} = -\vec{R}^{(est\to\mathcal{R}_1)} = \vec{R}^{(est\to\mathcal{R}_2)}$$

$$\vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} = -\vec{M}_P^{(est\to\mathcal{R}_1)} = \vec{M}_P^{(est\to\mathcal{R}_2)}$$



Ora scomponiamo le due sollecitazioni interne lungo il versore normale $\vec{n}(\pi_1)$ orientato dalla parte $\mathcal{R}_1$ verso la parte $\mathcal{R}_2$ e lungo il piano di sezione, introducendo le definizioni

$N(\pi_1) := \vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{n}(\pi_1)$ forza normale (la componente lungo la normale alla sezione)

$\vec{T}(\pi_1) := \vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} - N\vec{n}(\pi_1)$ forza di taglio (il componente sul piano di sezione)

Se $N(\pi_1) > 0$ si dice che il rigido, nei punti della sezione π_1, è sottoposto a *trazione* mentre, se $N(\pi_1) < 0$ si dice che è soggetto a *compressione*.

Ricapitolando, la forza normale è la forza che la parte $\mathcal{R}_2$ esercita sulla parte $\mathcal{R}_1$ per equilibrare la trazione (o la compressione) dovuta all' insieme $\mathcal{S}^{(est\to\mathcal{R}_1)}$. Analogamente, la forza di taglio è la forza che la parte $\mathcal{R}_2$ esercita sulla parte $\mathcal{R}_1$ per equilibrare la forza di taglio di $\mathcal{S}^{(est\to\mathcal{R}_1)}$, azione che tenderebbe a far slittare la parte $\mathcal{R}_1$ rispetto alla parte $\mathcal{R}_2$ lungo il piano di sezione.

Una scomposizione analoga si può fare per il $\vec{M}_P^{(int,2\to1)}$. Infatti, chiameremo:

$M_t(\pi_1, P) = \vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{n}(\pi_1)$ momento torcente (la componente lungo la normale alla sezione)

$\vec{M}_f(\pi_1, P) = \vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} - M_t\,\vec{n}(\pi_1)$ momento flettente (il componente sul piano di sezione)

Il momento torcente è la componente della sollecitazione interna che si oppone alla torsione dovuta a $\mathcal{S}^{(est\to\mathcal{R}_1)}$, mentre il momento flettente è il componente della sollecitazione interna che equilibra la flessione.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Complessivamente, non c'è alcuna deformazione del corpo in oggetto, coerentemente con la scelta del modello rigido assunto per descrivere il sistema materiale.

N.B. Per il principio di azione e reazione i vettori delle azioni interne che la parte 1 a sua volta esercita sulla parte 2 sono opposte a quelle che abbiamo calcolato, cioè, sono opposti i vettori caratteristici

$$\vec{R}^{(int,\mathcal{R}_1\to\mathcal{R}_2)} = -\vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}$$

$$\vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_1\to\mathcal{R}_2)} = -\vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}$$

Tuttavia, poiché la normale uscente dalla sezione della parte $\mathcal{R}_2$, $\vec{n}(\pi_2)$, è opposta a quella uscente dalla parte $\mathcal{R}_1$, $\vec{n}(\pi_1)$, segue che la componente *scalare* della forza *normale* che $\mathcal{R}_1$ esercita sulla parte $\mathcal{R}_2$ è uguale a quella che $\mathcal{R}_2$ esercita su $\mathcal{R}_1$ e che abbiamo già calcolato.

$$\vec{R}^{(int,1\to2)} \cdot \vec{n}\,(\pi_2) = -\vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \cdot (-\vec{n}\,(\pi_1)) = \vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{n}\,(\pi_1)$$

$$\vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_1\to\mathcal{R}_2)} \cdot \vec{n}\,(\pi_2) = -\vec{M}_P^{(int,2\to1)} \cdot (-\vec{n}\,(\pi_1)) = \vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{n}\,(\pi_1)$$

Del resto è ovvio che se $\mathcal{R}_2$ esercita su $\mathcal{R}_1$ una trazione (rispettivamente una compressione) la stesso farà $\mathcal{R}_1$ su $\mathcal{R}_2$ per il principio di azione e reazione. Dunque, quando parliamo di azione normale possiamo omettere di specificare quale delle due parti del rigido stiamo considerando e precisare un solo piano di sezione π. Lo stesso discorso vale per il momento *torcente*, cioè per la componente normale del momento delle forze interne. Invece, non possiamo fare analogo discorso per le componenti scalari del taglio e del momento flettente dei quali, in 3D, non possiamo determinare a priori la direzione ma possiamo dire soltanto che giacciono nel piano della sezione.

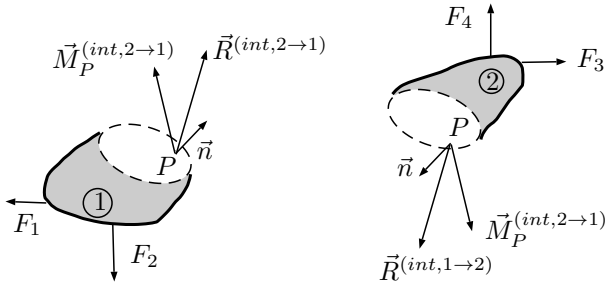
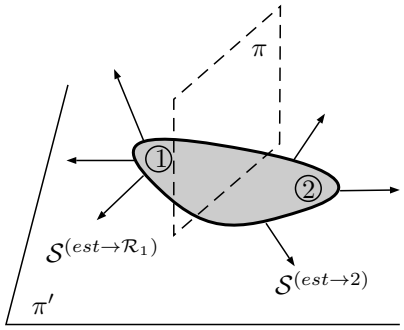


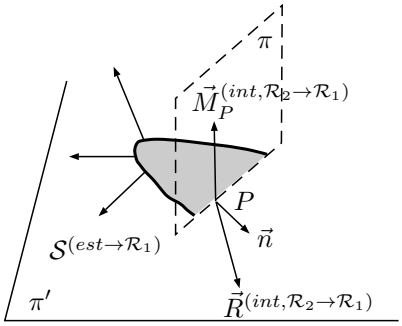
Figura 9.1.1: Segni di N e M_t

9.2 Azioni interne in un rigido 2D in equilibrio

Studiamo ora come si specializza il discorso precedente ai rigidi piani (lamine) soggetti a forze e a coppie nel loro *piano*, che chiameremo π'. In tal caso, si conviene di prendere, il piano π con cui si seziona il rigido, ortogonale al piano della lamina, così ché la normale alla sezione (che si riduce ad un segmento) sia ortogonale al segmento ed appartenga al piano della lamina.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



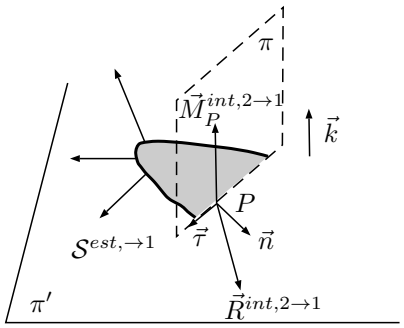


Dall'ipotesi che la lamina sia in equilibrio sotto l'azione di forze e coppie appartenenti al piano segue che:

$$\vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} = -\vec{R}^{(est\to 1)} \in \pi'$$
$$\vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} = -\vec{M}_P^{(est\to 1)} \perp \pi'$$

Dunque, i componenti di $\vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}$ appartengono al piano π' della lamina e questo spiega perché è naturale scegliere il piano $\pi \perp \pi'$ e di conseguenza la normale $\vec{n}$ appartenente al piano π'. In particolare, il componente di taglio di $\vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}$, necessariamente, deve stare su π' e deve essere ortogonale a $\vec{n}(\pi)$. Pertanto, sotto le ipotesi suddette, possiamo determinare a priori la direzione del taglio (ma non il verso) e quindi introdurre un versore $\vec{\tau}$ diretto come $r := \pi \cap \pi'$. Il verso di $\vec{\tau}$, conviene sceglierlo in modo che $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{k})$ sia una terna destra, quindi

$$\vec{\tau} = \vec{n} \times \vec{k}\ .$$



Avendo scelto i versori suddetti, le componenti delle azioni interne possono essere calcolate:

$$N(r_1) = \vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{n}(r_1) \qquad \text{la componente normale}$$

$$T(r_1) = \vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{\tau}(r_1) \qquad \text{la componente di taglio}$$

Per quanto riguarda il momento delle forze interne, per quanto già osservato, è diretto come $\vec{k}$ e quindi non ha alcun componente lungo $\vec{n}$. Dunque:

$$M_t(r_1, P) = \vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{n}(r_1) = 0$$

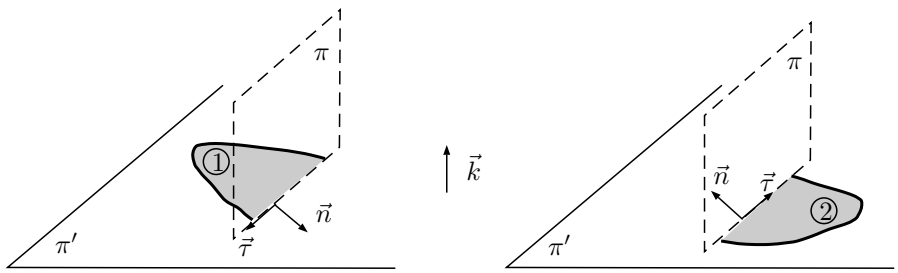
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

cioè il momento torcente è nullo, mentre la componente del momento flettente è data da

$$M_f\left(r_1, P\right) = \vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{k}$$

N.B. Quando si passa a considerare la parte 2 della lamina, conviene mantenere la stessa convenzione per la scelta sia del versore $\vec{n}(r_2)$, sia del versore $\vec{\tau}(r_2) = \vec{n}(r_2) \times \vec{k}$. In tal modo, si ottiene

$$\vec{n}(r_2) = -\vec{n}(r_1)\ , \quad \vec{\tau}(r_2) = -\vec{\tau}(r_1)$$

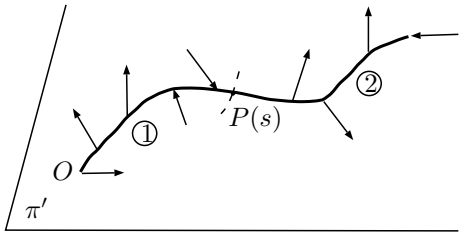


Allora, il segno della forza normale e del taglio non varia (per i motivi già spiegati nella nota di pag. 219) quando si considerano le azioni interne della parte 1 sulla parte 2. Invece, poichè il versore ortogonale al piano della lamina è sempre $\vec{k}$, il segno della componente del momento flettente varia quando si considera quello agente sulla parte 2. Infatti,

$$M_f^{(int,\mathcal{R}_1\to\mathcal{R}_2)}(r_2, P) = \vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_1\to\mathcal{R}_2)} \cdot \vec{k} = -\vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{k} = -M_f\left(r_1, P\right)^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}$$

9.3 Azioni interne in rigido 1D in equilibrio

Passiamo ora a considerare le azioni interne in un rigido unidimensionale, eventualmente curvilineo (aste ed archi) ma piano, soggetto a forze e coppie nel piano che di nuovo, chiameremo π'.



In questo caso, per individuare il punto del rigido in cui faremo una sezione (virtuale) utilizzeremo l'ascissa curvilinea s a partire da un'origine fissata O, come in figura. Analogamente a quanto succede per le lamine soggette a forze nel piano, anche in questo caso

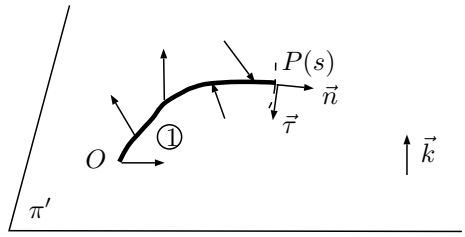
$$\vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} = -\vec{R}^{(est\to\mathcal{R}_1)} \in \pi'$$

$$\vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} = -\vec{M}_P^{(est\to\mathcal{R}_1)} \perp \pi'$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Allora, come versori $\vec{n}$, $\vec{\tau}$, $\vec{k}$ possiamo scegliere rispettivamente il versore tangente alla curva che rappresenta il rigido e di nuovo $\vec{\tau} = \vec{n} \times \vec{k}$; in altre parole scegliamo la terna intrinseca alla curva. Ovviamente i versori $\vec{n}$ e $\vec{\tau}$ (ma non $\vec{k}$) dipendono dal punto P della sezione, cioè:

$$\vec{n} = \vec{n}\,(s)\,, \quad \vec{\tau} = \vec{\tau}\,(s)\,, \quad \vec{k} = \vec{\tau} \times \vec{n} \ \perp \pi'$$



Analogamente a quanto detto nel caso precedente della lamina piana, possiamo calcolare le azioni interne nel modo seguente

$$N\,(s) = \vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{n}\,(s) \qquad \text{la componente normale}$$

$$T\,(s) = \vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{\tau}\,(s) \qquad \text{la componente di taglio}$$

$$M_f\,(s) = \vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{k} \qquad \text{momento flettente}$$

mentre il momento torcente risulta nullo come nel caso 2D

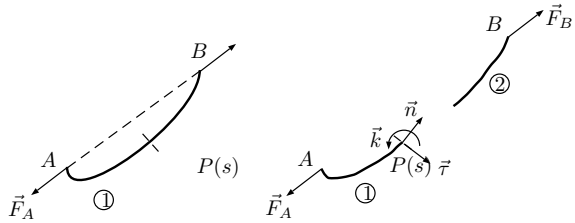
$$M_t\,(s) = \vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{n}\,(s) = 0$$

9.4 Azioni interne in archi e aste "scariche" in equilibrio

Consideriamo ora il caso semplice, ma frequente, di un arco soggetto soltanto a forze concentrate agli estremi (ma non a coppie, ad esempio, d'incastro); per brevità diremo che l'arco è "scarico" e non soggetto a coppie.

È ovvio che l'arco è in equilibrio sotto l'azione delle due forze non nulle $\vec{F_A}$ e $\vec{F_B}$ applicate agli estremi, se e solo se tali forze costituiscono una coppia a braccio nullo.

In questa situazione, le azioni interne nel punto $P\,(s)$ sono date da



$$N(s) = -\vec{F_A} \cdot \vec{n}(s) = \vec{F_B} \cdot \vec{n}(s)$$

$$T(s) = -\vec{F_A} \cdot \vec{\tau}(s) = \vec{F_B} \cdot \vec{\tau}(s)$$

$$M_f(s) = -(A-P) \times \vec{F_A} \cdot \vec{k} = (B-P) \times \vec{F_B} \cdot \vec{k}$$

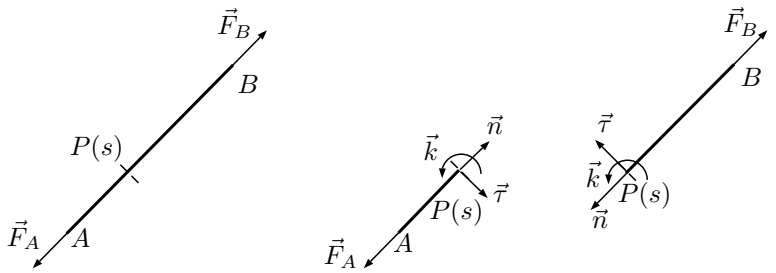
$$\Rightarrow |M_f(s)| = |\vec{F_A}|d(s) = |\vec{F_B}|d(s)$$

Pertanto, la forza normale, quella di taglio e il momento flettente dipendono dal punto P in cui faccio la sezione e inoltre il momento flettente si annulla necessariamente agli estremi A e B.

Nel caso importante di aste "scariche", non soggette a coppie agli estremi [1], dobbiamo osservare che il versore $\vec{n}$ è sempre diretto lungo l'asta e quindi $\vec{\tau}$ è ortogonale all'asta.

[1] In Scienza delle Costruzioni sono dette "pendoli" o "bielle", termini che potrebbero generare confusione.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Quindi si avrà che:

$$N(s) = -\vec{F_A} \cdot \vec{n} = \vec{F_B} \cdot \vec{n}$$

$$T(s) = -\vec{F_A} \cdot \vec{\tau} = 0$$

$$|M_f(s)| = |F_A|\, d = 0$$

Dunque, in un'asta "scarica" priva di coppie agli estremi, le azioni interne si riducono alla sola componente normale, che viene chiamata azione *assiale*, mentre il taglio e il momento flettente si annullano. Inoltre, la forza assiale è uniforme in ogni punto P dell'asta, poiché il versore $\vec{n}$ non dipende da P. Se $N > 0$ si dice che l'asta è soggetta a *trazione* mentre se $N < 0$ si dice che l'asta e soggetta a *compressione*. Il fatto che le altre due componenti delle azioni interne si annullano, si esprime dicendo che un'asta "scarica" non soggetta a coppie si comporta da

$$\text{tirante, se } N > 0$$

$$\text{puntone, se } N < 0$$

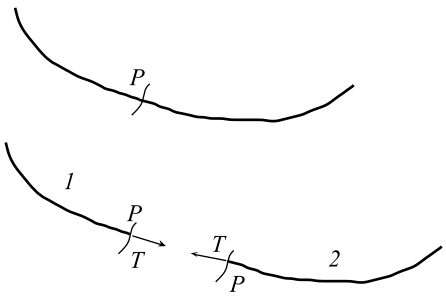
9.5 Osservazioni sui fili

Chiameremo *filo* un continuo unidimensionale *deformabile* e perfettamente flessibile, tale cioè che le azioni interne, in un filo equilibrato, siano riducibili soltanto ad una forza applicata nel punto della sezione. Applicando le ECS ad ogni tratto infinitesimo del filo, si può dimostrare che tale azione interna è sempre tangente al filo. Allora, poichè per definizione un filo non è in grado di resistere alla compressione, possiamo dire che, all' equilibrio, sarà soggetto solo a trazione; la forza interna si chiamerà *tensione* del filo e si indicherà con

$$\vec{T}(P) = T(P)\,\vec{t}(P) \qquad T(P) \geq 0\ , \tag{9.5.1}$$

dove con $\vec{t}$ indichiamo il versore tangente alla curva formata dal filo e orientato come il versore $\vec{n}$ utilizzato sinora. Si faccia attenzione a non confondere la tensione del filo T con la forza interna di taglio nei rigidi.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Esempio 9.5.1. *Una catenella o una fune di sezione trascurabile si comportano come un filo.*

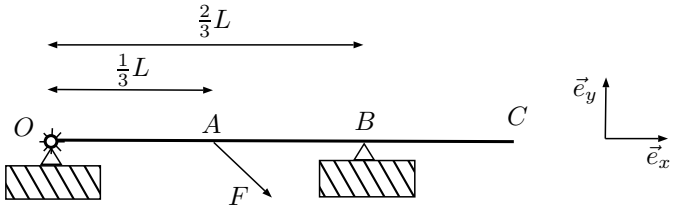
Definizione 9.5.1. *Diremo filo ideale, un filo di massa trascurabile ed inestensibile, cioè un filo in cui la lunghezza del tratto congiungente una qualsiasi coppia di suoi punti non dipende dalla configurazione.*

Un filo ideale in equilibrio *scarico*, cioè soggetto soltanto a forze applicate ai suoi estremi, si comporta come un tirante; quindi si dispone lungo una linea retta ed è caratterizzato da una tensione costante in ogni suo punto.

In questo corso, utilizzeremo solo fili ideali nel ruolo di vincoli in grado di esercitare una reazione vincolare diretta tangenzialmente al filo: la tensione.

9.6 Calcolo di azioni interne in un rigido monodimensionale

Consideriamo un'asta omogenea pesante nel piano verticale con 1 cerniera fissa e 1 appoggio e soggetta ad un carico concentrato inclinato di 45° rispetto all'asta. Tenendo conto che tutte le forze attive sono nel piano verticale, possiamo concludere che le reazioni vincolari appartengono allo stesso piano e che il momento delle reazioni avrà solo una componente ortogonale al piano. Quindi, possiamo scrivere subito il sistema delle ECS "ridotto" al piano.



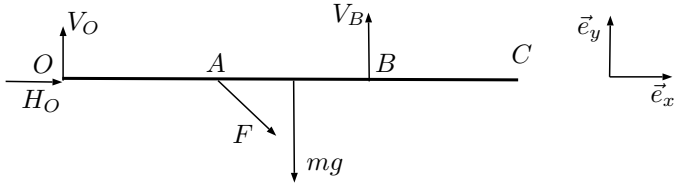
1. Analisi cinematica: $g = 3$, $\mathcal{C}_L = \{(x_O, y_O, \theta)\} = \mathbb{R}^2 \times S^1$

$$\text{Eq di vincolo} \begin{cases} x_O = 0 \\ y_O = 0 \\ \theta \geq 0 \end{cases} \begin{array}{l} \nearrow \begin{cases} x_O = 0 \\ y_O = 0 \\ \theta > 0 \end{cases} \quad \text{configurazioni ordinarie } r = 2,\ l = 1 \Rightarrow \text{ipostatico} \\ \searrow \begin{cases} x_O = 0 \\ y_O = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad \text{configurazione di confine } r = 3,\ l = 0 \Rightarrow \text{ isostatico} \end{array}$$

Studiamo la configurazione di confine ($l = 0$)

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

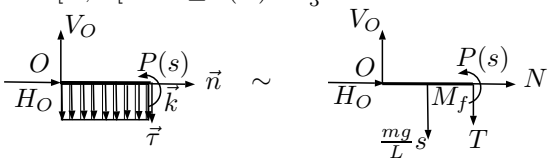
2. Calcolo delle reazioni vincolari esterne



$$\begin{array}{l} \vec{R}^{est}\cdot\vec{e}_x \\ \vec{R}^{est}\cdot\vec{e}_y \\ \\ \vec{M}_O^{est}\cdot\vec{e}_z \end{array} \begin{cases} H_O + \frac{F}{\sqrt{2}} = 0 \\ V_O - \frac{F}{\sqrt{2}} - mg + V_B = 0 \\ -\frac{F}{\sqrt{2}}\frac{L}{3} - mg\frac{L}{2} + V_B\frac{2}{3}L = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_O = -\frac{F}{\sqrt{2}} & < 0 \\ V_O = \frac{F}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4}mg & > 0 \\ V_B = \frac{F}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{4}mg & > 0 \end{cases}$$

3. Calcolo delle azioni interne
Poiché l'asta è soggetta a 2 carichi concentrati in A e B dobbiamo dividere l'intervallo $[O, C]$ in 3 sotto-intervalli: $[O, A[$, $]A, B[$ e $]B, C]$.

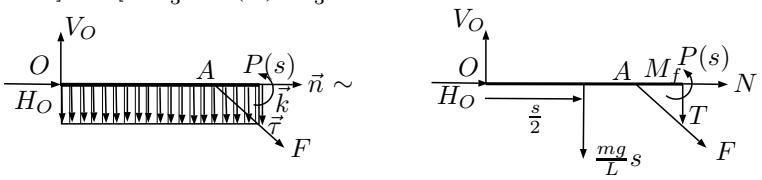
(a) $P \in [O, A[\Leftrightarrow 0 \leq s(P) < \frac{L}{3}$



$\vec{n} = \vec{e}_x,\ \vec{\tau} = \vec{n}\times\vec{k} = -\vec{e}_y,\ \vec{\tau}\times\vec{n} = \vec{k} = \vec{e}_z$

$$\begin{cases} H_O + N = 0 \\ -V_O + T + \frac{mg}{L}s = 0 \\ M_f - V_O s + \frac{mg}{L}s\frac{s}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} & N = -H_O = \frac{F}{\sqrt{2}} > 0 \\ & T = \left(\frac{F}{2\sqrt{2}} + \frac{mg}{4}\right) - \frac{mg}{L}s \\ & T\left(\frac{L^-}{3}\right) = \frac{F}{2\sqrt{2}} - \frac{mg}{12} \\ & M_f = \left(\frac{F}{2\sqrt{2}} + \frac{mg}{4}\right)s - \frac{mg}{L}\frac{s^2}{2} \\ & M_f\left(\frac{L^-}{3}\right) = \left(\frac{F}{6\sqrt{2}} + \frac{mg}{36}\right)L \end{aligned}$$

(b) $P \in]A, B[\Leftrightarrow \frac{L}{3} < s(P) < \frac{2}{3}L$



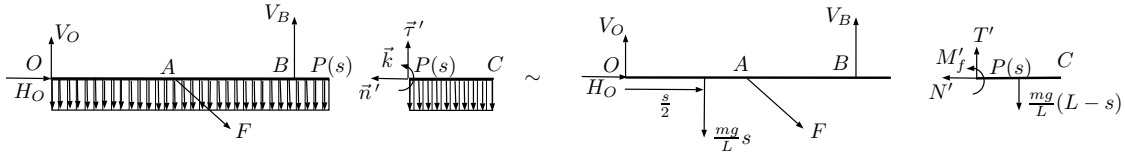
$$\begin{cases} H_O + \frac{F}{\sqrt{2}} + N = 0 \\ -V_O + T + \frac{mg}{L}s + \frac{F}{\sqrt{2}} = 0 \\ M_f - V_O s + \frac{mg}{L}\frac{s^2}{2} + \frac{F}{\sqrt{2}}\left(s - \frac{L}{3}\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} N = -H_O - \frac{F}{\sqrt{2}} = 0 \\ T = \left(-\frac{F}{2\sqrt{2}} + \frac{mg}{4}\right) - \frac{mg}{L}s \\ M_f = \left(-\frac{F}{2\sqrt{2}} + \frac{mg}{4}\right)s - \frac{mg}{L}\frac{s^2}{2} + \frac{F}{\sqrt{2}}\frac{L}{3} \end{cases}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$$M_f\left(\frac{L^+}{3}\right)=\frac{FL}{6\sqrt{2}}+\frac{mgL}{36},\ T\left(\frac{L^+}{3}\right)=-\frac{F}{2\sqrt{2}}-\frac{mg}{12}$$

$$M_f\left(\frac{2L^-}{3}\right)=-\frac{mgL}{18},\ T\left(\frac{2L^-}{3}\right)=-\frac{F}{2\sqrt{2}}-\frac{5}{12}mg$$

(c) $P\in\,]B,C]\Leftrightarrow\frac{2}{3}L<s(P)\leq L$
In questo caso, è più semplice studiare l'equilibrio della parte 2 che è soggetta solo al peso proprio. Denotando con $N'=\vec{R}^{int,1\to2}\cdot\vec{n}(2)$, $T'=\vec{R}^{int,1\to2}\cdot\vec{\tau}(2)$, $M'_f=\vec{M}_P^{int,1\to2}\cdot\vec{k}$, risulta



$$\begin{cases}N'=0\\T'-\frac{mg}{L}(L-s)=0\\M'_f-\frac{mg}{L}\frac{(L-s)^2}{2}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}N'=0\\T'=\frac{mg}{L}(L-s)\\M'_f=\frac{mg}{2L}(L-s)^2\end{cases}$$

Poiché dalle **N.B.** di pag. 221 segue :

$$N=N',\quad T=T',\quad M_f=-M'_f$$

si ha che:

$$N=0,\quad T=\frac{mg}{L}(L-s),\quad M_f=-\frac{mg}{2L}(L-s)^2,\ M_f\left(\frac{2}{3}L^+\right)=-\frac{mgL}{18}$$

N.B. Verificare per esercizio le relazioni:

$$\left|\frac{dM_f}{ds}\right|=|T|,\quad\left|\frac{dT}{ds}\right|=\vec{f}(s)\cdot\vec{\tau},\quad\left|\frac{dN}{ds}\right|=\vec{f}(s)\cdot\vec{n}\ ,\tag{9.6.1}$$

dove $\vec{f}(s)$ denota la forza specifica, cioè il carico distribuito per unità di lunghezza.

9.6.1 Approfondimento: diagrammi delle azioni interne

Per ricapitolare i risultati ottenuti nell'esempio precedente, conviene rappresentarli graficamente (Vedi la Figura 9.6.1).

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

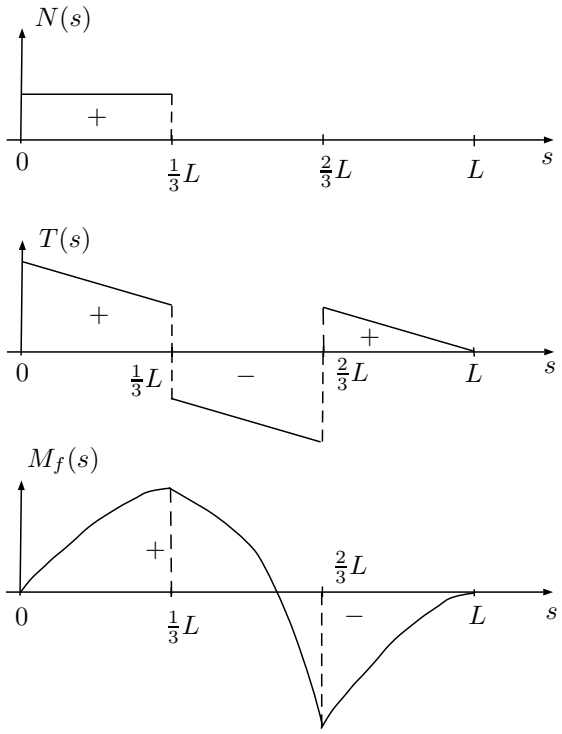


Figura 9.6.1: Grafico di $N(s)$, $T(s)$, $M_f(s)$ se $F > \frac{mg\sqrt{(2)}}{6}$

N.B. I diagrammi disegnati non sono altro che i grafici delle tre funzioni della variabile s: $N(s)$, $T(s)$, $M_f(s)$. In Scienza delle Costruzioni si usano rappresentazioni grafiche diverse.

N.B. Ora possiamo constatare alcune generali proprietà della sollecitazione interna nelle aste, alcune delle quali proprietà possiamo verificare in questo esempio:

1. $N(s)$ (rispettivamente $T(s)$) sono discontinue nei punti, interni all'asta, in cui vi sono carichi concentrati normali (rispettivamente di taglio).

2. $M_f(s)$ è discontinuo nei punti in cui si incontrano coppie concentrate. Altrimenti, come nel suddetto esempio, è continuo ma è derivabile solo a tratti: presenta dei punti angolosi che coincidono con i salti di $T(s)$(si veda la prima della (9.6.1)).

3. Nei tratti in cui la componente normale

$$f_n(s) = \vec{f}(s) \cdot \vec{n}$$

della forza specifica è nulla, $N(s)$ è costante; dove $f_n(s)$ è costante, $N(s)$ è lineare rispetto all'ascissa curvilinea s (si veda la terza della (9.6.1)).

4. Analogamente, nei tratti in cui la componente di taglio

$$f_\tau = \vec{f}(s) \cdot \vec{\tau}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

della forza specifica è nulla, $T(s)$ è costante e $M_f(s)$ è lineare rispetto ad s. Dove f_τ è costante, $T(s)$ è lineare in s e M_f è quadratico in s (segue dalla seconda e dalla prima della (9.6.1)).

Per altri esempi vedere [Ughi, 2003].

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

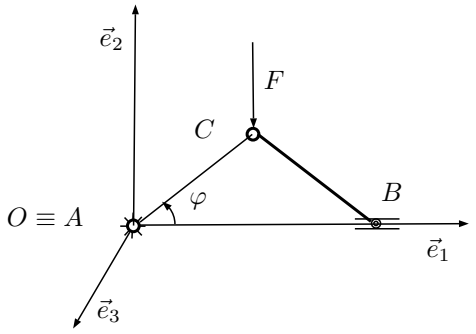
Capitolo 10

Modelli articolati

I modelli articolati sono sistemi materiali formati da più componenti rigide vincolate tra loro (ad es. con cerniere, carrelli, pattini, etc). Vedremo ora come si utilizzano le ECS per risolvere i problemi di statica per i modelli suddetti.

10.1 Biella-manovella

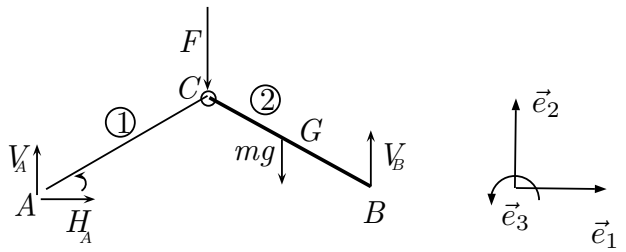
Consideriamo il modello biella-manovella costruito a pag. 48 con due aste, una cerniera esterna fissa, una cerniera interna e un appoggio.



Piano verticale, biella di massa m e manovella di massa trascurabile, vincoli lisci e bilateri.
$\overline{AC} = \overline{BC} = L$

Come abbiamo già visto, il modello ha 1 grado di libertà, quindi è ipostatico, e due configurazioni a vincoli inefficaci: $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. Cerchiamo eventuali configurazioni di equilibrio. Tenendo conto che tutte le forze attive sono nel piano (x, y), possiamo concludere a priori che, come nell'esempio **8.6.1**, le reazioni vincolari giacciono tutte nello stesso piano e che il momento delle reazioni avrà soltanto una componente lungo $\vec{e}_3$. Quindi, possiamo considerare da subito il sistema delle ECS ridotto al piano (x, y).

1. Applichiamo le ECS a tutto il modello $\mathcal{B}$



$$\begin{cases} \vec{R}^{(est\to\mathcal{B})} = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(est\to\mathcal{B})} = \vec{0} \end{cases}$$

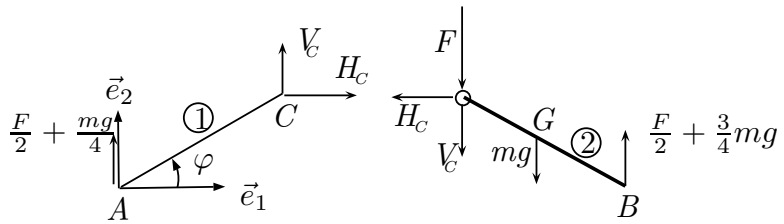
$$(10.1.1) \qquad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A - F - mg + V_B = 0 \\ -FL\cos\varphi - mg\frac{3}{2}L\cos\varphi + 2LV_B\cos\varphi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B = F + mg \\ V_B\cos\varphi = (\frac{F}{2} + \frac{3}{4}mg)\cos\varphi \end{cases}$$

Se $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi \neq 0$, quindi il sistema (10.1.1) ha come unica soluzione (H_A, V_A, V_B):

$$(10.1.2) \qquad H_A = 0, \quad V_A = \frac{F}{2} + \frac{mg}{4}, \quad V_B = \frac{F}{2} + \frac{3}{4}mg$$

Si osservi che le ECS, applicate all'intero modello, forniscono le reazioni vincolari esterne, ma non danno nessuna informazione sulle configurazioni di equilibrio.

Possiamo ora concludere che il modello è in equilibrio $\forall\varphi\left(\neq \pm\frac{\pi}{2}\right)$ con le reazioni vincolari (10.1.2)? Naturalmente no, basta effettuare un esperimento. Ma allora dove sta l'errore? L'errore sta nel fatto che le ECS sono sufficienti a garantire l'equilibrio di un modello se questo è rigido; in presenza di un modello articolato, invece, diventano sufficienti se sono soddisfatte per *ogni* componente rigida del sistema. Disegnamo il diagramma delle forze esterne agenti su *ogni* componente rigida del modello.

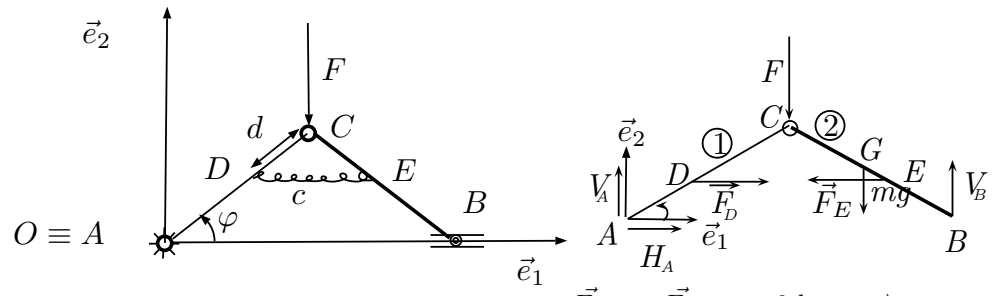


Consideriamo, ad esempio, l'asta 1. È chiaro che la II ECS applicata all'asta 1, con polo in C, non è mai soddisfatta (se $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$) poiché

$$(10.1.3) \qquad \vec{M}_C^{(est\to\mathcal{R}_1)} = (A - C) \times (\frac{F}{2} + \frac{mg}{4})\vec{e_2} \neq \vec{0} \;\Rightarrow \text{Nessun equilibrio}$$

Dunque, se vogliamo che il modello ammetta qualche configurazione di equilibrio e quindi la (10.1.3) sia soddisfatta, dobbiamo aggiungere un vincolo o una forza. Ad esempio, colleghiamo con una molla di costante elastica c, due punti delle due aste come in figura

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

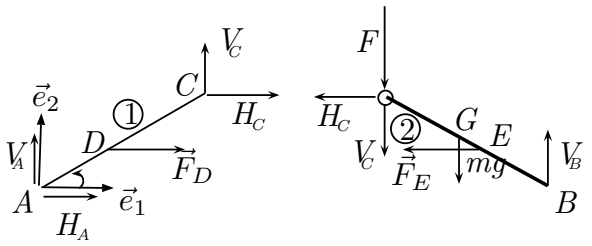


$\vec{F_D} = -c(D - E) = c\ 2d\cos\varphi\,\vec{e_1}$ $\qquad$ $\vec{F_E} = -\vec{F_D} = -c\ 2d\cos\varphi\,\vec{e_1}$

Considerando il nuovo sistema, le ECS su tutto il modello non cambiano poiché le forze esercitate dalla molla sono interne (coppia a braccio nullo). Quindi, se il modello ammette configurazioni di equilibrio, le reazioni vincolari esterne coincidono con le (10.1.2)

$$H_A = 0, \quad V_A = \frac{F}{2} + \frac{mg}{4}, \quad V_B = \frac{F}{2} + \frac{3}{4}mg \tag{10.1.4}$$

Scomponendo il modello si ha il seguente diagramma:



Si osservi che abbiamo utilizzato il principio di azione e reazione tra i due estremi C delle due aste.

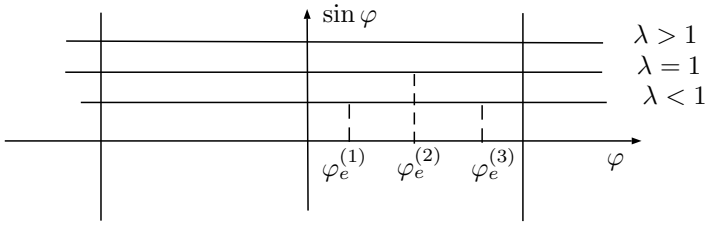
Applicando le ECS alla sola asta 1 e tenendo conto delle (10.1.4) si ottiene

$$\begin{array}{l} \vec{R}^{(est\to\mathcal{R}_1)}\cdot\vec{e_1} \\ \vec{R}^{(est\to\mathcal{R}_1)}\cdot\vec{e_2} \\ \vec{M}_C^{(est\to\mathcal{R}_1)}\cdot\vec{e_3} \end{array} \quad \begin{cases} 2cd\cos\varphi + H_C = 0 \\ \frac{F}{2} + \frac{mg}{4} + V_c = 0 \\ -(\frac{F}{2} + \frac{mg}{4})L\cos\varphi + 2cd\cos\varphi\ d\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Dunque abbiamo un sistema sulle 3 incognite (φ, H_C, V_C), che equivale a

$$\begin{cases} H_C = -2cd\cos\varphi \\ V_C = -(\frac{F}{2} + \frac{mg}{4}) \\ \sin\varphi = \frac{(2F+mg)L}{8cd^2} = \lambda > 0 \end{cases}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Le configurazioni di equilibrio sono:

$$\text{se } \lambda > 1 \quad \text{nessuna}$$
$$\text{se } \lambda = 1 \quad \varphi_e^{(2)} = \frac{\pi}{2} \quad \text{vincoli inefficaci}$$
$$\text{se } \lambda < 1 \quad \begin{array}{ll} \varphi_e^{(1)} = \arcsin\lambda, & \cos\varphi_e^{(1)} = \sqrt{1-\lambda^2}, \\ \varphi_e^{(3)} = \pi - \varphi_e^{(1)} & \cos\varphi_e^{(3)} = -\sqrt{1-\lambda^2} \end{array},$$

Quindi, le reazioni vincolari all'equilibrio sono:

$$\text{se } \lambda < 1, \quad \begin{array}{lll} \varphi_e^{(1)} = \arcsin\lambda, & H_C = -2cd\sqrt{1-\lambda^2}, & V_C = -(\frac{F}{2} + \frac{mg}{4}) \\ \varphi_e^{(3)} = \pi - \varphi_e^{(1)}, & H_C = 2cd\sqrt{1-\lambda^2}, & V_C = -(\frac{F}{2} + \frac{mg}{4}) \end{array}$$

Se ora applico le ECS all'asta 2 ottengo

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est\to\mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e_1} = 0 \\ \vec{R}^{(est\to\mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e_2} = 0 \\ \vec{M}_C^{(est\to\mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e_3} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -H_C - 2cd\cos\varphi_e = 0 \\ -F - V_C - mg + V_B = 0 \\ -2cd\cos\varphi_e d\sin\varphi_e - mg\frac{L}{2}\cos\varphi_e + V_B L\cos\varphi_e = 0 \end{cases}$$

Tale sistema non contiene nuove incognite, ma è dipendente dalle equazioni precedenti. Quindi, deve essere identicamente soddisfatto, come si verifica facilmente. In conclusione, esistono delle configurazioni in cui le ECS sono soddisfatte per ogni componente rigida del modello e quindi sono d'equilibrio. Esse sono:

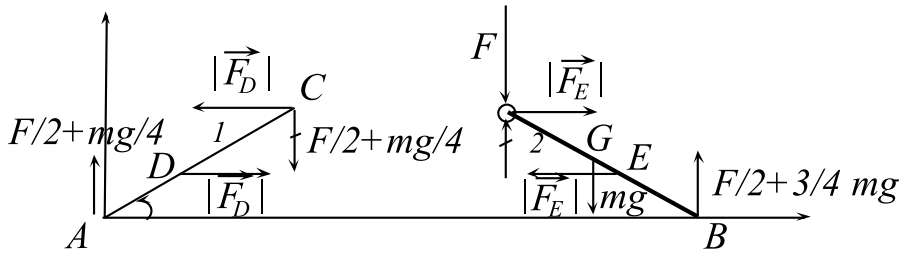
se $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\quad \varphi_e = \pm\frac{\pi}{2}$ (vincoli inefficaci)
se $\lambda < 1$,

$$\varphi_e^{(1)} = \arcsin\lambda,\ H_A = 0,\ V_A = \frac{F}{2} + \frac{mg}{4},\ V_B = \frac{F}{2} + \frac{3}{4}mg,\ H_C = -2cd\sqrt{1-\lambda^2},\ V_C = -(\frac{F}{2} + \frac{mg}{4}),$$

$$\varphi_e^{(3)} = \pi - \varphi_e^{(1)},\ H_A = 0,\ V_A = \frac{F}{2} + \frac{mg}{4},\ V_B = \frac{F}{2} + \frac{3}{4}mg,\ H_C = 2cd\sqrt{1-\lambda^2},\ V_C = -(\frac{F}{2} + \frac{mg}{4})$$

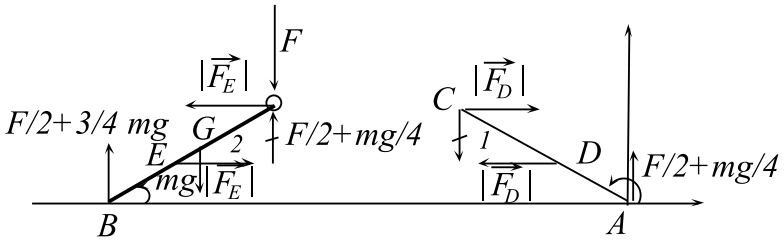
Ricapitolando, se $\lambda < 1$ il modello ammette le seguenti configurazioni d'equilibrio a vincoli efficaci:

$\varphi_e^{(1)}$



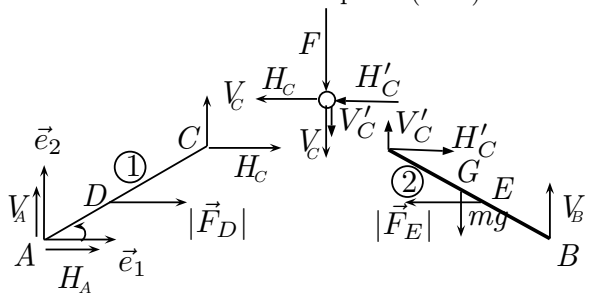
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$\varphi_e^{(3)} = \pi - \varphi_e^{(1)}$



Quiz 7.1 Calcolare le reazioni vincolari interne ed esterne per $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.

N.B. In alcuni testi di Meccanica Razionale, i sistemi articolati vengono, a volte, scomposti in maniera più fine di quella presentata in questi appunti. Precisamente, si considerano le aste come rigidi e le cerniere interne come punti (nodi). Per esempio, nel nostro problema, si avrebbe:



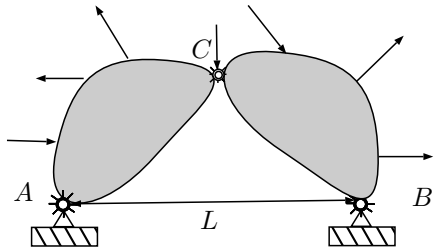
Pertanto, le incognite introdotte sono 8: ($\varphi, H_A, V_A, V_B, H_C, V_C, H'_C, V'_C$), cioè due in più rispetto alla scomposizione delle pagine precedenti. Allora, si devono introdurre due equazioni in più, precisamente le 2 equazioni della statica per il punto C:

$$\begin{cases} -H_C - H'_C = 0 \\ -V_C - V'_C - F = 0 \end{cases}$$

Come al solito, abbiamo già utilizzato il principio di azione e reazione tra le 2 aste e il nodo C.

10.2 Arco a 3 cerniere

Analizzeremo ora un classico modello articolato *isostatico*. Sappiamo che, per i sistemi isostatici, il problema della statica si riduce al calcolo delle reazione vincolari (interne ed esterne) ed, eventualmente, al calcolo delle azioni interne nelle componenti rigide del sistema.

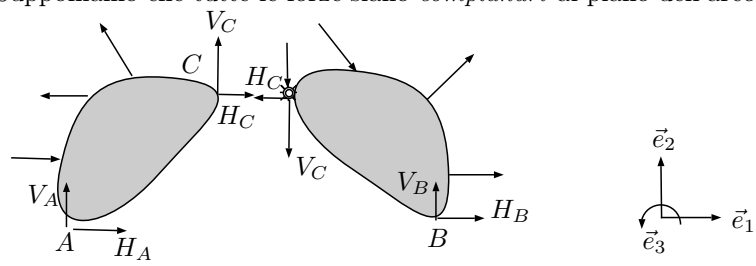


L'arco a 3 cerniere $\mathcal{B}$ è costituito da 2 archi rigidi, ognuno vincolato a terra con una cerniera fissa e vincolati tra loro con una cerniera interna. Poiché $g = 3 \cdot 2$ e le 3 cerniere sono tutte doppie,

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

segue che il sistema è isostatico, tranne quando le 3 cerniere sono allineate, caso in cui i vincoli sono inefficaci (vedi pag. 33).

Supponiamo che tutte le forze siano *complanari* al piano dell'arco e consideriamone il diagramma:



Dunque, le incognite sono 6: $(H_A,\, V_A,\, H_B,\, V_B,\, H_C,\, V_C)$. Per trovarle, scriverò un sistema di 6 equazioni lineari del tipo

$$B\phi = \mathcal{F} \tag{10.2.1}$$

dove ϕ è il vettore delle reazioni incognite $\phi = [H_A,\, V_A,\, H_B,\, V_B,\, H_C,\, V_C]^T$, $\mathcal{F}$ è il vettore che contiene la sollecitazione attiva e B è la matrice (6×6) dei coefficienti del sistema lineare. Precisamente, scrivendo le 3 componenti scalari delle ECS per l'equilibrio dei 2 archi rigidi si hanno 6 equazioni lineari per le 6 incognite del problema:

$$\begin{cases} H_A + H_C + \vec{R}^{(att\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ V_A + V_C + \vec{R}^{(att\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ -H_C\, h + V_C\, d + \vec{M}_A^{(att\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ H_B - H_C + \vec{R}^{(att\to\mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ V_B - V_C + \vec{R}^{(att\to\mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ H_C\, h + V_C\, (L-d) + \vec{M}_B^{(att\to\mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases}$$

Riscrivendo il suddetto sistema nella forma (10.2.1) si trova

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & (L-d) \end{bmatrix} \qquad \det B = -h\, L$$

e

$$\mathcal{F} = -\left[\vec{R}^{(att\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_1,\, \vec{R}^{(att\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_2,\, \vec{M}_A^{(att\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_3,\, \vec{R}^{(att\to\mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_1,\, \vec{R}^{(att\to\mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_2,\, \vec{M}_B^{(att\to\mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_3\right]$$

Si osservi che la matrice B dipende soltanto dalla geometria dei vincoli e non dalla sollecitazione. è chiaro che, se $\det B \neq 0$, esiste un'unica soluzione, qualunque sia il vettore $\mathcal{F}$ della sollecitazione attiva, calcolabile come

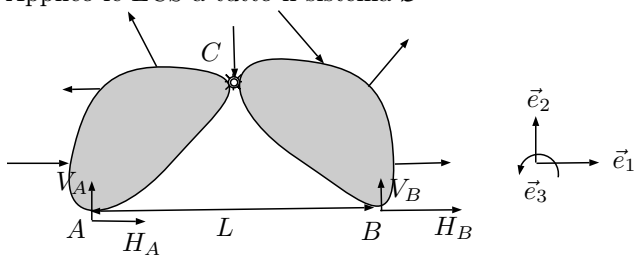
$$\phi = B^{-1}\mathcal{F}\ .$$

In tal caso il modello si dice staticamente determinato.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Il metodo di calcolo suddetto è molto efficiente se si implementa con un programma di calcolo automatico ma è scomodo se il calcolo se deve effettuare "a mano", poiché si deve invertire la matrice B che ha dimensioni (6×6). Per questo motivo daremo un cenno di un metodo di calcolo che conviene seguire se si devono fare i conti "a mano".

1. Applico le ECS a tutto il sistema $\mathcal{B}$



$$\begin{cases} \vec{R}^{est\to\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \vec{R}^{est\to\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ \vec{M}_A^{\ est\to\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} H_A + H_B + \vec{R}^{(att\to\mathcal{B})} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ V_A + V_B + \vec{R}^{(att\to\mathcal{B})} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ V_B L + \vec{M}_A^{(att\to\mathcal{B})} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \tag{10.2.2}$$

Ottengo, quindi, un sistema di 3 equazioni nelle 4 incognite (H_A, V_A, H_B, V_B), cioè le reazioni vincolari esterne. Conviene risolvere la terza equazione per trovare

$$V_B = -\frac{\vec{M}_A^{(att\to\mathcal{B})} \cdot \vec{e}_3}{L} \qquad (\text{se } L \neq 0)$$

Sostituendo tale risultato nella seconda equazione si trova

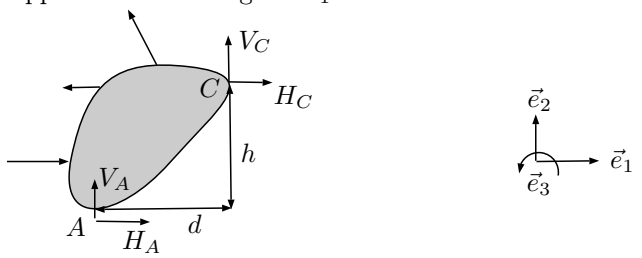
$$V_A = \frac{\vec{M}_A^{(att\to\mathcal{B})} \cdot \vec{e}_3}{L} - \vec{R}^{(att\to\mathcal{B})} \cdot \vec{e}_2$$

Infine per risolvere la prima equazione rispetto a H_B in funzione di H_A:

$$H_B = -H_A - \vec{R}^{(att\to\mathcal{B})} \cdot \vec{e}_1$$

Dunque, ho trovato V_A, V_B e scritto $H_B = H_B\,(H_A)$.

2. Applico le ECS al rigido $\mathcal{R}_1$



$$\begin{cases} \vec{R}^{(est\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \vec{R}^{(est\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ \vec{M}_C^{\ (est\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} H_A + H_C + \vec{R}^{(att\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ V_A + V_C + \vec{R}^{(att\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ -V_A d + H_A h + \vec{M}_C^{(att\to\mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \tag{10.2.3}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

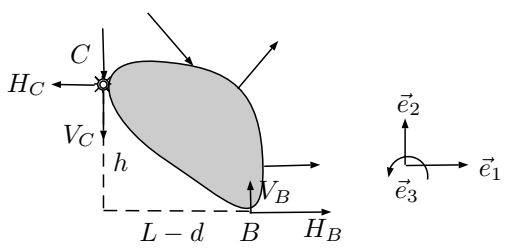
Ottengo un sistema di 3 equazioni, indipendenti dalle precedenti, nelle incognite (H_A, H_C, V_C). Se $h \neq 0$, i vincoli sono efficaci e posso risolvere la terza equazione rispetto ad H_A, la prima rispetto a H_C e la seconda rispetto a V_C.

3. Dunque, i passi 1 e 2 mi permettono di calcolare tutte le 6 incognite del problema:

$$H_A,\, V_A,\, H_B,\, V_B,\, H_C,\, V_C$$

$$\begin{cases} H_A = \frac{1}{h}\left(-\vec{M}_C^{(att\to\mathcal{R}_1)}\cdot\vec{e}_3 + \frac{d}{L}\vec{M}_A^{(att\to\mathcal{B})}\cdot\vec{e}_3 - d\,\vec{R}^{(att\to\mathcal{B})}\cdot\vec{e}_2\right) \\ V_A = \frac{\vec{M}_A^{(att\to\mathcal{B})}\cdot\vec{e}_3}{L} - \vec{R}^{(att\to\mathcal{B})}\cdot\vec{e}_2 \\ H_B = \frac{\vec{M}_C^{(att\to\mathcal{R}_1)}\cdot\vec{e}_3}{h} - \frac{d}{h}\frac{\vec{M}_A^{(att\to\mathcal{B})}\cdot\vec{e}_3}{L} + \frac{d}{h}\vec{R}^{(att\to\mathcal{B})}\cdot\vec{e}_2 - \vec{R}^{(att\to\mathcal{B})}\cdot\vec{e}_1 \\ V_B = -\frac{\vec{M}_A^{(att\to\mathcal{B})}\cdot\vec{e}_1}{L} \\ H_C = -\vec{R}^{(att\to\mathcal{R}_1)}\cdot\vec{e}_1 + \frac{\vec{M}_C^{(att\to\mathcal{R}_1}\cdot\vec{e}_3}{h} - \frac{d}{h}\frac{\vec{M}_A^{(att\to\mathcal{B})}\cdot\vec{e}_3}{L} + \frac{d}{h}\vec{R}^{(att\to\mathcal{B})}\cdot\vec{e}_2 \\ V_C = -\vec{R}^{(att\to\mathcal{R}_1)}\cdot\vec{e}_2 - \frac{\vec{M}_A^{(att\to\mathcal{B})}\cdot\vec{e}_3}{L} + \vec{R}^{(att\to\mathcal{B})}\cdot\vec{e}_2 \end{cases} \qquad h \neq 0 \tag{10.2.4}$$

4. Applico le ECS al rigido $\mathcal{R}_2$



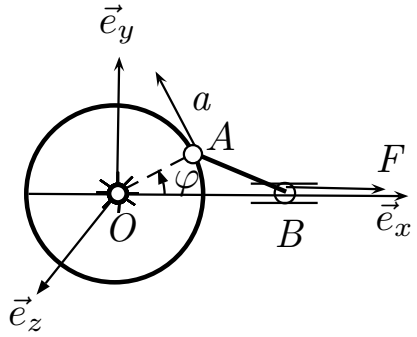
Ottengo 3 equazioni dipendenti dalle precedenti. Esse devono essere identicamente soddisfatte e possono essere usate per controllare il risultato (10.2.4).

Il metodo sopra presentato consiste, quindi, nell'introdurre in passi successivi "poche" equazioni in "poche" incognite, da risolvere "passo-passo".

N.B. Se $h = 0 \Rightarrow$le cerniere sono allineate e i vincoli inefficaci (vedi pag. 52). In tal caso, nell'ultima equazione del sistema (10.2.3) non compare l'incognita H_A. Allora, l'unione dei sistemi (10.2.2) e (10.2.3) è un sistema del tipo (10.2.1) con una matrice B non invertibile. Quindi, può avere infinite soluzioni (staticamente indeterminato) o nessuna soluzione (impossibile), a seconda della sollecitazione attiva (il vettore $\mathcal{F}$). Invece, nel caso in cui $\det B \neq 0$, esiste un'unica soluzione e il modello si dice staticamente determinato.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

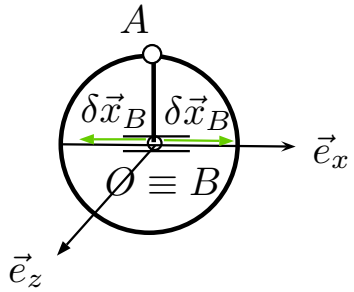
10.3 Esempio di problema inverso



Un disco omogeneo di raggio r ed un'asta di lunghezza r sono vincolati in un piano *orizzontale* con vincoli lisci, come in figura. Il disco è soggetto ad una forza applicata in A, $\vec{F_A}$ tangente al disco e di modulo a.

1. Determinare la forza $\vec{F_B} = F\vec{e}_x$ da applicare in B affinché il modello sia in equilibrio nella posizione $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
2. Calcolare le reazioni vincolari esterne e interne all'equilibrio.
3. Calcolare le azioni interne nell'asta AB all'equilibrio.

Analisi Cinematica. Il modello è costituito da 2 rigidi vincolati con una cerniera cilindrica fissa in O, una cerniera sferica interna in A e una cerniera sferica scorrevole in B. Con il metodo dei congelamenti successivi, si può concludere facilmente che il modello ha 1 grado di libertà, in tutte le configurazioni, tranne per $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. In tali configurazioni, infatti, anche se lo spostamento rotatorio del disco intorno all'asse $(O, \vec{e}_z)$ è congelato, la biella può effettuare comunque una rotazione *infinitesima* intorno all'asse $(A, \vec{e}_z)$, al contrario di quello che accade in tutte le altre configurazioni.

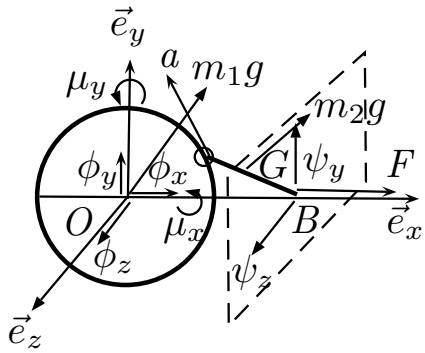


10.3.1 Equazioni Cardinali della Statica

Utilizziamo le ECS come condizione necessaria all'equilibrio nella configurazione assegnata.

1e 2 Poiché la forza peso agisce in direzione ortogonale al piano del modello, non possiamo risolvere il problema come piano ma dobbiamo considerare il modello nello spazio 3D. Disegnamo il diagramma delle sollecitazioni esterne a tutto il modello:

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Quindi, considerando le forze esterne a tutto il modello, avremo, oltre all'incognita F del punto 1, anche le 7 incognite $(\phi_x, \phi_y, \phi_z, \mu_x, \mu_y, \psi_y, \psi_z)$ della sollecitazione reattiva esterna in O e in B.

Nella configurazione di equilibrio $\varphi = \frac{\pi}{6}$ devono essere necessariamente soddisfatte le ECS su tutto il modello

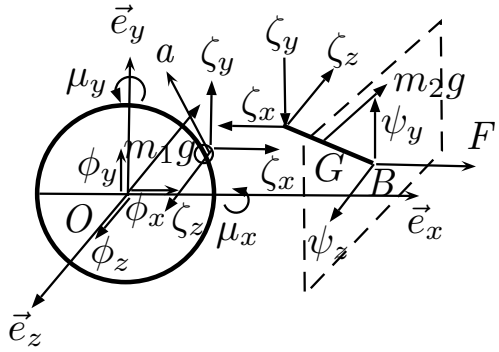
$$\begin{cases} \vec{R}^{(est\to\mathcal{B})} = \vec{0} \\ \vec{M}_O^{(est\to\mathcal{B})} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\phi} + m_1\vec{g} + \vec{a} + m_2\vec{g} + \vec{F}_B + \vec{\psi} = \vec{0} \\ \vec{\mu} + (A-O)\times\vec{a} + (G-O)\times m_2\vec{g} + (B-O)\times(\vec{F}_B + \vec{\psi}) = \vec{0} \end{cases}$$

che, in forma scalare, si scrivono

$$\begin{cases} \phi_x - \frac{a}{2} + F = 0 \\ \phi_y + a\frac{\sqrt{3}}{2} + \psi_y = 0 \\ -(m_1+m_2)g + \phi_z + \psi_z = 0 \\ \mu_x - \frac{m_2 g r}{4} = 0 \\ \mu_y + \frac{3\sqrt{3}}{4} m_2 g r - \sqrt{3} r \psi_z = 0 \\ a r + r\sqrt{3}\psi_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi_x = \frac{a}{2} - F \\ \phi_y = -\frac{a}{2\sqrt{3}} \\ \phi_z + \psi_z = (m_1+m_2)g \\ \mu_x = \frac{m_2 g r}{4} \\ \mu_y = \sqrt{3} r(\psi_z - \frac{3}{4} m_2 g) \\ \psi_y = -\frac{a}{\sqrt{3}} \end{cases} \tag{10.3.1}$$

È ovvio che le 6 equazioni precedenti non possono risolvere il problema, che ha 8 incognite. Comunque, abbiamo iniziato a risolverle, nella logica del metodo "passo-passo".

Ora, consideriamo le ECS applicate alle singole parti rigide del modello. Compariranno, come nuove incognite, le reazioni interne in A, $(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$, portando a 11 il numero totale delle incognite del problema.



©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Sull'asta, valgono

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est\to asta)} = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(est\to asta)} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2\vec{g} + \vec{\psi} + \vec{F}_B - \vec{\zeta} = \vec{0} \\ (G-A)\times m_2\vec{g} + (B-A)\times(\vec{F}_B + \vec{\psi}) = \vec{0} \end{cases} \tag{10.3.2}$$

e sul disco

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est\to disco)} = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(est\to disco)} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\phi} + m_1\vec{g} + \vec{a} + \vec{\zeta} = \vec{0} \\ \vec{\mu} + (O-A)\times(m_1\vec{g} + \vec{\phi}) = \vec{0}\ . \end{cases} \tag{10.3.3}$$

Il sistema delle (10.3.2) si scrive come 6 equazioni scalari, che permettono di trovare tutte le incognite residue:

$$\begin{cases} -\zeta_x + F = 0 \\ -\zeta_y + \psi_y = 0 \\ -\zeta_z - m_2 g + \psi_z = 0 \\ \frac{1}{2}(\frac{m_2 g}{2} r - r\psi_z) = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{m_2 g}{2} r - r\psi_z) = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} r\psi_y + \frac{r}{2} F = 0 \end{cases} \overset{(10.3.1)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \zeta_x = F = a \\ \zeta_y = \psi_y = -\frac{a}{\sqrt{3}} \\ \zeta_z = \psi_z - m_2 g = -\frac{m_2 g}{2} \\ \psi_z = \frac{m_2 g}{2} \\ F = -\sqrt{3}\psi_y = a \end{cases}$$

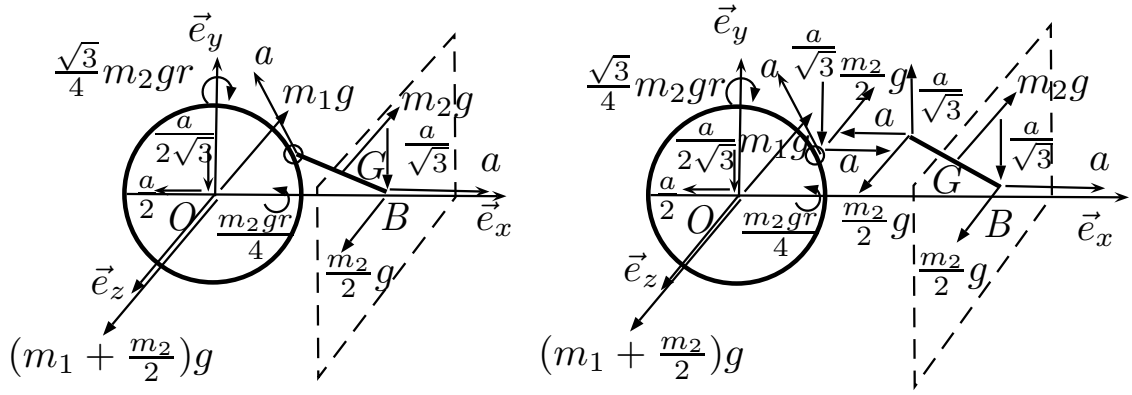
Sostituendo tali risultati nelle Eq. (10.3.1) si trova una sola soluzione del problema:

$$F = a\ ,\quad \phi_x = -\frac{a}{2}\ ,\quad \phi_y = -\frac{a}{2\sqrt{3}}\ ,\quad \phi_z = (m_1 + \frac{m_2}{2})g\ ,\quad \mu_x = \frac{m_2 g r}{4}\ ,\quad \mu_y = -\frac{\sqrt{3}}{4} m_2 g r\ ,$$
$$\psi_y = -\frac{a}{\sqrt{3}}\ ,\quad \psi_z = \frac{m_2 g}{2}\ ,\quad \zeta_x = a\ ,\quad \zeta_y = -\frac{a}{\sqrt{3}}\ ,\quad \zeta_z = -\frac{m_2 g}{2}\ ,$$

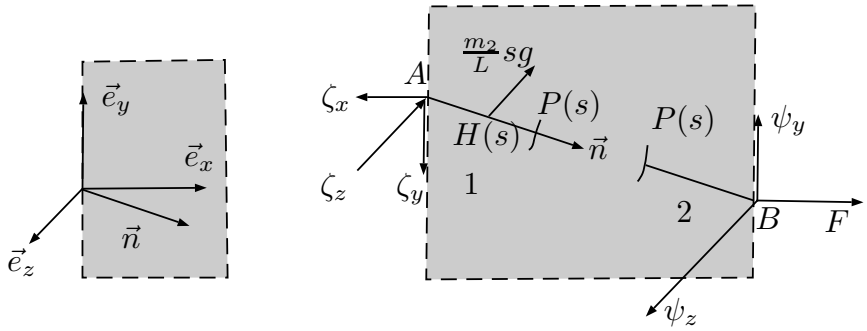
Il sistema delle (10.3.3) si può utilizzare per verificare la soluzione trovata,

$$\begin{cases} \phi_x + \zeta_x - \frac{a}{2} = 0 \\ \phi_y + \zeta_y + a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ \phi_z + \zeta_z - m_1 g = 0 \\ -\frac{r}{2}(-m_1 g + \phi_z) + \mu_x \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} r(m_1 g - \phi_z) + \mu_y \\ \frac{r}{2}\phi_x - \frac{\sqrt{3}}{2} r\phi_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} + a - \frac{a}{2} = 0 \\ -\frac{a}{2\sqrt{3}} + \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) + \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0 \\ (m_1 + \frac{m_2}{2})g - \frac{m_2 g}{2} - m_1 g = 0 \\ -\frac{r}{2}(-m_1 g + (m_1 + \frac{m_2}{2})g) + \frac{m_2 g r}{4} = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} r(m_1 g - (m_1 + \frac{m_2}{2})g) - \frac{\sqrt{3}}{4} m_2 g r = 0 \\ -\frac{r}{2}\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} r(-\frac{a}{2\sqrt{3}}) = 0 \end{cases}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



3 Azioni interne nell'asta AB. Sezionando l'asta in un punto interno $P(s)$, teniamo conto del carico distribuito dovuto alla forza peso sul primo tratto dell'asta.



Allora, in condizioni di equilibrio, devono valere le ECS seguenti

(10.3.4)
$$\begin{cases}\vec{R}^{(est\to\mathcal{R}_1)}+\vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}=\vec{0}\\ \vec{M}_P^{(est\to\mathcal{R}_1)}+\vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}=\vec{0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\vec{\zeta}+\frac{m_2}{L}s\vec{g}+\vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}=\vec{0}\\ (A-P)\times(-\vec{\zeta})+(H-P)\times\frac{m_2}{L}s\vec{g}+\vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}=\vec{0}\end{cases}$$

Dunque, il risultante e il momento risultante delle azioni interne sono

(10.3.5)
$$\begin{cases}\vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}(s)=\vec{\zeta}-\frac{m_2}{L}s\vec{g}=a\vec{e}_x-\frac{a}{\sqrt{3}}\vec{e}_y-m_2(\frac{1}{2}-\frac{s}{L})g\vec{e}_z\\ \vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}(s)=(A-P)\times\vec{\zeta}-(H-P)\times\frac{m_2}{L}s\vec{g}=\frac{m_2}{4}g(\frac{s^2}{L}-s)(\vec{e}_x+\sqrt{3}\vec{e}_y)\end{cases}$$

Allora, poiché $\vec{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x-\frac{1}{2}\vec{e}_y$, l'azione normale e quella di taglio risultano

(10.3.6) $$N=\vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}\cdot\vec{n}=a\vec{e}_x\cdot\vec{n}-\frac{a}{\sqrt{3}}\vec{e}_y\cdot\vec{n}-m_2(\frac{1}{2}-\frac{s}{L})g\cancel{\vec{e}_z\cdot\vec{n}}=\frac{2}{\sqrt{3}}a$$

(10.3.7) $$\vec{T}=\vec{R}^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}-N\vec{n}=a\vec{e}_x-\frac{a}{\sqrt{3}}\vec{e}_y-m_2(\frac{1}{2}-\frac{s}{L})g\vec{e}_z-\frac{2}{\sqrt{3}}a\,\vec{n}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Tenendo conto che $\vec{n} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{e}_x - \vec{e}_y)$, risulta che

$$\vec{T} := -m_2(\frac{1}{2} - \frac{s}{L})g\vec{e}_z \ , \tag{10.3.8}$$

quindi la forza di taglio è tutta ortogonale al piano. Inoltre, il momento torcente si annulla poichè

$$M_t(s) := \vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}(s)\cdot\vec{n} = \frac{m_2}{4}g(\frac{s^2}{L} - s)(\vec{e}_x\cdot\vec{n} + \sqrt{3}\vec{e}_y\cdot\vec{n}) = 0 \ , \tag{10.3.9}$$

quindi il momento flettente risulta

$$\vec{M}_f(s) := \vec{M}_P^{(int,\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_1)}(s) - \cancel{M}_t(s)\vec{n} = \frac{m_2}{4}g(\frac{s^2}{L} - s)(\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_y) \ . \tag{10.3.10}$$

Dunque, l'azione normale (di trazione) è uniforme lungo l'asta, il taglio, tutto parallelo a $\vec{e}_z$, dipende linearmente dall'ascissa curvilinea s e il momento flettente, tutto giacente nel piano (x, y), dipende in modo quadratico da s.

10.3.2 Equazione pura di equilibrio

Poiché in queso problema i vincoli sono fissi, non dissipativi e bilateri, il punto 1 si può risolvere anche, e in modo più immediato, con il PLV e, in particolare, con un'equazione pura di equilibrio. Infatti, basta imporre che l'unica componente lagrangiana della sollecitazione attiva si annulli nella configurazione di equilibrio assegnata

$$Q_{\varphi_{|\varphi=\frac{\pi}{6}}} = 0 \ . \tag{10.3.11}$$

Calcoliamo la Q_φ, scrivendo il lavoro virtuale della sollecitazione attiva

$$LV^{(att)} = \vec{F}_A\cdot\delta\vec{x}_A + \vec{F}_B\cdot\delta\vec{x}_B + m_1\vec{g}\cdot\cancel{\delta\vec{x}_O} + m_2\cancel{\vec{g}\cdot\delta\vec{x}_G} \tag{10.3.12}$$

e osservando che il lavoro virtuale del peso del disco si annulla poiché il suo baricentro O è fisso, mentre il lavoro virtuale del peso dell'asta si annulla poiché lo spostamento virtuale del suo baricentro G è ortogonale a $\vec{e}_z$. Allora,

$$\begin{aligned} \vec{x}_A &= r\vec{e}_r \ , & \delta\vec{x}_A &= r\delta\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{x}_B &= 2r\cos\varphi\vec{e}_x \ , & \delta\vec{x}_B &= -2r\sin\varphi\,\delta\varphi\,\vec{e}_x \ , \end{aligned}$$

quindi

$$Q_\varphi = a\,\vec{e}_\varphi\cdot r\delta\varphi\,\vec{e}_\varphi + F\vec{e}_x\cdot(-2r\sin\varphi\,\delta\varphi\,\vec{e}_x) = r(a - 2F\sin\varphi)\delta\varphi \tag{10.3.13}$$

Dunque,

$$Q_{\varphi_{|\varphi=\frac{\pi}{6}}} = r(a - F)$$

da cui la soluzione $F = a$.

Comunque, per risolvere i punti 2 e 3 dobbiamo ricorrere alle ECS, poiché il PLV, almeno nella forma da noi studiata, prescinde dal lavoro virtuale delle reazioni vincolari.

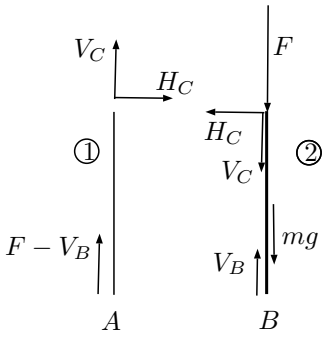
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

10.4 Soluzione del Quiz 7.1

Se $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, cioè se i vincoli sono inefficaci, il sistema biella-manovella (10.1.1) ha infinite soluzioni

$$H_A = 0,\ V_A = F + mg - V_B,\ V_B = \text{qualunque}\ .$$

Inoltre,



$$\text{asta 1}\begin{cases}\vec{M}_C^{(est\to\mathcal{R}_1)}\cdot\vec{e_3} = 0\\ H_C = 0\\ mg + F - V_B + V_C = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{M}_C^{(est\to\mathcal{R}_1)}\cdot\vec{e_3} = 0\\ H_C = 0\\ V_C = V_B - F - mg\end{cases}$$

$$\text{asta 2}\begin{cases}\vec{M}_C^{(est\to\mathcal{R}_2)}\cdot\vec{e_3} = 0\\ H_C = 0\\ -F - V_C - mg + V_B = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{M}_C^{(est\to\mathcal{R}_2)}\cdot\vec{e_3} = 0\\ H_C = 0\\ V_C = V_B - F - mg\end{cases}$$

Quindi, poiché V_B è indeterminata, il problema è staticamente indeterminato.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Capitolo 11

Equazioni Cardinali della Dinamica

In questo capitolo ricaveremo le equazioni cardinali della dinamica (ECD) dei modelli meccanici. Il nome deriva dal fatto che esse valgono per un qualunque modello meccanico soggetto a una qualsiasi sollecitazione e vincolato in modo qualunque. Per lo scopo suddetto, utilizzeremo il Principio di D'Alembert.

11.1 Principio di D'Alembert

Principio di D'Alembert: un problema di Dinamica può essere ridotto ad un problema di Statica aggiungendo, alla forza fisica (o effettiva) $\vec{F}_B^{(eff)}$ agente su ogni punto B del sistema, la forza d'inerzia, definita da

$$\vec{F}_B^{(in)} := -\frac{d\vec{p}_B}{dt} \ , \tag{11.1.1}$$

dove $\vec{p}_B$ è la quantità di moto del punto B, definita, in meccanica classica, da $\vec{p}_B := m_B\vec{v}_B$. Tale principio è una reinterpretazione dalla II legge di Newton

$$\vec{F}_B^{(eff)} = \frac{d\vec{p}_B}{dt} \ , \tag{11.1.2}$$

ottenuta riscrivendo la (11.1.2) come una condizione di "equilibrio" dinamico. Esso sarà riutilizzato nel Cap. 14 per ricavare le equazioni di Lagrange per un modello olonomo.

N.B. Naturalmente, tra le forze effettive bisogna tener conto anche delle eventuali sollecitazioni dipendenti dalla velocità, che si annullano in Statica ma non in Dinamica.

11.1.1 I Equazione Cardinale della Dinamica

Utilizzando la I ECS per un osservatore inerziale e il Principio di D'Alembert ricaviamo immediatamente la I ECD

$$\vec{R}^{(est)} = \vec{0} \text{ et } \vec{R}^{(in)} = \sum_{B\in\mathcal{B}} \left(-\frac{d\vec{p}_B}{dt}\right) \Rightarrow \vec{R}^{(est)} + \sum_{B\in\mathcal{B}} \left(-\frac{d\vec{p}_B}{dt}\right) = \vec{0} \ .$$

Rielaborando la I ECD si ottiene

$$\vec{R}^{(est)} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{11.1.3}$$

dove si è utilizzata la definizione di quantità di moto totale del sistema

$$\vec{p} = \sum_{B\in\mathcal{B}} \vec{p}_B = \sum_{B\in\mathcal{B}} m_B \vec{v}_B \tag{11.1.4}$$

La (11.1.3) può essere scritta in modo equivalente

$$\vec{R}^{(est)} = M\vec{a}_G \tag{11.1.5}$$

utilizzando il seguente

Teorema 11.1.1. *(del centro di massa). La quantità di moto totale di un qualunque modello meccanico è pari al prodotto della massa totale per la velocità del centro di massa.*

$$\vec{p} = \sum_{B\in\mathcal{B}} m_B \vec{v}_B = M\vec{v}_G \tag{11.1.6}$$

Dimostrazione. Dalla definizione di centro di massa di un sistema

$$G - O = \frac{\sum m_B (B-O)}{M} \qquad M := \sum_{B\in\mathcal{B}} m_B$$

segue, derivando rispetto al tempo, che

$$\vec{v}_G = \frac{\sum m_B \vec{v}_B}{M} \ . \tag{11.1.7}$$

Allora, combinando la (11.1.4) e la (11.1.7) segue la tesi.

□

11.1.2 II Equazione Cardinale della Dinamica

Utilizzando il Principio di D'Alembert e la II ECS si ottiene la II ECD

$$\vec{M}_O^{(est)} = \vec{0} \text{ et } \vec{M}_O^{(in)} = \sum_{B\in\mathcal{B}} (B-O) \times \left(-\frac{d\vec{p}_B}{dt}\right) \Rightarrow \vec{M}_O^{(est)} + \sum_{B\in\mathcal{B}} (B-O) \times \left(-\frac{d\vec{p}_B}{dt}\right) = \vec{0}$$

Rielaborando la II ECD si trova

$$\vec{M}_O^{(est)} = \sum_{B\in\mathcal{B}} (B-O) \times \frac{d\vec{p}_B}{dt} \ .$$

Il secondo termine dell'equazione precedente si può scrivere:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{B\in\mathcal{B}} (B-O)\times\vec{p}_B\right) - \sum_{B\in\mathcal{B}} \frac{d}{dt}(B-O)\times\vec{p}_B = \frac{d}{dt}\vec{L}_O - \sum_{B\in\mathcal{B}} (\vec{v_B} - \vec{v_O}) \times m_B\vec{v}_B \ ,$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

dove abbiamo introdotto il *momento angolare* o momento risultante della quantità di moto del modello, definito da

$$\vec{L}_O := \sum_{B\in\mathcal{B}} (B-O)\times\vec{p}_B \ . \tag{11.1.8}$$

Allora, tenuto conto della (11.1.6), la II ECD diventa

$$\vec{M}_O^{(est)} = \frac{d}{dt}\vec{L}_O + \vec{v_O}\times\vec{p} \ . \tag{11.1.9}$$

Osserviamo che il polo O, detto anche centro di riduzione, è un qualunque punto dello spazio $\mathcal{E}_3$, eventualmente mobile. Riutilizzando la (11.1.6), l'equazione (11.1.9) si può riscrivere come

$$\vec{M}_O^{(est)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} + \vec{v}_O\times M\vec{v}_G \ . \tag{11.1.10}$$

Si noti che la (11.1.10) si riduce all'equazione

$$\vec{M}_O^{(est)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \ , \tag{11.1.11}$$

detta II ECD *ridotta*, in uno dei casi seguenti: $\forall t\in I$

1. $\vec{v}_O = \vec{0}$, $\Leftrightarrow O$ è fisso;
2. $\vec{v}_O \parallel \vec{v_G}$, cioè la velocità di O è parallela a quella di G;
3. $O\equiv G$, scelgo G come centro di riduzione.

11.2 Equazione dell'energia cinetica

Lo stesso livello di generalità delle ECD è goduto dall'equazione dell'energia cinetica, che è anche detta III ECD.

Teorema 11.2.1. *(delle forze vive). In un qualunque modello meccanico vale*

$$\frac{dK}{dt} = \Pi \ , \tag{11.2.1}$$

dove K è l'energia cinetica del modello data da

$$K := \frac{1}{2}\sum_{B\in\mathcal{B}} m_B|\vec{v}_B|^2 \ . \tag{11.2.2}$$

e Π la potenza di tutte le forze, attive e reattive, esterne e interne, agenti sul modello

$$\Pi := \sum_{B\in\mathcal{B}} \vec{F}_B\cdot\vec{v}_B \ . \tag{11.2.3}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Dimostrazione. Derivando rispetto al tempo la (11.2.2) si ottiene

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \vec{a}_B \cdot \vec{v}_B$$

e quindi la tesi, tenuto conto della II legge di Newton per il generico punto materiale B. □

Ricapitolando, le ECD, che sono soddisfatte durante il moto di un qualunque sistema materiale, si possono scrivere come

$$\vec{R}^{(est)} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{11.2.4}$$

$$\vec{M}_O^{(est)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} + \vec{v}_O \times \vec{p}\,. \tag{11.2.5}$$

$$\Pi = \frac{dK}{dt}\ . \tag{11.2.6}$$

11.3 Statica e Dinamica relativa del punto materiale

Le equazioni cardinali della Dinamica ricavate nella sezione precedente, valgono per un osservatore *inerziale*. In questa sezione vedremo come si generalizzano ad un osservatore *non* inerziale, cioè un osservatore che si muove di moto rigido qualunque rispetto ad un osservatore inerziale. Con le notazioni della sezione 4.7, consideriamo un osservatore inerziale $\Sigma := (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ed un osservatore non inerziale $\Sigma' := (O'; \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ che osservano il moto di un punto materiale (B, m), libero o vincolato. Per l'osservatore inerziale Σ, il moto di B è governato dalla seconda legge di Newton della dinamica

$$\vec{F}_B^{(eff)} = m\,\vec{a}_B^{(ass)}\ , \tag{11.3.1}$$

dove con $\vec{F}_B^{(eff)}$ abbiamo indicato il risultante di tutte le forze cosiddette effettive (o fisiche), attive e reattive, agenti su B. Sostituendo alla $\vec{a}_B^{(ass)}$ la (4.7.10) si ottiene

$$m\,\vec{a}_B^{(rel)} = \vec{F}_B^{(eff)} - m(\vec{a}_B^{(tr)} + \vec{a}_B^{(Cor)})\ , \tag{11.3.2}$$

che si può riscrivere come

$$m\,\vec{a}_B^{(rel)} = \vec{F}_B^{(eff)} + \vec{F}_B^{(tr)} + \vec{F}_B^{(Cor)}\ , \tag{11.3.3}$$

avendo introdotto le forze d'*inerzia* (o forze apparenti) su B date da

$$\vec{F}_B^{(tr)} = -m\vec{a}_B^{(tr)} = -m\Big(\vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times (B - O') + \vec{\omega} \times \big(\vec{\omega} \times (B - O')\big)\Big) \tag{11.3.4}$$

$$\vec{F}_B^{(Cor)} = -m\vec{a}_B^{(Cor)} = -m\left(2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_B^{(rel)}\right)\ . \tag{11.3.5}$$

Dunque, abbiamo dimostrato la seguente

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Proposizione 11.3.1. *Per l'osservatore non inerziale Σ' vale ancora la seconda legge di Newton della dinamica del punto materiale, a patto di aggiungere alle forze effettive attive e reattive, le forze d'inerzia, cioè la forza di trascinamento e quella di Coriolis.*

N.B. Una conseguenza importante della Proposizione suddetta è che per un osservatore non inerziale non vale il principio d'inerzia per un punto materiale isolato, cioè in assenza di forze effettive.

Proprietà delle forze d'inerzia su di un punto materiale

- Sono proporzionali alla massa (da qui il nome);
- sono *non* stazionarie, cioè possono dipendere esplicitamente dal tempo, tramite la $\vec{a}_{O'}$ e la $\vec{\omega}$;
- la forza di trascinamento è anche posizionale;
- la forza di Coriolis dipende anche dalla velocità del punto B. Inoltre, ha potenza effettiva nulla, poiché

$$\pi^{(Cor)} = \vec{F}_B^{(Cor)} \cdot \vec{v}_B^{(rel)} = -m\left(2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_B^{(rel)}\right) \cdot \vec{v}_B^{(rel)} = 0\ . \tag{11.3.6}$$

Vediamo come si scrive l'equazione dell'energia cinetica per l'osservatore Σ'. L'energia cinetica di B valutata da Σ' è pari a

$$K^{(rel)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B^{(rel)}|^2\ .$$

Derivando rispetto al tempo il secondo termine e tenendo conto delle (11.3.3) e (11.3.6), otteniamo

$$m\,\vec{a}_B^{(rel)} \cdot \vec{v}_B^{(rel)} = \left(\vec{F}_B^{(eff)} + \vec{F}_B^{(tr)} + \vec{F}_B^{(Cor)}\right) \cdot \vec{v}_B^{(rel)} = \pi^{(eff)} + \pi^{(tr)}\ ,$$

dove abbiamo denotato con

$$\pi^{(eff)} = \vec{F}_B^{(eff)} \cdot \vec{v}_B^{(rel)} \qquad \text{potenza effettiva delle forze fisiche} \tag{11.3.7}$$

$$\pi^{(tr)} = \vec{F}_B^{(tr)} \cdot \vec{v}_B^{(rel)} \qquad \text{potenza delle forze di trascinamento} \tag{11.3.8}$$

Dunque, in un riferimento non inerziale, l'equazione dell'energia cinetica si scrive

$$\frac{dK^{(rel)}}{dt} = \pi^{(eff)} + \pi^{(tr)}\ . \tag{11.3.9}$$

N.B. Dal teorema di Galileo di addizione delle velocità, non segue un teorema di addizione dell'energia cinetica, visto che l'energia cinetica è una forma quadratica nella velocità. Infatti

$$K^{(ass)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B^{(ass)}|^2 = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B^{(rel)} + \vec{v}_B^{(tr)}|^2 = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B^{(rel)}|^2 + \frac{1}{2} m |\vec{v}_B^{(tr)}|^2 + m\vec{v}_B^{(rel)} \cdot \vec{v}_B^{(tr)}$$

Esempio 11.3.1. *Moto traslatorio.*

Se l'osservatore Σ' è in moto traslatorio rispetto a Σ, cioè $\vec{\omega} = \vec{0}$, quindi le forze d'inerzia si riducono alla sola forza di trascinamento pari a

$$\vec{F}_B^{(tr)} = -m\,\vec{a}_{O'}\ , \tag{11.3.10}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

che è indipendente dalla posizione del punto B (ma può dipendere dal tempo). Inoltre, se l'accelerazione è indipendente dal tempo (moto rettilineo uniformemente accelerato), la forza di trascinamento è conservativa e ammette l'energia potenziale data da

$$V(B) = m\,\vec{a}_{O'} \cdot (B - O')$$

Esempio 11.3.2. *Moto rotatorio.*

Se l'osservatore Σ' è in moto rotatorio rispetto a Σ, preso $O \equiv O'$ sull'asse di rotazione, denotato con $(O, \vec{k})$, la forza di trascinamento e quella di Coriolis sul punto B si riducono a

$$\vec{F}_B^{(tr)} = -m\,\ddot{\varphi}\,\vec{k} \times (B - O') + m\,\dot{\varphi}^2\big(B - O'\big)_\perp \tag{11.3.11}$$

$$\vec{F}_B^{(Cor)} = -2\,m\,\dot{\varphi}\,\vec{k} \times \vec{v}_B^{(rel)} \ . \tag{11.3.12}$$

Dunque, appartengono entrambe al piano passante per B e ortogonale all'asse di rotazione. Se, in particolare, il moto rotatorio è uniforme $\dot{\varphi} = \omega$, la forza di trascinamento si riduce a

$$\vec{F}_B^{(tr)} = \vec{F}_B^{(cf)} := m\,\omega^2 (B - O)_\perp \ . \tag{11.3.13}$$

Esso è un campo di forze a simmetria cilindrica, diretto ortogonalmente all'asse di rotazione in modo che le sue rette d'azione intersecano tale l'asse, e ha modulo proporzionale alla distanza dall'asse (vedi Fig.11.3.1). Tale campo, detto delle forze centrifughe è, in realtà, un campo di forze assifughe ed è conservativo, con energia potenziale

$$V(B)^{(cf)} = -\frac{1}{2} m\,\omega^2 \rho^2(B) \ , \tag{11.3.14}$$

dove $\rho(B)$ indica la distanza di B dall'asse di rotazione. Infatti, il lavoro virtuale del campo è

$$LV^{(cf)} = \vec{F}^{(cf)} \cdot \delta\vec{x}_B = m\,\omega^2 (B - O)_\perp \cdot \delta\vec{x}_B \qquad \forall\, \delta B \quad \textit{virtuale} \ . \tag{11.3.15}$$

Scelto un sistema di coordinate cilindriche (ρ, φ', z) relative a Σ', con asse polare coincidente con $(O, \vec{k})$, la forza centrifuga su B e lo spostamento virtuale del punto B sono dati da

$$\vec{F}^{(cf)} = m\,\omega^2 \rho\,\vec{e}_\rho \ , \tag{11.3.16}$$

$$\delta\vec{x}_B = \delta(B - O) = \delta\big(\rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z\big) = \delta\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,\delta\varphi'\vec{e}_{\varphi'} + \delta z\,\vec{e}_z \ . \tag{11.3.17}$$

Quindi,

$$LV^{(cf)} = m\,\omega^2 \rho\,\delta\rho = \delta(\frac{1}{2} m\,\omega^2 \rho^2) \ ,$$

da cui segue la (11.3.14).

La forza di Coriolis è ortogonale all'asse di rotazione e si annulla se $\vec{v}_B^{(rel)}$ è parallela allo stesso asse.

Esercizio 11.3.1. *Si consideri il pendolo della Figura 11.3.2, vincolato ad un piano verticale, scorrevole lungo una guida orizzontale liscia, che si muove con accelerazione costante $\vec{a}$. Si trovino le configurazioni di equilibrio relativo.*

Soluzione: $[\theta_e = \arctan \frac{a}{g}]$.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

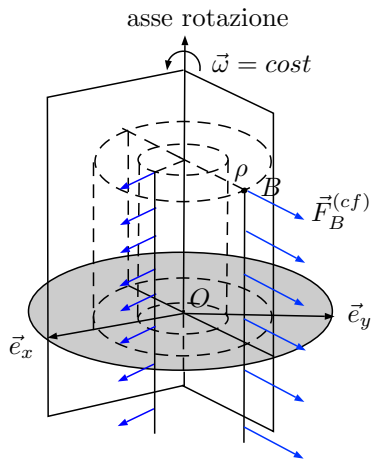


Figura 11.3.1: Campo delle forze centrifughe

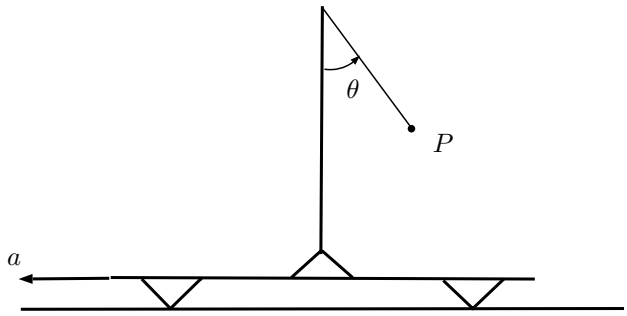


Figura 11.3.2: Pendolo traslante

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

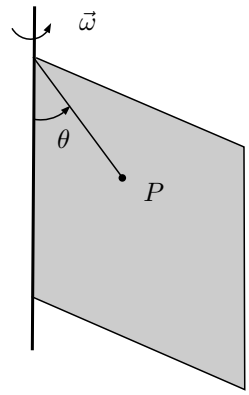


Figura 11.3.3: Pendolo rotante

Esercizio 11.3.2. *Si consideri lo stesso pendolo dell'esercizio precedente, questa volta vincolato (tramite una cerniera cilindrica) su un piano verticale rotante uniformemente con velocità angolare $\vec{\omega}$ intorno ad un asse verticale passante per il punto di sospensione, come nella Figura 11.3.3. Si trovino le configurazioni di equilibrio relativo.*

Soluzioni: $[\theta_e^{(1)} = 0, \theta_e^{(2)} = \arccos \frac{g}{\omega^2 L}$ se $g \leq \omega^2 L]$

11.4 Statica e Dinamica relativa dei modelli meccanici

È facile ricavare le ECD soddisfatte dal più generale modello meccanico in un riferimento non inerziale Σ'. Con le notazioni della sezione precedente, sommando vettorialmente le forze d'inerzia agenti su ogni punto del modello, si ottengono

$$\vec{R}^{(est,eff)} + \vec{R}^{(tr)} + \vec{R}^{(Cor)} = \frac{d\vec{p}^{(rel)}}{dt} \tag{11.4.1}$$

$$\vec{M}_O^{(est,eff)} + \vec{M}_O^{(tr)} + \vec{M}_O^{(Cor)} = \frac{d\vec{L}_O^{(rel)}}{dt} + \vec{v}_O^{(rel)} \times \vec{p}^{(rel)} \tag{11.4.2}$$

$$\pi^{(eff)} + \pi^{(tr)} = \frac{dK^{(rel)}}{dt} , \tag{11.4.3}$$

dove $\vec{R}^{(tr)}$, $\vec{M}_O^{(tr)}$, rispettivamente, $\vec{R}^{(Cor)}$, $\vec{M}_O^{(Cor)}$, indicano il risultante e il momento risultante delle forze di trascinamento, rispettivamente, di Coriolis. Inoltre, con $\pi^{(tr)}$ abbiamo indicato la potenza complessiva delle forze di trascinamento.

Dimostriamo, ora, una proprietà del risultante delle forze di trascinamento e di quelle di Coriolis,

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

utile per abbreviarne il calcolo. Per un sistema discreto, vale

$$
\begin{aligned}
\vec{R}^{(tr)} = \sum_B \vec{F}_B^{(tr)} &= -\sum_B \Big(m_B\, \vec{a}_{O'} + m_B\, \dot{\vec{\omega}} \times (B - O') + m_B\, \vec{\omega} \times \big(\vec{\omega} \times (B - O')\big) \Big) = \\
&= -M\vec{a}_{O'} - \dot{\vec{\omega}} \times \sum_B m_B (B - O') - \vec{\omega} \times \big(\vec{\omega} \times \sum_B m_B (B - O')\big) = \\
&= -M\vec{a}_{O'} - M\dot{\vec{\omega}} \times (G - O') - M\vec{\omega} \times \big(\vec{\omega} \times (G - O')\big) \\
&= -M\vec{a}_G^{(tr)} \ .
\end{aligned} \tag{11.4.4}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\vec{R}^{(Cor)} = \sum_B \vec{F}_B^{(Cor)} = -\sum_B \Big(m_B \left(2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_B^{(rel)}\right) \Big) = -2\vec{\omega} \times \sum_B \left(m_B\, \vec{v}_B^{(rel)}\right) = \\
= -2\vec{\omega} \times \vec{p}^{(rel)} = -2\,\vec{\omega} \times M\vec{v}_G^{(rel)} = -M\vec{a}_G^{(Cor)}.
\end{aligned} \tag{11.4.5}
$$

Dunque, vale la seguente

Proposizione 11.4.1. *Il risultante delle forze di trascinamento, rispettivamente di Coriolis, agente su un qualunque modello meccanico è pari alla forza di trascinamento, rispettivamente di Coriolis, agente sul punto materiale* (G, M)*, cioè su di un punto materiale di massa pari alla massa totale* M *del modello e coincidente con il suo centro di massa* G*. In formule,*

$$\vec{R}^{(tr)} = -M\vec{a}_G^{(tr)} \ , \tag{11.4.6}$$

$$\vec{R}^{(Cor)} = -M\vec{a}_G^{(Cor)} = -2\,\vec{\omega} \times M\vec{v}_G^{(rel)} = -2\,\vec{\omega} \times \vec{p}^{(rel)} \ . \tag{11.4.7}$$

Modello rigido

Se il corpo è rigido, il campo delle forze di trascinamento e il campo delle forze di Coriolis, sono in generale equivalenti, ciascuno, ad un torsore, cioè al vettore risultante applicato in un punto dei rispettivi assi centrali, più una coppia di momento parallelo a ciascun asse centrale. In alcuni casi particolari, ma notevoli, il torsore degenera in una sola coppia o nel solo vettore risultante applicato all'asse centrale, il quale, tuttavia, non passa necessariamente per il centro di massa.

Esempio 11.4.1. *Moto traslatorio ed osservatore baricentrale.*

Consideriamo il moto di un rigido rispetto ad un osservatore non inerziale in moto traslatorio. In questo caso, sappiamo (vedi Es. 11.3.1) che le forze d'inerzia si riducono al solo campo delle forze di trascinamento (11.3.10)*. Tale campo è un campo di forze parallele all'accelerazione* $\vec{a}_{O'} = a_{O'}(t)\vec{u}(t)$ *e d'intensità proporzionale alla massa del punto. Dunque, ammette un* centro $C(t)$ *del campo, che, sulla base della* (7.4.1)*, risulta essere*

$$C - O = \frac{-\int_{\mathcal{R}} \sigma(B)\, a_{O'}(B - O)\, d\mathcal{R}}{-\int_{\mathcal{R}} \sigma(B)\, a_{O'}\, d\mathcal{R}} \ ,$$

dove abbiamo indicato con $\sigma(B)$ *la densità di massa del rigido. È evidente che* C *coincide con il centro di massa del rigido. Pertanto, in questo caso, il campo delle forze di trascinamento è*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

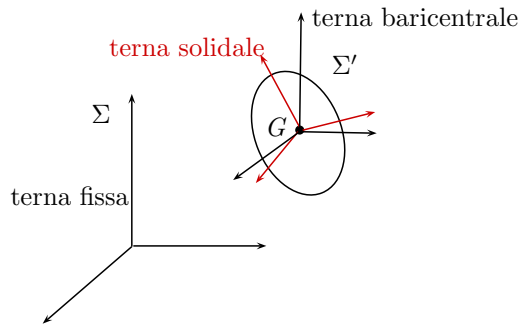


Figura 11.4.1: Osservatore Baricentrale

equivalente al vettore risultante applicato in G. Dunque, valgono le equazioni

$$\vec{R}^{(tr)} = -M\vec{a}_G^{(tr)} \tag{11.4.8}$$

$$\vec{M}_G^{(tr)} = \vec{0} \tag{11.4.9}$$

$$\pi^{(tr)} = \vec{R}^{(tr)} \cdot \vec{v}_G^{(rel)} + \cancel{\vec{M}_G^{(tr)}} \cdot \vec{\omega}^{(rel)} = -M\vec{a}_G^{(tr)} \cdot \vec{v}_G^{(rel)} \tag{11.4.10}$$

Questo è il caso, ad esempio, dell'osservatore baricentrale di un rigido (vedi Fig.11.4.1), definito come l'osservatore Σ' con origine coincidente con G e che si muove di moto traslatorio rispetto a un osservatore inerziale Σ. Per l'osservatore baricentrale, il centro di massa rimane in quiete, quindi $\vec{a}_G^{(rel)} = \vec{0}$ e le ECD (11.4.1)-(11.4.3) *si riducono a*

$$\vec{R}^{(est,eff)} - M\vec{a}_G^{(tr)} = \vec{0} \tag{11.4.11}$$

$$\vec{M}_G^{(est,eff)} = \frac{d\vec{L}_G^{(rel)}}{dt} \tag{11.4.12}$$

$$\pi^{(eff)} = \frac{dK^{(rel)}}{dt} \ , \tag{11.4.13}$$

Dunque, per l'osservatore baricentrale, la I ECD (11.4.11) *esprime la condizione di equilibrio del centro di massa, mentre la II ECD* (11.4.12) *e la III* (11.4.13)*, rimangono invariate in forma, visto che non contenengono le forze d'inerzia.*

Esempio 11.4.2. *Moto rotatorio.*

Se l'osservatore Σ' è in moto rotatorio rispetto a Σ, la forza di Coriolis su di un generico punto del rigido, essendo sempre ortogonale a $\vec{\omega}$, appartiene al piano passante per il punto e ortogonale all'asse di rotazione. Inoltre, se il centro di massa G appartiene all'asse di rotazione, per le (11.4.6) *e* (11.4.7)*, i risultanti delle forze di trascinamento e di Coriolis sono nulli. Dunque, i rispettivi torsori, degenerano in coppie.*

Se, in particolare, il moto è uniforme, le forze di trascinamento si riducono al campo della forze centrifughe (11.3.13)*. Tale campo, è conservativo anche quando agisce su un qualunque modello meccanico $\mathcal{B}$ (anche non rigido), avendo energia potenziale*

$$V^{(cf)} = -\frac{1}{2}I_r\omega^2 \ , \tag{11.4.14}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

dove $I_r := \sum_B m_B d^2(B,r)$ *indica il momento d'inerzia del modello rispetto all'asse di rotazione* r*. Infatti, il lavoro virtuale del campo è*

$$LV^{(cf)} = \sum_{B\in\mathcal{B}} \vec{F}_B^{(cf)} \cdot \delta\vec{x}_B = \sum_{B\in\mathcal{B}} m_B\,\omega^2 (B-O)_\perp \cdot \delta\vec{x}_B = \omega^2 \sum_{B\in\mathcal{B}} m_B\,\rho(B)\vec{e}_\rho \cdot \delta\vec{x}_B \quad , \tag{11.4.15}$$

per ogni $\delta\vec{x}_B$ *virtuale. Quindi, tenuto conto della* (11.3.17)*, si ottiene*

$$LV^{(cf)} = \omega^2 \sum_B m_B \rho(B)\,\delta\rho(B) = \delta\left(\frac{1}{2} I_r\,\omega^2\right) \ ,$$

dove $I_r := \sum_B m_B\,\rho^2(B) = \sum_B m_B\,d^2(B,r)$ *è il momento d'inerzia del modello rispetto all'asse di rotazione di* Σ'*.*

Nel caso che il rigido sia piano (lamina), esaminiamo due sottocasi notevoli.

- *Se la lamina appartiene ad un piano contenente l'asse di rotazione (moto piano relativo), l'insieme delle forze centrifughe sulla lamina costituisce un campo di forze parallele e concordi. Allora, se il centro di massa non appartiene all'asse di rotazione,* $\vec{R}^{(cf)} \neq \vec{0}$*, quindi il campo ammette un centro che, in generale, non coincide con il baricentro del modello, ma può essere determinato di volta in volta. Lo stesso discorso vale per rigidi unidimensionali vincolati ad un piano contenente l'asse di rotazione, come nell'asta della Fig. 11.4.2.*

- *Se la lamina appartiene ad un piano* π *ortogonale all'asse di rotazione, l'insieme delle forze centrifughe sulla lamina costituisce un campo di forze complanari e anche concorrenti nel punto* O *d'intersezione della lamina con l'asse (da qui il termine forze centrifughe). Dunque, se il centro di massa non appartiene all'asse di rotazione, il campo di forze è a risultante equivalente, quindi equivale al vettore risultante applicato in un punto dell'asse centrale. Tale asse passa per il punto di concorrenza poiché* $\vec{M}_O^{(cf)} = \vec{0}$*. Inoltre, essendo parallelo al risultante, che ha la direzione di* $(G-O)$*, passa anche per il centro di massa* G*. In questo caso, dunque, il campo delle forze centrifughe sulla lamina equivale al vettore risultante applicato nel centro di massa.*

  Infine, poichè anche le forze di Coriolis appartengono al piano π*, essendo un insieme di forze complanari, anch'esse sono a risultante equivalente, se hanno risultante non nullo. In questo caso, tuttavia, non è detto che l'asse centrale delle forze di Coriolis passi sempre per* G*.*

Esercizio 11.4.1. *Il sistema biella–manovella della Fig. 11.4.4 è vincolato a stare in un piano verticale ruotante uniformemente con velocità angolare* ω*.*

1. *Determinare il valore della costante elastica della molla affinché il modello sia in equilibrio relativo, con le aste formanti un angolo di* $\pi/6$ *con la verticale (problema inverso);*

2. *calcolare le reazioni vincolari delle cerniere sferiche in* O *e in* B *sul modello, nella configurazione di equilibrio relativo;*

3. *calcolare le reazioni vincolari interne della cerniera sferica in* A*, nella configurazione di equilibrio relativo.*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

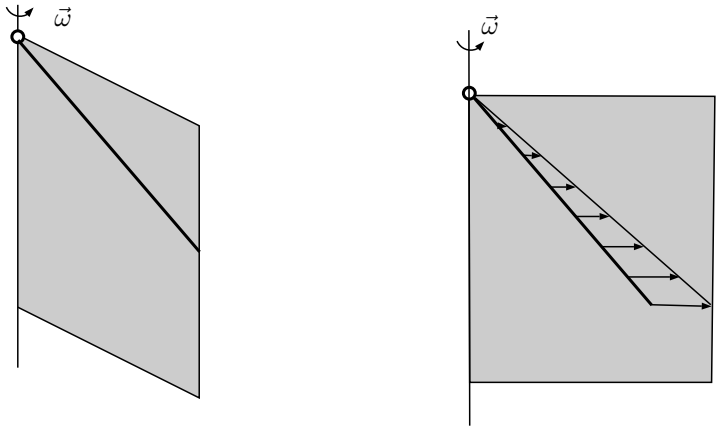


Figura 11.4.2: Asta rotante

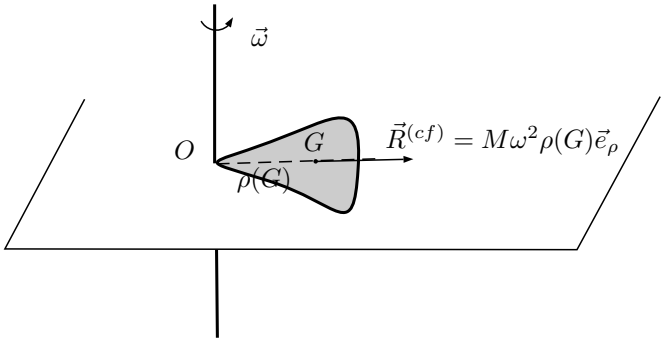


Figura 11.4.3: Lamina rotante

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

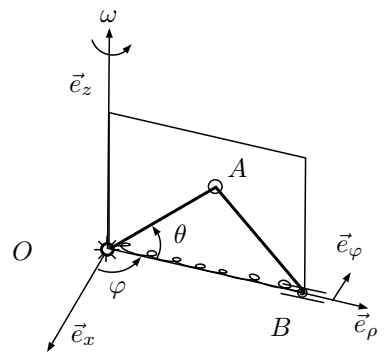


Figura 11.4.4: Biella-Manovella rotante

Nel sistema di riferimento rotante con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$, il problema diventa un problema inverso di statica e il modello ha 1 grado di libertà. Scegliamo come coordinata libera l'angolo θ fra il piano orizzontale e le aste e come base $\mathscr{B} = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$, cioè quella adattata alle coordinate cilindriche in $\mathcal{E}_3$. In tale riferimento non inerziale compaiono le forze di trascinamento che si riducono alle sole forze centifughe.

1. Calcoliamo l'energia potenziale di tutta la sollecitazione attiva, tenendo conto anche del contributo delle forze centrifughe

$$V := V^{(peso)} + V^{(molla)} + V^{(cf)} \ .$$

L'energia potenziale delle forze peso è

$$V^{(peso)} = -m\vec{g}\cdot(G_1 - O) - m\vec{g}\cdot(G_2 - O) \ , V^{(molla)} = \frac{1}{2}c|B-O|^2 \ , V^{(cf)} = -\frac{1}{2}I_z(\theta)\,\omega^2$$

$$G_1 - O = \frac{L}{2}(\cos\theta\vec{e}_\rho + \sin\theta\vec{e}_z) \ , \quad G_2 - O = \frac{L}{2}(3\cos\theta\vec{e}_\rho + \sin\theta\vec{e}_z) \ , \quad B - O = 2L\cos\theta\,\vec{e}_\rho \ .$$

Il momento d'inerzia del modello rispetto all'asse di rotazione vale

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = \frac{8}{3}mL^2\cos^2(\theta) \ ,$$

poiché

$$I_z^{(1)} = \frac{1}{3}mL^2\sin^2(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{1}{3}mL^2\cos^2(\theta) \ , \quad I_z^{(2)} = \frac{1}{12}mL^2\sin^2(\frac{\pi}{2}-\theta) + m\rho^2(G_2) = \frac{7}{3}mL^2\cos^2(\theta) \ .$$

Allora

$$V^{(peso)} = mgL\sin\theta \ , \quad V^{(molla)} = \frac{1}{2}c(2L\cos\theta)^2 \ , \quad V^{(cf)} = -\frac{4}{3}mL^2\omega^2\cos^2\theta \ ,$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

quindi

$$V(\theta) = mgL\sin\theta + (2c - \frac{4}{3}m\omega^2)L^2\cos^2\theta \ .$$

Richiediamo che la configurazione $\theta = \pi/3$ sia un punto stazionario della funzione $V(\theta)$, quindi di equilibrio per il modello. A tale scopo calcoliamo

$$V'(\theta) = mgl\cos\theta - 2(2c - \frac{4}{3}m\omega^2)L^2\cos\theta\sin\theta$$

e richiediamo che $V'_{|\theta=\pi/3} = 0$, cioè

$$mg\frac{L}{2} - 2(2c - \frac{4}{3}m\omega^2)L^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \ . \tag{11.4.16}$$

Risolvendo tale equazione rispetto a c si trova

$$c = m(\frac{2}{3}\omega^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{g}{L}) \ , \tag{11.4.17}$$

cioè il valore della costante elastica che realizza l'equilibrio relativo nella configurazione assegnata $\theta = \pi/3$.

2. La sollecitazione reattiva delle cerniere sferiche in O e in B, può essere ridotta a

$$\mathcal{S}^{(reatt)} = \{(O, \vec{\phi}), (B, \vec{\psi})\} \ .$$

Poiché i vincoli sono non dissipativi e bilateri,

$$\vec{\psi}_B \cdot \vec{e}_\rho = 0 \ ,$$

inoltre, poiché tutte le sollecitazioni attive, *comprese quelle d'inerzia*, sono complanari al piano rotante, possiamo concludere a priori che

$$\vec{\phi}_O = \phi_\rho\,\vec{e}_\rho + \phi_z\vec{e}_z \tag{11.4.18}$$

$$\vec{\psi}_B = \psi_z\,\vec{e}_z \ . \tag{11.4.19}$$

A posteriori, verificheremo, la suddetta ipotesi, alla fine del punto 2.

Per calcolare le 3 incognite $(\phi_\rho, \phi_z, \psi)$, utilizziamo la I ECS su tutto il modello

$$\vec{R}^{(att,eff)} + \vec{R}^{(cf)} + \vec{\phi}_O + \vec{\psi}_B = \vec{0} \tag{11.4.20}$$

Il risultante delle forze esterne su *tutto* il modello è pari al peso totale

$$\vec{R}^{(att,eff)} = 2m\vec{g} = -2mg\vec{e}_z \ .$$

Il risultante delle forze centrifughe può essere calcolato come

$$\vec{R}^{(cf)} = \vec{R}^{(cf->\mathcal{R}_1)} + \vec{R}^{(cf->\mathcal{R}_2)} \ .$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Sulla base della (11.4.6) si ottiene

$$\vec{R}^{(cf->\mathcal{R}_1)} = m\omega^2(G_1 - O)_\perp = m\omega^2\rho(G_1)\,\vec{e}_\rho = m\omega^2\frac{L}{2}\cos\frac{\pi}{3}\,\vec{e}_\rho \tag{11.4.21}$$

$$\vec{R}^{(cf->\mathcal{R}_2)} = m\omega^2(G_2 - O)_\perp = m\omega^2\rho(G_2)\,\vec{e}_\rho = m\omega^2\frac{3}{2}L\cos\frac{\pi}{3}\,\vec{e}_\rho\ , \tag{11.4.22}$$

quindi

$$\vec{R}^{(cf)} = m\omega^2 L\,\vec{e}_\rho\ .$$

Dunque, proiettando la la I ECS sulla base $\mathcal{B}$ si ottiene

$$m\omega^2 L + \phi_\rho = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi_\rho = -m\omega^2 L \tag{11.4.23}$$

$$-2mg + \phi_z + \psi_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi_z = 2mg - \psi_z \tag{11.4.24}$$

Rimane da calcolare l'incognita ψ. A tale scopo, usiamo la II ECS applicata alla sola biella,

$$\vec{M}_A^{(att,eff->\mathcal{R}_2)} + \vec{M}_A^{(cf->\mathcal{R}_2)} + (B - A)\times\vec{\psi}_B = \vec{0}\ . \tag{11.4.25}$$

Il momento risultante delle forze attive effettive è dato da

$$\vec{M}_A^{(att,eff->\mathcal{R}_2)} = (G_2 - A)\times(-m\vec{g}) + (B - A)\times(-c(B - O))$$

Tenendo conto che

$$G_2 - A = \frac{L}{2}(\cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_z)\ , \tag{11.4.26}$$

$$B - A = L(\cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_z)\ , \tag{11.4.27}$$

$$B - O = 2L\cos\theta\vec{e}_\rho\ , \tag{11.4.28}$$

esso risulta

$$\vec{M}_A^{(att,eff->\mathcal{R}_2)} = -mg\frac{L}{2}\cos\theta\vec{e}_\rho\times\vec{e}_z + 2cL^2\sin\theta\cos\theta\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho = \cos\theta(mg\frac{L}{2} + 2cL^2\sin\theta)\vec{e}_\varphi\ .$$

Calcoliamo il momento risultante delle forze centrifughe, ricordando che esse sono forze distribuite,

$$\vec{M}_A^{(cf->\mathcal{R}_2)} = \int_{\mathcal{R}_2}(P - A)\times\vec{f}_P^{(cf)}d\mathcal{R}_2\ . \tag{11.4.29}$$

Tenendo conto che

$$P - A = s\,vers(P - A) = s(\cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_z) \tag{11.4.30}$$

$$\vec{f}_P^{(cf)}d\mathcal{R}_2 = \frac{m}{L}ds\,\omega^2\rho(P)\vec{e}_\rho \tag{11.4.31}$$

$$\rho(P) = L\cos\theta + s\cos\theta = (L + s)\cos\theta\ , \tag{11.4.32}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

il momento specifico delle forze centrifughe risulta

$$(P-A)\times\vec{f}_P^{(cf)}d\mathcal{R}_2=-\frac{m}{L}\omega^2\sin\theta\cos\theta s(L+s)\,ds\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho$$

quindi

$$\vec{M}_A^{(cf->\mathcal{R}_2)}=-\frac{m}{L}\omega^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_\varphi\int_0^L s(L+s)ds=-\frac{5}{6}mL^2\omega^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_\varphi \tag{11.4.33}$$

Il momento risultante delle forze reattive esterne sulla biella risulta

$$\vec{M}_A^{(est,reatt->\mathcal{R}_2)}=(B-A)\times\vec{\psi}_B=L(\cos\theta\vec{e}_\rho-\sin\theta\vec{e}_z)\times\psi_z\,\vec{e}_z=-\psi_zL\cos\theta\vec{e}_\varphi\ . \tag{11.4.34}$$

Dunque, in questo caso, la II ECS (11.4.25) equivale all'equazione scalare

$$\cancel{\cos\theta}(mg\frac{L}{2}+2cL^2\sin\theta)-\frac{5}{6}mL^2\omega^2\sin\theta\cancel{\cos\theta}-\psi L\cancel{\cos\theta}=0\ , \tag{11.4.35}$$

che valutata in $\theta=\pi/3$ e c pari al valore in (11.4.17) fornisce la soluzione

$$\psi_z=m(g+\frac{\sqrt{3}}{4}\omega^2\,L)\ , \tag{11.4.36}$$

Dunque, dalla segue che

$$\phi_z=m(g-\frac{\sqrt{3}}{4}\omega^2\,L)\ . \tag{11.4.37}$$

Si osservi, che, in questo problema, tutta la sollecitazione attiva è complanare al piano rotante, quindi il momento risultante è ortogonale allo stesso piano. Allora, la II ECS sulla sola biella implica che l'ipotesi a priori (11.4.19) è soddisfatta.

3. Introduciamo la reazione che la biella esercita sulla manovella nel punto A.

$$\vec{\zeta}_A=\zeta_\rho\vec{e}_\rho+\zeta_z\vec{e}_z\ .$$

Utilizziamo la I ECS applicata alla sola manovella.

$$\vec{R}^{(est,att->\mathcal{R}_1)}+\vec{R}^{(cf->\mathcal{R}_1)}+\vec{\phi}_O+\vec{\zeta}_A=\vec{0} \tag{11.4.38}$$

Il risultante delle forze attive esterne sulla sola manovella, tenuto conto della (11.4.21), è

$$\vec{R}^{(est,att->\mathcal{R}_1)}+\vec{R}^{(cf->\mathcal{R}_1)}=m\vec{g}+c(B-O)+\vec{R}^{(cf->\mathcal{R}_1)}=-mg\vec{e}_z+2cL\cos\theta\vec{e}_\rho+m\omega^2\frac{L}{2}\cos\theta\,\vec{e}_\rho\ .$$

Dunque, proiettando l'equazione sulla base si ottengono le equazioni

$$2cL\cos\theta+m\omega^2\frac{L}{2}\cos\theta+\phi_\rho+\zeta_\rho=0 \tag{11.4.39}$$

$$-mg+\phi_z+\zeta_z=0 \tag{11.4.40}$$

Risolvendole rispetto alle incognite (ζ_ρ,ζ_z) e tenendo conto delle (11.4.17), (11.4.23), (11.4.24), si ottiene la reazione interna in A

$$\zeta_\rho=-(cL+\frac{1}{4}m\omega^2L+\phi_\rho)=-m\big(-\frac{\omega^2\,L}{12}+\frac{g}{2\sqrt{3}}\big)\ , \tag{11.4.41}$$

$$\zeta_z=mg-\phi_z=m\frac{\sqrt{3}}{4}L\,\omega^2\ . \tag{11.4.42}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Capitolo 12

Operatore d'inerzia per un Rigido

Nel capitolo precedente abbiamo visto che nella II ECD e nel Teorema delle forze vive compaiono, rispettivamente, la derivata rispetto al tempo del momento angolare $\vec{L}_O$ e la derivata dell'energia cinetica K. Vedremo, nella prossime sezioni, qual è la forma assunta da $\vec{L}_O$ e da K nel caso di un modello *rigido*.

12.1 Momento angolare per i rigidi

La definizione generale del momento angolare di un modello discreto, è

$$\vec{L}_O = \sum_{B\in\mathcal{B}} (B-O)\times m_B\,\vec{v}_B\ , \tag{12.1.1}$$

mentre per un modello continuo è

$$\vec{L}_O = \int_{\mathcal{B}} (B-O)\times \sigma(B)\,\vec{v}_B\,d\mathcal{B}\ , \tag{12.1.2}$$

dove $\sigma(B)$ indica la funzione densità di massa del continuo.

Se ora scegliamo il polo O appartenente a un rigido $\mathcal{R}$ (o al suo spazio solidale), possiamo esprimere la velocità dei suoi punti mediante la formula di Poisson (4.6.1)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times(B-O)$$

e sostituendo nella (12.1.1), otteniamo

$$\vec{L}_O = \sum_{B\in\mathcal{R}} (B-O)\times m_B\,(\vec{v}_O+\vec{\omega}\times(B-O)) \tag{12.1.3}$$

$$= \sum_{B\in\mathcal{R}} (B-O)\times m_B\vec{v}_O + \sum_{B\in\mathcal{R}} m_B\,(B-O)\times(\vec{\omega}\times(B-O)) \tag{12.1.4}$$

Rielaborando la I sommatoria e denotando con G il centro di massa si ottiene

$$\sum_{B\in\mathcal{R}} (B-O)\times m_B\vec{v}_O = \left(\sum_{B\in\mathcal{R}} m_B\,(B-O)\right)\times\vec{v}_O = M\,(G-O)\times\vec{v}_O\ .$$

Se introduciamo la seguente definizione

$$\boldsymbol{I}_O(\vec{\omega}) := \sum_{B\in\mathcal{R}} m_B (B-O)\times(\vec{\omega}\times(B-O)) \tag{12.1.5}$$

la (12.1.3) diventa

$$\vec{L}_O = (G-O)\times M\vec{v}_O + \boldsymbol{I}_O(\vec{\omega}) \qquad O\in\mathcal{R}\ . \tag{12.1.6}$$

Dunque, il momento angolare di un rigido, calcolato rispetto a un suo punto O, è costituito da due termini

$$\begin{aligned} (G-O)\times M\vec{v}_O &\longrightarrow \text{termine di traslazione} \\ \boldsymbol{I}_O(\vec{\omega}) &\longrightarrow \text{termine polare} \end{aligned}$$

Osserviamo che il termine di traslazione si annulla se:

1. O è un punto fisso $\in\mathcal{R}$, oppure il campo di velocità di $\mathcal{R}$ è rotatorio e $O\in AIR\ \forall t\in I$;
2. $O\equiv G$, O coincide con G.

Invece, se è necessario calcolare $\vec{L}$ rispetto a un punto $A\notin\mathcal{R}$, si deve utilizzare la formula di trasporto dimostrata nella seguente

Proposizione 12.1.1. *Per ogni modello meccanico e per ogni coppia di punti geometrici A, $D\in\mathcal{E}_3$ vale*

$$\vec{L}_A = \vec{L}_D + (D-A)\times\vec{p} \tag{12.1.7}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \vec{L}_A &= \sum_{B\in\mathcal{R}} (B-A)\times m_B\vec{v}_B = \sum_{B\in\mathcal{R}} [(B-D)+(D-A)]\times m_B\vec{v}_B = \\ &= \sum_{B\in\mathcal{R}} (B-D)\times m_B\vec{v}_B + \sum_{B\in\mathcal{R}} (D-A)\times m_B\vec{v}_B \\ &= \vec{L}_D + (D-A)\times\sum_{B\in\mathcal{R}} m_B\vec{v}_B \end{aligned}$$

Ricordando la definizione di quantità di moto totale di un modello, segue la tesi. □

Per usare la (12.1.7) su un rigido, converrà scegliere come polo D del rigido il centro di massa G, o un suo punto fisso (se esiste) poiché, se D coincide con G o con un suo punto fisso, allora

$$\vec{L}_D = \boldsymbol{I}_D(\vec{\omega})$$

e quindi

$$\vec{L}_A = \boldsymbol{I}_D(\vec{\omega}) + (D-A)\times\vec{p} \tag{12.1.8}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

12.2 Energia cinetica di un rigido

Determiniamo l'espressione dell'energia cinetica K per un rigido $\mathcal{R}$.

$$\begin{aligned}
K &:= \frac{1}{2}\sum_{B\in\mathcal{R}} m_B|\vec{v}_B|^2 \qquad \vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times(B-O) \quad O,\, B\in\mathcal{R} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{B\in\mathcal{R}} m_B\left(\vec{v}_O + \vec{\omega}\times(B-O)\right)\cdot\left(\vec{v}_O + \vec{\omega}\times(B-O)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{B\in\mathcal{R}} m_B|\vec{v}_O|^2 + \sum_{B\in\mathcal{R}} m_B\vec{v}_O\cdot\left(\vec{\omega}\times(B-O)\right) + \frac{1}{2}\sum_{B\in\mathcal{R}} m_B\left(\vec{\omega}\times(B-O)\right)\cdot\left(\vec{\omega}\times(B-O)\right) \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}M|\vec{v}_O|^2 + \vec{v}_O\cdot\vec{\omega}\times\left(\sum_{B\in\mathcal{R}} m_B(B-O)\right) + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\sum_{B\in\mathcal{R}} m_B(B-O)\times\left(\vec{\omega}\times(B-O)\right) \\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}M|\vec{v}_O|^2 + M\vec{v}_O\cdot\vec{\omega}\times(G-O) + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\boldsymbol{I}_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}M|\vec{v}_O|^2 + \vec{\omega}\cdot(G-O)\times M\vec{v}_O + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\boldsymbol{I}_O(\vec{\omega}) \ ,
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato nel passaggio (1) la proprietà di scambio del prodotto vettore con il prodotto scalare nel prodotto misto e, al passaggio (2), la definizione di centro di massa G e di operatore d'inerzia (12.1.5).

Dunque, in generale, l'energia cinetica di un rigido consta di 3 termini: un termine di traslazione, un termine misto e un termine polare. Comunque, tale espressione si semplifica nei seguenti casi:

1. se $O\in\mathcal{R}$ è fisso, oppure se il campo di velocità è rotatorio e $O\in AIR$, allora la (12.2.1) si riduce al termine polare,

   $$K = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\boldsymbol{I}_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}_O \ , \tag{12.2.1}$$

   dove $\vec{L}_O$ è il momento angolare di $\mathcal{R}$ rispetto ad O;

2. se $O\equiv G$. Allora, la (12.2.1) si riduce alla somma del termine di traslazione e del termine polare

   $$K = \frac{1}{2}M|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\boldsymbol{I}_G(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}M|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}_G \ , \tag{12.2.2}$$

   dove $\vec{L}_G$ è il momento angolare di $\mathcal{R}$ rispetto ad G.

Esercizio 12.2.1. *Calcolare l'energia cinetica di un qualunque rigido in moto elicoidale.*

12.3 Operatore d'inerzia per un rigido

Studiamo più in dettaglio il termine polare della (12.1.6) e in particolare l'applicazione definita da:

$$\boldsymbol{I} : \mathcal{E}_3\times E_3 \to E_3,\ (O,\vec{y}) \mapsto \boldsymbol{I}_O(\vec{y}) = \sum_{B\in\mathcal{R}} m_B(B-O)\times\left(\vec{y}\times(B-O)\right) \tag{12.3.1}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Essa dipende dal punto O del rigido e dalla sua distribuzione di massa. Essa è un *campo* di operatori poiché, fissato il punto O, l'applicazione parziale

$$\boldsymbol{I}_O : E_3 \to E_3,\ \vec{y} \mapsto \boldsymbol{I}_O(\vec{y}) \tag{12.3.2}$$

è un operatore; esso sarà detto *operatore d'inerzia* del rigido rispetto al punto O.

N.B. Per i modelli continui $\boldsymbol{I}_O(\vec{y}) := \int_{\mathcal{R}} \sigma(B)\ (B-O) \times (\vec{y} \times (B-O))\, d\mathcal{R}$; dove $\sigma(B)$ è la densità di massa nel punto B.

Teorema 12.3.1. *L'applicazione $\boldsymbol{I}_O$ gode delle seguenti proprietà:*

1. *è un operatore lineare (endomorfismo) in E_3*

$$\boldsymbol{I}_O(\lambda\vec{y} + \mu\vec{z}) = \lambda \boldsymbol{I}_O(\vec{y}) + \mu \boldsymbol{I}_O(\vec{z}) \qquad \begin{array}{l} \forall \vec{y}, \vec{z} \in E_3 \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array}$$

2. *è un operatore simmetrico rispetto al prodotto scalare di E_3 (endomorfismo autoaggiunto), cioè soddisfa:*

$$\boldsymbol{I}_O(\vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{y} \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{z}) \qquad \forall \vec{y}, \vec{z} \in E_3 \tag{12.3.3}$$

3. *è un operatore definito positivo, cioè soddisfa*

$$\boldsymbol{I}_O(\vec{y}) \cdot \vec{y} > 0, \quad \textit{se } \vec{y} \neq \vec{0} \tag{12.3.4}$$

per tutti i rigidi, tranne in un caso che chiameremo degenere *e che sarà trattato a parte.*

Dimostrazione. .

1. È ovvia dalla definizione (12.3.1), in cui l'argomento $\vec{y}$ compare linearmente e le operazioni di prodotto vettoriale e somma di vettori sono lineari.

2. Dalla definizione segue che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_O(\vec{y}) \cdot \vec{z} &= \left[\sum_{B \in \mathcal{R}} m_B\, (B-O) \times (\vec{y} \times (B-O))\right] \cdot \vec{z} = \\ &= \left[\sum_{B \in \mathcal{R}} m_B \left(|B-O|^2\, \vec{y} - (B-O) \cdot \vec{y}\, (B-O)\right)\right] \cdot \vec{z} \\ &= \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B \left(|B-O|^2\, \vec{y} \cdot \vec{z} - (B-O) \cdot \vec{y}\, (B-O) \cdot \vec{z}\right) \end{aligned} \tag{12.3.5}$$

   È evidente che l'espressione precedente è simmetrica rispetto a $\vec{y}$ e $\vec{z}$ e quindi la tesi.

3. È sufficiente dimostrare che la 3. vale per un versore $\vec{u}$ poiché, se è vera per $\vec{u}$, è vera anche per $\vec{y} = \lambda\vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, poiché dalla linearità segue che

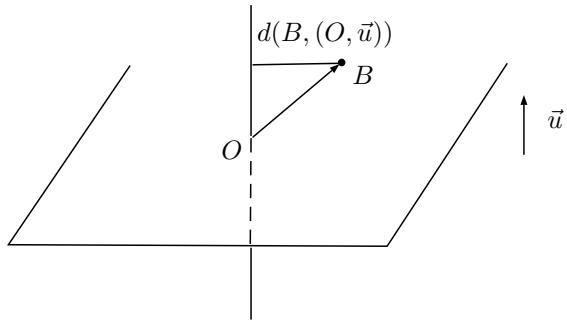
$$\boldsymbol{I}_O(\vec{y}) \cdot \vec{y} = \boldsymbol{I}_O(\lambda\vec{u}) \cdot \lambda\vec{u} = \lambda^2 \boldsymbol{I}_O(\vec{u}) \cdot \vec{u}\ .$$

   Sostituendo nella (12.3.5) a $\vec{y}$ e $\vec{z}$ il versore $\vec{u}$ si ottiene

$$\boldsymbol{I}_O(\vec{u}) \cdot \vec{u} = \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B \left[|B-O|^2 - (\vec{u} \cdot (B-O))^2\right]$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Interpretiamo geometricamente il termine in parentesi quadra.



Esso è la differenza tra il quadrato dell'ipotenusa OB e il quadrato del cateto OH, quindi rappresenta il quadrato della distanza di B dall'asse passante per O e parallelo al versore $\vec{u}$: $d\,(B,\,(O,\vec{u}))$. Pertanto,

$$\boldsymbol{I}_O\,(\vec{u})\cdot\vec{u} = \sum_{B\in\mathcal{R}} m_B\, d^2\,(B,\,(O,\vec{u})) \tag{12.3.6}$$

È immediato riconoscere nell'espressione precedente il *momento d'inerzia* (vedi Fisica I) del rigido rispetto all'asse $(O,\vec{u})$ e che tale momento è sempre positivo, tranne nel caso in cui i punti di $\mathcal{R}$ sono tutti allineati lungo l'asse $(O,\vec{u})$, cioè se $\mathcal{R}$ è un'asta di sezione trascurabile (rigido unidimensionale). Tale caso sarà detto *degenere* e sarà studiato a parte. □

Dal *Teorema* precedente seguono delle importanti conseguenze.

Corollario 12.3.1. _

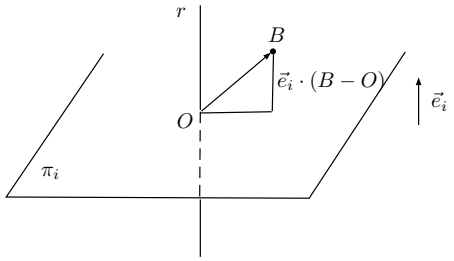
1. *Poiché $\boldsymbol{I}_O$ è un operatore lineare, una volta fissato un riferimento cartesiano ortonormale $(O;\vec{e_1},\,\vec{e_2},\,\vec{e_3})$ in $\mathcal{E}_3$, $\boldsymbol{I}_O$ si può rappresentare mediante una matrice $[\boldsymbol{I}_O]$ i cui elementi I_{jk} sono dati da*
$$I_{jk} = \vec{e_j}\cdot\boldsymbol{I}_O\,(\vec{e_k})\ \ .$$

2. *Poiché $\boldsymbol{I}_O$ è simmetrico, segue che la matrice rappresentativa $[\boldsymbol{I}_O]$ possiede solo 6 elementi indipendenti e, precisamente,*
$$3 \text{ elementi diagonali} \qquad I_{jj} = \vec{e}_j\cdot\boldsymbol{I}_O\,(\vec{e}_j) \qquad j=1,2,3$$
che, per la (12.3.6)*, rappresentano i momenti d'inerzia rispetto agli assi paralleli a $\vec{e_j}$, $j = 1,2,3$;*
3 elementi fuori diagonale $(j\neq k)$
$$\begin{aligned} I_{jk} &= \vec{e}_j\cdot\boldsymbol{I}_O\,(\vec{e}_k) = \boldsymbol{I}_O(\vec{e}_j)\cdot\vec{e}_k \overset{(12.3.5)}{=} \sum_{B\in\mathcal{R}} m_B\left(|B-O|^2\,\vec{e}_j\cdot\vec{e}_k - \vec{e}_j\cdot(B-O)\,(B-O)\cdot\vec{e}_k\right)\\ &= -\sum_{B\in\mathcal{R}} m_B\,[\vec{e}_j\cdot(B-O)\,(B-O)\cdot\vec{e}_k] \end{aligned}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Interpretiamo geometricamente gli elementi fuori diagonale I_{jk} $(j \neq k)$. È facile concludere che il termine

$$d\,(B,\,\pi_i) := \vec{e_i} \cdot (B - O)$$



rappresenta la "distanza" orientata del punto B dal piano $\pi_i := \pi(O, \vec{e}_i)$ passante per O e ortogonale a $\vec{e_i}$.

Allora, i termini fuori diagonale si possono scrivere come

$$I_{jk} = -\sum_{B \in \mathcal{R}} m_B \; d\,(B,\,\pi_j)\, d\,(B,\,\pi_k) \tag{12.3.7}$$

e sono chiamati *momenti deviatori* (o centrifughi) rispetto alla coppia di piani π_j e π_k, ortogonali, rispettivamente, ai versori $\vec{e}_j$ ed $\vec{e}_k$.

Mentre i momenti deviatori possono avere sia segno positivo sia segno negativo (si ricordi che le "distanze" $d\,(B,\,\pi_j)$ hanno un segno), i momenti d'inerzia sono sempre positivi (tranne nel caso degenere dell'asta).

N.B. Si osservi che mentre l'operatore d'inerzia $\boldsymbol{I}_O$ è definito in modo intrinseco dalla (12.7) la sua rappresentazione matriciale dipende dalla scelta della terna $(O;\, \vec{e_1},\, \vec{e_2},\, \vec{e_3})$. Per questo motivo, in dinamica, conviene sempre scegliere una terna *solidale* al rigido, in modo che, sia i momenti d'inerzia, sia i momenti deviatori rispetto a quella terna non dipendano dal tempo!

Ricapitolando, scelta una terna ortonormale solidale al rigido e centrata in O, $(O;\, \vec{e_1},\, \vec{e_2},\, \vec{e_3})$, la matrice d'inerzia rispetto ad O ha la forma

$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix} ,$$

dove

$$I_{jj} = \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) \left(x_i^2 + x_k^2\right) dx_i dx_j dx_k \qquad i \neq j \neq k \neq i = 1, 2, 3 \tag{12.3.8}$$

$$I_{jk} = -\int_{\mathcal{R}} \sigma(B) x_j x_k dx_i dx_j dx_k \qquad i \neq j = 1, 2, 3 \tag{12.3.9}$$

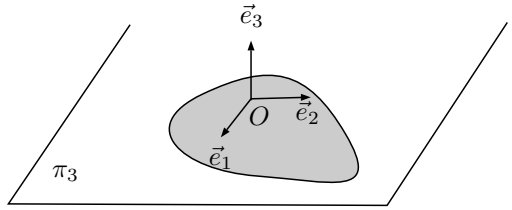
sono rispettivamente le espressioni dei momenti d'inerzia e dei momenti deviatori di $\mathcal{R}$, $(x_1,\, x_2,\, x_3)$ le coordinate cartesiane dei punti del rigido e $\sigma(B)$ la sua densità di massa nel generico punto B.

12.4 Matrice d'inerzia nel caso piano

Nel caso di un rigido piano (lamina), la matrice d'inerzia rispetto a un punto O della lamina si può semplificare notevolmente scegliendo come terna ortonormale una terna che abbia un piano

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

coordinato coincidente con il piano del rigido. Per esempio, se scegliamo gli assi $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ nel piano π, la coordinata $x_3(B)$ di tutti i punti di $\mathcal{R}$ sarà nulla.



$$x_3(B) = 0 \quad \forall B \in \mathcal{R}$$

Pertanto, vale la seguente

Proposizione 12.4.1. *La matrice d'inerzia assumerà la forma*

$$[\boldsymbol{I}_O] = \left[\begin{array}{cc|c} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{array}\right] \qquad \textit{3 elementi indipendenti: } I_{11}, I_{22}, I_{12} \tag{12.4.1}$$

Dimostrazione. Si basa sul fatto che i momenti deviatori $I_{13} = I_{31}$ e $I_{23} = I_{32}$ saranno nulli, mentre il momento d'inerzia I_{33} sarà uguale alla somma degli altri due. Infatti

$$I_{13} = -\int_{\mathcal{R}} \sigma(B) x_1(B) \cancel{x_3(B)} d\mathcal{R} = 0$$

$$I_{23} = -\int_{\mathcal{R}} \sigma(B) x_2(B) \cancel{x_3(B)} d\mathcal{R} = 0$$

$$\begin{aligned} I_{33} &= \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) \left(x_1^2(B) + x_2^2(B)\right) d\mathcal{R} = \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) x_1^2(B)\, d\mathcal{R} + \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) x_2^2(B)\, d\mathcal{R} = \\ &= \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) \left(x_1^2(B) + \cancel{x_3^2(B)}\right) d\mathcal{R} + \int_{\mathcal{R}} \sigma(B) \left(x_2^2(B) + \cancel{x_3^2(B)}\right) d\mathcal{R} = I_{11} + I_{22} \end{aligned}$$

□

12.5 Ellissoide d'inerzia

Accanto alla rappresentazione algebrica dell'operatore $\boldsymbol{I}_O$ mediante la matrice $[\boldsymbol{I}_O]$, calcolata rispetto ad un riferimento fissato $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, si può darne una rappresentazione geometrica (e quindi intrinseca) mediante il cosiddetto ellissoide d'inerzia, $EI(O)$. Consideriamo la funzione a valori scalari

$$\hat{f}_O : E_3 \to \mathbb{R}, \quad \vec{y} \mapsto \vec{y} \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{y}) \ .$$

Poichè $\boldsymbol{I}_O$ è un operatore simmetrico, essa è una forma quadratica ed è definita positiva come abbiamo già dimostrato nel teorema 12.3.1. Inoltre, $\hat{f}_O$ induce una funzione $f_O : \mathcal{E}_3 \to \mathbb{R}$, $P \mapsto f_O(P) = \hat{f}_O(P - O)$, data esplicitamente da

$$f_O(P) = (P-O)\cdot \boldsymbol{I}_O(P-O) = |P-O|^2 vers(P-O)\cdot \boldsymbol{I}_O(vers(P-O)) = |P-O|^2 I_{r(P)} \ , \tag{12.5.1}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

dove $I_{r(P)}$ indica il momento d'inerzia del rigido rispetto alla retta passante per i punti O e P. Gli insiemi di livello S_λ di f_O sono, per definizione, il luogo geometrico dei punti P dello spazio $\mathcal{E}_3$ nei quali la f_O assume valori costanti

$$S_\lambda = \{P \in \mathcal{E}_3 |\ f_O(P) = \lambda\ , \qquad \lambda \in \mathbb{R}\} = f_O^{-1}(\lambda)\ ,$$

quindi una famiglia ad un parametro di superfici in $\mathcal{E}_3$. Tenendo conto della (12.5.1), tali insiemi si possono caratterizzare come l'insieme dei punti $P \in \mathcal{E}_3$ che soddisfano l'equazione dei *semi-diametri*

$$|P - O| = \sqrt{\frac{\lambda}{I_{r(P)}}}\ , \tag{12.5.2}$$

È chiaro che, dalla positività di $I_{r(P)}$, segue che

$$\begin{array}{ll} \text{se } \lambda < 0 & S_\lambda = \emptyset \\ \text{se } \lambda = 0 & S_\lambda = \{O\} \end{array}$$

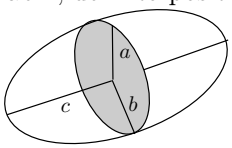
Se invece $\lambda > 0$, segue dalla (12.5.2) che S_λ è una superficie simmetrica rispetto al punto O e che tutti i suoi punti sono a distanza finita. Inoltre, dalla (12.5.1) segue che la sua equazione, nelle coordinate cartesiane $(x_1,\, x_2,\, x_3)$ del generico punto $P \in \mathcal{E}_3$, si trova calcolando l'espressione

$$f_O(P) = \hat{f}_O(P - O) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i I_{ij} x_j = \lambda$$

cioè

$$I_{11}x_1^2 + I_{22}x_2^2 + I_{33}x_3^2 + 2I_{12}x_1x_2 + 2I_{13}x_1x_3 + 2I_{23}x_2x_3 = \lambda \qquad \lambda > 0 \tag{12.5.3}$$

Quindi, la superficie S_λ è l'insieme di livello λ di un polinomio omogeneo di secondo grado in 3 variabili, definito positivo, cioè la superficie di un ellissoide centrato nel punto $O \in \mathcal{R}$.



N.B. Di solito, il valore di λ, che è una costante avente le dimensioni $[\lambda] = [M][L^4]$, è fissato uguale a 1 in opportune unità di misura.

Come è noto, un ellissoide ha almeno 3 assi di simmetria ortogonali, cioè 3 assi ortogonali attorno ai quali l'ellissoide è invariante per rotazione di un angolo pari a π ed ha 3 piani di simmetria ortogonale rispetto ai quali è invariante per riflessione. Se si sceglie la terna di riferimento $\left(O;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k}\right)$ parallela ai 3 assi, l'equazione cartesiana di un ellissoide si riduce alla forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ , \tag{12.5.4}$$

dove (x, y, z) sono le coordinate di P rispetto alla terna $\left(O;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k}\right)$ e (a, b, c) sono le lunghezze dei semi-assi di simmetria. Quindi, posto da ora in poi $\lambda = 1$, l'equazione (12.5.3) diventa

$$J_1x^2 + J_2y^2 + J_3z^2 = 1 \tag{12.5.5}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

dove J_1, J_2, J_3 sono i momenti d'inerzia rispetto agli assi paralleli a $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ e passanti per O, cioè agli assi di simmetria. È evidente che, rispetto a tale terna, la matrice d'inerzia assume una forma diagonale

$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix} \tag{12.5.6}$$

Pertanto, si ha che:

1. $\boldsymbol{I}_O(\vec{\imath}) = J_1\vec{\imath}$, $\boldsymbol{I}_O(\vec{\jmath}) = J_2\vec{\jmath}$, $\boldsymbol{I}_O\left(\vec{k}\right) = J_3\vec{k}$, cioè i versori della terna sono *autovettori* dell'operatore d'inerzia $\boldsymbol{I}_O$, e hanno come **autovalori** i corrispondenti **momenti d'inerzia**. Inoltre, dall'equazione dei semi-diametri si ricava immediatamente la relazione tra i momenti d'inerzia J_i e la lunghezza dei semiassi di $EI(O)$:

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{J_i}} \qquad i = 1, 2, 3\ , \tag{12.5.7}$$

   dove $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$.

2. Gli elementi fuori diagonale della matrice d'inerzia $[\boldsymbol{I}_O]$, cioè i momenti deviatori rispetto alle coppie dei piani di simmetria dell'$EI(O)$ sono nulli.

Abbiamo visto come costruire l'ellissoide d'inerzia di un rigido, a partire dalla conoscenza del'operatore d'inerzia. Vediamo ora come si risolve il problema inverso, cioè quello di ricostruire l'operatore d'inerzia noto l'ellissoide.

Proposizione 12.5.1. *(Costruzione di Poinsot). L'operatore d'inerzia $\boldsymbol{I}_O : E_3 \to E_3$ trasforma un qualsiasi vettore $\vec{y}$ nel vettore $\boldsymbol{I}_O(\vec{y})$ che ha:*

1. *la direzione coniugata a $\vec{y}$, cioè la direzione ortogonale all'EI(O) nell'estremo P del semidiametro parallelo a $\vec{y}$;*
2. *il verso che forma un angolo acuto con $\vec{y}$;*
3. *il modulo pari a $|\boldsymbol{I}_O(\vec{y})| = \frac{|\vec{y}|}{\overline{OP}\ \overline{OH}}$.*

Dimostrazione. .

1. Poichè sappiamo dall'Analisi che il gradiente di una funzione scalare, calcolato nei punti di una superficie di livello della funzione, è ortogonale alla superficie stessa, basta dimostrare che $\boldsymbol{I}_O(\vec{y})$ è parallelo al *gradiente* di $f_O(P)$, dove P è l'estremo del semidiametro parallelo a $\vec{y}$. A tale scopo, posto $\vec{x} := P - O$, calcoliamo l'incremento finito della funzione $f_O(P)$

$$\begin{aligned}
\Delta f_O(P) =& f_O(P + \vec{h}) - f_O(P) = \hat{f}_O(P + \vec{h} - O) - \hat{f}_O(P - O) \\
=& \hat{f}_O(\vec{x} + \vec{h}) - \hat{f}_O(\vec{x}) = (\vec{x} + \vec{h}) \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{x} + \vec{h}) - \vec{x} \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{x}) \\
=& (\vec{x} + \vec{h}) \cdot \big(\boldsymbol{I}_O(\vec{x}) + \boldsymbol{I}_O(\vec{h})\big) - \vec{x} \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{x}) \\
=& \cancel{\vec{x} \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{x})} + \vec{h} \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{x}) + \vec{x} \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{h}) + \vec{h} \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{h}) - \cancel{\vec{x} \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{x})} \\
\overset{(12.3.3)}{=}& 2\boldsymbol{I}_O(\vec{x}) \cdot \vec{h} + \boldsymbol{I}_O\big(vers(\vec{h})\big) \cdot vers(\vec{h})|\vec{h}|^2
\end{aligned}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

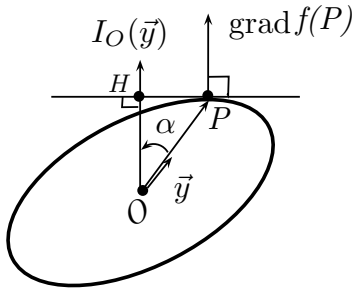


Figura 12.5.1: Costruzione di Poinsot

e osserviamo che la parte lineare in $\vec{h}$, cioè il gradiente della funzione $f_O(P)$ è

$$\operatorname{grad} f_O(P) = 2\boldsymbol{I}_O(\vec{x}) = 2\boldsymbol{I}_O(P - O) \ .$$

Pertanto, poichè i vettori $\vec{y}$ e $(P-O)$ sono paralleli, anche i loro trasformati $\boldsymbol{I}_O(\vec{y})$ e $\boldsymbol{I}_O(P-O)$ lo sono, quindi

$$\boldsymbol{I}_O(\vec{y}) \parallel \operatorname{grad} f_O(P) \ .$$

2. Dalla positività di $\boldsymbol{I}_O$ segue che se $\vec{y} \neq \vec{0}$, allora

$$0 < \vec{y} \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{y}) = |\vec{y}||\boldsymbol{I}_O(\vec{y})| \cos\alpha \ , \tag{12.5.8}$$

quindi α è acuto.

3. Denotando con $I_{r(P)}$ il momento d'inerzia del rigido rispetto all'asse passante per i punti O e P, la (12.5.8) si può scrivere

$$|\vec{y}|^2 \, I_{r(P)} = \vec{y} \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{y}) = |\vec{y}||\boldsymbol{I}_O(\vec{y})| \cos\alpha \ ,$$

da cui segue che

$$|\boldsymbol{I}_O(\vec{y})| = \frac{|\vec{y}| \, I_{r(P)}}{\cos\alpha} \ .$$

Dall'equazione dei semidiametri (12.5.2) segue che

$$I_{r(P)} = \frac{1}{\overline{OP}^2} \ ,$$

pertanto

$$|\boldsymbol{I}_O(\vec{y})| = \frac{|\vec{y}|}{\overline{OP}^2 \cos\alpha} \ ,$$

da cui la tesi.

□

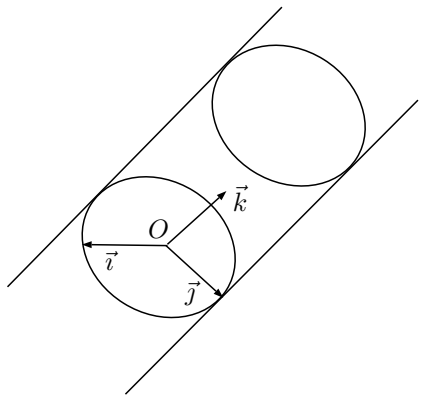
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

N.B. Rigido degenere: asta

Se il rigido $\mathcal{R}$ è un'asta, sappiamo che $\boldsymbol{I}_O$ non è definito positivo poiché il momento d'inerzia di $\mathcal{R}$ rispetto al suo asse è nullo. In tal caso, scelta una terna $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ con il versore $\vec{k}$ lungo l'asta, l'equazione (12.5.5) dell' $EI\,(O)$ si riduce a

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{J}\ , \qquad J = J_1 = J_2$$

Questa è l'equazione di un cilindro (ellissoide degenere) circolare retto con asse parallelo a $\vec{k}$ e passante per O.



12.6 Assi principali d'inerzia

Vista la discussione precedente, introduciamo 3 definizioni equivalenti per gli *assi principali d'inerzia* rispetto ad un punto O. Essi saranno denotati con $API\,(O)$.

Definizione 12.6.1 (geometrica)**.** *Un $API(O)$ è un asse di simmetria dell'$EI(O)$.*

Definizione 12.6.2 (algebrica)**.** *Un $API(O)$ è un asse parallelo a un autovettore dell'operatore $\boldsymbol{I}_O$.*

Definizione 12.6.3 (meccanica)**.** *Un $API(O)$ è una retta per O, per la quale passa una coppia di piani ortogonali (π, π'), rispetto ai quali si annulla il momento deviatore del rigido $\boldsymbol{I}_{\pi,\pi'}$.*

Chiameremo piani principali d'inerzia per O, $PPI\,(O)$, i piani ortogonali agli $API\,(O)$ e terne principali d'inerzia per O, $TPI\,(O)$, le terne ortonormali di $API\,(O)$.

Ricerca delle $TPI\,(O)$

Dalle definizioni precedenti discendono i metodi per la ricerca degli $API\,(O)$. In particolare, dalla Def. 2 segue che possiamo utilizzare il metodo per la ricerca degli autovalori e autovettori visti in Algebra Lineare (vedi [Abate, Cap. 14]). Si tratta, cioè di

1. determinare gli autovalori di $\boldsymbol{I}_O$, cioè le radici μ dell'equazione caratteristica

$$\det(\boldsymbol{I}_O - \mu \mathbb{1}_3)\ ,$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

dove $\mathbb{1}_3$ è l'operatore identità in E_3. Il Teorema di diagonalizzazione degli operatori simmetrici, o *Teorema Spettrale*, garantisce che le radici dell'equazione caratteristica sono tutte e tre reali (vedi [Abate, Cap. 15]).

2. determinare gli autovettori di $\boldsymbol{I}_O$ corrispondenti agli autovalori μ_i $(i = 1, 2, 3)$ trovati al passo 1. Lo stesso *Teorema di diagonalizzazione* garantisce l'esistenza di almeno una base ortogonale di autovettori di $\boldsymbol{I}_O$.

Richiamiamo un altro risultato di algebra lineare che ci permetterà di classificare tutte le situazioni possibili in $\mathcal{E}_3$.

Proposizione 12.6.1. *Sia $\boldsymbol{I} : E_n \to E_n$ un operatore simmetrico in uno spazio vettoriale euclideo n-dimensionale. Due autovettori di $\boldsymbol{I}$, corrispondenti ad autovalori diversi, cioè appartenenti ad autospazi diversi, sono ortogonali. Viceversa, a due autovettori non ortogonali corrisponde lo stesso autovalore, cioè essi appartengono allo stesso autospazio.*

Dimostrazione. Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due autovettori di $\boldsymbol{I}$, cioè

$$\boldsymbol{I}_O(\vec{u}) = \mu_1 \vec{u} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{I}_O(\vec{v}) = \mu_2 \vec{v}$$

Moltiplicando scalarmente la prima per $\vec{v}$, la seconda per $\vec{u}$ e sottraendo, per la simmetria di $\boldsymbol{I}_O$ segue che

$$0 = \vec{v} \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{u}) - \vec{u} \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{v}) = (\mu_1 - \mu_2)\, \vec{u} \cdot \vec{v}\ .$$

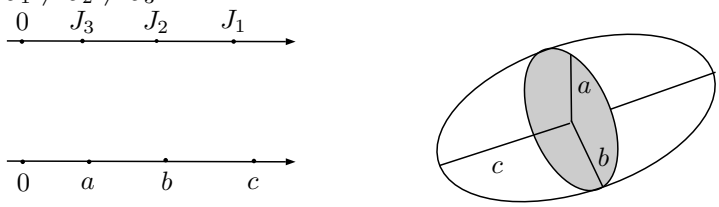
Pertanto:

1. se $\mu_1 \neq \mu_2$, allora $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono ortogonali;
2. se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non sono ortogonali, allora $\mu_1 \equiv \mu_2$.

□

Per l'operatore d'inerzia, che agisce sui vettori dello spazio tridimensionale E_3, si possono verificare i seguenti casi:

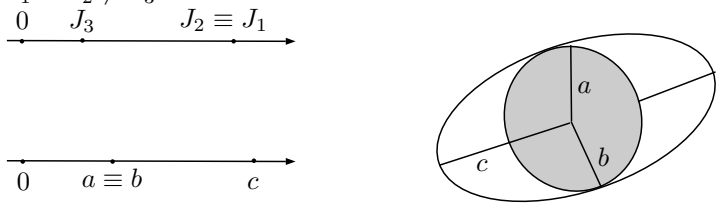
1. $J_1 \neq J_2 \neq J_3$



ellissoide triassiale.

In tal caso, esiste un'unica TPI(O) composta dai versori paralleli agli assi di simmetria dell'EI(O). Su tale base la matrice d'inerzia ha la forma diagonale (12.5.6).

2. $J_1 \equiv J_2 \neq J_3$



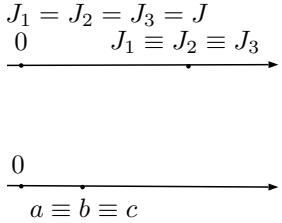
ellissoide rotondo

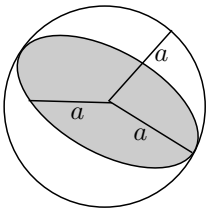
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

In tal caso, l'asse parallelo all'autospazio V_{J_3} è detto *asse di figura*. Inoltre, l'autospazio V_{J_1} ha dimensione 2 ed è parallelo al piano per O ortogonale all'asse di figura. Tale piano è detto *piano equatoriale*. Essendo $a \equiv b$, l'intersezione dell'$EI\,(O)$ con il piano equatoriale è una circonferenza di raggio $R = a \equiv b$ e quindi l'$EI\,(O)$ è un ellissoide di rotazione intorno all'asse di figura. Dunque, una $TPI(O)$ è formata da un versore, $\vec{k}$, parallelo all'asse di figura e da una qualunque coppia di versori ortogonali, scelti nel piano equatoriale. Su tali terne, la matrice d'inerzia si scrive

$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} .$$

3. $J_1 = J_2 = J_3 = J$





sfera

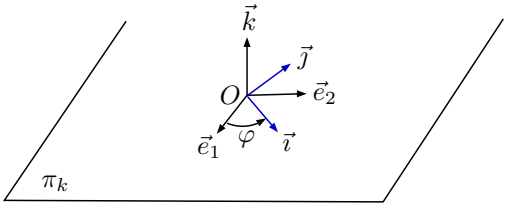
In questo caso l'autospazio V_J ha dimensione 3 e quindi coincide con E_3. Essendo $a \equiv b \equiv c$, l'$EI\,(O)$ diventa una sfera. Dunque, una $TPI\,(O)$ è una qualunque terna ortonormale centrata in O. Si osservi che la matrice d'inerzia diventa

$$[\boldsymbol{I}_O] = J\mathbb{1}_3$$

Ribadendo che la soluzione del problema degli autovalori è il metodo più generale per la ricerca di una $TPI\,(O)$ e garantisce sempre il successo, vedremo ora alcuni metodi che si possono usare in casi particolari.

Ricerca di una $TPI\,(O)$ noto un $API\,(O)$

Se un $API\,(O)$ è già noto, possiamo utilizzare in una maniera molto efficace il metodo che discende dalla Def. 3. Chiamiamo $\vec{k}$ il versore dell'$API\,(O)$ noto e consideriamo π_k, il $PPI\,(O)$ ortogonale a $\vec{k}$.



Scegliamo su tale piano una qualunque coppia di assi ortogonali $(O;\, \vec{e_1},\, \vec{e_2})$ e calcoliamo la matrice d'inerzia $[\boldsymbol{I}_O]$ rispetto alla terna $\left(O;\, \vec{e_1},\, \vec{e_2},\, \vec{k}\right)$

$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_3\ . \end{bmatrix}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

La matrice $[\boldsymbol{I}_O]$ ha la forma precedente poiché la terza colonna è data dalle componenti del vettore trasformato di $\vec{k}$

$$\boldsymbol{I}_O\left(\vec{k}\right) = J_3\vec{k}\ ,$$

che è autovettore di $\boldsymbol{I}_O$ con autovalore J_3.

Si possono verificare due casi:

1. $I_{12} = 0 \Rightarrow (O;\, \vec{e_1},\, \vec{e_2},\, \vec{k})$ è una $TPI\,(O)$;

2. $I_{12} \neq 0$, allora consideriamo le coppie $(O;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath})$ di assi ortogonali su π_k. Tali coppie sono parametrizzate dall'angolo φ compreso tra $\vec{e_1}$ e $\vec{\imath}$. Fra tali coppie cerchiamo una coppia di $API\,(O)$ richiedendo che il momento deviatore J_{12}, rispetto alla coppia di piani, π_i, π_j si annulli. Tale momento deviatore ha l'espressione

$$\begin{aligned}
J_{12} &= \vec{\imath}\cdot\boldsymbol{I}_O\,(\vec{\jmath}) = [\cos\varphi, \sin\varphi, 0]\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= [\cos\varphi, \sin\varphi]\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} = \\
&= -\left(I_{11} - I_{22}\right)\sin\varphi\cos\varphi + I_{12}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \\
&= -\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\sin 2\varphi + I_{12}\cos 2\varphi\ .
\end{aligned}$$

Pertanto, richiedendo, che J_{12} si annulli si trova che l'angolo φ è soluzione dell'equazione

$$\operatorname{cotg}(2\varphi) = \frac{I_{11} - I_{22}}{2I_{12}}\ .$$

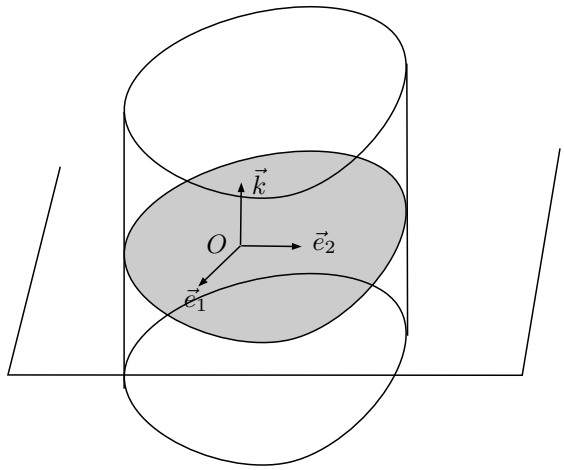
Tale equazione ammette 4 soluzioni nell'intervallo $]0, 2\pi[$, ognuna delle quali differisce di $\pi/2$ da quelle adiacenti. Quindi, individua entrambe le direzioni principali.

Proprietà di simmetria materiale

Se il rigido $\mathcal{R}$ gode di alcune proprietà di simmetria materiale, la ricerca di una $TPI\,(O)$ è notevolmente semplificata.

Definizione 12.6.4. *Si dice* piano di simmetria materiale *ortogonale per $\mathcal{R}$ un piano rispetto al quale $\mathcal{R}$ è invariante per riflessione (vedi Cap. 2, Esercizio 2.2.2 e 2.3.1).*

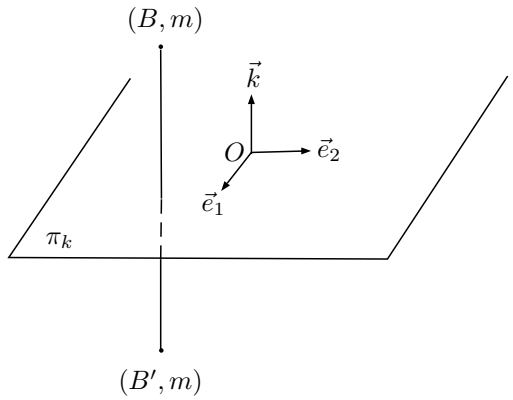
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



In modo equivalente, un piano di simmetria materiale è definito come un piano:

1. *di simmetria geometrica ortogonale;*

2. *tale che punti (o parti) simmetrici abbiano la stessa massa (o densità).*



N.B. Per i rigidi omogenei i piani di simmetria geometrica sono automaticamente piani di simmetria materiale.

Proposizione 12.6.2. *Un piano di simmetria materiale per un rigido è un PPI per ogni suo punto O. In maniera equivalente, ogni retta ortogonale al piano è API rispetto al suo punto di intersezione con il piano*

Dimostrazione. Sia π un piano di simmetria materiale per un rigido $\mathcal{R}$. Consideriamo un suo generico punto O e chiamiamo $\vec{k}$ il versore dell'asse per O e ortogonale a π. Presa una qualunque coppia di assi ortogonali su π, calcoliamo il trasformato di $\vec{k}$

$$\boldsymbol{I}_O\left(\vec{k}\right) = I_{13}\vec{e_1} + I_{23}\vec{e_2} + I_{33}\vec{k}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

e dimostriamo che $I_{13} = I_{23} = 0$. Infatti

$$
\begin{aligned}
I_{13} = -\int_{\mathcal{R}} \sigma(B)\, x_1\,(B)\, x_3\,(B)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = -\int_{\mathcal{R}_0} \sigma(B)\, x_1\,(B)\, \cancel{x_3\,(B)} dx_1\, dx_2\, dx_3 + \\
-\int_{\mathcal{R}_1} \sigma(B)\, x_1\,(B)\, x_3\,(B)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 - \int_{\mathcal{R}_2} \sigma(B')\, x_1\,(B')\, x_3\,(B')\, dx_1\, dx_2\, dx_3\ ,
\end{aligned}
\tag{12.6.1}
$$

dove $\mathcal{R}_0 := \{B \in \mathcal{R} |\, x_3(B) = 0\}$, $\mathcal{R}_1 := \{B \in \mathcal{R} |\, x_3(B) > 0\}$ e $\mathcal{R}_2 := \{B \in \mathcal{R} |\, x_3(B) < 0\}$ sono i tre sottoinsiemi in cui il rigido $\mathcal{R}$ è ripartito dal piano π. È immediato osservare che, essendo π di simmetria materiale per $\mathcal{R}$, $\forall B \in \mathcal{R}_1 \quad \exists B' \in \mathcal{R}_2$ tale che

$\mathcal{R}_1$	$\vert$	$\mathcal{R}_2$
B	$\vert$	B'
$\sigma(B)$	$=$	$\sigma(B')$
$x_1\,(B)$	$=$	$x_1\,(B')$
$x_2\,(B)$	$=$	$x_2\,(B')$
$x_3\,(B)$	$= -$	$x_3\,(B')$

e quindi la somma deigli ultimi due integrali in I_{13} si annulla. Analogamente accade per I_{23}, quindi

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

Allora, segue che

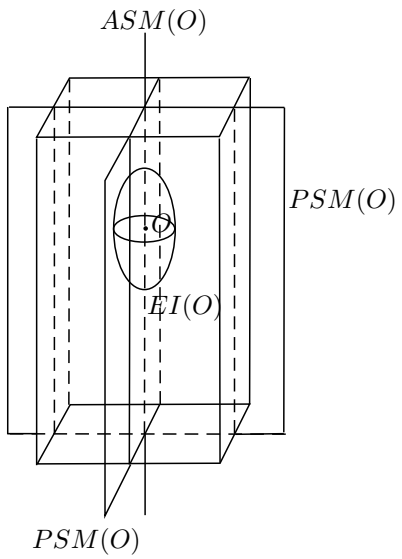
$$\boldsymbol{I}_O\left(\vec{k}\right) = I_{33}\vec{k} = J_3\vec{k}\ ,$$

cioè $\vec{k}$ è autovettore di $\boldsymbol{I}_O$ e quindi $API\,(O)$. □

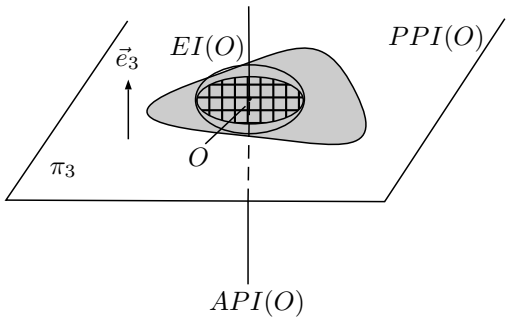
Concludendo, se un rigido ha un piano π di simmetria materiale, $\forall O \in \pi$ è già noto un $API\,(O)$. Quindi si può applicare il metodo della pagina precedente per la ricerca degli altri due. È evidente che tale discorso si può fare per i solidi omogenei, geometricamente simmetrici, quali cubi, parallelepipedi, poliedri regolari, etc.

Esempio 12.6.1. *Parallelepipedo omogeneo*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

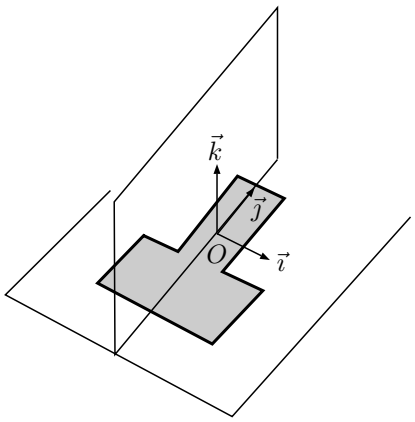


Esempio 12.6.2. *In generale, la proprietà di simmetria materiale si applica sempre al caso di un qualsiasi rigido $\mathcal{R}$ piano. Infatti, il piano π di $\mathcal{R}$ è un piano di simmetria materiale per $\mathcal{R}$. Pertanto, ogni asse ortogonale a π è $API\,(O)$, per ogni $O \in \mathcal{R}$. L'intersezione dell'$EI\,(O)$ con il piano π si dice* ellisse d'inerzia *per O.*



Esempio 12.6.3. *Sezione di un profilo a T*

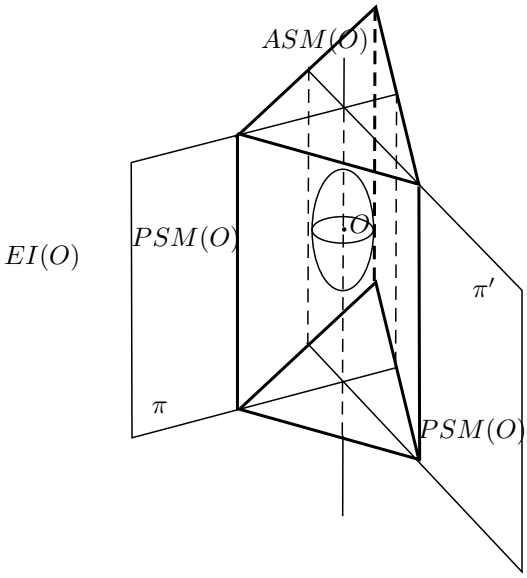
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Proposizione 12.6.3. *Se un rigido ammette 2 piani di simmetria materiale, non ortogonali, allora l'asse $r = \pi \cap \pi'$ è API(O), per ogni $O \in r$ e l'EI (O) è rotondo intorno a r.*

Dimostrazione. Preso $O \in r$, i 2 assi per O ortogonali, rispettivamente, a π e π' sono $API\,(O)$ per la Prop. 12.6.2 e non sono ortogonali tra loro. Quindi, i vettori paralleli a tali assi, per il punto b) della Prop. 12.6.1 appartengono allo stesso autospazio, che avrà almeno dimensione pari a 2. Da qui segue la tesi. □

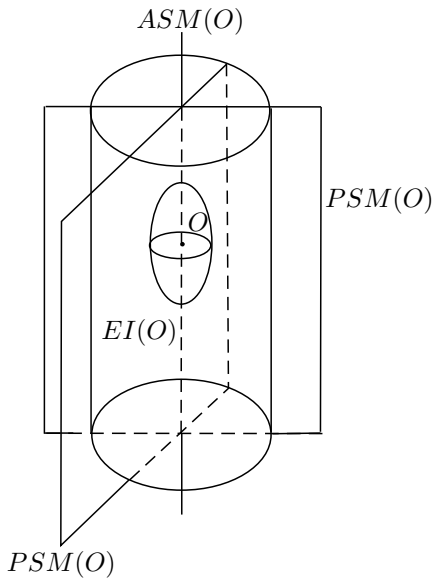
Esempio 12.6.4. *Prisma retto omogeneo a sezione triangolare equilatera*



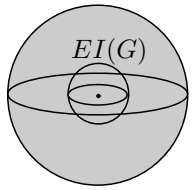
$EI\,(O)$ è rotondo intorno ad r poiché π non è $\perp$ a π'.

Esempio 12.6.5. *Cilindro circolare retto omogeneo*

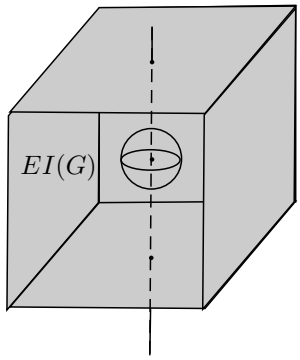
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Esempio 12.6.6. *sfera e cubo omogenei*



$EI(G)$ *è sferico*



$EI(G)$ *è sferico*

12.7 Variazione con il polo dell'operatore d'inerzia

Finora abbiamo studiato l'operatore d'inerzia dopo aver fissato il polo O. Interessante è anche lo studio di $\boldsymbol{I}_O$ al variare di O, cioè lo studio del campo di operatori

$$\boldsymbol{I} : \mathcal{E}_3 \times E_3 \to E_3,\ (O, \vec{y}) \mapsto \boldsymbol{I}_O(\vec{y}) = \sum_{B \in \mathcal{R}} m_B (B - O) \times (\vec{y} \times (B - O))$$

Ad esempio, per i momenti d'inerzia vale la formula Huygens-Steiner (vedi Fisica I)

$$I_{r(O)} = I_{r(G)} + M d^2\big(r(O), r(G)\big) , \tag{12.7.1}$$

dove G è il centro di massa di $\mathcal{R}$, $O \in \mathcal{R}$, $r(O)$ e $r(G)$ sono assi paralleli passanti per O e per G, rispettivamente, M la massa totale di $\mathcal{R}$ e $d(r(O), r(G))$ la distanza tra i due assi.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Proposizione 12.7.1. *Dato un fascio di rette parallele, il minimo momento d'inerzia è quello rispetto alla retta del fascio passante per il centro di massa G.*

Dimostrazione. Discende dal fatto che nella (12.7.1) tutti i termini sono strettamente positivi. □

La formula (12.7.1) si può ricavare dalla più generale formula di trasporto per l'operatore d'inerzia

Teorema 12.7.1. *(Huygens & Steiner) In un rigido $\mathcal{R}$, per ogni vettore $\vec{y}$ e per ogni punto $O \in \mathcal{R}$, vale*

$$\boldsymbol{I}_O(\vec{y}) = \boldsymbol{I}_G(\vec{y}) + M(G-O) \times \big(\vec{y} \times (G-O)\big) \ . \tag{12.7.2}$$

Dimostrazione. Dalla definizione segue che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I}_O(\vec{y}) &= \sum_{B\in\mathcal{R}} m_B\big((B-G)+(G-O)\big) \times \Big(\vec{y} \times \big((B-G)+(G-O)\big)\Big) = \\
&= \sum_{B\in\mathcal{R}} m_B (B-G) \times (\vec{y} \times (B-G)) + \sum_{B\in\mathcal{R}} m_B (B-G) \times (\vec{y} \times (G-O)) + \\
&\quad + \sum_{B\in\mathcal{R}} m_B (G-O) \times (\vec{y} \times (B-G)) + \sum_{B\in\mathcal{R}} m_B (G-O) \times (\vec{y} \times (G-O)) = \\
&= I_G(\vec{y}) + \cancel{\Big(\sum_{B\in\mathcal{R}} m_B (B-G)\Big)} \times \Big(\vec{y} \times (G-O)\Big) + (G-O) \times \Big(\vec{y} \times \cancel{\Big(\sum_{B\in\mathcal{R}} m_B (B-G)\Big)}\Big) \\
&\quad + M(G-O) \times (\vec{y} \times (G-O)) = \\
&= \boldsymbol{I}_G(\vec{y}) + M(G-O) \times (\vec{y} \times (G-O)) = \\
&= \boldsymbol{I}_G(\vec{y}) + M\Big(|G-O|^2\vec{y} - \big((G-O)\cdot\vec{y}\big)(G-O)\Big) \ ,
\end{aligned}$$

dove i termini barrati si annullano separatamente per la definizione del centro di massa. □

Scegliendo come $\vec{y}$ un versore $\vec{u}$ e moltiplicando scalarmente per $\vec{u}$ entrambi i termini della precedente identità, si ottiene la (12.7.1). Analogamente, se si moltiplica la (12.7.2) scalarmente per un versore $\vec{v}$ ortogonale a $\vec{u}$ si ottiene la formula di Huygens-Steiner per i momenti deviatori

$$I_{\pi(O,\vec{u})\pi(O,\vec{v})} = I_{\pi(G,\vec{u})\pi(G,\vec{v})} - Md\big(G, \pi(O,\vec{u})\big)d\big(G, \pi(O,\vec{v})\big) \ , \tag{12.7.3}$$

dove $\pi(O, \vec{u})$ e $\pi(O, \vec{v})$ sono i piani passanti per O e ortogonali ai versori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ rispettivamente, $\pi(G, \vec{u})$ e $\pi(G, \vec{v})$ sono i piani paralleli ai precedenti ma passanti per il centro di massa del rigido G, $d\big(G, \pi(O, \vec{u})\big)$ e $d\big(G, \pi(O, \vec{v})\big)$ indicano le distanze orientate di G dai piani $\pi(O, \vec{u})$ e $\pi(O, \vec{v})$ rispettivamente (vedi la Fig. 12.7). Il segno delle distanze sarà positivo se G vede la faccia positiva del piano rispetto al versore ortogonale al piano, negativo se G vede la faccia negativa. Scelte due terne ortonormali con assi paralleli $\Big(G; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\Big)$ e $\Big(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\Big)$ e posto $G - O = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, la (12.7.2) diventa

$$[\boldsymbol{I}_O] = [\boldsymbol{I}_G] + M \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} \ , \tag{12.7.4}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

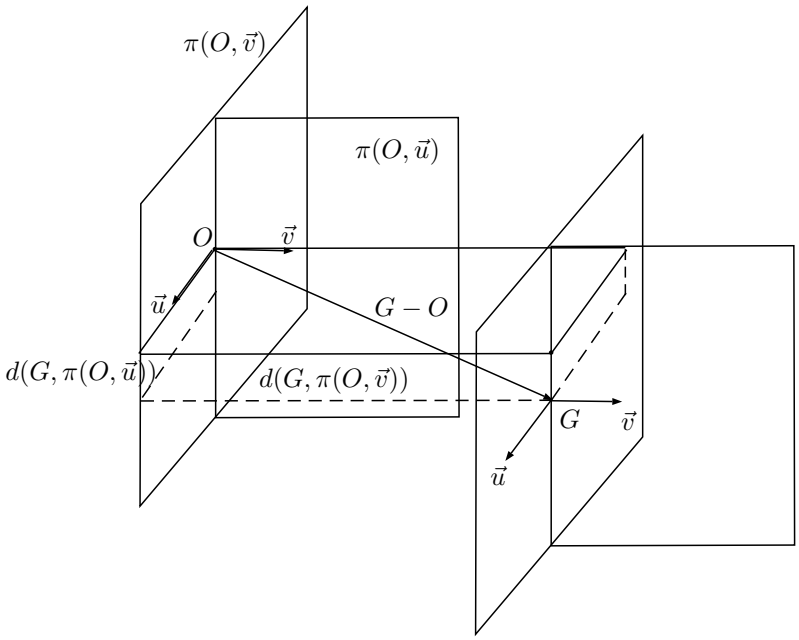


Figura 12.7.1: Teorema di Huygens & Steiner

dove $[\boldsymbol{I}_G]$ è la matrice d'inerzia rispetto alla terna $\left(G;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k}\right)$ ed è detta matrice centrale d'inerzia.
N.B. Poiché la matrice di trasporto dipende in maniera quadratica dalle coordinate del punto G rispetto a O, essa è invariante se alle coordinate $(x,\, y,\, z)$ di G rispetto a O si sostituiscono le coordinate $(-x,\, -y,\, -z)$ di O rispetto a G sulla stessa base dei versori $\left(\vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k}\right)$.

12.8 Assi principali d'inerzia centrali

Così si chiamano gli assi principali d'inerzia passanti per il centro di massa G del rigido $\mathcal{R}$. Consideriamo una terna principale d'inerzia per G $\left(G;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k}\right)$ e un punto O, che nella detta terna abbia coordinate $(x,\, y,\, z)$. Allora, per la (12.7.4), la matrice d'inerzia rispetto al punto O è data da

$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

Segue subito la seguente

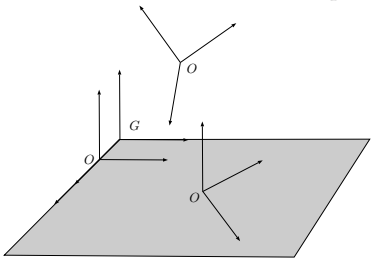
Proposizione 12.8.1. *Proprietà di traslazione delle terne principali centrali.*

1. *se $O \in API\,(G)$ allora una $TPI\,(O)$ è parallela alla terna centrale $\left(G;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k}\right)$, poiché due delle coordinate di O sono nulle e quindi sono nulli tutti e 3 i termini fuori diagonale della matrice di trasporto.*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

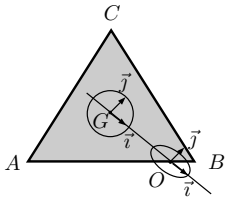
2. *se $O \in PPI\,(G)$ et $\notin API\,(G)$, allora l'asse per O ortogonale al suddetto piano principale è $API\,(O)$, poiché la coordinata di O lungo tale asse è nulla e quindi sono nulli i termini di trasporto che la contengono. Invece, gli altri 2 $API\,(O)$* non *sono paralleli a quelli per G poichè le altre due coordinate di O sono non nulle e quindi sono non nulli i termini di trasporto fuori diagonale che ne contengono il prodotto.*

3. *se $O \notin PPI\,(G)$, allora gli $API\,(O)$* non *sono paralleli agli $API\,(G)$, poiché le 3 coordinate di O sono tutte non nulle e quindi sono non nulli i 3 termini di trasporto fuori diagonale.*



Esempi di rigidi omogenei

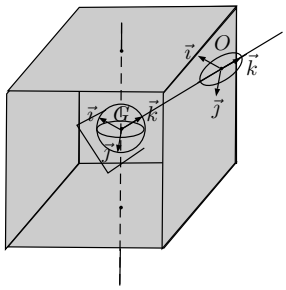
1. Lamina triangolare equilatera: determiniamo una TPI per un generico punto O appartenente a un lato della lamina.



La lamina ha le mediane come assi di simmetria materiale non ortogonali per il centro di massa G. Quindi, l'ellisse d'inerzia per G è una circonferenza e tutti gli assi per G appartenenti al piano sono $API(G)$.

Al fine di determinare una $TPI\,(O)$, consideriamo l'asse passante per G e per O e chiamiamo $\vec{\imath}$ il suo versore. Tale asse è $API\,(G)$ per quanto detto sopra. Poi consideriamo un asse ortogonale a $\vec{\imath}$ e denotiamo il suo versore con $\vec{\jmath}$. La terna $\left(G;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k}\right)$ è una $TPI\,(G)$. Trasliamo tale terna lungo l'asse OG. Allora, la terna $\left(O;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k}\right)$ è una $TPI\,(O)$ per la Prop. 12.8.1. Inoltre, l'ellissoide d'inerzia per O ha lo stesso asse di quello per G nella direzione di $\vec{\imath}$, ma ha un asse più corto di quello per G nella direzione di $\vec{\jmath}$, per la Prop. 12.7.1 e l'equazione dei semiassi (12.5.7).

2. Cubo: determiniamo una TPI per un generico punto O appartenente a una faccia del cubo.



Per ogni asse di simmetria del cubo passante per il centro di una delle sue facce, passa almeno una coppia di piani di simmetria materiale, non ortogonali tra loro e passanti per G. Quindi, l'$EI(G)$ è una sfera e qualunque terna ortonormale per G è una $TPI(G)$.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Al fine di determinare una $TPI\,(O)$, scelgo una $TPI\,(G)$ con un asse parallelo al segmento OG, il versore del quale chiamo $\vec{k}$. Poi scelgo una qualunque coppia di assi ortogonali sul piano ortogonale a $\vec{k}$, i cui versori chiamo $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$. Allora, $\left(G;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ è una $TPI\,(G)$ e quindi $\left(O;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ è una $TPI\,(O)$. Inoltre, l'$EI\,(O)$ è di rotazione intorno all'asse di figura OG.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Capitolo 13

Statica e Dinamica dei Rigidi

In questo capitolo applicheremo le equazioni cardinali della statica e della dinamica dei sistemi meccanici ai modelli rigidi, per studiarne gli eventuali equilibri e i moti.

13.1 Equazioni Cardinali della Statica per un Rigido

Per un generico corpo rigido $\mathcal{R}$, le ECS coincidono con quelle che valgono per un modello qualsiasi

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est)} = & \vec{0} \\ \vec{M}_O^{(est)} = & \vec{0} \ , \end{cases} \tag{13.1.1}$$

e sono necessarie all'equilibrio. Inoltre, a differenza di quanto succede per i modelli articolati, sono anche sufficienti all'equilibrio, cioè ogni loro soluzione è una configurazione di equilibrio del corpo rigido in esame. Come applicazione delle ECS studiamo il seguente

Esempio 13.1.1. *Consideriamo un corpo rigido di massa m appoggiato su di un piano orizzontale liscio in 3 o più punti non allineati P_i e soggetto al solo peso proprio. Studiamo gli equilibri e le reazioni vincolari agli equilibri. Consideriamo l'insieme delle reazioni vincolari nei punti di appoggio P_i*

$$\mathcal{S}^{reatt,est} = \{\Big(P_i, \vec{\phi}_i = \phi_i \vec{e}_z\Big)\} \qquad \phi_i \geq 0 \ .$$

Esso è un insieme di forze parallele e concordi al versore $\vec{e}_z$. Quindi, possiede un centro C dato da

$$C - O = \frac{\sum \phi_i (P_i - O)}{\sum \phi_i} \ ,$$

che appartiene all'inviluppo (o involucro) convesso dei punti di applicazione delle forze, quindi al piano d'appoggio. Allora, possiamo concludere che l'insieme delle reazioni vincolari equivale al risultante applicato in C

$$\mathcal{S}^{reatt,est} \sim \{\Big(C, \vec{\phi} = \sum \phi_i \vec{e}_z\Big)\} \ .$$

Ora, scrivendo le ECS con la scelta del polo C

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{\phi} = & \vec{0} \\ (G - C) \times m\vec{g} + \cancel{\vec{M}_C^{(est,reatt)}} = & \vec{0} \end{cases} , \tag{13.1.2}$$

si trovano le soluzioni

$$\begin{cases} \vec{\phi} = & -m\vec{g} \\ (G - C) \parallel \vec{g} & . \end{cases} \tag{13.1.3}$$

Dunque, vale la seguente

Proposizione 13.1.1. *Condizione necessaria e sufficiente di equilibrio per un corpo rigido pesante appoggiato su di un piano orizzontale liscio è che la proiezione ortogonale del suo baricentro sul piano d'appoggio, denotata $G_\perp$, coincida con il centro delle reazioni vincolari*

$$G_\perp = C \ . \tag{13.1.4}$$

Tuttavia, la posizione sul piano del centro C è incognita a priori e si può determinare solo dopo aver calcolato le singole reazioni vincolari, oppure dopo aver trovato le configurazioni di equilibrio. Quindi, cerchiamo condizioni di equilibrio esprimibili in termini del punto $G_\perp$, la cui posizione dipende solo dalla configurazione del rigido. Vale la seguente

Proposizione 13.1.2 (Levi-Civita & Amaldi)**.** *Condizione necessaria e sufficiente di equilibrio per un corpo rigido pesante appoggiato su di un piano orizzontale liscio è che il punto $G_\perp$ appartenga all'inviluppo convesso dei punti di appoggio. Tale condizione si può esprimere dicendo che il baricentro sia sostenuto.*

Dimostrazione. La necessità segue immediatamente dalla (13.1.4) e dalla proprietà già richiamata secondo la quale C appartiene all'inviluppo (o involucro) convesso dei punti di applicazione delle forze.

Per dimostrare la sufficienza, iniziamo a considerare il caso di soli 3 punti di appoggio P_1, P_2, P_3 non allineati (treppiede) e dimostriamo che ogni configurazione del rigido nelle quali il baricentro è sostenuto, è una configurazione di equilibrio. A tale scopo basta verificare che tali configurazioni soddisfano le ECS che, allo stesso tempo, forniscono le reazioni vincolari in quelle configurazioni. In questo caso, in ogni configurazione d'equilibrio le reazioni vincolari risultano uniche. Con riferimento alla Fig. 13.1.1, calcoliamo il momento assiale di tutte le forze esterne rispetto ai tre lati del triangolo d'appoggio $P_1P_2P_3$. Considerando, ad esempio, il lato P_2P_3, osserviamo che al momento assiale rispetto a tale lato concorrono solo il peso, che si può pensare applicato in $G_\perp$ (perché?), e la sola reazione $\vec{\phi}_1$, poichè $\vec{\phi}_2$ e $\vec{\phi}_3$ sono applicate in due punti appartenenti al lato stesso. Allora, scelto $O \in r_1$, si ha

$$M_{r_1} = \big((P_1 - O) \times \vec{\phi}_1 + (G_\perp - O) \times m\vec{g}\big) \cdot \vec{e}_1 = \phi_1 h_1 - mgk_1 \ .$$

Se indichiamo con Δ l'area del triangolo $P_1P_2P_3$ e con Δ_1 l'area del triangolo $G_\perp P_2P_3$, allora vale

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{k_1}{h_1}$$

Quindi, M_{r_1} si annulla se e solo se

$$\phi_1 = mg\frac{k_1}{h_1} = mg\frac{\Delta_1}{\Delta}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

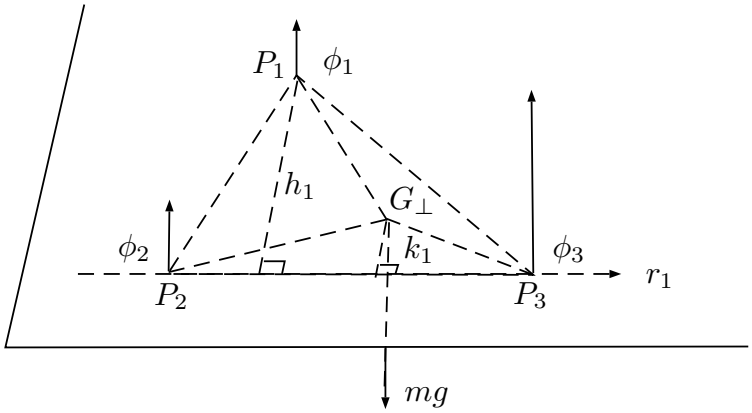


Figura 13.1.1: Treppiede

Analogamente, risulta

$$\phi_2 = mg\frac{\Delta_2}{\Delta} \ , \qquad \phi_3 = mg\frac{\Delta_3}{\Delta} \ .$$

È evidente che queste tre reazioni trovate equilibrano, il peso del corpo poiché

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = mg(\frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_2}{\Delta} + \frac{\Delta_3}{\Delta}) = mg \ ,$$

quindi soddisfano la I ECS. D'altra parte, soddisfano anche la II ECS poiché, se si prende come polo un punto d'appoggio, ad esempio P_1, si annullano tre componenti non complanari del momento risultante rispetto a P_1: quelle rispetto ai lati P_1P_2 e P_1P_3 e quella verticale.

Se poi gli appoggi sono più di tre, l'ipotesi che il baricentro sia sostenuto garantisce pur sempre l'equilibrio. Infatti, basta supporre le reazioni tutte nulle tranne quelle in tre appoggi e riportarsi al caso precedente, a patto che $G_\perp$ appartenga al triangolo avente come vertici i tre appoggi scelti. Comunque, in questo caso le reazioni, in ogni configurazione di equilibrio, sono indeterminate (ammettono infinite soluzioni) e l'indeterminazione è tanto maggiore quanto più grande è il numero dei punti d'appoggio. Per eliminare tale indeterminazione occorre rinunciare al modello rigido per il piano d'appoggio e ammettere, invece, la sua deformabilità. Ma questo esula dai contenuti di questo corso. □

13.2 Equazioni Cardinali della Dinamica per un Rigido

Per un generico corpo rigido $\mathcal{R}$, le ECD

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est)} = & \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \vec{M}_O^{(est)} = & \frac{d\vec{L}_O}{dt} + \vec{v}_O \times \vec{p} \\ \Pi = \frac{dK}{dt} \ , & \end{cases} \tag{13.2.1}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

assumono una forma particolare, grazie al ruolo del centro di massa e dell'operatore d'inerzia. In particolare, nel calcolare la derivata rispetto al tempo della quantità di moto e del momento della quantità di moto, che intervengono nel secondo membro delle ECD, dobbiamo considerare due casi.

1. Se il polo $O \in \mathcal{R}$, possiamo utilizzare la rappresentazione (4.6.11) per l'accelerazione del centro di massa e la (12.1.6) per il momento angolare. Infatti, si ottengono rispetttivamente,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\Big(\vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (G-O) + \vec{\omega} \times \big(\vec{\omega} \times (G-O)\big)\Big) \ ,$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}_{|spazio} = \frac{d}{dt}_{|spazio}\big(\boldsymbol{I}_O(\vec{\omega}) + (G-O)\times m\vec{v}_O\big) \overset{(4.7.2)}{=} \boldsymbol{I}_O(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega}\times\boldsymbol{I}_O(\vec{\omega}) + (\vec{v}_G - \cancel{\vec{v}_O})\times m\vec{v}_O + (G-O)\times m\vec{a}_O \ ,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}_{|corpo} = \boldsymbol{I}_O(\dot{\vec{\omega}}) \ .$$

Dunque, la seconda ECD diventa

$$\vec{M}_O^{(est)} = \boldsymbol{I}_O(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \boldsymbol{I}_O(\vec{\omega}) + \cancel{\vec{v}_G \times m\vec{v}_O} + (G-O) \times m\vec{a}_O + \cancel{\vec{v}_O \times \vec{p}} \ . \tag{13.2.2}$$

2. Se il polo O è un punto qualsiasi, anche mobile, possiamo utilizzare la rappresentazione (12.1.8), con $A \equiv O$ and $D \equiv G$. Derivando rispetto al tempo, si ottiene

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}_{|spazio} = \frac{d}{dt}_{|spazio}\big(\boldsymbol{I}_G(\vec{\omega}) + (G-O)\times m\vec{v}_G\big) = \boldsymbol{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega}\times\boldsymbol{I}_G(\vec{\omega}) + (\cancel{\vec{v}_G} - \vec{v}_O)\times m\vec{v}_G + (G-O)\times m\vec{a}_G \ .$$

Allora, la seconda ECD diventa

$$\vec{M}_O^{(est)} = \boldsymbol{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \boldsymbol{I}_G(\vec{\omega}) - \cancel{\vec{v}_O \times m\vec{v}_G} + (G-O) \times m\vec{a}_G + \cancel{\vec{v}_O \times \vec{p}} \ . \tag{13.2.3}$$

Ricapitolando, le ECD per un corpo rigido si possono scrivere

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est)} = & m\Big(\vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (G-O) + \vec{\omega} \times \big(\vec{\omega} \times (G-O)\big)\Big) \\ \vec{M}_O^{(est)} = & \boldsymbol{I}_O(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \boldsymbol{I}_O(\vec{\omega}) + (G-O) \times m\vec{a}_O \ , \qquad O \in \mathcal{R} \end{cases} \tag{13.2.4}$$

oppure

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est)} = & m\,\vec{a}_G \\ \vec{M}_O^{(est)} = & \boldsymbol{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \boldsymbol{I}_G(\vec{\omega}) + (G-O) \times m\vec{a}_G \ . \qquad O \in \mathcal{E}_3 \end{cases} \tag{13.2.5}$$

Ovviamente, la rappresentazione (13.2.5) può essere usata anche se O appartiene al rigido. Per quanto riguarda l'equazione dell'energia cinetica, osserviamo, innanzitutto, che il primo membro della (11.2.6) si riduce alla potenza della sola sollecitazione esterna agente sul rigido, poichè quella della sollecitazione interna si annulla per la Proposizione 8.2.2

$$\Pi^{(est)} = \frac{dK}{dt} \ . \tag{13.2.6}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Inoltre, dimostriamo che per un corpo rigido, la (13.2.6) è una conseguenza delle prime due ECD. Infatti, la potenza delle forze esterne su un rigido risulta, tenuto conto delle (13.2.4) con $O \equiv G$,

$$\Pi^{(est)} = \vec{R}^{(est)} \cdot \vec{v}_G + \vec{M}_G^{(est)} \cdot \vec{\omega} = m\vec{a}_G \cdot \vec{v}_G + \frac{d\vec{L}_G}{dt} \cdot \vec{\omega} \tag{13.2.7}$$

Analizziamo il secondo membro e dimostriamo che coincide con $\frac{dK}{dt}$. Il primo termine risulta

$$m\vec{a}_G \cdot \vec{v}_G = \frac{d}{dt}\big(\frac{1}{2}m|\vec{v}_G|^2\big) \ ,$$

mentre il secondo termine risulta pari alla derivata del termine polare

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} \cdot \vec{\omega} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{I}_G(\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega}\right)$$

Infatti,

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} \cdot \vec{\omega} = \frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{I}_G(\vec{\omega})\Big) \cdot \vec{\omega} = \Big(\boldsymbol{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \boldsymbol{I}_G(\vec{\omega})\Big) \cdot \vec{\omega} = \boldsymbol{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) \cdot \vec{\omega} + \cancel{\vec{\omega} \times \boldsymbol{I}_G(\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega}} \ ,$$

mentre

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{I}_G(\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\Big(\boldsymbol{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) + \cancel{\vec{\omega} \times \boldsymbol{I}_G(\vec{\omega})}\Big) \cdot \vec{\omega} + \boldsymbol{I}_G(\vec{\omega}) \cdot \dot{\vec{\omega}}\right) \overset{(12.3.3)}{=} \boldsymbol{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) \cdot \vec{\omega} \ .$$

Dunque, se le ECD (13.2.4) sono soddisfatte, il secondo membro della (13.2.7) coincide con il secondo della (13.2.6).

13.3 Moto rigido piano

Nel caso di un moto rigido piano non traslatorio, abbiamo visto che la velocità angolare è ortogonale al piano direttore e si può scrivere

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} \ , \tag{13.3.1}$$

dove φ è un angolo misurato fra due assi nel piano (il primo fisso e il secondo solidale a $\mathcal{R}$) e $\vec{k}$ è un versore ortogonale al piano. Quindi, scelto $O \equiv G$, il trasformato del vettore $\vec{\omega}$ tramite $\boldsymbol{I}_G$ risulta

$$\boldsymbol{I}_G\left(\vec{\omega}\right) = \boldsymbol{I}_G\left(\dot{\varphi}\,\vec{k}\right) = \dot{\varphi}\boldsymbol{I}_G\left(\vec{k}\right) \ . \tag{13.3.2}$$

Dunque, il momento angolare di $\mathcal{R}$ rispetto a G è, per la (12.1.6),

$$\vec{L}_G = \dot{\varphi}\,\boldsymbol{I}_G\left(\vec{k}\right) \ . \tag{13.3.3}$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica (12.2.2), grazie alla (13.3.2), essa diventa

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}M|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\,\vec{k} \cdot \boldsymbol{I}_G\left(\vec{k}\right) \\ &= \frac{1}{2}M|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\,I_{r(G)} \ , \end{aligned} \tag{13.3.4}$$

dove $r(G)$ denota l'asse passante per G e ortogonale al piano direttore. Se poi il rigido ha un punto fisso O, dalla (12.1.6) e (12.2.1) si ottiene

$$\vec{L}_O = \dot{\varphi}\,\boldsymbol{I}_O\left(\vec{k}\right) \qquad \text{e} \qquad K = \frac{1}{2}I_{r(O)}\,\dot{\varphi}^2 \ . \tag{13.3.5}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Lamine che si muovono nel loro piano

In particolare, se il rigido è piano (lamina), per le proprietà di simmetria materiale tutti gli assi paralleli a $\vec{k}$ sono assi principali d'inerzia. Pertanto, scelta una qualunque terna ortonormale $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, con $\vec{e}_3 \equiv \vec{k}$, la matrice d'inerzia $[\boldsymbol{I}_O]$ assume la forma (12.4.1). Dunque,

$$\vec{L}_G = J_{3G}\,\dot{\varphi}\,\vec{k}\ ,$$

dove $J_{3G} = I_{11} + I_{22}$ denota il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse $(G, \vec{k})$, mentre K si calcola sempre mediante la (13.3.4). Se poi la lamina ha un punto fisso O, le (13.3.5) si riducono a

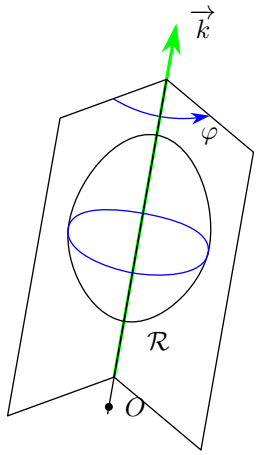
$$\vec{L}_O = \dot{\varphi}\,J_{3O}\,\vec{k} \qquad \text{e} \qquad K = \frac{1}{2} J_{3O}\,\dot{\varphi}^2\ ,$$

nel caso di una lamina che si muove di moto piano.

13.4 Rigido con asse fisso

Consideriamo un modello rigido $\mathcal{R}$ vincolato ad avere un asse solidale r fisso nello spazio. Sia $\vec{k}$ il versore parallelo all'asse. Abbiamo già studiato la cinematica di tale modello, detto anche *rotore* poichè si può muovere di solo moto rotatorio, che è un esempio di moto rigido piano. Dunque, introdotta come coordinata libera l'angolo (diedro) φ tra un piano fisso passante per l'asse e un altro piano per l'asse e solidale a $\mathcal{R}$, la sua velocià angolare assume la forma

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}(t)\vec{k}\ . \tag{13.4.1}$$



Per le ECD possiamo usare la rappresentazione (13.2.4) la quale, scelto il polo O sull'asse fisso, si riduce a

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{R}^{(est,reatt)} = & m\Big(\cancel{\vec{a}_O} + \ddot{\varphi}\,\vec{k} \times (G-O) + \dot{\varphi}^2\vec{k} \times \big(\vec{k} \times (G-O)\big)\Big) \\ \vec{M}_O^{(est,att)} + \vec{M}_O^{(est,reatt)} = & \ddot{\varphi}\boldsymbol{I}_O(\vec{k}) + \dot{\varphi}^2\vec{k} \times \boldsymbol{I}_O(\vec{k}) + (G-O) \times m\cancel{\vec{a}_O}. \qquad O \in r \end{cases} \tag{13.4.2}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

e l'equazione dell'energia cinetica, che si può scrivere come

$$\Pi^{(est,att)} + \Pi^{(est,reatt)} = \frac{dK}{dt} \ . \tag{13.4.3}$$

In genere, tali equazioni contengono la sollecitazione reattiva, in altre parole le 6 incognite scalari $(\vec{R}^{(est,reatt)}, \vec{M}_O^{(est,reatt)})$, oltre alla coordinata libera φ; tuttavia, come abbiamo dimostrato nella sezione precedente, sono dipendenti fra loro. Quindi, costituiscono un sistema di equazioni sottodeterminato, finchè non introduciamo qualche ipotesi sui vincoli. D'ora in poi supporremo che i vincoli siano *non dissipativi* e bilateri in modo che valga la seguente

Proposizione 13.4.1. *Sia $\mathcal{R}$ un rigido vincolato ad avere un asse fisso r. I vincoli che realizzano tale condizione sono non dissipativi e bilateri se e solo se il momento assiale lungo r delle reazioni vincolari è nullo*

$$M_r^{(est,reatt)} = \vec{M}_O^{(est,reatt)} \cdot \vec{k} = 0 \qquad\qquad O \in r \ . \tag{13.4.4}$$

Dimostrazione. Valutiamo il lavoro virtuale delle reazioni vincolari

$$LV^{(reatt)} = \vec{R}^{(est,reatt)} \cdot \cancel{\delta\vec{x}_O} + \vec{M}_O^{(est,reatt)} \cdot \vec{\epsilon} = \vec{M}_O^{(est,reatt)} \cdot \vec{k}\,\delta\varphi \qquad\qquad O \in r \ ,$$

essendo $\vec{\epsilon} = \vec{\omega}\delta\tau \overset{(13.4.1)}{=} \delta\varphi\,\vec{k}$. Dalla definizione di vincoli non dissipativi (5.10.1) segue la tesi. □

N.B. Le condizioni della proposizione precedente si realizzano, ad esempio, con una cerniera cilindrica in O, oppure con una cerniera sferica in O più un collare sottile fissato in un altro punto dell'asse, tutti vincoli supposti lisci.

Statica

Vogliamo scrivere un'equazione pura di equilibrio. A tale scopo, calcoliamo il lavoro virtuale delle forze attive

$$LV^{(att)} = Q_\varphi\,\delta\varphi = \vec{R}^{(est,att)} \cdot \cancel{\delta\vec{x}_O} + \vec{M}_O^{(est,att)} \cdot \vec{\epsilon} = \vec{M}_O^{(est,att)} \cdot \vec{k}\,\delta\varphi \qquad\qquad O \in r \ ,$$

da cui segue che il momento assiale lungo r coincide con la componente lagrangiana della sollecitazione attiva relativa alla coordinata libera φ

$$Q_\varphi = \vec{M}_O^{(est,att)} \cdot \vec{k} \ . \tag{13.4.5}$$

Quindi, l'equazione pura di equilibrio $Q_\varphi = 0$ è data da

$$M_r^{(est,att)}(\varphi) = 0 \ . \tag{13.4.6}$$

Esercizio 13.4.1. *Ricavare l'equazione pura di equilibrio* (13.4.6) *a partire dalle ECD* (13.4.2).

Studiamo, alcuni casi particolari della (13.4.6). Se la sollecitazione attiva esterna è un insieme di forze a risultante equivalente $\mathcal{S}^{(est)} \sim \{(P, \vec{F}_P)\}$, allora

$$\vec{M}_O^{(est,att)} = (P - O) \times \vec{F}_P \qquad\qquad O \in r$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

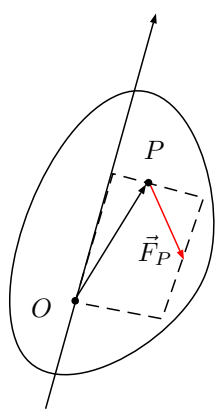
e l'equazione pura d'equilibrio (13.4.6) diventa

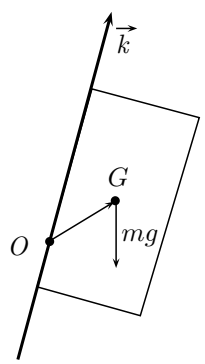
$$(P - O) \times \vec{F}_P \cdot \vec{k} = 0 \qquad O \in r \ . \tag{13.4.7}$$

In questo caso la condizione di equilibrio si può esprimere nella seguente

Proposizione 13.4.2. *Sia $\mathcal{R}$ un rigido con asse fisso, vincolato con vincoli non dissipativi e soggetto a un insieme di forze attive a risultante equivalente. Le configurazioni di equilibrio sono tutte e sole quelle in cui l'asse fisso e la retta di applicazione del risultante delle forze attive giacciono sullo stesso piano, quello per r e passante per P.*

Dimostrazione. La (13.4.7) equivale alla condizione che il vettore applicato $(P, \vec{F}_P)$ appartenga al piano passante per l'asse e il punto P. □



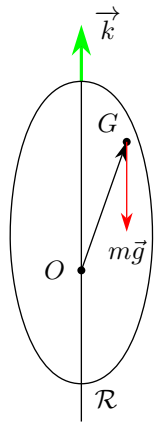


Esempio 13.4.1. *Consideriamo un rigido con asse fisso, soggetto soltanto al proprio peso. In tal caso, $P \equiv G$ e la retta di applicazione di $\vec{F}_P \equiv m\vec{g}$ è la verticale passante per G. Dunque, il rigido è in equilibrio in tutte e sole le configurazioni in cui il suo baricentro G appartiene al piano verticale passante per l'asse fisso (piano per l'asse e la verticale di un punto dell'asse).*

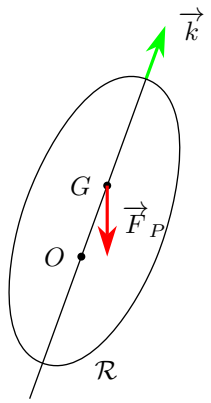
Nella tecnica, spesso si richiede che un rotore sia in equilibrio in qualunque configurazione, cioè per qualunque valore della coordinata libera φ. Illustriamo due situazioni in cui questo si verifica.

Esempio 13.4.2. *Un rotore, soggetto solo al proprio peso, è in equilibrio in ogni sua configurazione se l'asse di rotazione è verticale. Infatti, in tal caso, tutti i piani del fascio per r sono verticali. In modo equivalente, si può osservare che, in questo esempio, la* (13.4.7) *è soddisfatta per ogni φ poichè $\vec{F}_P \equiv m\vec{g}$ e $\vec{k}$ sono sempre paralleli.*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Definizione 13.4.1. *Un rotore si dice* bilanciato staticamente *se il suo centro di massa G (e quindi il suo baricentro) appartiene all'asse di rotazione.*



Esempio 13.4.3. *Un rotore soggetto solo al proprio peso, è in equilibrio in ogni sua configurazione se è bilanciato staticamentente. Infatti, la* (13.4.7) *è soddisfatta per ogni φ poichè i vettori $P - O \equiv G - O$ e $\vec{k}$ sono sempre paralleli.*

Dinamica

Una conseguenza della (13.4.4) è che la proiezione della seconda equazione cardinale lungo l'asse r risulta un'equazione *pura* di moto, così come l'equazione dell'energia. Scriviamo quest'ultima.

L'energia cinetica del rotore è data dalla (13.3.5) che qui riscriviamo

$$K = \frac{1}{2} I_r \dot{\varphi}^2 \ , \tag{13.4.8}$$

ricordiamo che $I_r = \vec{k} \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{k})$ denota il momento d'inerzia del rigido rispetto all'asse r. Tale momento d'inerzia non dipende dalla configurazione del rigido e quindi dal tempo, poichè l'asse r è solidale al rigido. La potenza delle forze esterne attive agenti sul rotore è data da

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

$$\pi^{(est,att)} = \vec{R}^{(est,att)} \cdot \cancel{\vec{v}_O} + \vec{M}_O^{(est,att)} \cdot \vec{\omega} = \vec{M}_O^{(est,att)} \cdot \dot{\varphi}\vec{k} = M_r^{(est,att)}\dot{\varphi} \ , \tag{13.4.9}$$

mentre quella delle forze esterne reattive è nulla, poichè

$$\pi^{(est,reatt)} = \vec{R}^{(est,reatt)} \cdot \cancel{\vec{v}_O} + \vec{M}_O^{(est,reatt)} \cdot \vec{\omega} = \vec{M}_O^{(est,reatt)} \cdot \dot{\varphi}\vec{k} \overset{(13.4.4)}{=} 0 \tag{13.4.10}$$

Dunque, l'equazione dell'energia (13.4.3) diventa

$$\dot{\varphi}\ddot{\varphi} I_r = M_r^{(est,att)}\dot{\varphi} \ . \tag{13.4.11}$$

Possiamo allora considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} & = \frac{M_r^{(est,att)}}{I_r} \\ \varphi(t_0) & = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(t_0) & = \omega_0 \end{cases} \qquad M_r^{(est,att)} = M_r(\varphi, \dot{\varphi}, t) \tag{13.4.12}$$

la cui soluzione è anche soluzione della (13.4.11). Integrando il sistema (13.4.12) si trova l'equazione finita di moto

$$\varphi(t) = f(t; \varphi_0, \omega_0) \tag{13.4.13}$$

relativa alle condizioni iniziali $\varphi(t_0) = \varphi_0$, $\omega(t_0) = \omega_0$. Una volta trovata la (13.4.13), possiamo determinare le reazioni vincolari sul rotore, risolvendo le ECD rispetto alle reazioni stesse. La I ECD (13.4.2) fornisce

$$\vec{R}^{(est,reatt)} = -\vec{R}^{(est,att)} + m\vec{a}_G = -\vec{R}^{(est,att)} + m\vec{k} \times \left(\ddot{\varphi}(G-O) + \dot{\varphi}^2 \vec{k} \times (G-O) \right) \ . \tag{13.4.14}$$

Osserviamo che, alla reazione $\vec{R}^{(est,reatt)}$ concorrono, sia le forze esterne attive con il vettore $\vec{R}^{(est,att)}$, sia le forze d'inerzia, cioè quelle dovute allo stato cinetico del rigido. Tuttavia è possibile rendere nullo tale contributo come è dimostrato dalla seguente

Proposizione 13.4.3. *Il vettore risultante delle reazioni vincolari su un rotore non dipende dallo stato cinetico del rigido se e solo se esso è bilanciato staticamente.*

Dimostrazione. Se G appartiene all'asse fisso, $\vec{a}_G = \vec{0}$, quindi la sufficienza.

Per la necessità, si osservi cheIl vettore $\vec{k} \times \ddot{\varphi}(G-O) + \vec{k} \times \left(\dot{\varphi}^2 \vec{k} \times (G-O) \right)$ è la somma di 2 vettori ortogonali tra loro. Quindi è nullo solo se i due vettori si annullano separatamente e in particolare solo se $\vec{k} \times (G-O) = \vec{0}$, da cui segue la tesi. □

Occupiamoci, ora, della II ECD (13.4.2). Tenendo conto del fatto che la componente del momento delle reazioni vincolari lungo l'asse di rotazione è nulla (13.4.4), essa implica

$$\vec{M}_O^{(est,reatt)} = \left(-\vec{M}_O^{(est,att)} + \ddot{\varphi}\boldsymbol{I}_O(\vec{k}) + \dot{\varphi}^2 \vec{k} \times \boldsymbol{I}_O(\vec{k}) \right)_{\perp} \ , \tag{13.4.15}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

dove il simbolo $\perp$ denota l'operatore di proiezione di un vettore qualsiasi su di un piano ortogonale a $\vec{k}$. Utilizzando la scomposizione (2.1.14) per il vettore $\ddot{\varphi}\,\boldsymbol{I}_O(\vec{k})$ si ottiene

$$\vec{M}_O^{(est,reatt)} = (-\vec{M}_O^{(est,att)})_\perp + \vec{k} \times \left(\ddot{\varphi}\boldsymbol{I}_O(\vec{k}) \times \vec{k}\right) + \dot{\varphi}^2\vec{k} \times \boldsymbol{I}_O(\vec{k}) \ , \tag{13.4.16}$$

poiché l'ultimo vettore appartiene già ad un piano ortogonale a $\vec{k}$. Anche in questo caso al momento risultante concorrono sia le forze esterne attive, sia le forze dovute allo stato cinetico del corpo. Tuttavia, questo ultimo contributo si annulla se l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia rispetto al punto O. Questa osservazione, motiva la seguente

Definizione 13.4.2. *Un rotore si dice* bilanciato dinamicamente *se l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia rispetto a qualche suo punto.*

Dunque, possiamo concludere che

Proposizione 13.4.4. *Il momento risultante delle reazioni vincolari su un rotore non dipende dallo stato cinetico del rigido se e solo se esso è bilanciato dinamicamente.*

Dimostrazione. Il contributo delle forze d'inerzia al momento risultante è dato da

$$\ddot{\varphi}\vec{k} \times \left(\boldsymbol{I}_O(\vec{k}) \times \vec{k}\right) + \dot{\varphi}^2\vec{k} \times \boldsymbol{I}_O(\vec{k}) \ ,$$

che è somma di due vettori ortogonali tra loro. Pertanto, tale contributo si annulla se e solo se si annullano separatamente i due vettori, cioè se e solo se

$$\vec{k} \times \boldsymbol{I}_O(\vec{k}) = \vec{0} \ ,$$

da cui segue la tesi. □

Definizione 13.4.3. *Un rotore si dice bilanciato sia* staticamente *sia* dinamicamente *se l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia* centrale.

N.B. Per l'osservatore Σ' solidale al rigido, osservatore che è in moto rotatorio con velocità angolare $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$, ovviamente il rigido è in quiete. Quindi sono soddisfatte le ECS, nelle quali vanno computate anche le forze d'inerzia di trascinamento. Allora, la condizione di bilanciamento statico e dinamico è interpretata da Σ' come l'annullarsi del risultante e del momento risultante delle forze d'*inerzia*, in particolare delle forze centrifughe e di quelle dovute alla sua accelerazione angolare rispetto a Σ.

13.5 Moti particolari di un rotore

Studiamo alcuni moti di uso comune nelle applicazioni.

Moto per inerzia

È caratterizzato dalla condizione che la sollecitazione attiva abbia momento assiale nullo

$$M_r^{(est,att)} = 0 \qquad \forall t \in I \ , \tag{13.5.1}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

equivalente alla condizione

$$\vec{M}_O^{(est,att)} = (\vec{M}_O^{(est,att)})_\perp \qquad \forall t \in I \ . \tag{13.5.2}$$

In tal caso, fissati i valori iniziali

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

dall' equazione (13.4.12) si ottiene subito un moto rotatorio uniforme

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t \ , \qquad \vec{\omega} = \omega_0 \vec{k} \tag{13.5.3}$$

e dalle (13.4.2) la sollecitazione reattiva

$$\vec{R}^{(est,reatt)} = -\vec{R}^{(est,att)} + m\,\omega_0^2\,\vec{k} \times \big(\vec{k} \times (G-O)\big) = -\vec{R}^{(est,att)} - m\,\omega_0^2 (G-O)_\perp \tag{13.5.4}$$

$$\vec{M}_O^{(est,reatt)} = -\vec{M}_O^{(est,att)} + \omega_0^2 \vec{k} \times \boldsymbol{I}_O(\vec{k}) \tag{13.5.5}$$

N.B. Persino quando la sollecitazione esterna attiva è equilibrata, la sollecitazione reattiva dei vincoli sull'asse del rotore può assumere valori molto grandi, proporzionali al quadrato della velocità angolare ω_0^2, se il rotore non è bilanciato staticamente e dinamicamente. Questo è il motivo per il quale si aggiungono o si tolgono delle masse in punti opportuni del rigido, come ad esempio si fa nella equilibratura dei cerchioni delle gomme di un auto da parte del gommista.

N.B. Se l'asse di rotazione non è bilanciato dinamicamente, perfino se $\vec{M}_O^{(est,att)}$ è nullo, il momento delle reazioni vincolari, scomposto su una qualsiasi terna solidale $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ è pari a

$$\vec{M}_O^{(est,reatt)} = \omega_0^2 \vec{k} \times \boldsymbol{I}_O(\vec{k}) = \omega_0^2 \vec{k} \times (I_{13}\vec{\imath} + I_{23}\vec{\jmath} + I_{33}\vec{k}) = \omega_0^2 (I_{13}\vec{\jmath} - I_{23}\vec{\imath}) \ .$$

Pertanto, ha due componenti ortogonali all'asse, proporzionali ai momenti deviatori. I componenti opposti, cioè i momenti che il rotore esercita sui vincoli, detti *cimenti vincolari*, tendono a deviare i vincoli stessi dall'asse fisso. Questo spiega il nome momenti *deviatori* per gli elementi fuori diagonale della matrice d'inerzia. Invece, il termine momenti *centrifughi* è dovuto alla descrizione dell'osservatore Σ' solidale al rigido, il quale interpreta l'opposto dell'ultimo termine della (13.5.5) come il momento risultante delle forze centrifughe.

Volano

È un rotore caratterizzato dal fatto che il momento assiale della sollecitazione attiva sia una funzione periodica del tempo

$$M_r^{(est,att)} = A \cos \gamma t \tag{13.5.6}$$

In tal caso, fissati i valori iniziali

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0 \ ,$$

sostituendo la (13.5.6) nell'equazione (13.4.12) e integrando successivamente rispetto al tempo, si ottiene

$$\dot{\varphi} = \frac{A}{\gamma I_r} \sin \gamma t + \omega_0$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

e

$$\varphi(t) = \frac{A}{\gamma^2 I_r}(1 - \cos\gamma t) + \omega_0 t + \varphi_0 \ . \tag{13.5.7}$$

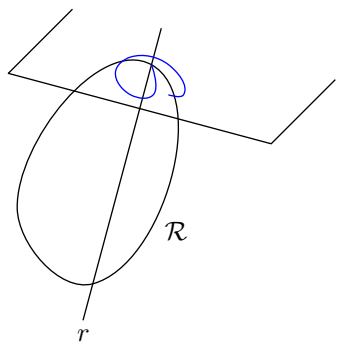
Si osservi che la velocità angolare scalare non è costante ma è pari alla somma di una costante più un termine sinuisodale di periodo $T = \frac{2\pi}{\gamma}$, con una *irregolarità* di funzionamento espressa dal rapporto

$$\frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{medio}} = \frac{2\,A}{\gamma I_r\,\omega_0} \ . \tag{13.5.8}$$

Una volta che si è fissata l'ampiezza A e la pulsazione γ del momento assiale, si può ridurre il grado di irregolarità aumentando il prodotto $I_r\omega_0$. Se non si può aumentare la velocità angolare iniziale ω_0, è necessario avere grandi momenti d'inerzia I_r come, appunto, nei volani costituiti da massicce ruote la cui massa è quanto più possibile, lontana dall'asse di rotazione.

Bilanciere

È un rotore soggetto all'azione di una molla a spirale che tende a riportarlo nella posizione di



equilibrio.

Se φ è la coordinata libera misurata a partire dalla posizione di equilibrio, il momento assiale della molla è dato da

$$M_r^{(est,att)} = -c\varphi \ , \tag{13.5.9}$$

dove c è la rigidezza della molla. Dall'eq. (13.4.12) si deduce

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{I_r}\varphi = 0 \ ,$$

che ammette l'integrale generale

$$\varphi(t) = A\cos(\sqrt{\frac{c}{I_r}}t + \alpha) \ .$$

Quindi, il moto rotatorio è armonico con oscillazioni isocrone di periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_r}{c}}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

per qualunque valore dell'ampiezza A. Questa proprietà giustifica l'impiego dei bilancieri nella costruzione degli orologi meccanici: essi sono piccoli anelli rigidi montati su un perno fisso e sollecitati come in (13.5.9).

13.6 Rigido con punto fisso

In questa sezione studieremo alcuni moti di un corpo rigido vincolato ad avere un suo punto O fisso nello spazio $\mathcal{E}_3$. Ricordiamo che tale vincolo, realizzato ad esempio con una cerniera sferica fissa o con una sospensione cardanica, impedisce al rigido 3 spostamenti virtuali indipendenti (gli spostamenti di O); quindi è un vincolo triplo. Pertanto, il modello ha 3 gradi di libertà e, quindi, 3 coordinate libere, ad esempio i tre angoli di Eulero di una terna solidale al rigido. Quindi, il moto sarà descritto dalla terna di funzioni $\big(\varphi(t), \theta(t), \psi(t)\big)$.

Inoltre, poichè O è fisso, l'invariante scalare cinematico è nullo, $I = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} = 0$, quindi il campo delle velocità è di tipo rotatorio. Dunque, l'asse di Mozzi diventa asse d'istantanea rotazione per O. Scegliendo O come centro di riduzione, le ECD si scrivono

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{R}^{(est,reatt)} = & m\Big(\dot{\vec{\omega}} \times (G-O) + \vec{\omega} \times \big(\vec{\omega} \times (G-O)\big)\Big) \\ \vec{M}_O^{(est,att)} + \vec{M}_O^{(est,reatt)} = & \boldsymbol{I}_O(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \boldsymbol{I}_O(\vec{\omega}) \end{cases} \tag{13.6.1}$$

mentre l'equazione dell' energia cinetica si scrive

$$\Pi^{(est,att)} + \Pi^{(est,reatt)} = \frac{dK}{dt} \ . \tag{13.6.2}$$

Tali equazioni contengono, come incognite, 3 coordinate libere del rigido (ad esempio i 3 angoli di Eulero) e le 6 componenti della sollecitazione reattiva $(\vec{\phi}, \vec{\mu}_0)$. Quindi il sistema è sotto-determinato in mancanza di ulteriori ipotesi sui vincoli. Allora, analizziamo il caso in cui il vincolo sia non dissipativo.

Proposizione 13.6.1. *Il vincolo di punto fisso su un rigido è non dissipativo e bilatero se e solo se il momento risultante delle reazioni vincolari rispetto al punto fisso è nullo*

$$\vec{M}_O^{(est,reatt)} = \vec{0} \ . \tag{13.6.3}$$

Dimostrazione. Il lavoro virtuale delle reazioni vincolari risulta

$$LV^{(reatt)} = \vec{R}^{(est,reatt)} \cdot \cancel{\delta\vec{x}_O} + \vec{M}_O^{(est,reatt)} \cdot \vec{\epsilon} \qquad \forall \vec{\epsilon} \in E_3 \ .$$

Poichè, in questo caso, $\vec{\epsilon} = \vec{\omega}\delta\tau$ è un arbitrario vettore di E_3, dalla definizione di vincoli non dissipativi e bilateri (5.10.1) segue la tesi. □

Da ora in poi supporremo che il vincolo sia non dissipativo e bilatero. La conseguenza è che la seconda delle (13.6.1) si riduce ad un'equazione *pura* di moto,

$$\vec{M}_O^{(est,att)} = \boldsymbol{I}_O(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \boldsymbol{I}_O(\vec{\omega}) \ , \tag{13.6.4}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

mentre la prima, una volta determinato il moto del rigido, fornisce il risultante delle reazioni vincolari $\vec{R}^{(est,reatt)}$

$$\vec{R}^{(est,reatt)} = -\vec{R}^{(est,att)} + m\Big(\dot{\vec{\omega}} \times (G-O) + \vec{\omega} \times \big(\vec{\omega} \times (G-O)\big)\Big) \ .$$

Inoltre, anche l'equazione (13.6.2) dell'energia cinetica, che si calcola come

$$K = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \boldsymbol{I}_O(\vec{\omega}) \ , \tag{13.6.5}$$

si riduce ad un'equazione pura di moto poichè il suo primo termine risulta

$$\Pi^{(est,att)} = \vec{R}^{(est,att)}) \cdot \cancel{\vec{v}_O} + \vec{M}_O^{(est,att)} \cdot \vec{\omega} = \vec{M}_O^{(est,att)} \cdot \vec{\omega} \tag{13.6.6}$$

$$\Pi^{(est,reatt)} = \vec{R}^{(est,reatt)} \cdot \cancel{\vec{v}_O} + \cancel{\vec{M}_O^{(est,reatt)}} \cdot \vec{\omega} = 0 \ . \tag{13.6.7}$$

Per rappresentare le componenti della II ECD (13.6.4), conviene scegliere una terna *solidale* al rigido (base mobile), in modo che gli elementi della corrispondente matrice d'inerzia non dipendano dal tempo. Tale terna, sarà individuata ad ogni istante dagli angoli di Eulero $\big(\varphi(t), \theta(t), \psi(t)\big)$ misurati rispetto alla terna fissa. In particolare, conviene scegliere una TPI(O), in modo che la matrice d'inerzia sia diagonale. Allora, detta $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la TPI(O) fissata, siano

$$\vec{\omega} = p\vec{\imath} + q\vec{\jmath} + r\vec{k} \tag{13.6.8}$$

e

$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix} \tag{13.6.9}$$

la velocità angolare e la matrice d'inerzia rispettivamente. Dunque, il momento angolare risulta

$$\vec{L}_O = \mathcal{A}p\vec{\imath} + \mathcal{B}q\vec{\jmath} + \mathcal{C}r\vec{k} \ . \tag{13.6.10}$$

Allora, proiettando la (13.6.4) sulla TPI(O), si ottengono le equazioni di Eulero del corpo rigido con punto fisso liscio

$$\begin{cases} \mathcal{A}\dot{p} - (\mathcal{B}-\mathcal{C})qr = & \vec{M}_O \cdot \vec{\imath} \\ \mathcal{B}\dot{q} - (\mathcal{C}-\mathcal{A})rp = & \vec{M}_O \cdot \vec{\jmath} \\ \mathcal{C}\dot{r} - (\mathcal{A}-\mathcal{B})pq = & \vec{M}_O \cdot \vec{k} \end{cases} \tag{13.6.11}$$

Tale sistema è un sistema di EDO del I ordine nelle incognite $\big(p(t), q(t), r(t)\big)$, cioè le componenti della velocità angolare sulla TPI(O). Comunque, i secondi termini delle (13.6.11) dipendono anche dagli angoli di Eulero della TPI(O) (che sono incogniti), poichè il momento della sollecitazione attiva, in generale, è una funzione delle coordinate libere, delle sue derivate rispetto al tempo e del tempo

$$\vec{M}_O^{(est,att)} = \vec{M}_O(\varphi, \theta, \psi; \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}; t) \ . \tag{13.6.12}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Pertanto, il sistema delle equazioni di Eulero (13.6.11) deve essere completato con le equazioni (4.6.4)

$$\begin{cases} p = & \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\psi\sin\theta \\ q = & -\dot\theta\sin\psi + \dot\varphi\sin\theta\cos\psi \\ r = & \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta \quad , \end{cases} \tag{13.6.13}$$

che definiscono le componenti (4.6.4) di $\vec\omega$ rispetto alla TPI(O) e che sono lineari nelle derivate degli angoli di Eulero. Tale sistema si può risolvere rispetto a $(\dot\varphi, \dot\theta, \dot\psi)$ e fornisce

$$\begin{bmatrix} \dot\varphi \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{bmatrix} = [B]^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad , \tag{13.6.14}$$

dove la matrice $[B]$, data da

$$[B] = \begin{bmatrix} \sin\psi\sin\theta & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \qquad \det([B]) = -\sin\theta \ ,$$

è invertibile per $\theta \neq 0, \pi$. Allora, sostituite le (13.6.14) nella (13.6.12), le equazioni (13.6.11) insieme con le (13.6.14) forniscono un sistema di 6 EDO del primo ordine in forma *normale* nelle 6 incognite $\big(\varphi(t), \theta(t), \psi(t); p(t), q(t), r(t)\big)$.

$$\begin{cases} \dot\varphi & = \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\, p + \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\, q \\ \dot\theta & = \cos\psi\, p - \sin\psi\, q \\ \dot\psi & = -\cot\theta(\sin\psi\, p + \cos\psi\, q) + r \\ \dot p & = \frac{\mathcal{B}-\mathcal{C}}{\mathcal{A}}\, q\, r + \frac{\vec M_O\cdot\vec\imath}{\mathcal{A}} \\ \dot q & = \frac{\mathcal{C}-\mathcal{A}}{\mathcal{B}}\, r\, p + \frac{\vec M_O\cdot\vec\jmath}{\mathcal{B}} \\ \dot r & = \frac{\mathcal{A}-\mathcal{B}}{\mathcal{C}}\, p\, q + \frac{\vec M_O\cdot\vec k}{\mathcal{C}} \end{cases} \tag{13.6.15}$$

Pertanto, fissate le condizioni iniziali, sotto ipotesi di regolarità della sollecitazione esterna, il problema di Cauchy relativo ammette una e una sola soluzione. In alcuni casi, le 6 equazioni precedenti si disaccoppiano, cioè il sistema delle equazioni di Eulero (13.6.11) si può risolvere prima di risolvere le (13.6.14). Per esempio, questo succede se il momento della sollecitazione attiva è uniforme, come vedremo più avanti per gli effetti giroscopici, oppure quando dipende solo dalle componenti della velocità angolare

$$\vec M_O^{(est,att)} = \vec M_O(p, q, r; t) \ , \tag{13.6.16}$$

come accade per una resistenza viscosa del mezzo:

$$\vec M_O^{(est,att)} = -c\,\vec\omega \qquad\qquad c > 0 \ .$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

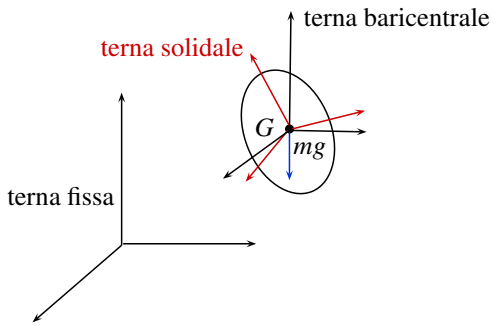


Figura 13.6.1: Rigido in caduta libera

13.6.1 Moto per inerzia

Un altro caso rilevante in cui i sistemi (13.6.11) e (13.6.14) si disaccoppiano è quello in cui il momento della sollecitazione attiva rispetto al punto O si annulla.

Definizione 13.6.1. *Diremo moto* per inerzia *quello di un corpo rigido con punto fisso O in cui*

$$\vec{M}_O^{(est,att)} = \vec{0} \tag{13.6.17}$$

In tal caso, le equazioni (13.6.11) *si dicono equazioni di Eulero-Poinsot. Scritte in forma normale rispetto alle incognite* $(p(t), q(t), r(t))$ *si riducono a*

$$\begin{cases} \dot{p} = & \frac{\mathcal{B}-\mathcal{C}}{\mathcal{A}}\, q\, r \\ \dot{q} = & \frac{\mathcal{C}-\mathcal{A}}{\mathcal{B}}\, r\, p \\ \dot{r} = & \frac{\mathcal{A}-\mathcal{B}}{\mathcal{C}}\, p\, q \end{cases} \tag{13.6.18}$$

Il caso del moto per inerzia si realizza, ad esempio, in due casi di grande rilevanza.

1. Nel moto di un corpo rigido soggetto solo al peso proprio e fissato nel baricentro G.
2. Nel moto di un rigido in caduta libera. In tal caso, il moto del rigido si disaccoppia nel moto *del* baricentro e nel moto *attorno* al baricentro. Infatti, la I ECD fornisce $\vec{a}_G = \vec{g}$, quindi il baricentro si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione $\vec{g}$. Allora, rimane da studiare il moto del rigido (o di una terna ad esso solidale) rispetto all'osservatore *baricentrale* dell'esempio (11.4.1), cioè l'osservatore traslante con origine in G. Per tale osservatore, il rigido ha G come punto fisso e vale la II ECD nella forma (11.4.12). Inoltre, $\vec{M}_G^{(est,eff)} = \vec{0}$, dato che le forze peso sono equivalenti al loro risultante applicato in G. Dunque, il moto del rigido attorno al baricentro è un moto con punto fisso per inerzia, quindi è governato dalle equazioni di Eulero-Poinsot (13.6.18)

Introduciamo, ora un concetto che ha molta importanza in questo caso e negli sviluppi ulteriori della Meccanica e si basa sul concetto di invariante dinamico.

Definizione 13.6.2. *Diremo* integrale primo del moto *una grandezza scalare o vettoriale che, pur dipendendo dalla configurazione e dal campo delle velocità del modello, rimane* invariato *durante un moto del modello.*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Nel caso del moto per inerzia, possiamo facilmente dimostrare la seguente

Proposizione 13.6.2. *Un corpo rigido con punto fisso che si muove per inerzia possiede gli integrali di moto del momento angolare e dell'energia cinetica.*

$$\vec{L}_O(t) = \vec{L}_O(t_0) \qquad K(t) = K(t_0) \qquad \forall t \in I \tag{13.6.19}$$

Dimostrazione. L'integrale del momento angolare è una immediata conseguenza della II ECD (13.6.1). L'integrale dell'energia cinetica segue dalla (13.6.2) tenendo conto che, nel moto per inerzia, la potenza della sollecitazione attiva è nulla per la (13.6.6). □

Rotazioni Permanenti

Si potrebbe ingenuamente pensare che, qualunque moto per inerzia di un rigido con punto fisso sia, come nel caso del corpo rigido con asse fisso, una rotazione uniforme. Invece, il seguente teorema mostra che ciò accade solamente sotto particolari condizioni iniziali.

Teorema 13.6.1 (delle rotazioni permanenti)**.** *Il moto per inerzia di un corpo rigido con punto fisso è un moto rotatorio uniforme (o permanente) se e solo se avviene intorno a un asse principale d'inerzia per O.*

Dimostrazione. Mostriamo prima la sufficienza. Supponiamo che, inizialmente, il rigido abbia la velocità angolare diretta come un API(O). Se chiamiamo tale asse $\big(O, \vec{k}(t)\big)$, la velocità angolare iniziale sarà $\vec{\omega}(t_0) = r_0\vec{k}(t_0)$ e la velocità angolare durante il moto sarà sempre $\vec{\omega}(t) = r_0\vec{k}(t)$ in quanto unica soluzione del problema di Cauchy relativo al sistema (13.6.18) con condizioni iniziali

$$p(t_0) = 0 \ , \qquad q(t_0) = 0 \ , \qquad r(t_0) = r_0$$

Inoltre, il vettore $\vec{k}(t)$, che è fisso nel corpo, sarà fisso anche nello spazio poichè

$$\dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k} = r_0\, \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \qquad \forall t \in I$$

Pertanto, il moto è una rotazione permanente.

Viceversa, supponiamo che il moto sia rotatorio intorno ad un asse $(O, \vec{u})$ fisso nello spazio e dimostriamo che esso è un API(O). Se $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{u}$, dalla conservazione del momento angolare segue che

$$\vec{0} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \boldsymbol{I}_O(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \boldsymbol{I}_O(\vec{\omega}) = \dot{\omega}\boldsymbol{I}_O(\vec{u}) + \omega^2\vec{u} \times \boldsymbol{I}_O(\vec{u}) \ .$$

Osservando che i due vettori $\dot{\omega}\boldsymbol{I}_O(\vec{u})$ e $\omega^2\vec{u} \times \boldsymbol{I}_O(\vec{u})$ sono ortogonali tra loro, otteniamo immediatamente che si annullano entrambi, quindi $\dot{\omega} = 0$ (uniformità della precessione) e $\vec{u} \times \boldsymbol{I}_O(\vec{u}) = 0$, quindi $\vec{u}$ è parallelo ad un API(O).

□

Dal teorema percedente segue immediatamente che se tutti gli assi passanti per il punto fisso sono API(O), allora tutti i moti sono rotazioni permanenti.

Corollario 13.6.1. *Se l'ellissoide d'inerzia del rigido rispetto al punto fisso O è una sfera, allora il moto per inerzia è una rotazione uniforme per qualunque condizione iniziale.*

Esempio 13.6.1. *Cubo omogeneo pesante fissato nel baricentro.*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

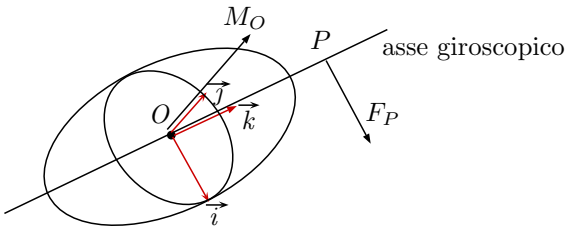


Figura 13.6.2: Giroscopio

Precessioni uniformi

Vediamo cosa succede se la struttura materiale del rigido è più generale di quella sferica, cioè se è *giroscopica*, come nella figura 13.6.2.

Definizione 13.6.3. *Si dice che un rigido ha struttura giroscopica rispetto a un punto O se l'EI(O) è di rotazione rispetto a un asse solidale passante per O. Tale asse si dice asse giroscopico o asse di figura; il piano per O e ortogonale all'asse giroscopico si dice piano equatoriale.*

Si dice giroscopio un rigido che ha struttura giroscopica intorno al suo centro di massa.

Proposizione 13.6.3. *Tutti i moti per inerzia di un rigido con punto fisso O e avente struttura giroscopica rispetto a O, sono precessioni uniformi (se la velocità angolare giroscopica è diversa da zero) intorno alla direzione del momento angolare $\vec{L}_O$, con asse di rotazione propria coincidente con l'asse giroscopico.*

Dimostrazione. Detto $\big(O, \vec{k}(t)\big)$ l'asse giroscopico, dalla III equazione di Eulero-Poinsot segue che la componente della velocità angolare lungo l'asse giroscopico si mantiene costante durante un moto generico

$$r(t) = r(t_0) = r_0 \qquad \forall t \in I \ . \tag{13.6.20}$$

Inoltre, il momento angolare $\vec{L}_O$ si può scrivere

$$\vec{L}_O = \mathcal{A}p\vec{\imath} + \mathcal{B}q\vec{\jmath} + \mathcal{C}r\vec{k} = \mathcal{A}(p\vec{\imath} + q\vec{\jmath}) + \mathcal{C}r_0\vec{k} = \mathcal{A}\vec{\omega} + (\mathcal{C} - \mathcal{A})r_0\vec{k} \tag{13.6.21}$$

e quindi la velocità angolare come

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}_O}{\mathcal{A}} + \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{C})}{\mathcal{A}} r_0\vec{k} \tag{13.6.22}$$

Osserviamo che il termine

$$\vec{\omega}_{pr} := \frac{\vec{L}_O}{\mathcal{A}}$$

è costante nello spazio poichè $\vec{L}_O$ è integrale primo di moto, mentre il termine

$$\vec{\omega}_{rot} := \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{C})}{\mathcal{A}} r_0\vec{k}(t)$$

è costante nel corpo. Allora, $\vec{\omega}_{pr}$ è la velocità di precessione e $\vec{\omega}_{rot}$ la velocità di rotazione propria. Quindi, dalla equazione (4.8.6) segue la tesi. □

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Torniamo, ora, alle equazioni di Eulero-Poinsot

$$\begin{cases} \dot{p} = & \frac{\mathcal{A}-\mathcal{C}}{\mathcal{A}}\, r_0\, q \\ \dot{q} = & \frac{\mathcal{C}-\mathcal{A}}{\mathcal{A}}\, r_0\, p \\ r(t) = & r_0 \end{cases} \tag{13.6.23}$$

Introducendo la costante $\gamma = -\vec{\omega}_{rot} \cdot \vec{k} = \frac{\mathcal{C}-\mathcal{A}}{\mathcal{A}}\, r_0$, le prime due equazioni si possono scrivere come un sistema lineare del I ordine a coefficienti costanti.

$$\begin{cases} \dot{p} = & -\gamma\, q \\ \dot{q} = & \gamma\, p \end{cases} \tag{13.6.24}$$

L'integrale generale del sistema (13.6.24) si può ricavare, ad esempio, disacoppiando le due equazioni differenziali. Infatti, derivando la prima rispetto al tempo ed eliminando $\dot{q}$ per mezzo della seconda, si ottiene la conseguenza differenziale

$$\ddot{p} + \gamma^2 p = 0 \ ,$$

cioè l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico. Dunque, la soluzione generale $p(t)$ si può scrivere

$$p(t) = a\cos(|\gamma|t + \delta) \ , \qquad a, \delta \in \mathbb{R} \ . \tag{13.6.25}$$

Sostituendo la derivata rispetto al tempo della (13.6.25) nella prima delle (13.6.24) si ottiene l'integrale generale per $q(t)$

$$q(t) = a\frac{\gamma}{|\gamma|}\sin(|\gamma|t + \delta) \ . \tag{13.6.26}$$

In conclusione, il componente equatoriale della velocità angolare, cioè $\vec{\omega}_{eq} = p\vec{\imath} + q\vec{\jmath}$, risulta

$$\vec{\omega}_{eq}(t) = \Big(a\cos(|\gamma|t + \delta)\Big)\vec{\imath}(t) + a\frac{\gamma}{|\gamma|}\sin\big(|\gamma|t + \delta\big)\vec{\jmath}(t) \ . \tag{13.6.27}$$

Dunque, il vettore $\vec{\omega}_{eq}$ ruota nel piano equatoriale e la sua punta descrive la circonferenza di centro O della Fig 13.6.3, con un periodo $\frac{2\pi}{|\gamma|}$. L'ampiezza e la fase del moto periodico dipendono dalle condizioni iniziali all'istante $t_0 = 0$ tramite

$$a = \sqrt{p_0^2 + q_0^2} \ , \qquad \tan\delta = \frac{\gamma}{|\gamma|}\frac{q_0}{p_0} \ . \tag{13.6.28}$$

Nella figura 13.6.4 è evidenziato il cono mobile di Poinsot.

Moto generale

Studiamo ora il caso più generale di un rigido con una struttura materiale generica.

Teorema 13.6.2 (di Poinsot)**.** *I moti per inerzia di un rigido con punto fisso O e con l'EI(O) triassiale, avvengono in modo tale che l'EI(O) rotola senza strisciare su di un piano fisso nello spazio, detto piano direttore, ortogonale alla direzione del momento angolare. Il luogo geometrico dei punti di contatto sul piano direttore (ris. sull'EI(O)) è una curva che si dice poloide fissa (ris. mobile). Vedi la Fig. 13.6.5.*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

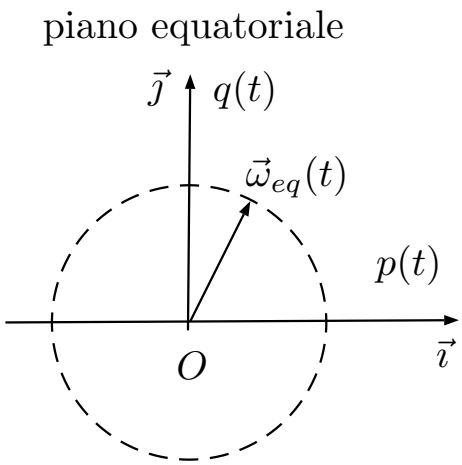


Figura 13.6.3: Componente equatoriale della velocità angolare

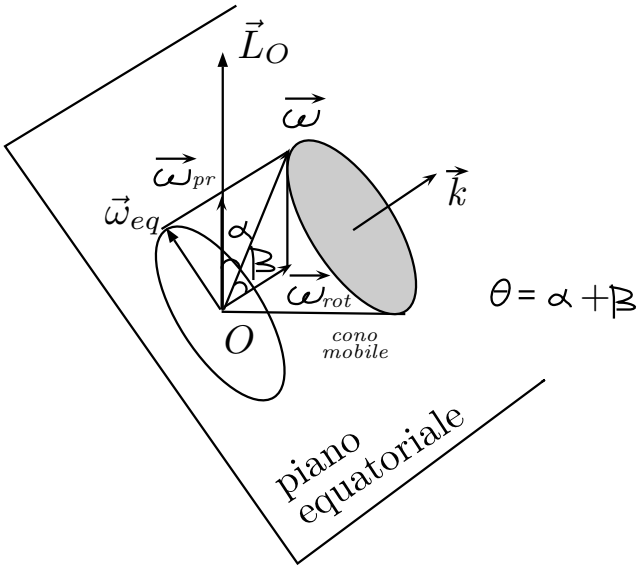


Figura 13.6.4: Cono mobile di Poinsot

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

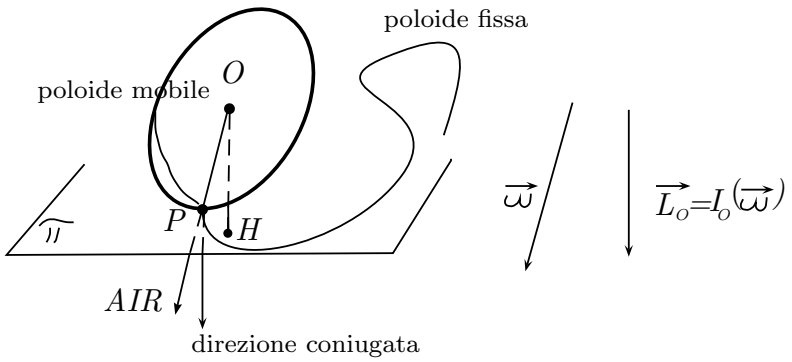


Figura 13.6.5: Moto alla Poinsot

Dimostrazione. È di tipo geometrico e si basa su un elegante utilizzo dei due integrali di moto $\vec{L}_O$ e K. Procediamo in tre passi. Prima dimostriamo che: (i) il piano direttore ha giacitura costante; (ii) che anche la sua distanza dal punto fisso O è costante; (iii) che il moto dell'EI(O) è di puro rotolamento sul piano direttore.

(i) Il piano direttore è il piano $\pi(t)$ tangente all'EI(O) nel punto d'intersezione P dell'AIR(O), con l'EI(O) stesso. Per la costruzione del Teo. di Poinsot 12.5.1, tale piano è sempre ortogonale alla direzione di $\vec{L}_O = \boldsymbol{I}_O(\vec{\omega})$, cioè alla direzione coniugata a quella di $\vec{\omega}(t)$, che è parallelo all'AIR(O). Poiché in questo caso $\vec{L}_O$ è fisso nello spazio, $\pi(t)$ ha giacitura costante. Inoltre, per l'equazione dei semi-diametri (12.5.2), la distanza di P dal punto fisso O è data da

$$\overline{OP} = \frac{1}{\sqrt{I_{r(P)}}} = \frac{|\vec{\omega}|}{\sqrt{|\vec{\omega}|^2 I_{r(P)}}} \overset{(13.6.5)}{=} \frac{|\vec{\omega}|}{\sqrt{2K}}\ , \tag{13.6.29}$$

da cui segue

$$\vec{\omega} = \sqrt{2K}(P - O) \tag{13.6.30}$$

(ii) Per il punto 3 nella costruzione di Poinsot della Teo. 12.5.1, la distanza del piano $\pi(t)$ dal punto fisso O è pari a

$$d\big(O, \pi(t)\big) = \overline{OH} = \frac{|\vec{\omega}|}{\overline{OP}|\boldsymbol{I}_O(\vec{\omega})|} \overset{(13.6.29)}{=} \frac{\sqrt{2K}}{|\boldsymbol{I}_O(\vec{\omega})|} = \frac{\sqrt{2K}}{|\vec{L}_O|} = \textit{indipendente dal tempo}$$

(iii) Il punto di contatto P fra l'EI(O) e il piano direttore appartiene all'AIR(O), quindi è un punto del solido con velocità istantanea nulla, cioè soddisfa il vincolo di puro rotolamento.

□

Possiamo riguardare le rotazioni e le precessioni uniformi come casi particolari dei moti alla Poinsot.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

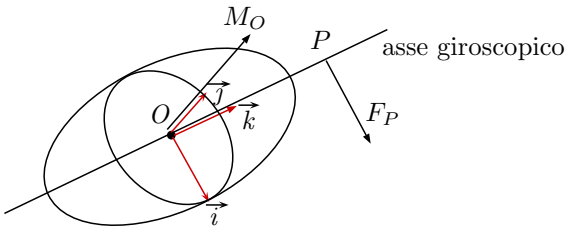


Figura 13.6.6: Effetti giroscopici

Corollario 13.6.2. *Un moto alla Poinsot è una rotazione permanente se solo se l'EI(O) ruota intorno a un suo asse di simmetria. In questo caso, la poloide fissa e quella mobile degenerano in un punto, uno dei vertici dell'EI(O).*

Dimostrazione. Se il moto è rotatorio, l'AIR(O) diventa asse di rotazione e i suoi punti rimangono fissi nello spazio. Pertanto il punto di contatto P con il piano direttore è fisso, quindi deve essere un vertice dell'EI(O) (che deve rimanere tangente al piano senza "spaccarlo") e la direzione coniugata coincide con quella dell'asse stesso. Inoltre, la rotazione è uniforme poichè $|\vec{\omega}| = \sqrt{2K}|P - O|$ per la (13.6.30) e $|P - O|$ è la lunghezza di un semi-asse di simmetria dell'EI(O).

Il viceversa è ovvio. □

Corollario 13.6.3. *Se l'EI(O) è rotondo intorno ad un asse, le due poloidi sono circonferenze.*

Dimostrazione. Nell' ipotesi suddetta, il rigido ha struttura giroscopica e quindi, per la Prop. 13.6.3, il moto è una precessione uniforme. Allora, basta osservare che la lunghezza del semidiametro OP, cioè la distanza tra il punto di contatto P con il piano direttore e il punto fisso O, è costante per la (13.6.29) e per il fatto che nel moto di precessione uniforme $|\vec{\omega}|$ è costante. Quindi P descrive una circonferenza sull'EI(O). Inoltre, è costante anche $\overline{HP} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2}$, cioè la distanza dei punti della poloide fissa dal punto H. Quindi, anche la poloide fissa è una circonferenza con centro in H. □

13.6.2 Effetti giroscopici elementari

In questa sezione studieremo il moto di un corpo a struttura giroscopica, che si muove non più per inerzia, come nella Prop. 13.6.3, bensì sotto l'azione a una forza perturbatrice $(P, \vec{F})$ applicata ad un punto P dell'asse giroscopico $(O, \vec{k}(t))$. In tal caso si ha

$$\vec{M}_O^{(est,att)} \cdot \vec{k} = (P - O) \times \vec{F}_P \cdot \vec{k} = 0 \tag{13.6.31}$$

Supponiamo, senza perdita di generalità, che la forza $\vec{F}_P$ sia ortogonale all'asse giroscopico e chiamiamo $\vec{\imath}$ il suo versore e sia $\vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{\imath}$. Grazie alla struttura giroscopica, la terna $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ è una TPI(O). Su tale terna, il momento rispetto ad O della sollecitazione attiva risulta

$$\vec{M}_O^{(est,att)} = (P - O) \times F\vec{\imath} = \big((P - O) \cdot \vec{k}\big)\, \vec{k} \times F\vec{\imath} = \big((P - O) \cdot \vec{k}\big)\, F\vec{\jmath} = M_O\, \vec{\jmath}(t) \tag{13.6.32}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Pertanto, tenendo conto che grazie alla struttura giroscopica $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, le equazioni di Eulero (13.6.11) si scrivono

$$\begin{cases} \mathcal{A}\dot{p} - (\mathcal{A} - \mathcal{C})qr = & 0 \\ \mathcal{A}\dot{q} - (\mathcal{C} - \mathcal{A})rp = & M_O \\ \mathcal{C}\dot{r} = 0 \end{cases} \tag{13.6.33}$$

e il moto dell'asse giroscopico è governato dall'equazione di Poisson

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = (\vec{\omega}_{eq} + r\vec{k}) \times \vec{k} = \vec{\omega}_{eq} \times \vec{k} = q\vec{\imath} - p\vec{\jmath}\,. \tag{13.6.34}$$

La III delle (13.6.33) ha come soluzione $r(t) = r(t_0) = r_0$, mentre le prime due si riducono, posto $\gamma := \frac{\mathcal{C}-\mathcal{A}}{\mathcal{A}} r_0$, a

$$\begin{cases} \dot{p} = & -\gamma q \\ \dot{q} = & \gamma p + \frac{M_O}{\mathcal{A}} \end{cases} \tag{13.6.35}$$

Discutiamo i due casi $r_0 = 0$ e $r_0 \neq 0$.

- Se $r_0 = 0$, allora $\gamma = 0$ e l'integrale generale di (13.6.35) è

  $$\vec{\omega}_{eq}(t) = p_0\vec{\imath}(t) + \big(q_0 + \frac{M_0}{\mathcal{A}}t\big)\vec{\jmath}(t)\ . \tag{13.6.36}$$

  In particolare, se la velocità angolare iniziale è nulla, cioè $p_0 = q_0 = 0$, l'equazione per l'asse giroscopico (13.6.34) diventa

  $$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{M_0}{\mathcal{A}} t\ \vec{\imath}(t)\ ; \tag{13.6.37}$$

  ciò implica che la deviazione dell'asse avviene nella stessa direzione della forza e la sua intensità è non limitata nel tempo.

- Se $r_0 \neq 0$, allora $\gamma \neq 0$ e si può immediatamente verificare che una soluzione particolare è data da

  $$p(t) = -\frac{M_0}{\gamma\mathcal{A}}\ , \qquad q(t) = 0\ . \tag{13.6.38}$$

  L'integrale generale del sistema omogeneo associato a (13.6.35) coincide con le (13.6.25),(13.6.26). Aggiungendovi la soluzione particolare (13.6.38) si ottiene

  $$p(t) \quad = a\cos(|\gamma|t + \delta) - \tfrac{M_0}{\gamma\mathcal{A}} \tag{13.6.39}$$

  $$q(t) \quad = a\tfrac{\gamma}{|\gamma|}\sin(|\gamma|t + \delta) \tag{13.6.40}$$

  In conclusione, la componente equatoriale della velocità angolare sarà

  $$\vec{\omega}_{eq}(t) = \left(a\cos(|\gamma|t + \delta) - \frac{M_0}{\gamma\mathcal{A}}\right)\vec{\imath}(t) + a\frac{\gamma}{|\gamma|}\sin\big(|\gamma|t + \delta\big)\vec{\jmath}(t)\ . \tag{13.6.41}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

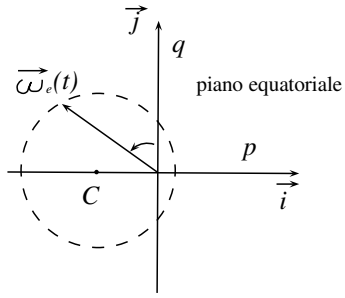


Figura 13.6.7: Componente equatoriale della velocità angolare

Dunque, il vettore $\vec{\omega}_{eq}$ ruota nel piano equatoriale con periodo $\frac{2\pi}{|\gamma|}$ e la sua punta descrive sempre una circonferenza come nel caso per inerzia, ma, questa volta, con il centro spostato lungo l'asse $\vec{\imath}$ nel punto $C = (-\frac{M_O}{\gamma\mathcal{A}}, 0)$. Si veda la figura 13.6.7. Inoltre, questa volta, l'ampiezza e la fase del moto periodico dipendono dalle condizioni iniziali all'istante $t_0 = 0$ tramite

$$a = \sqrt{\left(p_0 + \frac{M_O}{\gamma\mathcal{A}}\right)^2 + q_0^2}\ , \qquad \tan\delta = \frac{\gamma}{|\gamma|}\frac{q_0}{\left(p_0 + \frac{M_O}{\gamma\mathcal{A}}\right)}\ . \tag{13.6.42}$$

13.6.3 Tendenza al parallelismo

Calcoliamo il valor medio su un periodo del derivato di $\vec{k}(t)$. Dalle (13.6.34) e (13.6.41) segue che

$$\overline{\frac{d\vec{k}}{dt}} = \overline{q(t)\vec{\imath}(t) - p(t)\vec{\jmath}(t)} = \overline{q(t)}\vec{\imath}(t) - \overline{p(t)}\vec{\jmath}(t) = \frac{M_0}{\gamma\mathcal{A}}\vec{\jmath}(t)\ . \tag{13.6.43}$$

Pertanto, questa volta, la deviazione media dell'asse giroscopico avviene nella direzione del *momento* della forza. Questo fenomeno è detto *tendenza al parallelismo*.

13.6.4 Tenacia dell'asse giroscopico

Valutiamo, ora, l'intensità della deviazione. Dalla (13.6.43) è immediato concludere che

$$\left|\overline{\frac{d\vec{k}}{dt}}\right| = \left|\frac{M_0}{\gamma\mathcal{A}}\right| = \left|\frac{M_0}{(\mathcal{C}-\mathcal{A})r_0}\right|\ , \tag{13.6.44}$$

cioè il modulo della deviazione media è inversamente proporzionale alla velocità angolare giroscopica. Verifichiamo che una legge analoga vale anche per il massimo di

$$\left|\frac{d\vec{k}}{dt}\right| \overset{(13.6.34)}{=} |\vec{\omega}_{eq}(t)|\ . \tag{13.6.45}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Per semplicità, supponiamo che la velocità angolare iniziale sia soltanto giroscopica, cioè $p_0 = q_0 = 0$. Allora, tenendo conto delle (13.6.41) e (13.6.42), si ottiene la soluzione particolare

$$\vec{\omega}_{eq}(t) = \frac{M_0}{\gamma\mathcal{A}}\left(\big(\cos(|\gamma|t) - 1\big)\vec{\imath}(t) + \frac{\gamma}{|\gamma|}\sin(|\gamma|t)\vec{\jmath}(t)\right) , \tag{13.6.46}$$

il cui modulo quadro è

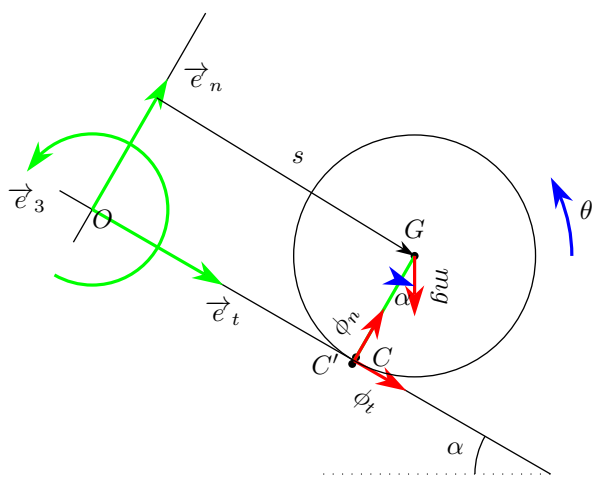
$$|\vec{\omega}_{eq}(t)|^2 = \left(\frac{M_0}{|\gamma|\mathcal{A}}\right)^2\left(\Big(\cos(|\gamma|t) - 1\Big)^2 + \left(\frac{\gamma}{|\gamma|}\right)^2\sin^2(|\gamma|t)\right) = 2\left(\frac{M_0}{\gamma\mathcal{A}}\right)^2(1 - \cos(|\gamma|t)) \tag{13.6.47}$$

Allora,

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d\vec{k}}{dt}\right| = 2\frac{|M_0|}{|\gamma|\mathcal{A}} = 2\frac{|M_0|}{|(\mathcal{C} - \mathcal{A})r_0|} .$$

Pertanto, possiamo concludere che anche il massimo di $\left|\frac{d\vec{k}}{dt}\right|$ è limitato ed è inversamente proporzionale alla velocità angolare giroscopica iniziale. Questo fenomeno si dice *tenacia dell'asse giroscopico* e spiega l'uso dei giroscopi come stabilizzatori.

13.7 Disco appoggiato su una guida fissa



Nella Sez. 4.9.2 abbiamo discusso la cinematica di un disco di raggio R appoggiato su una guida rettilinea e abbiamo ricavato che la velocità e l'accelerazione del punto di contatto C sono

$$\vec{v}_C = (\dot{s} + R\dot{\theta})\vec{e}_t \tag{13.7.1}$$

$$\vec{a}_C = (\ddot{s} + R\ddot{\theta})\vec{e}_t + R\dot{\theta}^2\vec{e}_n . \tag{13.7.2}$$

Ora studiamo la dinamica dello stesso disco, supposto omogeneo e soggetto solo al peso proprio. Inoltre, supponiamo che la guida sia scabra e che le reazioni vincolari del vincolo di appoggio siano

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

equivalenti a un'unica forza applicata nel punto di contatto C

$$\mathcal{S}^{(est,reatt)} \sim \{(C, \vec{\phi}^{(reatt)})\} \ . \tag{13.7.3}$$

Tenuto conto che il problema è piano, possiamo affermare che la reazione esterna $\vec{\phi}_C^{(reatt)}$ avrà in generale due componenti:

$$\vec{\phi}_C^{(reatt)} = \phi_t \vec{e}_t + \phi_n \vec{e}_n \ ,$$

la componente normale ϕ_n è la reazione d'appoggio, mentre la componente tangente ϕ_t è detta *attrito radente* e si annulla se la guida è liscia. Denotiamo con

$$\begin{cases} f_s & \text{coefficiente di attrito radente statico ,} \\ f_d & \text{coefficiente di attrito radente dinamico} \end{cases} \tag{13.7.4}$$

e ricordiamo che valgono le relazioni di Coulomb

$$|\phi_t| \leq f_s |\phi_n| \quad \text{se } \vec{v}_C = \vec{0} \tag{13.7.5}$$

$$\vec{\phi}_t = -f_d \, |\phi_n| \, \text{vers}(\vec{v}_C) \quad \text{se } \vec{v}_C \neq \vec{0}. \tag{13.7.6}$$

Per studiare il moto di rotolamento generico dobbiamo usare le ECD

$$\begin{cases} \vec{R}^{(att)} + \vec{R}_C^{(reatt)} & = m\vec{a}_G \\ \vec{M}_G^{(att)} + \vec{M}_G^{(reatt)} & = \frac{d\vec{L}_G}{dt} \end{cases} \tag{13.7.7}$$

Poichè

$$\begin{aligned} \vec{R}^{(att)} &= m\vec{g} = mg(\sin\alpha \, \vec{e}_t - \cos\alpha \, \vec{e}_n) \\ \vec{R}^{(reatt)} &= \vec{\Phi}_C^{(reatt)} = \phi_t \vec{e}_t + \phi_n \vec{e}_n \\ \vec{M}_G^{(att)} &= \vec{0} \\ \vec{M}_G^{(reatt)} &= (C - G) \times \vec{\phi}_C = (-R\vec{e}_n) \times (\phi_t \vec{e}_t + \phi_n \vec{e}_n) = R\phi_t \vec{e}_3 \end{aligned}$$

e

$$\vec{a}_G = \ddot{s} \, \vec{e}_t \ , \qquad \vec{L}_G = \boldsymbol{I}_G(\vec{\omega}) = \boldsymbol{I}_G(\dot{\theta}\vec{e}_3) = \dot{\theta}\boldsymbol{I}_G(\vec{e}_3) = J_{3G}\dot{\theta}\vec{e}_3 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta} \vec{e}_3 \ ,$$

le ECD, proiettate sui versori $(\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_3)$ diventano

$$\begin{cases} mg\sin\alpha + \phi_t & = m\ddot{s} \\ -mg\cos\alpha + \phi_n & = 0 \\ R\phi_t = \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta} \ . \end{cases} \tag{13.7.8}$$

Ognuna di tali equazioni contiene le reazioni vincolari tuttavia, sostituendo la terza nella prima otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} \ddot{s} - \frac{R}{2}\ddot{\theta} = & g\sin\alpha \\ \phi_n = & mg\cos\alpha \\ \phi_t = & \frac{1}{2} m R \ddot{\theta} \ , \end{cases} \tag{13.7.9}$$

nel quale, la prima equazione è un'equazione pura di moto. Si osservi che il sistema suddetto è un sistema di 3 equazioni nelle 4 incognite $(s, \theta, \phi_t, \phi_n)$, quindi è sotto-determinato. Dunque, se la guida è scabra, ad esso bisogna aggiungere una delle relazioni di Coulomb (13.7.5) o (13.7.6).

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Guida liscia

Prima di esaminare il sistema completo, analizziamo, come caso particolare, la situazione in cui la guida è liscia. Sotto questa ipotesi, sopravvive solo la componente di reazione vincolare ortogonale alla guida, pertanto

$$\begin{array}{rcl} \phi_t &=& 0 \\ \ddot{\theta} &=& 0 \\ \ddot{s} &=& g\sin\alpha \\ \phi_n &=& mg\cos\alpha \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rl} \theta(t) = & \omega_0 t + \theta_0 \\ s(t) = & \frac{1}{2}(g\sin\alpha)t^2 + v_0 t + s_0 \\ \phi_n = & mg\cos\alpha \\ \phi_t = & 0\ . \end{array}$$

Il moto del disco è composto da un moto rotatorio *uniforme* $\theta(t)$ e un moto traslatorio $s(t)$, uniformemente accelerato se $\alpha \neq 0$, uniforme se $\alpha = 0$.

Guida scabra

Torniamo al caso della guida scabra e analizziamo prima il caso del *puro* rotolamento.

Rotolamento puro

In questo caso, il disco ha 1 grado di libertà poiché

$$s = -R\theta + s_0\ .$$

Pertanto, le (13.7.9) unite alla precedente equazione di vincolo equivalgono a

$$\begin{cases} s = & -R\theta + s_0 \\ \frac{3}{2}R\ddot{\theta} = & -g\sin\alpha \\ \phi_n = & mg\cos\alpha \\ \phi_t = & \frac{1}{2}mR\ddot{\theta}\ , \end{cases} \tag{13.7.10}$$

ed ammettono, come integrale generale,

$$\begin{aligned} \theta(t) &= -\frac{1}{3}(\frac{g}{R}\sin\alpha)t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ s(t) &= \frac{1}{3}(g\sin\alpha)t^2 - R(\omega_0 t + \theta_0) \qquad (s_0 = 0) \\ \phi_n &= mg\cos\alpha \\ \phi_t &= -\frac{1}{3}mg\sin\alpha\ . \end{aligned} \tag{13.7.11}$$

Tali soluzioni devono essere compatibili con la relazione di Coulomb statica e quindi richiedono che sia soddisfatta la condizione necessaria (ma non sufficiente) alla realizzazione del vincolo di puro rotolamento, contenuta nella seguente

Proposizione 13.7.1. *Il moto di puro rotolamento del disco è possibile solo se*

$$\tan\alpha \leq 3f_s\ . \tag{13.7.12}$$

Tale condizione sulla guida è detta di piccola inclinazione.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Dimostrazione. Se il disco rotola senza strisciare valgono le (13.7.11). Inoltre, deve essere soddisfatta la relazione di Coulomb statica (13.7.5). Quindi, deve risultare

$$\left|-\frac{1}{3}mg\sin\alpha\right| \leq f_s|mg\cos\alpha| \ ,$$

che, per $0 \leq \alpha < \pi/2$, equivale alla (13.7.12). □

Rotolamento non puro

In tal caso $\vec{v}_c \neq \vec{0}$, quindi vale la relazione di Coulomb dinamica (13.7.6) che si può scrivere scalarmente come

$$\phi_t = -f_d|\phi_n|\mathrm{vers}(\vec{v}_C)\cdot\vec{e}_t = -f_d|\phi_n|\mathrm{signum}(v_C) \ , \tag{13.7.13}$$

dove $v_c := \vec{v}_C \cdot \vec{e}_t$ e la funzione *signum* è la funzione costante a tratti definita da

$$\mathrm{signum}(v_C) = \begin{cases} +1 & \text{se } v_C > 0, \\ 0 & \text{se } v_C = 0, \\ -1 & \text{se } v_C < 0. \end{cases} \tag{13.7.14}$$

Aggiungendo la (13.7.13) al sistema (13.7.9), si ottiene

$$\begin{cases} \ddot{s} - \frac{R}{2}\ddot{\theta} = & g\sin\alpha \\ \phi_t = & \frac{1}{2}mR\ddot{\theta} \\ \phi_n = & mg\cos\alpha \\ \phi_t = & -f_d|\phi_n|\mathrm{signum}(v_C). \end{cases} \tag{13.7.15}$$

Mediante successive sostituzioni, le equazioni di tale sistema si possono disaccoppiare, in modo da ottenere il sistema equivalente

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = & -\frac{2}{R}f_d\, g\cos\alpha\ \mathrm{signum}(v_C) \\ \ddot{s} = & g(\sin\alpha - f_d\cos\alpha\ \mathrm{signum}(v_C)) \\ \phi_n = & mg\cos\alpha \\ \phi_t = & -f_d\, mg\cos\alpha\ \mathrm{signum}(v_C) \ , \end{cases} \tag{13.7.16}$$

che fornisce le reazioni vincolari e, dopo un integrazione diretta, le equazioni finite di moto

$$\begin{aligned} \theta(t) = & \quad -\tfrac{f_d}{R}(g\cos\alpha\,\mathrm{signum}(v_C))t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ s(t) = & \ \tfrac{1}{2}g\big(\sin\alpha - f_d\cos\alpha\,\mathrm{signum}(v_C)\big)t^2 + v_0 t + s_0 \ . \end{aligned} \tag{13.7.17}$$

Derivando rispetto al tempo le due equazioni precedenti e tenendo conto della (13.7.1), si ottiene la velocità del punto di contatto

$$\vec{v}_C(t) = \Big(g\big(\sin\alpha - 3f_d\cos\alpha\,\mathrm{signum}(v_C)\big)t + v_0 + R\omega_0\Big)\vec{e}_t \ . \tag{13.7.18}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Grande inclinazione

Se la condizione di piccola inclinazione (13.7.12) è violata non si può avere puro rotolamento e valgono sempre le (13.7.17). Supponiamo, ad esempio, di fissare le condizioni iniziali (v_0, ω_0) in modo che il disco parta con $v_C(0) = v_0 + R\omega_0 > 0$. In tal caso, finché $v_C > 0$ si ha

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{2}{R}(f_d\, g \cos\alpha)t + \omega_0 \tag{13.7.19}$$

$$\dot{s}(t) = g\big(\sin\alpha - f_d \cos\alpha\big)t + v_0 \tag{13.7.20}$$

$$v_C(t) = g\big(\sin\alpha - 3f_d \cos\alpha\big)t + v_0 + R\omega_0 \tag{13.7.21}$$

$$\vec{a}_C(t) \cdot \vec{e}_t = g\big(\sin\alpha - 3f_d \cos\alpha\big)\ . \tag{13.7.22}$$

È immediato verificare che, grazie alla condizione di grande inclinazione, la componente tangenziale dell'accelerazione di C (13.7.22) è positiva. Ciò implica che $v_C(t) > 0\, \forall t > 0$. Pertanto, con le condizioni iniziali suddette, se il disco parte lanciato con una velocità di strisciamento v_C diretta verso il basso, tale velocità cresce linearmente nel tempo, come nella Fig. 13.7.1

Guida orizzontale

Se la guida è orizzontale, la condizione di piccola inclinazione è banalmente soddisfatta, pertanto è possibile la fase di puro rotolamento ma anche quella di rotolamento non puro, cioè un moto multi-fase nell'intervallo d'osservazione $[t_0, +\infty[$. Le equazioni di moto (13.7.17) della fase di rotolamento non puro, si riducono a

$$\theta(t) = -f_d \frac{g}{R}\, \mathrm{signum}(v_C)t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \tag{13.7.23}$$

$$s(t) = -\frac{1}{2} f_d g\, \mathrm{signum}(v_C)t^2 + v_0 t + s_0\ , \tag{13.7.24}$$

con

$$v_C(t) = -3g f_d\, \mathrm{signum}(v_C)t + v_0 + R\omega_0 \tag{13.7.25}$$

$$\vec{a}_C(t) \cdot \vec{e}_t = -3g f_d\, \mathrm{signum}(v_C)\ . \tag{13.7.26}$$

È ovvio che, se il disco è inizialmente in quiete, ivi rimane. Invece, se le condizioni iniziali sono tali che $v_C(0) > 0$, nell'intervallo $[0, t_1[$ in cui

$$\mathrm{signum}(v_C) = \mathrm{signum}(v_C(0)) = 1$$

la velocità di strisciamento è data da

$$v_C(t) = -3g f_d\, t + v_0 + R\omega_0 \tag{13.7.27}$$

con il seguente grafico

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

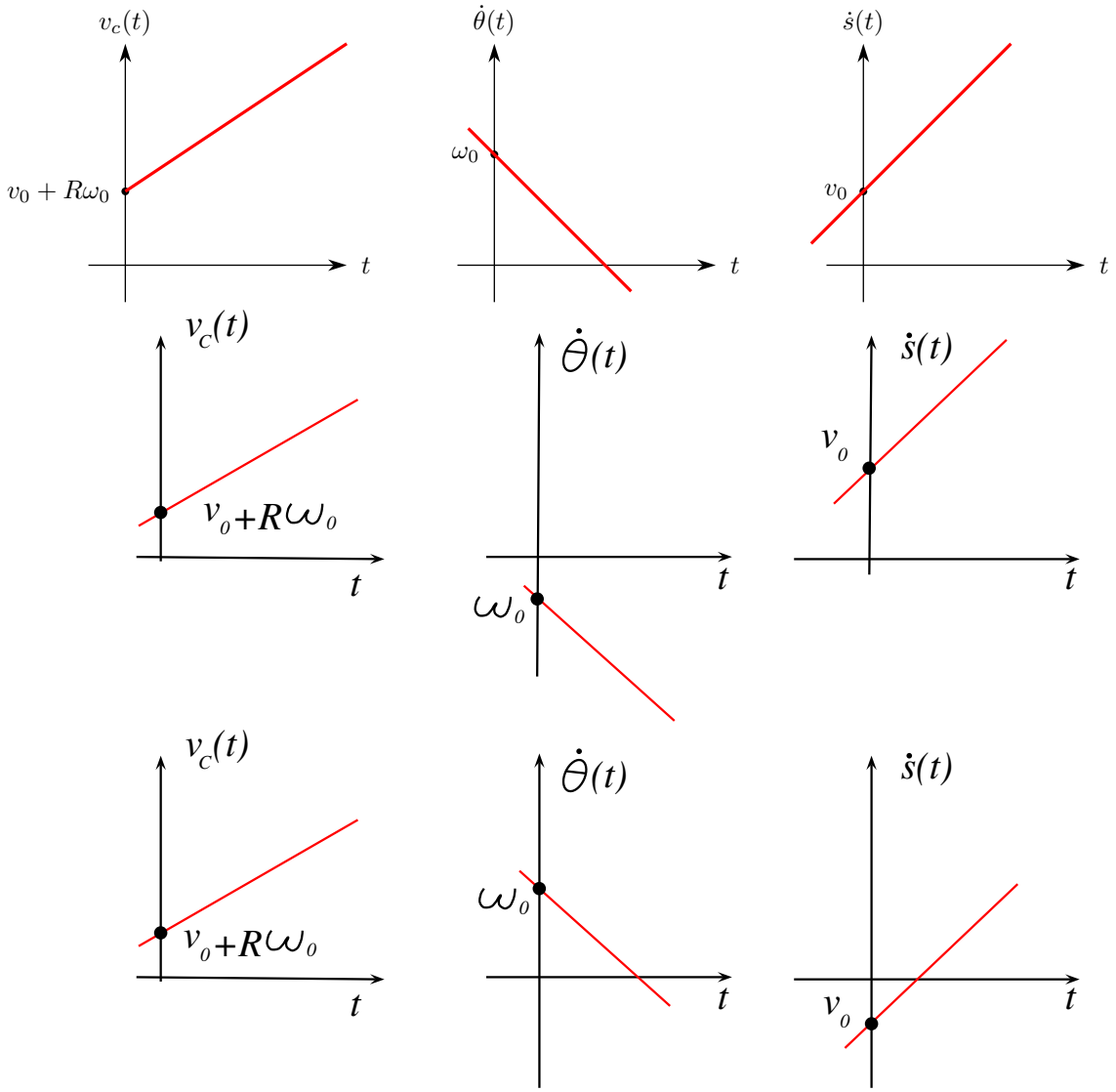
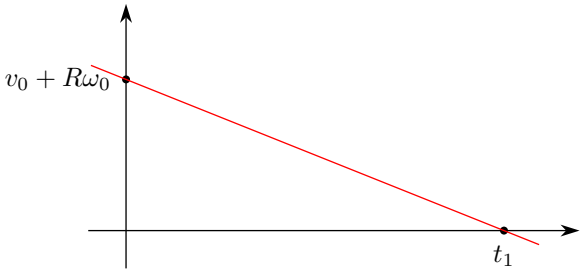


Figura 13.7.1: Disco su guida di grande inclinazione, con velocità iniziale di strisciamento positiva.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Quindi, all'istante

$$t_1 = \frac{v_0 + R\omega_0}{3gf_d}$$

la velocità di strisciamento si annulla, mentre

$$\dot{\theta}(t_1) = \frac{1}{3}(-2\frac{v_0}{R} + \omega_0) \tag{13.7.28}$$

$$\dot{s}(t_1) = \frac{1}{3}(2v_0 - R\omega_0) \ . \tag{13.7.29}$$

Allora, possono verificarsi due casi:

a) se $v_0 = \frac{1}{2}R\omega_0$, allora

$$\dot{\theta}(t_1) = 0 \ , \qquad \dot{s}(t_1) = 0 \ .$$

Il disco, dopo la prima fase di rotolamento con slittamento o strisciamento, si arresta definitivamente all'istante $t = t_1$.

b) se $v_0 \neq \frac{1}{2}R\omega_0$, allora

$$\dot{\theta}(t_1) \neq 0 \ , \qquad \dot{s}(t_1) \neq 0 \ .$$

Il disco, dopo la prima fase di rotolamento non puro, inizia all'istante t_1 una fase di puro rotolamento, durante la quale le equazioni differenziali di moto (13.7.10) forniscono

$$\begin{aligned} \theta(t) =& \omega_1(t - t_1) + \theta_1 & \omega_1 := \dot{\theta}(t_1) \ , \quad \theta_1 = \theta(t_1) \\ s(t) =& -R\omega_1(t - t_1) + s_1 & s_1 := s(t_1) \\ \phi_n =& mg \\ \phi_t =& 0 \quad , \end{aligned} \tag{13.7.30}$$

cioè quelle di un moto roto-traslatorio uniforme. Tale fase prosegue $\forall t \in [t_1, +\infty[$. Infatti, se per assurdo ricominciasse il rotolamento non puro ad un istante $t_2 \in]t_1, +\infty[$, negli istanti immediatamente successivi a t_1 la velocità di strisciamento sarebbe non nulla, quindi la componente tangenziale dell'accelerazione del punto di contatto C all'istante t_1 dovrebbe essere concorde a tale velocità

$$\text{signum}(\vec{a}_C(t_1) \cdot \vec{e}_t) = \text{signum}(v_C) \tag{13.7.31}$$

Tuttavia, la (13.7.26), implica che $\vec{a}_C(t) \cdot \vec{e}_t$, durante la fase di rotolamento non puro, deve essere di segno opposto alla velocità di strisciamento, da cui la contraddizione.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Pertanto, nell'ipotesi b), il disco, pur in presenza dell'attrito che è necessario per rendere possibile il puro rotolamento, continuerebbe il suo moto roto-traslatorio uniforme per tutti i tempi, contrariamente all'evidenza sperimentale!

L'apparente paradosso del punto b) si elimina considerando, al posto della (13.7.3), la riduzione più generale delle reazioni vincolari

$$\mathcal{S}^{(est,reatt)} \sim \{(C, \vec{\phi}^{(est,reatt)}), \vec{\Gamma}\} \ ,$$

dove $\vec{\Gamma} = \Gamma\, \vec{e}_3$ è una coppia reattiva detta *attrito di rotolamento*, che soddisfa le relazioni di Coulomb seguenti

$$|\Gamma| \leq h_s |\phi_n| \quad \text{se } \vec{\omega} = \vec{0} \tag{13.7.32}$$

$$\vec{\Gamma} = -h_d\, |\phi_n|\, \mathrm{vers}(\vec{\omega}) \quad \text{se } \vec{\omega} \neq \vec{0} \ . \tag{13.7.33}$$

I parametri h_s e h_d sono, rispettivamente, i coefficienti d'attrito di rotolamento, statico e dinamico, e hanno le dimensioni di una lunghezza.

In questo caso, le ECD per il disco assumono la forma

$$\begin{cases} \phi_t & = m\ddot{s} \\ -mg + \phi_n & = 0 \\ R\phi_t + \Gamma & = \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta} \ . \end{cases} \tag{13.7.34}$$

Supponiamo, ora, che il disco all'istante t_1 sia in moto di puro rotolamento, come al suddetto punto b). Allora, le (13.7.34) si scrivono

$$\begin{cases} \phi_t & = -mR\ddot{\theta} \\ \phi_n & = mg \\ \Gamma & = \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\theta} \ , \end{cases} \tag{13.7.35}$$

e, tenendo conto della (13.7.33), diventano

$$\begin{cases} \ddot{\theta} & = -\frac{2}{3}\frac{h_d}{R}\frac{g}{R}\, \mathrm{signum}(\dot{\theta}) \\ \phi_t & = \frac{2}{3}\frac{h_d}{R} mg\, \mathrm{signum}(\dot{\theta}) \\ \phi_n & = mg \end{cases} \tag{13.7.36}$$

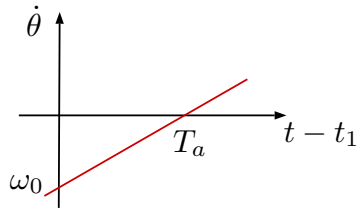
Integrando la prima delle (13.7.36), troviamo che, dall'istante t_1, il moto del disco è un moto roto-traslatorio uniformemente decelerato

$$\begin{aligned} \theta(t) =& -\frac{1}{3}\frac{h_d}{R}\frac{g}{R}\mathrm{signum}(\dot{\theta})(t-t_1)^2 + \omega_1(t-t_1) + \theta_1 \\ s(t) =& \frac{1}{3}\frac{h_d}{R} g\, \mathrm{signum}(\dot{\theta})(t-t_1)^2 - \omega_1 R(t-t_1) + s_1 \end{aligned}$$

con un intervallo d'arresto pari a

$$T_a = t_a - t_1 = \frac{3}{2}\frac{R^2}{h_d\, g}|\omega_1| = \frac{3}{2}\frac{R}{h_d\, g}|v_1| \ , \qquad v_1 = v_G(t_1) = -\omega_1 R \ , \tag{13.7.37}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



$$Se \qquad \text{signum}(\dot\theta) = -1$$

$$\dot\theta = \frac{2}{3}\frac{h_d}{R}\frac{g}{R}(t-t_1)+\omega_1 \ .$$

La frenata perfetta

Studiamo ora il moto di un disco su una guida orizzontale, il quale, partendo da un moto di puro rotolamento all'istante t_1, venga frenato da una coppia di momento $\vec{M} = M\vec{e}_3$. In tal caso, le ECD diventano

$$\begin{cases} \phi_t & = -mR\ddot\theta \\ \phi_n & = mg \\ M + \Gamma & = \frac{3}{2}mR^2\ddot\theta \ , \end{cases} \tag{13.7.38}$$

e, tenendo conto della (13.7.33),

$$\begin{cases} \ddot\theta & = \frac{2}{3mR^2}\big(M - h_d\, mg\, \text{signum}(\dot\theta)\big) \\ \phi_t & = -\frac{2}{3R}\big(M - h_d\, mg\, \text{signum}(\dot\theta)\big) \\ \phi_n & = mg \end{cases} \tag{13.7.39}$$

Durante il puro rotolamento, la reazione vincolare deve soddisfare la relazione di Coulomb (13.7.5), quindi

$$\frac{2}{3R}\big|M - h_d\, mg\, \text{signum}(\dot\theta)\big| \le f_s mg \ . \tag{13.7.40}$$

Per fissare le idee, supponiamo che $\dot\theta < 0$, quindi il momento frenante deve essere $M > 0$. Allora, la (13.7.40) equivale a

$$M \le \left(\frac{3}{2}f_s - \frac{h_d}{R}\right) mgR \ , \tag{13.7.41}$$

cioè il momento frenante non deve superare il valore $M_{max} = \left(\frac{3}{2}f_s - \frac{h_d}{R}\right) mgR$, se non si vuole che il disco incominci a strisciare. Per tale valore *massimo*, le (13.7.42) risultano

$$\begin{cases} \ddot\theta & = f_s\frac{g}{R} \\ \phi_t & = -f_s mg \\ \phi_n & = mg \ , \end{cases} \tag{13.7.42}$$

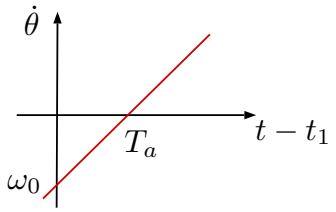
quindi, il disco si muove di moto uniformemente ritardato

$$\begin{aligned} \theta(t) =& \frac{1}{2}f_s\frac{g}{R}(t-t_1)^2 + \omega_1(t-t_1) + \theta_1 \qquad\qquad \omega_1 < 0 \\ s(t) =& -\left(\frac{1}{2}f_s g(t-t_1)^2 + \omega_1 R(t-t_1)\right) + s_1 \ , \end{aligned}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

In questo caso, l'intervallo di arresto risulta

$$T_a = t_a - t_1 = \frac{|\omega_1| R}{f_s\, g} = \frac{|v_1|}{f_s\, g} \qquad v_1 = v_G(t_1) = -\omega_1 R\ . \tag{13.7.43}$$



$$\dot\theta = f_s \frac{g}{R}(t - t_1) + \omega_1\ .$$

Si potrebbe pensare che un ulteriore aumento del momento frenante, eventualmente non limitato, pur provocando lo strisciamento del disco, potrebbe ridurre l'intervallo d'arresto. Ma non è così. Infatti, in caso di strisciamento (con velocità $v_c > 0$), bisogna sostituire la (13.7.5) con la (13.7.6) e tenere conto della (13.7.33). Allora, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \phi_t & = m\ddot s \\ \phi_n & = mg \\ R\phi_t + M + \Gamma & = \frac{1}{2} m R^2 \ddot\theta \\ \phi_t & = -f_d\, |\phi_n| \\ \Gamma & = -h_d\, |\phi_n|\, \mathrm{signum}(\dot\theta)\ . \end{cases} \tag{13.7.44}$$

dal quale possiamo ricavare le due equazioni pure di moto

$$\begin{cases} \ddot s = -f_d g \\ \ddot\theta = \frac{2}{mR^2}\big(M + mg(h_d - f_d R)\big)\ . \end{cases} \tag{13.7.45}$$

Quindi, entrambe le coordinate libere (s, θ) evolvono in modo uniformemente ritardato

$$\begin{aligned} s(t) &= -\frac{1}{2} f_d\, g (t - t_1)^2 + v_1(t - t_1) + s_1 \\ \theta(t) &= \frac{1}{mR^2}\big(M + mg(h_d - f_d R)\big)(t - t_1)^2 + \omega_1(t - t_1) + \theta_1 \qquad \omega_1 < 0\ . \end{aligned}$$

Allora, con ragionamento analogo al caso precedente, si calcola che l'intervallo d'arresto diventa

$$T_a = t_a - t_1 = \frac{|v_1|}{f_d\, g}\ ,$$

che supera l'intervallo (13.7.43), poichè $f_d < f_s$.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Capitolo 14

Equazioni di Lagrange

In questo capitolo ricaveremo il sistema delle equazioni di Lagrange (EL), un sistema di tante equazioni di moto *pure* (non contenenti le reazioni vincolari) quanti sono i gradi di libertà di un modello olonomo con vincoli non dissipativi e bilateri. Sebbene valgano in un ambito più ristretto di quello in cui valgono le equazioni Cardinali, per il fatto di non contenere le reazioni vincolari (che sono parzialmente incognite) presentano notevoli vantaggi rispetto a queste, soprattutto nello studio dei modelli articolati.

14.1 Equazioni di Lagrange non conservative

Nel Cap. 11 abbiamo visto come, utilizzando il principio di D'Alembert e le Equazioni Cardinali della Statica si ottengono le Equazioni Cardinali della Dinamica per un qualunque modello meccanico. Vedremo ora come, utilizzando il principio di D'Alembert e il PLV, si ottengono le equazioni di Lagrange (EL) per i sistemi olonomi con vincoli *non dissipativi* e *bilateri*. Dalla Statica, sappiamo che, se i vincoli sono non dissipativi e indipendenti dal tempo, le configurazioni di equilibrio sono tutte e sole le configurazione in cui il LV delle forze attive è non positivo

$$\text{PLV:} \qquad \sum_{B\in\mathcal{B}} \vec{F}_B^{(att)} \cdot \delta\vec{x_B} \leq 0 \qquad \forall\ \delta\mathcal{P} = (\delta\vec{x}_1, \ldots, \delta\vec{x}_B, \ldots)\ .$$

Combinando il PLV con il principio di D'Alembert otteniamo

$$\sum_{B\in\mathcal{B}} \vec{F}_B^{(att)} \cdot \delta\vec{x_B} \leq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{B\in\mathcal{B}} \left(-\frac{d\vec{p_B}}{dt}\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{B\in\mathcal{B}} \left(\vec{F}_B^{(att)} - \frac{d\vec{p_B}}{dt}\right) \cdot \delta\vec{x_B} \leq 0 \qquad \forall\ \delta\mathcal{P} \tag{14.1.1}$$

Tale relazione, detta *Relazione simbolica della dinamica* esprime il fatto che, durante i moti del modello, il LV delle forze attive sommato a quello delle forze d'inerzia è non positivo per ogni campo di spostamenti virtuali del sistema. Introduciamo ora l'ipotesi che il sistema materiale sia soggetto a vincoli *olonomi* e abbia l gradi di libertà. In tal caso, si ha che il vettore posizione di

un qualunque punto B del sistema si può scrivere come una funzione delle sole coordinate libere $(q_1, \ldots, q_l)$ e del tempo

$$\vec{x}_B = \vec{x}_B\left(q_1, \ldots, q_l; t\right) \quad \text{di classe } \mathcal{C}^2 \ . \tag{14.1.2}$$

La dipendenza dal tempo tiene conto della presenza di eventuali vincoli mobili. Comunque, gli spostamenti virtuali del punto B assumono la forma

$$\delta\vec{x}_B\left(q_1, \ldots, q_l; t\right) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \delta q_i \ , \tag{14.1.3}$$

dove δq_i sono variazione delle coordinate libere. Tale espressione coincide con quella già calcolata in statica (5.11.1) poiché, anche in dinamica, gli spostamenti virtuali $\delta\vec{x}_B$ devono essere calcolati a vincoli congelati. Sostituendo l'espressione (14.1.3) nella (14.1.1) otteniamo

$$\sum_{B\in\mathcal{B}} \left(\vec{F}_B^{(att)} - \frac{d\vec{p_B}}{dt}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \delta q_i\right) \leq 0 \qquad \forall\ (\delta q_1, \ldots, \delta q_l)$$

che, scambiando le sommatorie, diventa

$$\sum_{i=1}^{l} \delta q_i \left(\sum_{B\in\mathcal{B}} \left(\vec{F}_B^{(att)} - \frac{d\vec{p_B}}{dt}\right) \cdot \frac{\partial \vec{x_B}}{\partial q_i}\right) \leq 0 \tag{14.1.4}$$

Denotato con $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_l)$ il vettore delle coordinate lagrangiane del sistema e ricordando che

$$Q_i^{(att)}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t\right) := \sum_{B\in\mathcal{B}} \left(\vec{F}_B^{(att)} \cdot \frac{\partial \vec{x_B}}{\partial q_i}\right)$$

sono le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva e chiamando, per analogia, le

$$\tau_i\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t\right) := \sum_{B\in\mathcal{B}} \frac{d\vec{p_B}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{x_B}}{\partial q_i} = \sum_{B\in\mathcal{B}} m_B \frac{d\vec{v_B}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{x_B}}{\partial q_i} \tag{14.1.5}$$

componenti lagrangiane della derivata della quantità di moto, la (14.1.4) diventa *la Relazione Simbolica* della Dinamica

$$\sum_{i=1}^{l} \left(Q_i^{(att)} - \tau_i\right) \delta q_i \leq 0 \qquad \forall\ (\delta q_1, \ldots, \delta q_l) \ .$$

Se, in più, supponiamo che i vincoli siano anche *bilateri*, possiamo concludere che durante il moto vale *l'Equazione Simbolica* della Dinamica

$$\sum_{i=1}^{l} \left(Q_i^{(att)} - \tau_i\right) \delta q_i = 0 \qquad \forall\ (\delta q_1, \ldots, \delta q_l) \ .$$

Infine, se supponiamo che non ci siano ulteriori vincoli anolonomi, le variazioni delle coordinate libere δq_i risultano completamente arbitrarie, quindi l'Equazione Simbolica equivale al sistema di l equazioni pure di moto (formalmente analoghe a quelle di Newton)

$$Q_i^{(att)} = \tau_i \qquad i = 1, \ldots, l \ . \tag{14.1.6}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Dimostreremo, ora, che il secondo membro di tali equazioni risulta essere

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} \qquad \text{binomio lagrangiano,} \tag{14.1.7}$$

dove K è l'energia cinetica del sistema materiale.

A questo scopo, utilizzando la regola di Leibniz, riscriviamo la (14.1.5) nella forma binomiale

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{B\in\mathcal{B}} m_B \vec{v}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i}\right) - \sum_{B\in\mathcal{B}} m_B \vec{v}_B \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i}\right) \tag{14.1.8}$$

e utilizziamo i seguenti due lemmi. Denotata con $\vec{v}_B$ la velocità del punto B, si ha che

Lemma 14.1.1. $\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial \dot{q}_j} \qquad j = 1, \dots l$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che la velocità di un punto materiale di un modello soggetto a vincoli olonomi si scrive

$$\vec{v}_B\left(\mathbf{q},\, \dot{\mathbf{q}},\, t\right) = \frac{d\vec{x}_B}{dt} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t} \tag{14.1.9}$$

□

Lemma 14.1.2. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial q_j}$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j}\left(q_1, \dots, q_l,\, t\right)\right) &= \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial^2 \vec{x}_B}{\partial q_j \partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{x}_B}{\partial q_j \partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t}\right) \\
&\overset{(14.1.9)}{=} \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial q_j}
\end{aligned}$$

□

Utilizzando i suddetti lemmi la (14.1.8) diventa

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{B\in\mathcal{B}} m_B \vec{v}_B \cdot \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial \dot{q}_i}\right) - \sum_{B\in\mathcal{B}} m_B \vec{v}_B \cdot \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial q_i}\ .$$

Pertanto, ricordando la definizione dell'energia cinetica di un modello

$$K = \frac{1}{2}\sum_{B\in\mathcal{B}} m_B \vec{v}_B \cdot \vec{v}_B\ ,$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

si ottiene la (14.1.7). Combinando la (14.1.6) con la (14.1.7) possiamo finalmente scrivere le equazioni di Lagrange di prima specie o non conservative

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i^{(att)} \qquad i = 1, \dots l \tag{14.1.10}$$

14.2 Equazioni di Lagrange conservative

Nel caso in cui la sollecitazione attiva sia conservativa nel senso della Def. 6.2.1, le equazioni di Lagrange si possono derivare da un'unica funzione scalare che contiene tutta la dinamica del sistema. Infatti, sotto la suddetta ipotesi, esista l'energia potenziale del sistema cioè una funzione a valori scalari e di classe C^2

$$V = V(q_1, \dots, q_l)$$

tale che

$$Q_i^{(att)}(q_1, \dots, q_l) = \frac{\partial}{\partial q_i}(-V) \qquad i = 1, \dots, l$$

Allora, le eq. (14.1.10) diventano

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}\right) K = -\frac{\partial}{\partial q_i}(V) \tag{14.2.1}$$

Tenuto conto che V non dipende dalla velocità $\dot{q}_i$ le (14.2.1) si possono scrivere

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}\right) K = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}\right) V \tag{14.2.2}$$

Allora, se definiamo la funzione di Lagrange (o Lagrangiana) del modello conservativo come

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := K - V \ , \tag{14.2.3}$$

dalla (14.2.2) ricaviamo le eq. di Lagrange per i sistemi conservativi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, l \tag{14.2.4}$$

Ribadiamo che tali equazioni, dette anche eq. di Lagrange conservative, governano l'evoluzione di un sistema materiale conservativo, soggetto a vincoli olonomi, non dissipativi e bilateri.

N.B. È ovvio che le eq. di Lagrange non conservative valgono anche nel caso conservativo, mentre le eq. di Lagrange conservative valgono solo in quest'ultimo caso. Quindi, se si hanno dubbi sulla conservatività dela sollecitazione attiva, conviene usare le prime.

14.3 Equazioni di Lagrange in forma mista

Nel caso in cui sul modello agisca una sollecitazione in parte conservativa e in parte non conservativa, le eq. di Lagrange si possono utilizzare, sia nella forma (14.1.10), sia nella forma mista seguente,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i^{(nc)} \qquad i = 1, \dots, l \quad , \tag{14.3.1}$$

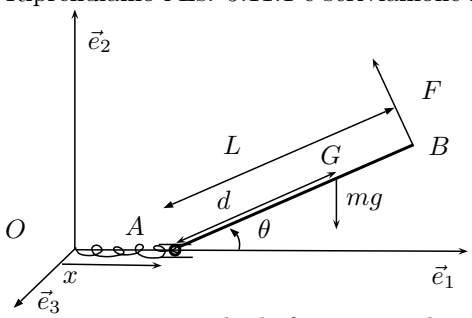
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

dove con $\mathcal{L}$ abbiamo indicato la Lagrangiana contenente l'energia potenziale della sollecitazione conservativa, mentre con $Q_i^{(nc)}$ le componenti lagrangiane della sollecitazione non conservativa.

Discutiamo ora un esempio di ricapitolazione per un rigido con 2 gradi di libertà.

Esempio 14.3.1.

Riprendiamo l'Es. 5.11.1 e scriviamone le eq. di Lagrange



$$x \in \mathbb{R}$$
$$-\pi < \theta \leq \pi$$

Avevamo già trovato che le forze generalizzate sono:

$$\begin{aligned} Q_x &= -cx - F\sin\theta = \vec{R}^{att} \cdot \vec{e_1} \\ Q_\theta &= -mgd\cos\theta + FL = \vec{M}_A^{att} \cdot \vec{e_3} \end{aligned} \tag{14.3.2}$$

Controlliamo se la sollecitazione è conservativa o meno applicando il test delle derivate in croce:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial \theta} = -F\cos\theta \qquad \frac{\partial Q_\theta}{\partial x} = 0$$

È immediato concludere che l'intera sollecitazione non è conservativa. Quindi, durante la dinamica, valgono le eq. di Lagrange non conservative (14.1.10), oppure quelle miste (14.3.1). Utilizziamo le prime. Conosciamo già le forze generalizzate Q_x, Q_θ, dobbiamo calcolare l'energia cinetica K.

Poiché il sistema materiale è costituito da un solo rigido unidimensionale che si muove in un piano con velocità angolare $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e_3}$, K assume la forma (13.3.4)

$$K = \frac{1}{2}m|\vec{v_G}|^2 + \frac{1}{2}J_{3G}\dot{\theta}^2 \ ,$$

dove J_{3G} indica il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse per G e ortogonale al piano. La velocità di G si può calcolare in 2 modi:

1. derivando il vettore posizione $\vec{x}_G = G - O$

$$\begin{aligned} \vec{v}_G &= \frac{d}{dt}\vec{x_G} = \frac{d}{dt}\left[(x + d\cos\theta)\,\vec{e}_1 + d\sin\theta\vec{e}_2\right] \\ &= \left(\dot{x} - d\sin\theta\dot{\theta}\right)\vec{e}_1 + d\cos\theta\dot{\theta}\vec{e}_2 \end{aligned}$$

2. utilizzando la formula di Poisson (4.6.1)

$$\begin{aligned} \vec{v}_G &= \vec{v_A} + \vec{\omega} \times (G - A) \\ &= \dot{x}\vec{e}_1 + \dot{\theta}\vec{e}_3 \times d\,(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2) \\ &= \dot{x}\vec{e}_1 + d\dot{\theta}\,(\cos\theta\vec{e}_2 - \sin\theta\vec{e}_1) \end{aligned}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Dunque,

$$|\vec{v}_G|^2 = \left(\dot{x} - d\sin\theta\dot{\theta}\right)^2 + d^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 = \dot{x}^2 + d^2\dot{\theta}^2 - 2d\sin\theta\dot{x}\dot{\theta}$$

e l'energia cinetica è data da

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + d^2\dot{\theta}^2 - 2d\sin\theta\dot{x}\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}J_{3G}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 - 2md\sin\theta\dot{x}\dot{\theta} + (md^2 + J_{3G})\dot{\theta}^2\right)$$

Per scrivere le eq. di Lagrange (14.1.10) calcoliamo

$$x: \begin{array}{rcl} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} & = & m(\dot{x} - d\sin\theta\dot{\theta}) \Rightarrow \frac{d}{dt}(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}) = m(\ddot{x} - d\cos\theta\dot{\theta}^2 - d\sin\theta\ddot{\theta}) \\ \frac{\partial K}{\partial x} & = & 0 \end{array}$$

$$\theta: \begin{array}{rcl} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} & = & (md^2 + J_{3G})\dot{\theta} - md\sin\theta\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}) = (md^2 + J_{3G})\ddot{\theta} - md(\sin\theta\ddot{x} + \cos\theta\dot{x}\dot{\theta}) \\ \frac{\partial K}{\partial \theta} & = & -md\cos\theta\dot{x}\dot{\theta} \end{array}$$

Dunque, le eq. di Lagrange si scrivono

$$\begin{array}{rcl} m(\ddot{x} - d\cos\theta\dot{\theta}^2 - d\sin\theta\ddot{\theta}) & = & -cx - F\sin\theta \\ (md^2 + J_{3G})\ddot{\theta} - md\sin\theta\ddot{x} & = & -mgd\cos\theta + FL \end{array} \tag{14.3.3}$$

Se, in particolare l'asta è omogenea , segue che

$$d = \frac{L}{2}\ , \qquad J_{3G} = \frac{1}{12}mL^2$$

e quindi le eq. (14.3.3) diventano

$$\begin{array}{rcl} m(\ddot{x} - \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2 - \frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta}) & = & -cx - F\sin\theta \\ m(\frac{L^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\sin\theta\ddot{x}) & = & -mgd\cos\theta + FL \end{array}$$

N.B. Come previsto dalla teoria, le eq. di Lagrange risultano equazioni *pure* di moto, cioè non contengono le reazioni vincolari. Quindi, se si vogliono determinare le reazioni vincolari durante il moto, si devono usare le eq. cardinali della dinamica.

In questo esempio, cerchiamo la reazione vincolare esterna cioè determiniamo l'incognita $\vec{\phi}_A = \phi_2'\vec{e}_2$ (in genere, diversa dalla reazione in Statica).

La I ECD, proiettata lungo il versore $\vec{e}_2$ fornisce

$$\phi_2' - mg + Fcos\theta = m\vec{a}_G \cdot \vec{e}_2$$

Siccome l'accelerazione di G è data da

$$\vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G = (\ddot{x} - d\cos\theta\dot{\theta}^2 - d\sin\theta\ddot{\theta})\vec{e}_1 + d(-\sin\theta\dot{\theta}^2 + \cos\theta\ddot{\theta})\vec{e}_2)\ ,$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

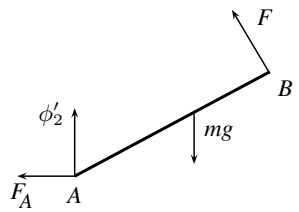


Figura 14.3.1:

la reazione vincolare sarà

$$\phi_2' = mg - F\cos\theta + md(-\sin\theta\dot{\theta}^2 + \cos\theta\ddot{\theta}) \ , \tag{14.3.4}$$

quindi una funzione di $(\theta,\, \dot{\theta},\, \ddot{\theta})$. Pertanto, sarà determinata in funzione del tempo, una volta che si è integrato il sistema delle EL. Comunque, senza bisogno di integrare le equazioni di moto, si può utilizzare la (14.3.4) per calcolare la reazione vincolare all'istante iniziale t_0, previa scelta delle condizioni iniziali del problema di Cauchy associato alle EL. Per esempio, fissando le condizioni iniziali nulle per la coordinata angolare

$$\theta(t_0) = 0 \ , \qquad \dot{\theta}(t_0) = 0$$

si trova

$$\phi_2'(t_0) = mg - F + m\,d\,\ddot{\theta}(t_0) \ . \tag{14.3.5}$$

Poi, ricavando dalla II EL (14.3.3) l'accelerazione angolare all'istante iniziale

$$\ddot{\theta}(t_0) = \frac{FL - mgd}{md^2 + J_{3G}}$$

e sostituendola nella (14.3.5) si arriva a

$$\phi_2'(t_0) = mg - F + m\,d\frac{FL - mgd}{md^2 + J_{3G}} \ . \tag{14.3.6}$$

Confonto con le ECD

Nel problema precedente, confrontiamo le EL con le ECD. Si noti che la componente lungo $\vec{e}_1$ della I ECD è

$$-cx - F\sin\theta = m\vec{a}_G \cdot \vec{e}_1 \ ,$$

che coincide con la I EL (14.3.3). Scriviamo ora la II ECD, scegliendo come polo il punto A mobile, al fine di eliminare l'incognita ϕ_2'. Poiché il modello è rigido e A appartiene al rigido, possiamo utilizzare direttamente la II delle Eq. (13.2.4) con $O \equiv A$

$$\vec{M}_A^{(est)} = \boldsymbol{I}_A(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \boldsymbol{I}_A(\vec{\omega}) + (G - A) \times m\vec{a}_A \tag{14.3.7}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Allora,

$$\begin{aligned}\vec{M}_A^{(est)} = \vec{M}_A^{(est,att)} &= (G-A)\times(-mg\vec{e}_2) + (B-A)\times\vec{F}_B \\ &= (-mgd\cos\theta + Fl)\vec{e}_3 \ ,\end{aligned}$$

Inoltre,

$$\boldsymbol{I}_A(\dot{\vec{\omega}}) = \boldsymbol{I}_A(\ddot{\theta}\vec{e}_3) = J_{3A}\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_3 \ , \qquad \vec{\omega}\times\boldsymbol{I}_A(\vec{\omega}) = \dot{\theta}\vec{e}_3\times\boldsymbol{I}_A(\dot{\theta}\vec{e}_3) = \dot{\theta}\vec{e}_3\times\dot{\theta}J_{3A}\,\vec{e}_3 = \vec{0}$$

e

$$(G-A)\times m\,\vec{a}_A = md(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2)\times\ddot{x}\vec{e}_1 = -md\sin\theta\ddot{x}\vec{e}_3 \ .$$

Dunque la II ECD (14.3.7) proiettata lungo $\vec{e}_3$ fornisce

$$-mgd\cos\theta + Fl = J_{3A}\,\ddot{\theta} - md\sin\theta\,\ddot{x} \tag{14.3.8}$$

Osservando che, per il Teo. di Huygens-Steiner (12.7.1)

$$J_{3A} = J_{3G} + md^2 \ ,$$

si verifica facilmente che la (14.3.8) coincide con la II delle (14.3.3). Tuttavia, se avessimo scelto come polo per i momenti qualunque punto non appartenente alla retta d'azione della reazione ϕ_2', la II ECD, contenendo la reazione stessa, sarebbe stata diversa dalla II EL. Nonostante che, in questo esempio, le eq. di Lagrange coincidano con 2 componenti delle eq. cardinali della dinamica, si può apprezzare la maggiore efficienza computazionale delle eq. di Lagrange. Essa dipende principalmente da due motivi:

1. le eq. di Lagrange sono sempre, per *costruzione*, eq. pure di moto mentre le eq. cardinali, in genere, contengono le reazioni vincolari;
2. nel formalismo lagrangiano ogni eq. di Lagrange è un'equazione *scalare* e le informazioni sull'inerzia del modello sono contenute in una funzione *scalare*, l'energia cinetica K. Al contrario, le eq. cardinali della dinamica sono equazioni *vettoriali*, e le informazioni sull'inerzia del modello sono contenute in un *vettore*, il momento angolare $\vec{L}_A$.

In seguito, quando passeremo da un modello rigido a un modello articolato, sarà ancora più evidente l'efficienza delle eq. di Lagrange.

14.4 Struttura dell'energia cinetica di un sistema olonomo

La parte dinamica delle equazioni di Lagrange è contenuta nella funzione energia cinetica K. Studiamo in dettaglio la stuttura di tale funzione per un qualsiasi sistema olonomo. Sappiamo che, in generale,

$$K = \frac{1}{2}\sum_{B\in\mathcal{B}} m_B|\vec{v}_B|^2 \tag{14.4.1}$$

Ricordiamo che in un modello olonomo con vincoli eventualmente dipendenti dal tempo, per ogni punto B si ha

$$\vec{x}_B = \vec{x}_B(q_1, q_2, \ldots, q_l; t) \tag{14.4.2}$$

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{x}}_B = \sum_{i=1}^{l}\frac{\partial\vec{x}_B}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\vec{x}_B}{\partial t} \tag{14.4.3}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Chiameremo il primo termine della velocità della (14.4.3),

$$\vec{v}_B^{(vir)} := \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i \tag{14.4.4}$$

velocità *virtuale* di B, poiché, per ogni $(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_l) \in \mathbb{R}^l$, rappresenta le velocità di B lungo un moto virtuale del modello. Invece, il secondo termine di (14.4.3)

$$\vec{v}_B^{(tr)} := \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t} \tag{14.4.5}$$

sarà detto velocità *di trascinamento*, poiché rappresenta la velocità di B quando esso è solidale ai vincoli e quindi viene trascinato da essi.

Sostituendo in K l'espressione

$$\vec{v}_B = \vec{v}_B^{(vir)} + \vec{v}_B^{(tr)} \tag{14.4.6}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B (\vec{v}_B^{(vir)} + \vec{v}_B^{(tr)}) \cdot (\vec{v}_B^{(vir)} + \vec{v}_B^{(tr)}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B |\vec{v}_B^{(vir)}|^2 + \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \vec{v}_B^{(vir)} \cdot \vec{v}_B^{(tr)} + \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B |\vec{v}_B^{(tr)}|^2 \\ &= K_2 + K_1 + K_0 \ , \end{aligned}$$

Il termine K_2 è dato da

$$\begin{aligned} K_2 :=& \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B |\vec{v}_B^{(vir)}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B (\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i) \cdot (\sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j} \dot{q}_j) \\ =& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{l} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned} \tag{14.4.7}$$

dove si è posto

$$a_{ij}(\mathbf{q}; t) := \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j} \qquad i, j = 1, \ldots, l \tag{14.4.8}$$

Si osservi che le l^2 funzioni a_{ij} sono invarianti per lo scambio di i con j. Quindi, se organizziamo i coefficienti a_{ij} nella matrice simmetrica

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}; t) := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1l} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{1l} & a_{2l} & \ldots & a_{ll} \end{bmatrix} \ , \tag{14.4.9}$$

detta matrice dell'energia cinetica (o tensore metrico), la forma quadratica K_2 si può scrivere come

$$K_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \, \dot{\mathbf{q}} \ ,$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

dove

$$\dot{\mathbf{q}}^T := [\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_l]$$

e l'apice T indica l'operazione di trasposizione sulle matrici. Studiamo ora la struttura del termine lineare K_1

(14.4.10)

$$K_1 := \sum_{B\in\mathcal{B}} m_B \vec{v}_B^{(vir)} \cdot \vec{v}_B^{(tr)} = \sum_{B\in\mathcal{B}} m_B (\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i) \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t} = \sum_{i=1}^{l} (\sum_{B\in\mathcal{B}} m_B \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t}) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{l} b_i \dot{q}_i \ ,$$

dove

$$b_i(\mathbf{q}; t) := \sum_{B\in\mathcal{B}} m_B \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t} \ . \tag{14.4.11}$$

Dunque, K_1 è una forma lineare nelle $\dot{q}_i$ che si può scrivere

$$K_1 = \mathbf{b}^T \dot{\mathbf{q}} \ ,$$

avendo indicato con $\mathbf{b}^T$ il vettore riga

$$\mathbf{b}^T := [b_1, \ldots, b_l] \ .$$

Infine, il termine K_0 è

$$K_0 = \frac{1}{2} \sum_{B\in\mathcal{B}} m_B (\vec{v}_B^{(tr)}) \cdot (\vec{v}_B^{(tr)}) = \frac{1}{2} \sum_{B\in\mathcal{B}} m_B (\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t}) \cdot (\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t}) = \frac{1}{2} c(\mathbf{q}; t) \ , \tag{14.4.12}$$

dove $c(\mathbf{q}; t)$ è la funzione scalare definita da

$$c(\mathbf{q}; t) := \sum_{B\in\mathcal{B}} m_B (\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t}) \cdot (\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t}) \ . \tag{14.4.13}$$

Dunque, K_0 non dipende dalle $\dot{q}_i$, cioè è di grado zero nelle $\dot{q}_i$. Ricapitolando, l'energia cinetica di un qualunque modello olonomo, ha la struttura

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{l} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{l} b_i \dot{q}_i + \frac{1}{2} c \ , \tag{14.4.14}$$

che in forma matriciale si può scrivere

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}\, \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}^T \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} c \ , \tag{14.4.15}$$

Dimostriamo che la parte quadratica K_2 è definita positiva

Proposizione 14.4.1. *In un sistema olonomo, la parte dell'energia cinetica K_2, quadratica nelle velocità lagrangiane, è una forma definita positiva. Quindi, la matrice dell'energia cinetica $\mathbf{A}$, i cui elementi si possono calcolare come*

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ , \tag{14.4.16}$$

è invertibile.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Dimostrazione. Dalla definizione (14.4.7) segue che $K_2 \geq 0$. Dimostriamo che, se $K_2 = 0$, allora deve essere necessariamente $\dot{q}_i = 0$ $i = 1, \ldots, l$. È chiaro che $K_2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_B^{(vir)} = 0$ $\forall B \in \mathcal{B}$, cioè deve essere nulla la velocità virtuale di ogni punto del modello. Tale condizione, per la definizione (14.4.4), implica che tutte le velocità lagrangiane del modello devono essere nulle, dato che i vettori $\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i}$ sono, per ipotesi, linearmente indipendenti in ogni punto dello spazio delle configurazioni $\mathcal{C}_v$. □

In particolare, se i vincoli sono indipendenti dal tempo, $\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t} = \vec{0}$, quindi, K_1 e K_0 sono nulle e l'energia cinetica si riduce al solo termine K_2. Possiamo allora affermare

Proposizione 14.4.2. *In un sistema olonomo a vincoli fissi, l'energia cinetica è una forma quadratica omogenea nelle velocità lagrangiane, con coefficienti dipendenti solo dalle coordinate lagrangiane, cioè*

$$K = K_2 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}\, \dot{\mathbf{q}} \ , \qquad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \ . \tag{14.4.17}$$

Esempio 14.4.1.

Nell'esempio 14.3.1 l'energia cinetica vale

$$K = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 + (md^2 + J_{3G})\dot{\theta}^2 - 2md\sin\theta\dot{x}\dot{\theta}\right)$$

che in forma matriciale si scrive

$$K = \frac{1}{2}[\dot{x}, \dot{\theta}] \begin{bmatrix} m & -md\sin\theta \\ -md\sin\theta & md^2 + J_{3G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Quindi, $\det \boldsymbol{A} = m^2 d^2 \cos^2\theta + mJ_{3G} > 0 \quad \forall\, (x, \theta) \in \mathcal{C}_v$.

14.5 Struttura delle equazioni di Lagrange

Prima di analizzare la struttura delle equazioni di Lagrange per un qualunque modello olonomo a vincoli non dissipativi e bilateri, introduciamo la seguente

Definizione 14.5.1. *Si dice momento cinetico p_i, coniugato alla coordinata libera q_i, la funzione*

$$p_i := \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \tag{14.5.1}$$

Esercizio 14.5.1. *Verificare che, nel caso dell'esempio 14.4.1, il momento cinetico p_x coincide con la componente della quantità di moto del sistema lungo il versore $\vec{e}_1$ e il momento p_θ coincide con la componente lungo il versore $\vec{e}_3$ del momento angolare del sistema rispetto al polo A.*

Poiché la derivata temporale di p_i coincide con il primo membro del binomio lagrangiano (14.1.7) le EL (14.1.10) si possono scrivere in forma equivalente come

$$\dot{p}_i - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i^{(att)} \qquad i = 1, \ldots l \tag{14.5.2}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Dalla (14.5.1), segue che

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(\frac{1}{2}\sum_B m_B \vec{v}_B \cdot \vec{v}_B) = \sum_B m_B \vec{v}_B \cdot \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial \dot{q}_i} = \sum_B m_B \vec{v}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \tag{14.5.3}$$

quindi i momenti cinetici sono le componenti lagrangiane della quantità di moto del sistema. Utilizzando l'equazione di struttura (14.4.14) si trova

$$\begin{aligned} p_i = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{l} a_{jk}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}_j\dot{q}_k) + b_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{l} a_{jk}(\delta_{ij}\dot{q}_k + \dot{q}_j\delta_{ik}) + b_i = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{l} a_{ik}\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{l} a_{ji}\dot{q}_j\right) + b_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}\dot{q}_j + b_i \ . \end{aligned} \tag{14.5.4}$$

Quindi, i momenti cinetici sono funzioni affini in $\dot{q}_i$ e in forma matriciale si possono scrivere,

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b} \ ,$$

avendo denotato con $\mathbf{p}^T := [p_1, \ldots, p_l]$ la riga dei momenti cinetici. Allora, derivando rispetto al tempo la (14.5.4), si ottiene

$$\dot{p}_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{l} \dot{a}_{ij}\,\dot{q}_j + \dot{b}_i \ . \tag{14.5.5}$$

Pertanto, le equazioni di Lagrange le (14.5.2) si possono scrivere

$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij}\ddot{q}_j + \Gamma_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = Q_i^{(att)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ , \tag{14.5.6}$$

dove

$$\Gamma_i := \sum_{j=1}^{l} \dot{a}_{ij}\,\dot{q}_j + \dot{b}_i - \frac{\partial K}{\partial q_i} = \sum_{j,k=1}^{l} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{l}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial b_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial q_i} \ . \tag{14.5.7}$$

Il sistema (14.5.6) in forma matriciale si scrive

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Gamma} = \mathbf{Q} \tag{14.5.8}$$

e quindi, poiché la matrice $\mathbf{A}$ è invertibile per la Prop 14.4.1, si può ridurre a forma *normale*, cioè risolto rispetto alle derivate di ordine massimo

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1}(-\mathbf{\Gamma} + \mathbf{Q}) \tag{14.5.9}$$

In conclusione, vale la seguente

Proposizione 14.5.1. *Le equazioni di Lagrange di un sistema meccanico olonomo formano un sistema di* l *EDO del II ordine che si può scrivere in forma normale.*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Corollario 14.5.1. *Per un sistema meccanico olonomo con vincoli non dissipativi e bilateri e sollecitazione attiva di classe C^1 vale il principio del determinismo meccanico, cioè, una volta fissate le condizioni iniziali in $\mathcal{C}_v \times \mathbb{R}^l$*

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0 \ , \ \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \mathbf{v}_0 \ ,$$

esso ammette uno e un solo moto $\mathbf{q}(t; \mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0)$.

Dimostrazione. Segue dal fatto che il problema di Cauchy associato alle equazioni di Lagrange ammette localmente una e una sola soluzione. □

N.B. Se i vincoli sono indipendenti dal tempo $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ e $c = 0$, quindi i termini Γ_i (14.5.7) si riducono a

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^{l} \dot{a}_{ij}\dot{q}_j - \frac{\partial K_2}{\partial q_i} = \sum_{j,k=1}^{l} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{l}\left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k \ . \tag{14.5.10}$$

14.6 Integrali primi per i sistemi olonomi

Abbiamo già visto nel Teorema 13.6.2 l'utilità degli integrali primi di moto. In questa sezione, daremo delle condizioni sufficienti sotto le quali si conservano, durante il moto, alcune grandezze scalari che dipendono dalle coordinate libere e dalle velocità lagrangiane.

Proposizione 14.6.1. *In un sistema olonomo con vincoli non dissipativi e bilateri, un momento cinetico p_k è un integrale primo di moto se e solo se*

$$\frac{\partial K}{\partial q_k} + Q_k^{(att)} = 0 \tag{14.6.1}$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalle equazioni di Lagrange scritte nella forma (14.5.2) □

Corollario 14.6.1. *In un sistema olonomo con vincoli non dissipativi e bilateri e sollecitazione conservativa, se la Lagrangiana è indipendente da una coordinata libera q_k (si dice che la coordinata q_k è ignorabile) il momento coniugato $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ è un integrale primo di moto.*

Dimostrazione. Basta osservare che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \frac{\partial K}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial K}{\partial q_k} + Q_k^{(att)} \tag{14.6.2}$$

□

Inoltre, se i vincoli sono anche fissi e la sollecitazione è conservativa, si conserva anche l'energia meccanica, cioè la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale

$$E = K + V \ . \tag{14.6.3}$$

Teorema 14.6.1. *In un sistema olonomo con*

1. *vincoli fissi;*

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

2. *vincoli non dissipativi e bilateri;*

3. *sollecitazione conservativa;*

l'energia meccanica è un integrale primo di moto, cioè si mantiene uguale al valore iniziale durante ciascun moto del sistema.

$$E(t) = K(t) + V(t) = E_{|t=0} \tag{14.6.4}$$

Dimostrazione. Già sappiamo dal teorema dell'energia cinetica, che durante il moto di un qualsiasi sistema meccanico vale

$$\frac{dK}{dt} = \Pi$$

dove Π è la potenza di *tutte* le sollecitazioni agenti sul sistema. Dimostriamo, che sotto le ipotesi suddette, la potenza complessiva (cambiata di segno) uguaglia la derivata rispetto al tempo dell'energia potenziale del sistema. A tale scopo, ricordiamo che per un qualsiasi sistema olonomo vale la (14.4.6), che, per l'ipotesi 1. si riduce a

$$\vec{v}_B \equiv \vec{v}_B^{(vir)} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Dunque, in questo caso, la potenza complessiva si riduce a quella virtuale

$$\Pi \equiv \pi^{(vir)} = \sum_{B \in \mathcal{B}} \vec{F}_B \cdot \vec{v}_B^{(vir)} \ .$$

Ciò, insieme con l'ipotesi 2, implica che la potenza della sollecitazione reattiva è nulla per la definizione di vincoli non dissipativi (5.10.1) e bilateri.

$$\pi^{(reatt)} \equiv \pi^{(reatt,vir)} = \sum_{B \in \mathcal{B}} \vec{\phi}_B^{(reatt)} \cdot \vec{v}_B^{(vir)} = 0$$

Rimane, quindi, solo la potenza della sollecitazione attiva, pari a

$$\pi^{(att)} \equiv \pi^{(att,vir)} = \sum_{B \in \mathcal{B}} \vec{F}_B^{(att)} \cdot \vec{v}_B^{(vir)} = \sum_{B \in \mathcal{B}} \vec{F}_B^{(att)} \cdot (\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^{l} (\sum_{B \in \mathcal{B}} \vec{F}_B^{(att)} \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i}) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{l} Q_i^{(att)} \dot{q}_i$$

Dall'ipotesi 3, segue che le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva derivano da un funzione energia potenziale, quindi

$$\pi^{(att)} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial}{\partial q_i} (-V(\vec{q})) \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(-V(\mathbf{q}))$$

Dunque,

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}(-V(\mathbf{q})) \ ,$$

da cui segue la tesi. □

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

14.7 Macchine semplici

È il nome assegnato storicamente ai sistemi olonomi con un solo grado di libertà e quindi con un'unica coordinata libera che denoteremo con q e una forza generalizzata che indicheremo con Q. Per le macchine semplici vale

Proposizione 14.7.1. *Nelle macchine semplici con vincoli fissi, non dissipativi e bilateri, soggette a sollecitazione di tipo posizionale, l'energia meccanica è un integrale primo di moto.*

Dimostrazione. Sappiamo, dall'Es. 6.2.2 che la sollecitazione attiva è localmente conservativa, cioè ammette una funzione energia potenziale data da

$$V(q) = -\int Q(q')\ \delta q'\ .$$

Quindi, tutte le ipotesi del Teo 14.6.1 sono soddisfatte, da cui segue la tesi. □

L'esistenza di un integrale primo di moto per le macchine semplici della precedente proposizione, permette di calcolare le reazioni vincolari come funzione della sola coordinata libera e non più del tempo come nell'esempio (14.3.1). Illustriamo qui la procedura.

In conseguenza della Prop. 14.4.2, l'energia cinetica si riduce a

$$K \equiv K_2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2\ , \qquad a(q) = \sum_{B\in\mathcal{B}} m_B \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q}\cdot\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q}\ .$$

Dunque, la Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - V(q)\ ,$$

l'equazione di Lagrange da

$$a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2 + V'(q) = 0 \tag{14.7.1}$$

e l'energia meccanica da

$$E = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + V(q) = E_{|t=0} = E_0\ . \tag{14.7.2}$$

Le reazioni vincolari sui punti B del modello, si calcolano mediante le ECD e quindi saranno funzioni del tipo

$$\vec{\phi}_B = \vec{\phi}_B(q, \dot{q}, \ddot{q})\ , \tag{14.7.3}$$

come nell'esempio 14.3.1. Tuttavia, grazie all'integrale dell'energia (14.7.2) possiamo esprimere la $\dot{q}$ come funzione di q

$$\dot{q}^2 = \frac{2}{a(q)}\big(E_0 - V(q)\big) = f^2(q)\ . \tag{14.7.4}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

L'equazione (14.7.4) è detta equazione di Weierstrass e permette di trovare i moti della macchina semplice per quadrature, cioè integrando le due eq. differenziali del I ordine

$$\dot{q} = \pm\sqrt{\frac{2}{a(q)}\big(E_0 - V(q)\big)} \tag{14.7.5}$$

per separazione di variabili ottenendo

$$t - t_0 = \pm\int_{q(t_0)}^{q(t)} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{a(q)}\big(E_0 - V(q)\big)}} \tag{14.7.6}$$

e invertendo le soluzioni.

Inoltre, sostituendo la $\dot{q}^2$ nella (14.7.1) e risolvendo rispetto a $\ddot{q}$ si ottiene

$$\ddot{q} = \frac{1}{a(q)}\big(-V'(q) - \frac{1}{2}a'(q)f^2(q)\big) = g(q) \tag{14.7.7}$$

Pertanto, sostituendo la (14.7.4) e la (14.7.7) nella (14.7.3) si può ricavare

$$\vec{\phi}_B = \vec{\phi}_B(q, f(q), g(q)) \ ,$$

cioè la reazione vincolare dinamica in funzione di una generica configurazione del sistema.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Capitolo 15

Linearizzazione delle equazioni di Lagrange

Le equazioni di Lagrange per un modello olonomo sono, genericamente, equazioni differenziali *non lineari*. Pertanto, al contrario di quello che succede per i sistemi di equazioni differenziali lineari, non esiste un metodo generale per risolverle. Allora, si ricorre a metodi approssimati che diano informazioni qualitative sulle soluzioni esatte. Uno di questi metodi è la *linearizzazione*, che consiste nel sostituire le eq. di Lagrange non lineari con una loro approssimazione lineare. In tutto il capitolo, studieremo modelli meccanici olonomi, con vincoli non dissipativi e bilateri, in modo che ammettano le eq. di Lagrange. Inoltre, aggiungeremo l'ipotesi che i vincoli e la sollecitazione attiva siano *indipendenti* dal tempo.

15.1 Modelli con un grado di libertà

Prima, illustriamo il metodo nel caso più semplice di un modello con 1 grado di libertà, cioè di una macchina semplice. Denotiamo con q l'unica coordinata libera e con $Q(q, \dot{q})$ l'unica componente lagrangiana della sollecitazione attiva. Ricordando l'equazione (14.7.1), possiamo scrivere l'eq. di Lagrange come

$$a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2 = Q(q, \dot{q}) \ ; \tag{15.1.1}$$

sottolineamo che i coefficienti $a(q)$ e $a'(q)$ non dipendono esplicitamente dal tempo grazie all'ipotesi di vincoli fissi. Ora, consideriamo una soluzione *stazionaria* della (15.1.1)

$$0 = Q(q_e, 0) \ , \tag{15.1.2}$$

cioè una configurazione di equilibrio q_e e indichiamo con

- ε, un parametro reale "piccolo";
- $x(t)$, lo scarto o deviazione dalla soluzione stazionaria;
- $q(t) := q_e + \varepsilon x(t)$, una funzione perturbata della soluzione stazionaria;

- $\dot{q}(t) = \varepsilon\dot{x}(t)$, la sua derivata prima rispetto al tempo;
- $\ddot{q}(t) = \varepsilon\ddot{x}(t)$, la sua derivata seconda rispetto al tempo.

Richiedendo che la funzione $q(t) := q_e + \varepsilon x(t)$ sia una soluzione (esatta) della (15.1.1), possiamo scrivere

$$a(q_e + \varepsilon x)\varepsilon\ddot{x} + \frac{1}{2}a'(q_e + \varepsilon x)\varepsilon^2\dot{x}^2 = Q(q_e + \varepsilon x, \varepsilon\dot{x}) \tag{15.1.3}$$

Poichè la (15.1.3) può essere non lineare, consideriamo la sua approssimazione lineare nel parametro ε. A tale scopo, sviluppiamo tutti i suoi termini in serie di Taylor rispetto ad ε, nell'intorno di $\varepsilon = 0$

$$a(q_e + \varepsilon x)\varepsilon\ddot{x} = \Big(a(q_e) + a'(q_e)x\,\varepsilon + o(\varepsilon)\Big)\varepsilon\ddot{x} \tag{15.1.4}$$

$$a'(q_e + \varepsilon x)\varepsilon^2\dot{x}^2 = \Big(a'(q_e) + O(\varepsilon)\Big)\varepsilon^2\dot{x}^2 \tag{15.1.5}$$

$$Q(q_e + \varepsilon x, \varepsilon\dot{x}) \overset{(15.1.2)}{=} \cancel{Q(q_e, 0)} + \Big(\frac{\partial Q}{\partial q}_{|\varepsilon=0} x + \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}}_{|\varepsilon=0} \dot{x}\Big)\varepsilon + o(\varepsilon)\ , \tag{15.1.6}$$

dove con $o(\ )$ (rispettivamente $O(\ )$) di Landau abbiamo indicato il resto dello sviluppo di grado superiore (rispettivamente uguale) a quello dell'argomento. Limitandoci a prendere i termini di primo grado in ε, otteniamo la seguente equazione differenziale nello scarto $x(t)$, lineare, omogenea ed a coefficienti *costanti* ,

$$a(q_e)\ddot{x} = \frac{\partial Q}{\partial q}_{|(q_e,0)} x + \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}}_{|(q_e,0)} \dot{x}\ , \tag{15.1.7}$$

dove abbiamo tenuto conto che $\varepsilon = 0 \Rightarrow (q = q_e, \dot{q} = 0)$.

Sollecitazione conservativa

In particolare, se la sollecitazione attiva è posizionale, essa è conservativa poiché la macchina è semplice, quindi ammette energia potenziale $V(q)$, quindi

$$\frac{\partial Q}{\partial q}_{|(q_e,0)} = \frac{\partial}{\partial q}_{|q_e}(-V'(q)) = -V''(q_e) \tag{15.1.8}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \dot{q}}_{|(q_e,0)} = 0 \tag{15.1.9}$$

Pertanto, la (15.1.7) si riduce a

$$a(q_e)\ddot{x} + V''(q_e)x = 0 \tag{15.1.10}$$

Tenuto conto che $a(q) > 0$, tale equazione ammette l'integrale generale seguente

$$\textit{se} \quad V''(q_e) > 0 \qquad x(t) = x_0\cos\nu t + \tfrac{v_0}{\nu}\sin\nu t \qquad \textit{moto oscillatorio} \tag{15.1.11}$$

$$\textit{se} \quad V''(q_e) = 0 \qquad x(t) = x_0 + v_0 t \qquad \textit{moto uniforme} \tag{15.1.12}$$

$$\textit{se} \quad V''(q_e) < 0 \qquad x(t) = x_0\cosh\nu t + \tfrac{v_0}{\nu}\sinh\nu t \qquad \textit{moto iperbolico}\ , \tag{15.1.13}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

dove $\nu := \sqrt{\frac{|V''(q_e)|}{a(q_e)}}$, e $x_0 := x(t_0)$, $v_0 = \dot{x}(t_0)$. Nel caso oscillatorio, cioè quando $V''(q_e) > 0$, ν si dice frequenza angolare o pulsazione delle piccole oscillazioni. È facile verificare che l'equazione linearizzata (15.1.10) si può interpretare nella maniera seguente

Proposizione 15.1.1. *In un modello olonomo con 1 grado di libertà, vincoli non dissipativi, bilateri, indipendenti dal tempo e sollecitazione posizionale, l'equazione di Lagrange linearizzata deriva dalla Lagrangiana approssimata ai termini quadratici*

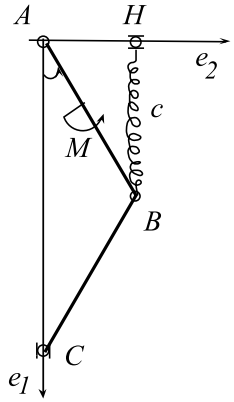
$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}a(q_e)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}V''(q_e)x^2 \ . \tag{15.1.14}$$

Dimostrazione. Basta scrivere l'eq. di Lagrange per la (15.1.14) e confrontarla con la (15.1.10) □

Esempio 15.1.1. *Dal tema d'esame del 15/02/2011.*

Si consideri il sistema articolato di figura costituito dalle aste omogenee AB e BC, di lunghezza L e massa m, incernierate in B e vincolate in A e in C su un piano **verticale** (vincoli lisci e bilateri). Il sistema è soggetto al peso proprio delle aste, alla forza elastica della molla (mantenuta verticale dal carrello in H) e alla coppia uniforme di momento M applicata sulla manovella.

Linearizziamo l'equazione di Lagrange intorno alla configurazione di di equilibrio $\theta_e = \pi/3$.



Ricordiamo che l'energia cinetica e quella potenziale sono date da

$$K = mL^2(\frac{1}{3} + \sin^2\theta)\dot{\theta}^2 \ , \quad V = -M\theta + \frac{1}{2}cL^2\cos^2\theta - 2mgL\cos\theta \ .$$

Visto che la sollecitazione è conservativa, possiamo utilizzare la (14.7.1) per scrivere l'eq. di Lagrange che risulta

$$2mL^2(\frac{1}{3} + \sin^2\theta)\ddot{\theta} + mL^2\sin(2\theta)\dot{\theta}^2 - M + 2mgL\sin\theta - \frac{1}{2}cL^2\sin(2\theta) = 0 \tag{15.1.15}$$

Linearizziamo tale equazione nell'intorno di $\theta_e = \pi/3$. Dato che la sollecitazione è conservativa, possiamo utilizzare la (15.1.10). Quindi, poichè

$$a(q) = \frac{\partial^2 K}{\partial\dot{\theta}^2} = 2mL^2(\frac{1}{3} + \sin^2\theta) \Rightarrow a(\frac{\pi}{3}) = \frac{13}{6}mL^2$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

e

$$V''(q) = 2mgL\cos\theta - cL^2\cos(2\theta) \Rightarrow V''(\frac{\pi}{3}) = L(mg + \frac{cL}{2})$$

la linearizzazione della (15.1.15) è

$$\frac{13}{6}mL\,\ddot{x} + (mg + \frac{cL}{2})x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{3}{13}\left(\frac{2g}{L} + \frac{c}{m}\right)x = 0 \tag{15.1.16}$$

Il moto dello scarto è oscillatorio

$$x(t) = x_0\cos\nu t + \frac{v_0}{\nu}\sin\nu t$$

con frequenza data da

$$\nu = \sqrt{\frac{3}{13}\left(\frac{2g}{L} + \frac{c}{2m}\right)}\ .$$

Dunque, se $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = \omega_0$, le piccole oscillazioni intorno alla configurazione di equilibrio stabile $\theta_e = \frac{\pi}{3}$ sono

$$\theta(t) = \frac{\pi}{3} + \big((\theta_0 - \frac{\pi}{3})\cos(\nu t) + \frac{\omega_0}{\nu}\sin(\nu t)\big)$$

Ora, supponiamo che alla sollecitazione conservativa si aggiunga una sollecitazione dipendente dalla velocità, per esempio una resistenza viscosa

$$\vec{F}_C = -\mu\vec{v}_C \qquad \mu \in \mathbb{R}^+$$

che, ovviamente, non influisce sugli equilibri del modello. Per scrivere la nuova equazione di Lagrange (esatta) possiamo usare la forma mista (14.3.1). Pertanto, basta aggiungere al lato destro della (15.1.15) la componente lagrangiana della sollecitazione non conservativa

$$Q^{(nc)} = \vec{F}_C \cdot \frac{\partial\vec{x}_C}{\partial\theta} = -\mu(-2L\sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_1)\cdot(-2L\sin\theta\,\vec{e}_1) = -4\mu L^2\,\sin^2\theta\,\dot{\theta}$$

Dunque, l'eq. di Lagrange diventa

$$2mL^2(\frac{1}{3} + \sin^2\theta)\ddot{\theta} + mL^2\sin(2\theta)\dot{\theta}^2 = M - 2mgL\sin\theta + \frac{1}{2}cL^2\sin(2\theta) - 4\mu L^2\,\sin^2\theta\,\dot{\theta} \tag{15.1.17}$$

Per linearizzare tale equazione intorno alla configurazione di equilibrio $\theta_e = \frac{\pi}{3}$ dobbiamo ricorrere alla (15.1.7) e quindi aggiungere al lato destro della (15.1.16) il termine

$$\begin{aligned}
\big(Q^{(nc)}\big)^{(lin)}(\frac{\pi}{3} + \varepsilon x, \varepsilon\dot{x}) &= Q^{(nc)}(\frac{\pi}{3}, 0) + \frac{\partial Q^{(nc)}}{\partial\theta}_{|(\frac{\pi}{3},0)}\varepsilon\,x + \frac{\partial Q^{(nc)}}{\partial\dot{\theta}}_{|(\frac{\pi}{3},0)}\varepsilon\dot{x} = \\
&= 0 - \left(\big(8L^2\mu\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\big)_{|(\frac{\pi}{3},0)}x + \big(4\mu L^2\sin^2\theta\big)_{|(\frac{\pi}{3},0)}\dot{x}\right)\varepsilon = \\
&= -3\mu L^2\varepsilon\,\dot{x}\ .
\end{aligned}$$

Pertanto, la linearizzazione della (15.1.17) si scrive

$$\ddot{x} + \frac{18\,\mu}{13\,m}\dot{x} + \frac{3}{13}(\frac{2\,g}{L} + \frac{c}{m})x = 0\ . \tag{15.1.18}$$

Posto $h := \frac{9\,\mu}{13\,m}$ e $k^2 := \frac{3}{13}(\frac{2\,g}{L} + \frac{c}{m})$, l'integrale generale è:

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

- se $h < k$, smorzamento debole, $x(t) = e^{-ht}(x_0 \cos \nu t + \frac{v_0 + h x_0}{\nu} \sin \nu t)$, dove $\nu := \sqrt{k^2 - h^2}$;
- se $h = k$, smorzamento critico, $x(t) = e^{-ht}\big(x_0 + (v_0 + h x_0)t\big)$;
- se $h > k$, smorzamento forte, $x(t) = \frac{v_0 + \gamma_2 x_0}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_1 t} - \frac{v_0 + \gamma_1 x_0}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_2 t}$, dove $\gamma_1 := h - \sqrt{h^2 - k^2}$, $\gamma_2 := h + \sqrt{h^2 - k^2}$.

15.2 Modelli con l gradi di libertà

La procedura di linearizzazione è analoga a quella della sezione precedente. Introduciamo le seguenti definizioni.

- ε, un parametro reale "piccolo";
- $\mathbf{x}(t)$, il vettore (a l componenti) degli scarti dalla soluzione stazionaria;
- $\mathbf{q}(t) := \mathbf{q}_e + \varepsilon \mathbf{x}(t)$, una funzione vettoriale (a l componenti) perturbata della soluzione stazionaria;
- $\dot{\mathbf{q}}(t) = \varepsilon \dot{\mathbf{x}}(t)$, il suo derivato primo rispetto al tempo;
- $\ddot{\mathbf{q}}(t) = \varepsilon \ddot{\mathbf{x}}(t)$, il suo derivato secondo rispetto al tempo.

Proposizione 15.2.1. *Consideriamo un modello olonomo a vincoli non dissipativi, bilateri, fissi e sollecitazione indipendente dal tempo. Le equazioni di Lagrange linearizzate intorno a una configurazione di equilibrio sono date da*

$$A\ddot{\mathbf{x}} + B\dot{\mathbf{x}} + C\mathbf{x} = 0 \tag{15.2.1}$$

dove

$$A = \mathbf{A}(\mathbf{q}_e) \quad B_{jk} = -\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_k}_{|(\mathbf{q}_e, \mathbf{0})} \qquad C_{jk} = -\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}_{|(\mathbf{q}_e, \mathbf{0})} \ .$$

La matrice A è ad elementi costanti ed è detta matrice di massa.

Dimostrazione. Per un modello con le ipotesi suddette, le EL (14.5.6) si scrivono

$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij} \ddot{q}_j + \Gamma_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = Q_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \ , \tag{15.2.2}$$

dove, i temini Γ_i sono dati dalla la (14.5.10). Sostituendo il vettore perturbato $\mathbf{q}_e + \varepsilon \mathbf{x}(t)$ in (15.2.2), il sistema delle eq. di Lagrange, in forma matriciale, si scrive

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}_e + \varepsilon \mathbf{x}) \varepsilon \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{q}_e + \varepsilon \mathbf{x}, \varepsilon \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}_e + \varepsilon \mathbf{x}, \varepsilon \dot{\mathbf{x}}) \ . \tag{15.2.3}$$

Se sviluppiamo i suoi termini in serie di Taylor intorno ad $\varepsilon = 0$ e ci limitiamo a prendere i termini dominanti, cioè quelli lineari in ε, otteniamo

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}_e)\, \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^{(lin)} \ , \tag{15.2.4}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

dove il simbolo $\mathbf{Q}^{(lin)}$ denota il vettore linearizzato delle forze generalizzate dato da

$$\mathbf{Q}^{(lin)} = \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial q_k}_{|(\mathbf{q}_e,\mathbf{0})} x_k + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{q}_k}_{|(\mathbf{q}_e,\mathbf{0})} \dot{x}_k \right) .$$

Infatti, la (14.5.10) implica che i termini di grado minimo in ε, contenuti in $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{q}_e + \varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\dot{\mathbf{x}})$, sono almeno quadratici, quindi sono tutti trascurabili. □

Modelli conservativi con l gradi di libertà

In particolare, se il modello meccanico è conservativo, cioè ammette energia potenziale $V(\mathbf{q})$, segue che

$$C_{jk} = -\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}_{|(\mathbf{q}_e,\vec{0})} = -\frac{\partial}{\partial q_k}_{|\mathbf{q}_e} (-\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_j}) = \mathcal{H}_V(\mathbf{q}_e) \tag{15.2.5}$$

$$B_{jk} = -\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_k} = 0 , \tag{15.2.6}$$

dove con $\mathcal{H}_V(\mathbf{q}_e)$ abbiamo denotato la matrice Hessiana dell'energia potenziale valutata nella configurazione di equilibrio $\mathbf{q}_e$. Pertanto, la (15.2.4) si riduce a

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}_e)\ddot{\mathbf{x}} + \mathcal{H}_V(\mathbf{q}_e)\mathbf{x} = \mathbf{0} . \tag{15.2.7}$$

La matrice $\mathcal{H}_V(\mathbf{q}_e)$ ha elementi costanti ed è detta matrice di *rigidezza*. Anche tale sistema linearizzato si può interpretare come proveniente da una Lagrangiana approssimata ai termini quadratici. Infatti sussiste la seguente

Proposizione 15.2.2. *In un modello olonomo con l gradi di libertà, vincoli non dissipativi, bilateri, indipendenti dal tempo e sollecitazione conservativa, le equazioni di Lagrange linearizzate derivano dalla Lagrangiana*

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}_e)\,\dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot \mathcal{H}_V(\mathbf{q}_e)\,\mathbf{x} . \tag{15.2.8}$$

N.B. Il metodo di linearizzazione che abbiamo applicato alle equazioni di Lagrange si può estendere a un qualunque sistema di equazioni differenziali, linearizzando intorno a soluzioni eventualmente non stazionarie.

Qui sotto, linearizzeremo le equazioni di Eulero-Poinsot, che sono del primo ordine, intorno ad una soluzione stazionaria, cioè a un moto di rotazione permanente.

Esempio 15.2.1. *Equazioni di Eulero-Poinsot*

$$\begin{cases} \dot{p} = & \frac{\mathcal{B}-\mathcal{C}}{\mathcal{A}}\, qr \\ \dot{q} = & \frac{\mathcal{C}-\mathcal{A}}{\mathcal{B}}\, rp \\ \dot{r} = & \frac{\mathcal{A}-\mathcal{B}}{\mathcal{C}}\, pq \end{cases} \tag{15.2.9}$$

Consideriamo la rotazione permanente intorno a un asse principale d'inerzia che chiameremo $(O;\vec{k})$. Tale soluzione è una soluzione stazionaria delle (15.2.9)

$$p_e = 0 , \quad q_e = 0 , \quad r_e = r_0 .$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Quindi, le soluzioni perturbate si scrivono

$$p(t) = \varepsilon x_1(t) \ , \quad q(t) = \varepsilon x_2(t) \ , \quad r(t) = r_0 + \varepsilon x_3(t) \qquad\qquad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

e, sostituite nel sistema (15.2.9), forniscono

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_1 = & \frac{\mathcal{B}-\mathcal{C}}{\mathcal{A}} \, \varepsilon x_2 (r_0 + \varepsilon x_3) \\ \varepsilon \dot{x}_2 = & \frac{\mathcal{C}-\mathcal{A}}{\mathcal{B}} \, (r_0 + \varepsilon x_3) \varepsilon x_1 \\ \varepsilon \dot{x}_3 = & \frac{\mathcal{A}-\mathcal{B}}{\mathcal{C}} \, \varepsilon x_1 \varepsilon x_2 \end{cases} \tag{15.2.10}$$

Trascurando i termini di grado 2 in ε, il sistema si riduce ad uno lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & \frac{\mathcal{B}-\mathcal{C}}{\mathcal{A}} \, r_0 x_2 \\ \dot{x}_2 = & \frac{\mathcal{C}-\mathcal{A}}{\mathcal{B}} \, r_0 x_1 \\ \dot{x}_3 = & 0 \end{cases} \ . \tag{15.2.11}$$

La terza equazione ha come soluzioni quelle stazionarie

$$x_3(t) = x_{30}$$

mentre, per risolvere le prime due equazioni, si può, come nel caso degli effetti giroscopici, considerare il sistema del secondo ordine

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\mathcal{B}-\mathcal{C}}{\mathcal{A}} \, r_0 x_2 \\ \ddot{x}_1 + \frac{\mathcal{C}-\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \, \frac{\mathcal{C}-\mathcal{A}}{\mathcal{B}} \, r_0^2 x_1 = 0 \ . \end{cases} \tag{15.2.12}$$

che conduce alla seguente classificazione in base al coefficiente della seconda equazione.

- Se $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sono tutti differenti (ellissoide d'inerzia triassiale), possiamo distinguere 2 casi:
  - i) se $\mathcal{C} = max\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$ oppure $\mathcal{C} = min\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$, allora $(\mathcal{C} - \mathcal{B})(\mathcal{C} - \mathcal{A}) > 0$, dunque il moto di x_1 è armonico, con pulsazione $\nu = \sqrt{\frac{(\mathcal{C}-\mathcal{B})(\mathcal{C}-\mathcal{A})}{\mathcal{A}\mathcal{B}} \, r_0^2}$. Per la prima equazione, anche il moto di x_2 è armonico, con la stessa pulsazione di x_1;
  - ii) altrimenti $(\mathcal{C} - \mathcal{B})(\mathcal{C} - \mathcal{A}) < 0$, quindi i moti di x_1 e di x_2 sono iperbolici (esponenziali reali).
- Invece, se due momenti d'inerzia coincidono e il terzo è diverso (ellissoide d'inerzia rotondo) abbiamo di nuovo 2 casi:
  - iii) se $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $(O; \vec{k})$ è l'asse giroscopico e il moto di x_1 e di x_2 è armonico con pulsazione $\nu = |r_0(1 - \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}})|$;
  - iv) se $\mathcal{A} = \mathcal{C}$ (rs. $\mathcal{B} = \mathcal{C}$), $(O; \vec{k})$ non è l'asse giroscopico, il moto di x_1 (rs. x_2) è uniforme e x_2 (rs. x_1) è stazionario.
  - v) Infine, se i tre momenti d'inerzia coincidono (ellissoide d'inerzia sferico), entrambi i moti di x_1 e x_2 sono stazionari. In tal caso, comunque, il sistema originale (15.2.9) è già lineare.

Dunque, nei casi i), iii) e v) si dice che la rotazione permanente è *stabile linearmente*, mentre nel ii) e iv) che è *instabile linearmente*.

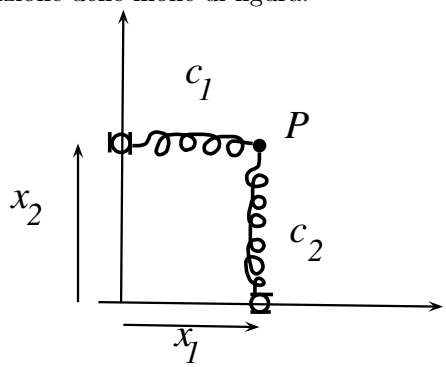
©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

15.3 Sistemi di eq. di Lagrange lineari

Veniamo ora alla procedura di soluzione dei sistemi di equazioni differenziali del tipo (15.2.7). Ricordiamo che essi possono provenire, non solo dalla linearizzazione di un modello *conservativo* con l gradi di libertà intorno a una configurazione di equilibrio, ma possono anche essere le eq. di Lagrange di modelli *lineari* conservativi come il seguente

Esempio 15.3.1.

Consideriamo un punto materiale (P, m) vincolato a stare in un piano orizzontale e soggetto all'azione delle molle di figura.



È un modello con 2 gradi di libertà, detto oscillatore *anisotropo*. Scegliamo come coordinate libere le coordinate cartesiane (x_1, x_2). L'energia potenziale del modello è

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}c_1 x_1^2 + \frac{1}{2}c_2 x_2^2 \ ,$$

quindi, le 2 eq. di Lagrange sono date da

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + c_1 x_1 = & 0 \\ m\ddot{x}_2 + c_2 x_2 = & 0 \end{cases} \tag{15.3.1}$$

Tale sistema è costituito da due eq. differenziali del tipo (15.1.10) che coinvolgono, ciascuna, una sola coordinata libera, o, come si suol dire, sono *disaccoppiate*. L'integrale generale è dato da un moto oscillatorio in entrambe le coordinate (x_1, x_2)

$$\begin{array}{rcll} x_1(t) & = & x_{01}\cos\nu_1 t + \frac{v_{01}}{\nu_1}\sin\nu_1 t \ , & \nu_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}} \ , \\ x_2(t) & = & x_{02}\cos\nu_2 t + \frac{v_{02}}{\nu_2}\sin\nu_2 t \ , & \nu_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}} \ , \end{array} \tag{15.3.2}$$

dove

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} \ , \quad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{bmatrix} v_{01} \\ v_{02} \end{bmatrix} \ ,$$

sono le condizioni iniziali. Ogni singola componente di $\vec{x}(t)$ è periodica con periodo, rispettivamente, pari a

$$T_1 = \frac{2\pi}{\nu_1} \ , \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\nu_2} \ .$$

Ci chiediamo se il moto complessivo è anch'esso periodico e qual è l'eventuale periodo. A tale proposito, ricordiamo che

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Definizione 15.3.1. *Un moto $\vec{x}(t)$, definito in $\mathbb{R}$, si dice periodico, di periodo $T \in \mathbb{R}^+$, se vale*

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t+T) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

È facile dimostrare che se T è un periodo per $\vec{x}(t)$, ogni multiplo *intero* nT è anch'esso un periodo. Il minimo fra tutti i periodi, si dice periodo fondamentale o semplicemente *il periodo*.

Proposizione 15.3.1. *Un moto $\vec{x}(t)$ con 2 gradi di libertà e 2 componenti periodiche, rispettivamente di periodo T_1 e T_2, è periodico se e solo se vale*

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q} \qquad p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \tag{15.3.3}$$

In tal caso, T_1 e T_2 si dicono razionalmente dipendenti. Se, invece, la condizione (15.3.3) non è soddisfatta, il moto $\vec{x}(t)$ si dice *quasi-periodico*.

Dimostrazione. Se vale la (15.3.3), l'intervallo $T = qT_1 = pT_2$ è un periodo comune alle 2 componenti e, quindi, il periodo del moto complessivo. Il viceversa è ovvio. □

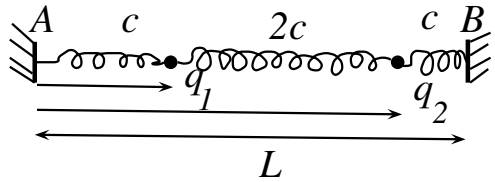
Dunque, il moto (15.3.2) è periodico se e solo se il rapporto tra i periodi

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1}} \ ,$$

è un numero razionale.

È evidente che la possibilità di risolvere immediatamente le eq. (15.3.1) dipende dal fatto che sono disaccoppiate. Ma più spesso le eq. di Lagrange di un modello lineare con più gradi di libertà si presentano accoppiate, come vedremo nel seguente

Esempio 15.3.2.



Si considerino due particelle di massa m vincolate a muoversi soltanto lungo il segmento AB e soggette alla sollecitazione delle tre molle di figura. Poichè le particelle sono vincolate a muoversi lungo l'asse AB, il modello ha 2 gradi di libertà. Come coordinate libere possiamo scegliere le ascisse q_1 e q_2 delle due particelle. La sollecitazione delle due molle esterne (che hanno un estremo fisso) e di quella interna, è conservativa. La energia potenziale di tale modello, il più semplice che simuli il comportamento di una *molecola biatomica*, è

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}cq_1^2 + \frac{1}{2}c(L - q_2)^2 + \frac{1}{2}(2c)(q_1 - q_2)^2 = \frac{3}{2}cq_1^2 + \frac{3}{2}cq_2^2 - 2cq_1q_2 - cLq_2 + \frac{1}{2}cL^2$$

Le eq. di Lagrange sono

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 + 3cq_1 - 2cq_2 = & 0 \\ m\ddot{q}_2 + 3cq_2 - 2cq_1 = & cL \ , \end{cases} \tag{15.3.4}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

che si possono scrivere nella forma matriciale

$$A\ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{V}\mathbf{q} = \boldsymbol{\mathcal{F}} \tag{15.3.5}$$

dove $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$, le matrici A, $\mathcal{V}$ e il vettore dei termini noti $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ sono dati da

$$A = m\,\mathbb{1}_2\ , \quad \mathcal{V} = c\left[\begin{array}{c|c} 3 & -2 \\ \hline -2 & 3 \end{array}\right]\ , \quad \boldsymbol{\mathcal{F}} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ cL \end{array}\right]$$

Si osservi che il sistema (15.3.5), a differenza di (15.2.7), è non omogeneo a causa della presenza di $\mathcal{F}$. Comunque, con una traslazione delle coordinate, si può sempre ridurlo a un sistema omogeneo. Basta considerare come nuove coordinate le deviazioni (o scarti) dalla configurazione di equilibrio

$$\mathbf{x}(t) := \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_e \tag{15.3.6}$$

Infatti, le configurazioni di equilibrio sono soluzioni stazionarie ($\dot{\mathbf{q}}(t) = 0$, $\ddot{\mathbf{q}}(t) = 0$) dell'equazione di Lagrange, quindi soddisfano l'equazione algebrica

$$\mathcal{V}\mathbf{q}_e = \boldsymbol{\mathcal{F}}\ . \tag{15.3.7}$$

Allora, se la (15.3.7) ammette soluzioni, si può verificare, sostituendo la (15.3.6) nel sistema (15.3.5) e tenendo conto della (15.3.7), che tale sistema si riduce a

$$A\ddot{\mathbf{x}} + \mathcal{V}\mathbf{x} = \mathbf{0}\ . \tag{15.3.8}$$

In questo esempio, la matrice $\mathcal{V}$ è invertibile, quindi esiste un'unica configurazione di equilibrio

$$\mathbf{q}_e = \mathcal{V}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}} = \frac{L}{5}\left[\begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}\right]\ , \qquad \text{quindi} \qquad \mathbf{x}(t) = \left[\begin{array}{c} q_1 - \frac{2}{5}L \\ q_2 - \frac{3}{5}L \end{array}\right]\ . \tag{15.3.9}$$

Invece, nell'Esempio 15.3.1, le equazioni di moto (15.3.1) sono già omogenee nelle coordinate lagrangiane originali e le matrici A e $\mathcal{V}$ sono date da

$$A = m\,\mathbb{1}_2\ , \qquad \mathcal{V} = diag(c_1, c_2)\ , \tag{15.3.10}$$

cioè sono entrambi *diagonali* e, inoltre, A è un *multiplo* della matrice $\mathbb{1}_2$. Nella prossima sezione presenteremo un metodo generale per la soluzione dei sistemi lineari del tipo (15.2.7), che si basa sulla scelta di opportune coordinate, dette coordinate *normali*, in cui le matrici A e $\mathcal{V}$ si diagonalizzano, proprio come nella (15.3.10).

15.3.1 Modelli lineari con l gradi di libertà

Consideriamo un modello meccanico con vincoli olonomi, non dissipativi, bilateri e fissi, sollecitazione conservativa e Lagrangiana quadratica data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}})^T A\,\dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}(\mathbf{x})^T \mathcal{V}\,\mathbf{x}\ . \tag{15.3.11}$$

con

1. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, funzione regolare del tempo a valori in $\mathbb{R}^l$;

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

2. $A \in \mathrm{Mat}(l \times l, \mathbb{R})$, matrice simmetrica e definita positiva, detta matrice di *massa*;
3. $\mathcal{V} \in \mathrm{Mat}(l \times l, \mathbb{R})$, matrice simmetrica, detta matrice di *rigidezza*.

Con un ragionamento analogo a quello della Prop. 15.2.2 è facile verificare che le corrispondenti eq. di Lagrange costituiscono un sistema di equazioni differenziali del II ordine, omogenee, del tipo

$$A\ddot{\mathbf{x}} + \mathcal{V}\mathbf{x} = \mathbf{0} \ , \tag{15.3.12}$$

che ammettono sicuramente la soluzione stazionaria $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$. Poiché il sistema è lineare con coefficienti costanti, cerchiamo soluzioni del tipo

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}e^{\lambda t} \ , \qquad \lambda \in \mathbb{C} \tag{15.3.13}$$

dove $\mathbf{u}$ è un vettore indipendente dal tempo, da determinare insieme con il numero complesso λ. Sostituendo in (15.3.12) il vettore (15.3.13) e il suo derivato secondo rispetto al tempo, si ottiene

$$(\lambda^2 A + \mathcal{V})\mathbf{u}e^{\lambda t} = \mathbf{0} \ ,$$

equivalente all'equazione

$$(\mathcal{V} + \lambda^2 A)\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{15.3.14}$$

che si può interpretare come un problema agli autovalori e autovettori generalizzato di $\mathcal{V}$ rispetto ad A. Infatti, quando $A = \mathbb{1}_l$ la (15.3.14) si riduce alla usuale eq. agli autovettori per la matrice $\mathcal{V}$, con autovalori

$$\gamma = -\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\gamma} \ . \tag{15.3.15}$$

Dunque, riscrivendo la (15.3.14) come

$$(\mathcal{V} - \gamma A)\mathbf{u} = \mathbf{0} \ , \tag{15.3.16}$$

possiamo affermare che essa ammette soluzioni non banali se e solo se γ è soluzione dell'eq. caratteristica generalizzata

$$\det(\mathcal{V} - \gamma A) = 0 \ . \tag{15.3.17}$$

Dimostreremo nella Sez. 15.4 che la (15.3.17) possiede l soluzioni *reali* (eventualmente coincidenti), cioè gli autovalori

$$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\} \ ,$$

che, inoltre, la (15.3.14) ammette l soluzioni *reali* linearmente indipendenti, cioè gli autovettori

$$\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(l)}\} \ ,$$

che, infine, la (15.3.12) ammette $2l$ soluzioni anch'esse reali, ottenute come combinazioni lineari delle soluzioni fondamentali

$$\mathbf{x}^{(k)}(t) = \mathbf{u}^{(k)}e^{\pm\sqrt{-\gamma_k}\,t} \qquad k = 1, \cdots, l \ . \tag{15.3.18}$$

In particolare, a seconda del valore degli autovalori γ_k si possono avere i seguenti casi:

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

1. se $\gamma_k > 0$, la soluzione reale corrispondente è un moto oscillatorio, detto *modo normale di vibrazione*, che si può scrivere come combinazione lineare di

$$\mathbf{u}^{(k)} e^{i\nu_k t} \ , \qquad \mathbf{u}^{(k)} e^{-i\nu_k t} \ , \qquad i^2 = -1 \ , \tag{15.3.19}$$

   dove $\nu_k = \sqrt{\gamma_k} \in \mathbb{R}^+$ è detta *frequenza* (o pulsazione) *normale* di vibrazione;

2. se $\gamma_k = 0$, la soluzione reale corrispondente è la sovrapposizione di un moto stazionario e uno lineare

$$\mathbf{u}^{(k)} \ , \quad \mathbf{u}^{(k)} t \qquad ; \tag{15.3.20}$$

3. se $\gamma_k < 0$, la soluzione reale corrispondente è un moto iperbolico (esponenziale reale) che si può scrivere come sovrapposizione di

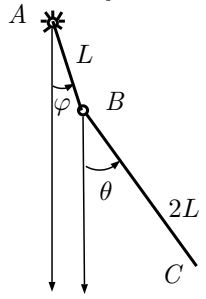
$$\mathbf{u}^{(k)} e^{\nu_k t} \ , \quad \mathbf{u}^{(k)} e^{-\nu_k t} \ , \tag{15.3.21}$$

   dove $\nu_k = \sqrt{-\gamma_k} \in \mathbb{R}^+$.

N.B. Se anche la matrice $\mathcal{V}$ è definita positiva (come in tutti gli esempi di questo Capitolo), gli autovalori $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$ sono strettamente positivi, quindi le soluzioni fondamentali sono tutte del tipo (15.3.19), cioè sono modi normali di vibrazione. Si osservi che la positività di $\mathcal{V}$ implica che $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ è una configurazione di equilibrio stabile.

Esempio 15.3.3.

Consideriamo il bi-pendolo omogeneo, contenuto a pag. 118 di [Ughi, Dispense di Fisica Matematica].



Le equazioni di Lagrange linearizzate intorno alla configurazione di equilibrio $\mathbf{q}_e = (0, 0)$, sono

$$\begin{cases} mL^2(\frac{7}{3}\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2) + \frac{5}{2}mgLx_1 = & 0 \\ mL^2(2\ddot{x}_1 + \frac{8}{3}\ddot{x}_2) + 2mgLx_2 = & 0 \end{cases} \qquad \vec{x}(t) = \frac{1}{\varepsilon}(\vec{q}(t) - \vec{q}_e) \tag{15.3.22}$$

L'eq. caratteristica del sistema (15.3.22) è data da

$$\det\left(g \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \gamma L \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 2 \\ 2 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \right) = 0 \ , \tag{15.3.23}$$

cioè

$$\gamma^2 - \frac{51}{10}\frac{g}{L}\gamma + \frac{45}{20}\frac{g^2}{L^2} = 0 \ , \tag{15.3.24}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

che ammette le due soluzioni positive

$$\gamma_1 = \frac{3}{20}\frac{g}{L}(17 - 3\sqrt{21}) \ , \quad \gamma_2 = \frac{3}{20}\frac{g}{L}(17 + 3\sqrt{21}) \ . \tag{15.3.25}$$

I corrispondenti valori di λ sono $\lambda_1 = \pm i\sqrt{\gamma_1}$, $\lambda_2 = \pm i\sqrt{\gamma_2}$. Gli autovettori corrispondenti sono tutte e sole le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (\frac{5}{2}g - \frac{7}{3}L\gamma_k)u_1 - 2L\gamma_k u_2 & = 0 \\ -2L\gamma_k u_1 + (2g - \frac{8}{3}L\gamma_k)u_2 & = 0 \end{cases} \qquad k = 1, 2 \ . \tag{15.3.26}$$

Tale sistema lineare e omogeneo ha, per ogni γ_k, ∞^1 soluzioni (un autospazio V_k di $dim = 1$) poichè, per la (15.3.23) le due equazioni (15.3.26) sono linearmente *dipendenti*. Quindi, risolvendo, ad esempio la prima di esse, otteniamo

$$u_2 = (\frac{5}{4}\frac{g}{L\gamma_k} - \frac{7}{6})u_1 \ .$$

Pertanto, sostituendo a γ i 2 valori (15.3.25) si ottengono gli autovettori

$$\mathbf{u}^{(1)} = \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{25}{3(17-3\sqrt{21})} - \frac{7}{6} \end{bmatrix} \qquad \beta_1 \in \mathbb{R} \ , \tag{15.3.27}$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \beta_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{25}{3(17+3\sqrt{21})} - \frac{7}{6} \end{bmatrix} \qquad \beta_2 \in \mathbb{R} \ . \tag{15.3.28}$$

Dunque, le soluzioni fondamentali reali di (15.3.22), dette *modi normali* di vibrazione, sono

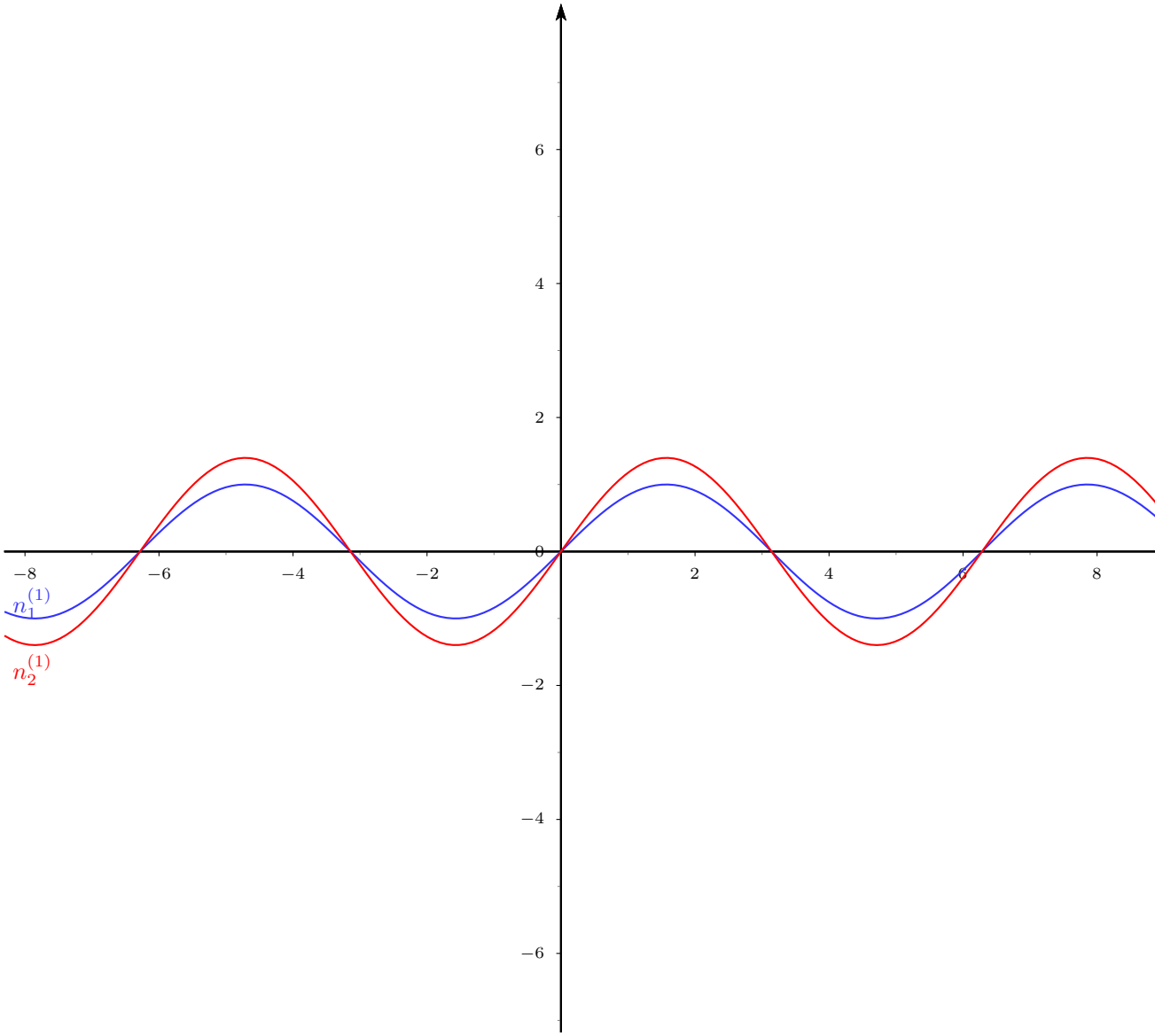
$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{25}{3(17-3\sqrt{21})} - \frac{7}{6} \end{bmatrix} (a_{11}\cos(\nu_1 t) + a_{12}\sin(\nu_1 t)) \ , \quad \nu_1 = \sqrt{\gamma_1} = \sqrt{\frac{3}{20}\frac{g}{L}(17 - 3\sqrt{21})} \\ \mathbf{n}^{(2)}(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{25}{3(17+3\sqrt{21})} - \frac{7}{6} \end{bmatrix} (a_{21}\cos(\nu_2 t) + a_{22}\sin(\nu_2 t)) \ , \quad \nu_2 = \sqrt{\gamma_2} = \sqrt{\frac{3}{20}\frac{g}{L}(17 + 3\sqrt{21})} \ , \end{aligned}$$

cioè due moti periodici di pulsazione, rispettivamente, ν_1 e ν_2. Analizziamo in dettaglio i due modi normali di vibrazione, ponendo, per semplicità, nel primo modo $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1/\varepsilon$ e, nel secondo modo, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1/\varepsilon$. Il primo modo normale si riduce a

$$\begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{25}{3(17-3\sqrt{21})} - \frac{7}{6} \end{bmatrix} \sin(\nu_1 t)$$

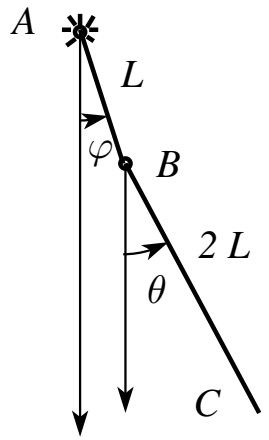
il cui grafico è

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Si vede che le due componenti (la prima disegnata in blu e la seconda in rosso) oscillano in concordanza di fase. Tale modo corrisponde a un moto del pendolo doppio in cui le 2 aste formano angoli concordi con la verticale

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

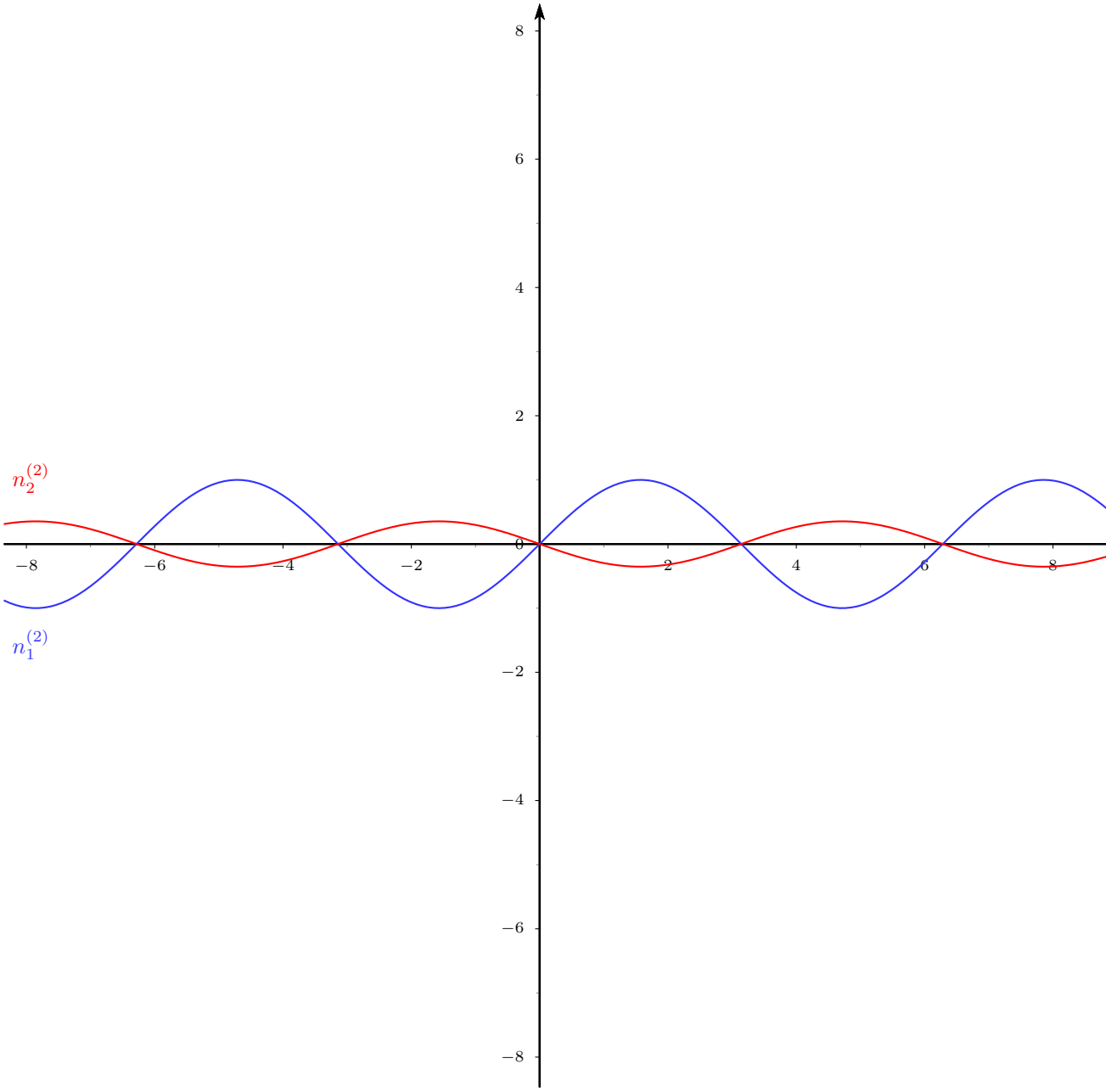


Il secondo modo normale di vibrazione assume la forma

$$\begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{25}{3(17+3\sqrt{21})} - \frac{7}{6} \end{bmatrix} \sin(\nu_2 t)$$

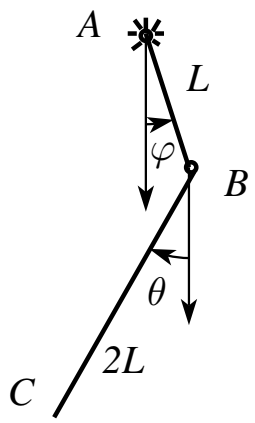
il cui grafico è

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



Si vede che le due componenti (la prima disegnata in blu e la seconda in rosso) oscillano in opposizione di fase. Tale modo corrisponde a un moto del pendolo doppio in cui le 2 aste formano angoli discordi con la verticale

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.



L'integrale generale del pendolo doppio linearizzato intorno alla configurazione di equilibrio $\mathbf{q}_e = (0,0)$ sarà

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_e + \varepsilon \mathbf{x}(t) = \varepsilon\big(b_1 \mathbf{n}^{(1)}(t) + b_2 \mathbf{n}^{(2)}(t)\big) \qquad b_1, b_2 \in \mathbb{R} \ ,$$

cioè

$$\begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \varepsilon \left(\mathbf{u}^{(1)} \left(a_{11} \cos(\nu_1 t) + a_{12} \sin(\nu_1 t) \right) + \mathbf{u}^{(2)} \left(a_{21} \cos(\nu_2 t) + a_{22} \sin(\nu_2 t) \right) \right)$$

Le quattro costanti d'integrazione $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, che assorbono le costanti b_1 e b_2, dipendono dalle condizioni iniziali.

15.4 Costruzione delle coordinate normali

In questa sezione, dimostreremo che la procedura di soluzione dei sistemi differenziali

$$A\ddot{\mathbf{x}} + \mathcal{V}\mathbf{x} = \mathbf{0} \ , \tag{15.4.1}$$

vista nella sezione precedente, equivale alla scelta di opportune coordinate, diverse da quelle fisiche originali, in cui le equazioni di moto si disaccoppiano. Tali coordinate sono dette *normali*. Premettiamo due proposizioni e un teorema di natura prettamente algebrica.

Proposizione 15.4.1. *Sia A una matrice quadrata simmetrica reale e definita positiva, cioè*

$$A^T = A \tag{15.4.2}$$

$$\textstyle\sum_{j,k=1}^{l} A_{jk} x_j x_k \geq 0 \ \forall x_j \in \mathbb{R} \ , \qquad \sum_{j,k=1}^{l} A_{jk} x_j x_k = 0 \Rightarrow x_j = 0 \quad j = 1, \cdots l \tag{15.4.3}$$

Allora, A definisce un prodotto scalare in $\mathbb{R}^l$ che denotiamo con $<,>$ (diverso da quello canonico) tramite

$$< \vec{v}, \vec{w} >= \sum_{j,k=1}^{l} A_{jk} v_j w_k = ([\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T A [\vec{w}]^{\mathcal{B}} \ , \tag{15.4.4}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

dove v_j, $j = 1, \cdots, l$, sono le componenti di $\vec{v}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_l}\}$ di $\mathbb{R}^l$ e analogamente per le w_k. La matrice A, i cui elementi godono della proprietà

$$A_{jk} =< \vec{e}_j, \vec{e}_k > , \tag{15.4.5}$$

è detta la matrice rappresentativa del prodotto scalare $<,>$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Dimostrazione. È immediato verificare che la (15.4.2) garantisce che la (15.4.4) è una forma bilineare simmetrica, cioè invariante rispetto allo scambio dei suoi argomenti, mentre la (15.4.3) garantisce la positività di tale forma. Infine, la (15.4.5) è assicurata dal fatto che

$$< \vec{e}_j, \vec{e}_k >= \sum_{r,s=1}^{l} A_{rs}[\vec{e}_j]^{\mathcal{B}}_r[\vec{e}_k]^{\mathcal{B}}_s = \sum_{r,s=1}^{l} A_{rs}\delta_{jr}\delta_{ks} = A_{jk}$$

□

N.B. Se $A = \mathbb{1}_l$, dalla (15.4.5) segue che $< \vec{e}_j, \vec{e}_k >= \delta_{jk}$, quindi il prodotto scalare $<,>$ coincide con quello canonico.

Esempio 15.4.1. *Vedi [Abate, Cap. 12, Sez. 12.1].*

Vediamo come si trasforma la matrice A, rappresentativa di una forma bilineare simmetrica, sotto un cambio di base.

Proposizione 15.4.2. *Scelta una nuova base $\mathcal{B}' = \{\vec{e_1}', \cdots, \vec{e_l}'\}$ in $\mathbb{R}^l$ e detta S la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$,*

$$[\vec{v}]^{\mathcal{B}} = [\mathbb{1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}[\vec{v}]^{\mathcal{B}'} = S[\vec{v}]^{\mathcal{B}'} , \tag{15.4.6}$$

costituita dalle colonne delle componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto a $\mathcal{B}$

$$S = [\mathbb{1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = [[\vec{e_1}']^{\mathcal{B}}, \cdots, [\vec{e_l}']^{\mathcal{B}}] , \tag{15.4.7}$$

la matrice rappresentativa del prodotto scalare $<,>$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ è definita da

$$A'_{jk} :=< \vec{e_j}', \vec{e_k}' >$$

e soddisfa la legge di trasformazione

$$A' = S^T A S \tag{15.4.8}$$

Tale trasformazione si dice <u>*congruenza*</u>*.*

Dimostrazione. La legge di trasformazione della matrice rappresentativa del prodotto scalare, si ricava osservando che

$$< \vec{v}, \vec{w} > \overset{(15.4.4)}{=} ([\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T A[\vec{w}]^{\mathcal{B}} \overset{(15.4.6)}{=} (S[\vec{v}]^{\mathcal{B}'})^T A\, S[\vec{w}]^{\mathcal{B}'} = ([\vec{v}]^{\mathcal{B}'})^T (S^T A\, S)[\vec{w}]^{\mathcal{B}'} , \tag{15.4.9}$$

da cui segue la (15.4.8). □

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

N.B. La proposizione precedente vale anche se sostituiamo alla nozione di prodotto scalare, positivo per definizione, il concetto più generale di *forma bilineare simmetrica*, rinunciando alla positività. In particolare, vale la legge di trasformazione per congruenza (15.4.8) sotto un cambiamento di base.

N.B. La trasformazione di congruenza è, in genere, diversa dalla legge di trasformazione di un operatore $\mathbf{C} : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ che, invece, si trasforma per similitudine (o coniugio)

$$[\mathbf{C}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} = [\mathbb{1}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} [\mathbf{C}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} [\mathbb{1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = S^{-1} [\mathbf{C}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} S \ . \tag{15.4.10}$$

Le due leggi coincidono se e solo se S è una matrice *ortogonale*.

Definizione 15.4.1. *Una base $\mathcal{B}'$ si dice ortonormale rispetto al prodotto scalare $<,>$ se la sua matrice rappresentativa su tale base è uguale alla matrice identità*

$$A'_{jk} =< \vec{e_j}', \vec{e_k}' >= \delta_{jk} \ . \tag{15.4.11}$$

Nel teorema successivo utilizzeremo il fatto che, data l'invertibilità della matrice A, il sistema differenziale (15.4.1)si può scrivere in forma normale

$$\ddot{\mathbf{x}} + A^{-1}\mathcal{V}\mathbf{x} = \mathbf{0} \ , \tag{15.4.12}$$

introducendo la nuova matrice definita da

$$C := A^{-1}\mathcal{V} \ . \tag{15.4.13}$$

La dimostrazione è costruttiva, quindi fornirà anche una procedura di calcolo delle coordinate normali.

Teorema 15.4.1 (diagonalizzazione simultanea di due matrici simmetriche, delle quali una definita positiva)**.** *Sia A una matrice $l \times l$ simmetrica e definita positiva e $\mathcal{V}$ una matrice $l \times l$ simmetrica. Esiste una matrice invertibile*

$$S : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$$

che, per congruenza, trasforma A nella matrice identità e, simultaneamente, diagonalizza $\mathcal{V}$

$$S^T A S = \mathbb{1}_l \qquad S^T \mathcal{V} S = diag(\gamma_1, \cdots, \gamma_l) \tag{15.4.14}$$

Dimostrazione. Si basa su due fatti:

1. per la Prop. 15.4.1, la matrice A definisce un prodotto scalare in $\mathbb{R}^l$ (che denoteremo con $<,>$) e la matrice $\mathcal{V}$ una forma bilineare simmetrica, se vengono interpretate come le matrici rappresentative di tali forme sulla base canonica $\mathcal{B}$;
2. la matrice $C = A^{-1}\mathcal{V}$ definisce un operatore $\mathbf{C} : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$, simmetrico *rispetto al prodotto scalare definito da A*, cioè tale che $< \vec{v}, \mathbf{C}\vec{w} >=< \mathbf{C}\vec{v}, \vec{w} >$.

Infatti, dalla definizione di $\mathbf{C}$ e dalla simmetria di $\mathcal{V}$, segue che

$$< \vec{v}, \mathbf{C}\vec{w} >= ([\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T A[\mathbf{C}\vec{w}]^{\mathcal{B}} = ([\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T AC[\vec{w}]^{\mathcal{B}} = ([\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T \mathcal{V}[\vec{w}]^{\mathcal{B}} = (\mathcal{V}[\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T [\vec{w}]^{\mathcal{B}} \ ;$$

d'altra parte, per la simmetria di A vale che

$$< \mathbf{C}\vec{v}, \vec{w} >= (C[\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T A[\vec{w}]^{\mathcal{B}} = (AC[\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T [\vec{w}]^{\mathcal{B}} = (\mathcal{V}[\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T [\vec{w}]^{\mathcal{B}} \ .$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Dunque, per il teorema *spettrale* (vedi Abate, Cap. 12), esiste in $\mathbb{R}^l$ una base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \cdots, \mathbf{u}^{(l)}\}$ di autovettori reali dell'operatore $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C}\mathbf{u}^{(k)} = \gamma_k \mathbf{u}^{(k)} \qquad \gamma_k \in \mathbb{R} \ , \tag{15.4.15}$$

la quale è ortonormale rispetto al prodotto scalare definito da A, cioè tale che

$$A'_{jk} =< \mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{u}^{(k)} >= ([\mathbf{u}^{(j)}]^{\mathcal{B}})^T A[\mathbf{u}^{(k)}]^{\mathcal{B}} = \delta_{jk} \ . \tag{15.4.16}$$

Su tale base, la matrice rappresentativa dell'operatore $\mathbf{C}$ è diagonale e, detti $(\gamma_1, \ldots, \gamma_l)$ i suoi autovalori, dalla definizione di $\mathbf{C}$ segue che

$$[\mathbf{C}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} = diag(\gamma_1, \cdots, \gamma_l) = (A')^{-1}\mathcal{V}' \overset{(15.4.16)}{=} \mathcal{V}' \ , \tag{15.4.17}$$

dove, con $\mathcal{V}'$ abbiamo denotato la matrice rappresentativa sulla base $\mathcal{B}'$ della forma bilineare definita dalla matrice $\mathcal{V}$ sulla base $\mathcal{B}$. Detta S la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$,

$$S := [\mathbb{1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = [[\mathbf{u}^{(1)}]^{\mathcal{B}}, \cdots, [\mathbf{u}^{(l)}]^{\mathcal{B}}] \ ,$$

la matrice C si trasforma per similitudine come nella (15.4.10), mentre le matrici A e $\mathcal{V}$ si trasformano per congruenza e quindi, per la (15.4.16) si ottiene

$$S^T A S = A' = \mathbb{1}_l$$

e per la (15.4.17)

$$S^T \mathcal{V} S = \mathcal{V}' = diag(\gamma_1, \ldots, \gamma_l)$$

□

N.B. Si osservi che la matrice del cambiamento di base S *non* è ortogonale, a meno che la matrice $A = \mathbb{1}_l$, nel qual caso il problema si riduce alla diagonalizzazione della sola matrice $\mathcal{V}$ mediante una trasformazione ortogonale.

Corollario 15.4.1. *Dato il sistema differenziale lineare*

$$A\ddot{\mathbf{x}} + \mathcal{V}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{15.4.18}$$

con A matrice reale, simmetrica e definita positiva, $\mathcal{V}$ matrice reale e simmetrica, esiste una trasformazione <u>*lineare*</u> *di coordinate $T : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l, (x_1, \ldots, x_l) \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_l)$*

$$\boldsymbol{\xi} = T\mathbf{x} \tag{15.4.19}$$

che permette di disaccoppiare il sistema, cioè di scriverlo nella forma

$$\ddot{\xi}_j + \gamma_j \xi_j = 0 \qquad j = 1, \cdots, l \qquad \gamma_j \in \mathbb{R} \ . \tag{15.4.20}$$

Le nuove coordinate $(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ sono dette coordinate normali *per il sistema* (15.4.18).

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Dimostrazione. Basta identificare $\mathbf{x}(t) = [\vec{v}]^{\mathcal{B}}$ e $\boldsymbol{\xi}(t) = [\vec{v}]^{\mathcal{B}'}$ e tener conto che della (15.4.6) e dalle (15.4.14) segue

$$\mathbf{0} = S^T A[\ddot{\vec{v}}]^{\mathcal{B}} + S^T \mathcal{V}[\vec{v}]^{\mathcal{B}} = S^T A S[\ddot{\vec{v}}]^{\mathcal{B}'} + S^T \mathcal{V} S[\vec{v}]^{\mathcal{B}'} = \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathcal{V}'\boldsymbol{\xi} \ .$$

Dunque, la trasformazione lineare T è data da

$$T = S^{-1} = S^T A$$

□

Ricapitolando, la procedura per trovare le coordinate normali di un sistema come (15.4.18) consta dei seguenti passi:

1. calcolare gli autovalori dell'operatore $\mathbf{C}$ definito dalla matrice $[\mathbf{C}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = C = A^{-1}\mathcal{V}$. A tale scopo, si deve risolvere l'equazione caratteristica

   $$\det(C - \gamma \mathbb{1}_l) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathcal{V} - \gamma A) = 0 \ , \tag{15.4.21}$$

   poichè $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Il Teorema 15.4.1 assicura che le soluzioni di (15.4.21) sono tutte reali.

2. Calcolare gli autovettori di $\mathbf{C}$, risolvendo i sistemi lineari

   $$(C - \gamma_k \mathbb{1}_l)\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathcal{V} - \gamma_k A)\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{0} \qquad k = 1, \cdots, l \ . \tag{15.4.22}$$

   Il Teorema 15.4.1 assicura che i sistemi (15.4.22) ammettono, in totale, *almeno* l soluzioni reali linearmente indipendenti.

3. Normalizzare ciascun autovettore $\mathbf{u}^{(k)}$, che è sempre definito a meno di una o più costanti moltiplicative. Le costanti sono fissate dalle relazioni di ortogonalità (15.4.16)

   $$([\mathbf{u}^{(j)}]^{\mathcal{B}})^T A[\mathbf{u}^{(k)}]^{\mathcal{B}} = \delta_{jk} \qquad j \leq k = 1, \cdots, l.$$

4. Costruire la matrice S, incolonnando gli autovettori normalizzati

   $$S = [[\mathbf{u}^{(1)}]^{\mathcal{B}}, \cdots, [\mathbf{u}^{(l)}]^{\mathcal{B}}] \ .$$

5. Calcolare la matrice $T = S^{-1} = S^T A$ e determinare le coordinate normali

   $$\boldsymbol{\xi} = S^{-1}\mathbf{x} \ .$$

N.B. Se si vuole soltanto trovare l'integrale generale (dipendente da $2l$ costanti arbitrarie) del sistema differenziale (15.4.18), ci si può limitare ai passi 1 e 2 della procedura per trovare gli autovalori e gli autovettori generalizzati (a meno di costanti moltiplicative) e poi si può scrivere l'integrale generale come sovrapposizione dei modi normali.

Esempio 15.4.2.

Riprendiamo l'esempio 15.3.2 della molecola biatomica.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

1. L'equazione caratteristica del sistema (15.3.8) è data dalla

$$\det\left(c\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \gamma\, m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \ , \tag{15.4.23}$$

che ammette le due soluzioni positive

$$\gamma_1 = \frac{c}{m} \ , \qquad \gamma_2 = 5\frac{c}{m} \ . \tag{15.4.24}$$

I corrispondenti valori di λ sono $\lambda_1 = \sqrt{-\gamma_1} = \pm i\sqrt{\frac{c}{m}}$, $\lambda_2 = \sqrt{-\gamma_2} = \pm i\sqrt{5\frac{c}{m}}$.

2. Gli autovettori corrispondenti sono tutte e sole le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (3c - \gamma_k m)u_1 - 2cu_2 & = 0 \\ -2cu_1 + (3c - \gamma_k m)u_2 & = 0 \end{cases} \tag{15.4.25}$$

Tale sistema lineare e omogeneo ha, per ogni γ_k, ∞^1 soluzioni poichè le due equazioni sono linearmente dipendenti. Ad esempio, la prima delle (15.4.25) fornisce

$$u_2 = (\frac{3}{2} - \gamma_k \frac{m}{2c})u_1$$

Pertanto, sostituendo a γ_k i due valori (15.4.24) si ottengono gli autovettori

$$\mathbf{u}^{(1)} = \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \beta_1 \in \mathbb{R} \ , \tag{15.4.26}$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \beta_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \beta_2 \in \mathbb{R} \ . \tag{15.4.27}$$

Quindi, i due modi normali di vibrazione sono

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \big(a_{11}\cos(\nu_1 t) + a_{12}\sin(\nu_1 t)\big) \ , \quad \nu_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} \ , \\ \mathbf{n}^{(2)}(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \big(a_{21}\cos(\nu_2 t) + a_{22}\sin(\nu_2 t)\big) \ , \quad \nu_2 = \sqrt{5\frac{c}{m}} \ , \end{aligned}$$

cioè due moti periodici di pulsazione, rispettivamente, ν_1 e ν_2. L'integrale generale per questa molecola biatomica sarà

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_e + \mathbf{x}(t) = \mathbf{q}_e + \mathbf{n}^{(1)}(t) + \mathbf{n}^{(2)}(t) \ ,$$

cioè

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \frac{L}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\Big(a_{11}\cos(\nu_1 t) + a_{12}\sin(\nu_1 t)\Big) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\Big(a_{21}\cos(\nu_2 t) + a_{22}\sin(\nu_2 t)\Big)$$

Le quattro costanti d'integrazione $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ dipendono dalle condizioni iniziali. Ad esempio, determiniamo la soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali

$$\mathbf{q}(0) = \frac{L}{7}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \ , \qquad \dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix} \ . \tag{15.4.28}$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Se imponiamo tali condizioni sull'integrale generale otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} & = & \frac{L}{35} \\ a_{11} - a_{21} & = & -\frac{L}{35} \\ a_{12}\nu_1 + a_{22}\nu_2 & = & 0 \\ a_{12}\nu_1 - a_{22}\nu_2 & = & v_0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$a_{11} = 0 \ , a_{12} = \frac{v_0}{2\nu_1} \ , a_{21} = \frac{L}{35} \ , a_{22} = -\frac{v_0}{2\nu_2} \ . \tag{15.4.29}$$

Pertanto, l'unico moto del modello che soddisfa le condizioni iniziali (15.4.28) è

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \frac{L}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{v_0}{2\nu_1} \sin(\nu_1 t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \left(\frac{L}{35} \cos(\nu_2 t) - \frac{v_0}{2\nu_2} \sin(\nu_2 t) \right) \ ,$$

cioè un moto oscillatorio, quasi-periodico poichè $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{5}$ è un numero irrazionale.

3. Imponiamo le condizioni di normalizzazione del passo 3 della procedura suddetta

$$\left([\mathbf{u}^{(1)}]^{\mathcal{B}} \right)^T A \, [\mathbf{u}^{(2)}]^{\mathcal{B}} = 0 \ , \quad \left([\mathbf{u}^{(1)}]^{\mathcal{B}} \right)^T A \, [\mathbf{u}^{(1)}]^{\mathcal{B}} = 1 \ , \quad \left([\mathbf{u}^{(2)}]^{\mathcal{B}} \right)^T A \, [\mathbf{u}^{(2)}]^{\mathcal{B}} = 1 \ .$$

In questo caso, la prima condizione è identicamente soddisfatta, poichè gli autovalori corrispondenti sono distinti e, quindi, gli autovettori corrispondenti sono ortogonali. La seconda e la terza forniscono

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \ , \qquad \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \ .$$

4. Pertanto, la matrice degli autovettori normalizzata è data da

$$S = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \ .$$

5. La sua inversa è

$$T = S^{-1} = S^T A = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \ .$$

Quindi, in questo caso, le coordinate normali sono

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} (x_1 + x_2) \ , \qquad \xi_2 = \sqrt{\frac{m}{2}} (x_1 - x_2) \ ,$$

cioè la somma e la differenza (normalizzate) degli scostamenti dalla configurazione di equilibrio.

Esercizio

Verificare che i dati iniziali per i quali il moto del modello è quello che eccita soltanto il primo modo di vibrazione, sono tutti e soli quelli che realizzano entrambe le condizioni

$$\mathbf{x}(0) \parallel \mathbf{u}^{(1)} \ , \qquad \dot{\mathbf{x}}(0) \parallel \mathbf{u}^{(1)} \ .$$

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.

Capitolo 16

Bibliografia

Libri di testo

M. Abate, *Geometria*, MacGraw-Hill, Milano (1996).

A. Fasano, V. de Rienzo, A. Messina, *Corso di Meccanica Razionale*, Laterza, Bari (1989).

C. Cercignani, *Spazio, Tempo, Movimento*, Zanichelli, Bologna (1977).

T. Levi-Civita, U. Amaldi, *Compendio di Meccanica Razionale*, Zanichelli, Bologna (1975).

T. Levi-Civita, U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Compumat, Roma (2013).

Esercizi

G. Tondo, *Compiti d'esame corretti*, `http://moodle2.units.it/course/view.php?id=7216`

F. Bampi, M. Benati, A. Morro, *Problemi di Meccanica Razionale*, ECIG, Genova (1993).

E. Tonti, *Esercizi di Meccanica Razionale*, Città Studi, Milano (1991).

Dispense

P. Omari, M. Trombetta, *Appunti del corso di Analisi Matematica, parte seconda* DMG (Trieste).

R. Nabergoj, *Fondamenti di Tenuta della Nave al Mare*, (2010), DIA (Trieste).

G. Tondo, *Appunti delle lezioni 2020-2021*, DMG (Trieste),
`http://moodle2.units.it/course/view.php?id=7216`

M. Ughi, *Dispense di Meccanica Razionale*, DMG (Trieste),
`http://www.dmi.units.it/~ughi/pagine/pagina_dispense_meccraz.htm`

M. Ughi, *Dispense di Fisica Matematica*, DMG (Trieste),
`http://www.dmi.units.it/~ughi/pagine/pagina_dispense_fismat.htm`

N.B. Tutti i suddetti materiali didattici sono disponibili presso le biblioteche o i siti web del nostro Ateneo.

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore.