APPENDICE AL CAPITOLO 7

Teoria della produzione e del costo – una trattazione matematica

Questa appendice presenta una trattazione matematica delle basi della teoria della produzione e del costo. Come nell'appendice al Capitolo 4, utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per risolvere il problema della minimizzazione del costo dell'impresa.

Minimizzazione del costo

La teoria dell'impresa si basa sull'ipotesi che le imprese scelgono i fattori produttivi che minimizzano il costo di produzione. Se vi sono due fattori produttivi, il capitale K e il lavoro L, la funzione di produzione $F(K, L)$ descrive il massimo livello di produzione che si può ottenere per ogni possibile combinazione di tali fattori. Supponiamo che ogni fattore nel processo di produzione abbia un prodotto marginale positivo ma decrescente. Quindi, scrivendo i prodotti marginali di capitale e lavoro come $P'_K(K, L)$ e $P'_L(K, L)$, rispettivamente, segue che:

$$P'_K(K,L) = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0$$
$$P'_L(K,L) = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0$$

Un'impresa concorrenziale considera i prezzi del lavoro w e del capitale r come dati, quindi il problema di minimizzazione del costo si può scrivere come:

$$\text{Minimizzare } C = wL + rK \tag{A7.1}$$

con il vincolo di produrre una quantità fissa q_0:

$$F(K, L) = q_0 \tag{A7.2}$$

C rappresenta il costo di produzione per la quantità fissa q_0.

Per determinare la domanda di capitale e lavoro dell'azienda, scegliamo i valori di K e L che minimizzano (A7.1) con il vincolo (A7.2). Possiamo risolvere questo problema di ottimizzazione vincolato in tre passaggi utilizzando il metodo descritto nell'appendice al Capitolo 4:

- **Passo 1:** impostiamo la lagrangiana, che è la somma di due componenti: il costo di produzione (da minimizzare) e il prodotto del moltiplicatore di Lagrange λ per il vincolo di produzione che l'impresa deve rispettare:

$$\Phi = wL + rK - \lambda[F(K, L) - q_0] \tag{A7.3}$$

- **Passo 2:** deriviamo la lagrangiana rispetto a K, L e λ, quindi uguagliamo a zero le derivate risultanti per ottenere le condizioni necessarie per un minimo.[21]

$$\begin{aligned} \partial\Phi / \partial K &= r - \lambda P'_K(K,L) = 0 \\ \partial\Phi / \partial L &= w - \lambda P'_L(K,L) = 0 \\ \partial\Phi / \partial\lambda &= q_0 - F(K,L) = 0 \end{aligned} \tag{A7.4}$$

- **Passo 3:** In generale, queste equazioni si possono risolvere per ottenere i valori ottimi di L, K e λ. È particolarmente istruttivo combinare le prime due condizioni in (A7.4) per ottenere:

$$P'_K(K, L)/r = P'_L(K, L)/w \tag{A7.5}$$

L'equazione (A7.5) indica che, se l'impresa sta minimizzando i costi, sceglierà i fattori produttivi in modo da uguagliare i rapporti del prodotto marginale di ciascun fattore divisi per il suo prezzo. È esattamente la stessa condizione ricavata precedentemente come equazione 7.4 in capitolo.

Infine, possiamo riscrivere le prime due condizioni di (A7.4) per calcolare il moltiplicatore di Lagrange:

$$\begin{aligned} r - \lambda P'_K(K,L) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{r}{P'_K(K,L)} \\ w - \lambda P'_L(K,L) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{w}{P'_L(K,L)} \end{aligned} \tag{A7.6}$$

Supponiamo che la produzione aumenti di una unità. Poiché il prodotto marginale del capitale misura la produzione aggiuntiva corrispondente a un aumento del capitale, $1/P'_K(K, L)$ misura il capitale aggiuntivo necessario per produrre una unità di prodotto in più. Perciò, $r/P'_K(K,L)$ misura il costo aggiuntivo di produrre una unità di prodotto in più aumentando il capitale. Similmente, $w/P'_L(K, L)$ misura il costo aggiuntivo di produrre una unità di prodotto in più aumentando il lavoro. In entrambi i casi il moltiplicatore di Lagrange è uguale al costo marginale di produzione, perché indica di quanto aumenta il costo se si aumenta la produzione di una unità.

Saggio marginale di sostituzione tecnica

Ricordiamo che un *isoquanto* è una curva che rappresenta l'insieme di tutte le combinazioni dei fattori produttivi che forniscono lo stesso livello di produzione, diciamo q_0. Perciò, la condizione che $F(K, L) = q_0$ rappresenta un isoquanto di produzione. Al variare delle combinazioni dei fattori produttivi lungo un isoquanto, la variazione della produzione, data dalla derivata totale di $F(K, L)$ è uguale a zero ($dq = 0$). Perciò:

$$P'_K(K, L)dK + P'_L(K, L)dL = dq = 0 \tag{A7.7}$$

Riordinando i termini si ha:

$$-dK/dL = SMST_{LK} = P'_L(K, L)/P'_K(K, L) \tag{A7.8}$$

dove $SMST_{LK}$ è il saggio marginale di sostituzione tecnica tra lavoro e capitale dell'impresa.

Ora riscriviamo la condizione data da (A7.5) per ottenere:

$$P'_L(K, L)/P'_K(K, L) = w/r \tag{A7.9}$$

Poiché il lato sinistro di (A7.8) rappresenta l'opposto della pendenza dell'isoquanto, segue che nel punto di tangenza dell'isoquanto e della retta di isocosto, il saggio marginale di sostituzione tecnica dell'impresa (che rappresenta il trade-off tra fattori produttivi mantenendo la produzione costante) è uguale al rapporto tra i prezzi dei fattori produttivi (che rappresenta la pendenza della linea di isocosto dell'impresa).

Possiamo osservare questo risultato da un altro punto di vista riscrivendo nuovamente (A7.9):

$$P'_L/w = P'_K/r \tag{A7.10}$$

L'equazione (A7.10) è identica a (A7.5) e indica che i prodotti marginali di tutti i fattori produttivi devono essere uguali quando si tiene conto del costo unitario di ciascun fattore.

Dualità nella produzione e teoria dei costi

Come nella teoria del consumatore, la decisione dell'impresa relativa ai fattori produttivi ha natura duale. La scelta ottima di K e L si può analizzare non solo come problema di scegliere la retta di isocosto più bassa tangente all'isoquanto di produzione, ma anche come problema di scegliere l'isoquanto di produzione più alto tangente a una data retta di isocosto. Supponiamo di voler spendere C_0 per la produzione. Il problema duale consiste nel determinare quale combinazione di K e L consentirà di produrre la massima quantità al costo C_0. Possiamo vedere l'equivalenza dei due approcci risolvendo il seguente problema:

$$\text{Massimizzare } F(K, L) \text{ con il vincolo } wL + rL = C_0$$

che possiamo risolvere utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

- **Passo 1:** impostiamo la lagrangiana:

$$\Phi = F(K, L) - \mu(wL + rK - C_0) \tag{A7.12}$$

dove μ è il moltiplicatore di Lagrange.

- **Passo 2:** deriviamo la lagrangiana rispetto a K, L e μ e uguagliamo a zero l'espressione risultante per trovare le condizioni necessarie per un massimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial K} &= \mathrm{P}'_K(K,L) - \mu r = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial L} &= \mathrm{P}'_L(K,L) - \mu w = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} &= wL - rK + C_0 = 0 \end{aligned} \tag{A7.13}$$

- **Passo 3:** normalmente possiamo utilizzare le equazioni A7.13 per trovare K e L. In particolare, combiniamo le prime due equazioni per vedere che:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\mathrm{P}'_K(K,L)}{r} \\ \mu &= \frac{\mathrm{P}'_L(K,L)}{w} \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{P}'_K(K,L)}{r} &= \frac{\mathrm{P}'_L(K,L)}{w} \end{aligned} \tag{A7.14}$$

È lo stesso risultato di A7.5, ovvero la condizione necessaria per minimizzare i costi.

Le funzioni di costo e di produzione di Cobb-Douglas

Data una specifica funzione di produzione $F(K, L)$, si possono utilizzare le condizioni (A7.13) e (A7.14) per ricavare la *funzione di costo* $C(q)$. Per comprendere questo principio, lavoriamo sull'esempio di una **funzione di produzione di Cobb-Douglas**. Tale funzione è:

$$F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

dove A, α e β sono costanti positive.

- **Funzione di produzione di Cobb-Douglas** Funzione di produzione della forma $q = AK^{\alpha}L^{\beta}$, dove q è il livello di pro duzione, K è la quantità di capitale, L è la quantità di lavoro e A, α e β sono costanti positive.