APPENDICE AL CAPITOLO 4

Teoria della domanda – una trattazione matematica

Questa appendice presenta una trattazione matematica delle basi della teoria della domanda. Il nostro obiettivo consiste nel fornire una breve panoramica della teoria della domanda agli studenti che abbiano familiarità con l'analisi matematica. Per raggiungerlo, spiegheremo e poi applicheremo il concetto di ottimizzazione vincolata.

Massimizzazione dell'utilità

Nel §3.1 abbiamo spiegato che una funzione di utilità è una formula che assegna un livello di utilità a ciascun paniere.

Nel §3.5 l'utilità marginale è descritta come la soddisfazione aggiuntiva ricavata dal consumo di una quantità aggiuntiva di un bene.

La teoria del comportamento del consumatore si basa sull'ipotesi che i consumatori massimizzino l'utilità rispettando il vincolo posto da un budget limitato. Nel Capitolo 3 abbiamo visto che per ciascun consumatore è possibile definire una *funzione di utilità* che associa un livello di utilità a ciascun paniere. Abbiamo visto, inoltre, che l'*utilità marginale* di un bene è definita come la variazione dell'utilità associata a un aumento unitario del consumo del bene. Utilizzando l'analisi matematica, come faremo in questa appendice, possiamo misurare l'utilità marginale come variazione dell'utilità determinata da un incremento molto piccolo del consumo.

Supponiamo per esempio che la funzione di utilità di Roberto sia data da $U(X, Y) = \log X + \log Y$, dove, per rispettare le convenzioni, il cibo è ora rappresentato da X e il vestiario da Y. In questo caso l'utilità marginale associata al consumo aggiuntivo di X è data dalla *derivata parziale della funzione di utilità rispetto al bene X*. U'_X, che rappresenta l'utilità marginale del bene X, è dato da:

$$\frac{\partial U(X,Y)}{\partial X} = \frac{\partial U(\log X + \log Y)}{\partial X} = \frac{1}{X}$$

Nell'analisi che segue ipotizzeremo, come nel Capitolo 3, che mentre il livello di utilità sia una funzione *crescente* delle quantità di beni consumate, l'utilità marginale *decresca* con il consumo. Quando vi sono due beni X e Y, il problema di ottimizzazione del consumatore può quindi essere espresso come:

$$\text{Massimizzare } U(X, Y) \tag{A4.1}$$

dato il vincolo che tutto il reddito sia speso per i due beni:

$$P_X X + P_Y Y = RD \tag{A4.2}$$

dove $U()$ è la funzione di utilità, X e Y sono le quantità acquistate dei due beni, P_X e P_Y i prezzi dei beni e RD il reddito.[1]

Per determinare la domanda del singolo consumatore rispetto ai due beni, scegliamo i valori di X e di Y che massimizzano (A4.1) dato il vincolo (A4.2). Conoscendo la forma della funzione di utilità, possiamo risolvere il problema trovando direttamente la domanda del consumatore per X e Y. Tuttavia, anche scrivendo la funzione di utilità nella sua forma generale $U(X, Y)$, è possibile utilizzare la tecnica dell'*ottimizzazione vincolata* per descrivere le condizioni che devono valere quando il consumatore massimizza l'utilità.

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

• **Metodo dei moltiplicatori di Lagrange** Tecnica per la massimizzazione o minimizzazione di una funzione dati o più vincoli.

Il **metodo dei moltiplicatori di Lagrange** è una tecnica che può essere utilizzata per massimizzare o minimizzare una funzione, dati uno o più vincoli. Utilizzeremo questa tecnica per analizzare la produzione e i problemi relativi ai costi nel seguito del libro, perciò descriviamo passo per passo l'applicazione del metodo al problema di ottimizzazione del consumatore dato dalle equazioni (A4.1) e (A4.2).

1. **Formulare il problema** Prima di tutto, scriviamo la lagrangiana per il problema. La **lagrangiana** è data dalla somma della funzione da massimizzare o minimizzare (in questo caso, viene massimizzata l'utilità) e di una variabile che chiamiamo λ moltiplicata per il vincolo (in questo caso il vincolo di bilancio del consumatore). Interpreteremo il significato di λ tra breve. La lagrangiana è quindi:

• **Lagrangiana** Somma della funzione da massimizzare o minimizzare e di una variabile (il *moltiplicatore di Lagrange*) moltiplicata per il vincolo.

$$\Phi = U(X, Y) - \lambda(P_X X + P_Y Y - RD) \tag{A4.3}$$

Si noti che abbiamo scritto il vincolo di bilancio come:

$$P_X X + P_Y Y - RD = 0$$

ovvero come somma di termini uguale a zero. Abbiamo poi inserito questa somma nella lagrangiana.

2. **Differenziare la lagrangiana** Se scegliamo valori di X e Y che soddisfano il vincolo di bilancio, il secondo termine dell'equazione (A4.3) è zero, quindi la massimizzazione si riduce a massimizzare $U(X, Y)$. Differenziando Φ rispetto a X, Y e λ e poi uguagliando a zero le derivate possiamo ottenere le condizioni necessarie per un punto di massimo.[2] Le equazioni risultanti sono:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X} = U'_X(X,Y) - \lambda P_X = 0$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y} = U'_Y(X,Y) - \lambda P_Y = 0$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = RD - P_X X - P_Y Y = 0$$

Come in precedenza, U' indica l'*utilità marginale*. In altre parole, $U'_X(X, Y) = \partial U(X, Y) / \partial X$ è la variazione dell'utilità determinata da un incremento molto piccolo del consumo del bene X.

3. **Risolvere le equazioni risultanti** Le tre equazioni in (A4.4) possono essere riscritte come:

$$U'_X = \lambda P_X$$
$$U'_Y = \lambda P_Y$$
$$P_X X + P_Y Y = RD$$

Ora è possibile risolvere queste tre equazioni rispetto alle tre incognite. I valori risultanti di X e Y costituiscono la soluzione al problema di ottimizzazione del consumatore: sono le quantità che massimizzano l'utilità.

Il principio di uguaglianza delle utilità marginali ponderate

L'ultima delle tre equazioni è il vincolo di bilancio del consumatore da cui siamo partiti. Le prime due equazioni indicano che ciascun bene verrà consumato fino al punto in cui l'utilità marginale del consumo è un multiplo (λ) del prezzo del bene. Per comprendere le implicazioni di questo, combiniamo le prime due condizioni per ricavare il *principio di uguaglianza delle utilità marginali ponderate:*

$$\lambda = \frac{U'_X(X,Y)}{P_X} = \frac{U'_Y(X,Y)}{P_Y} \tag{A4.5}$$

In altre parole, il rapporto tra l'utilità marginale e il prezzo dei beni è costante. Per ottimizzare, *il consumatore deve ricavare la medesima utilità dall'ultimo euro speso per X e dall'ultimo euro speso per Y*. Se così non fosse, consumare una maggiore quantità di uno dei due beni e una quantità minore dell'altro aumenterebbe l'utilità.

Per caratterizzare più dettagliatamente l'ottimo individuale, possiamo riscrivere le informazioni contenute in (A4.5) per ottenere:

$$\frac{U'_X(X,Y)}{U'_Y(X,Y)} = \frac{P_X}{P_Y} \quad \text{(A4.6)}$$

In altre parole, *il rapporto tra le utilità marginali è uguale al rapporto tra i prezzi.*

Saggio marginale di sostituzione

Nel §3.5 abbiamo mostrato che il saggio marginale di sostituzione è uguale al rapporto tra le utilità marginali dei due beni consumati.

Possiamo utilizzare l'equazione (A4.6) per cogliere la relazione tra le funzioni di utilità e le curve di indifferenza presentata nel Capitolo 3. Una curva di indifferenza rappresenta tutti i panieri che forniscono al consumatore il medesimo livello di utilità. Se U^* è un determinato livello di utilità, la curva di indifferenza corrispondente è data da:

$$U(X,Y) = U^*$$

Quando i panieri vengono modificati dall'aggiunta di piccole quantità di X e dalla sottrazione di piccole quantità di Y, la variazione complessiva dell'utilità deve essere uguale a zero. Quindi,

$$U'_X(X, Y)dX + U'_Y(X, Y)dY = dU^* = 0 \quad \text{(A4.7)}$$

Riformulando:

$$-dY/dX = U'_X(X, Y)/U'_Y(X, Y) = \text{SMS}_{XY} \quad \text{(A4.8)}$$

dove SMS_{XY} rappresenta il saggio marginale di sostituzione di X rispetto a Y. Poiché il membro di sinistra di (A4.8) è l'opposto della pendenza della curva di indifferenza, ne segue che nel punto di tangenza il saggio marginale di sostituzione dell'individuo (che effettua un trade-off tra i beni mantenendo costante l'utilità) è uguale al rapporto tra le utilità marginali, che a sua volta è uguale al rapporto tra i prezzi dei due beni, da (A4.6).[3]

Quando le curve di indifferenza individuali sono convesse, la tangenza tra la curva di indifferenza e la retta di bilancio risolve il problema di ottimizzazione del consumatore. Questo principio è illustrato nella Figura 3.13 del Capitolo 3.

Utilità marginale del reddito

Quale che sia la forma della funzione di utilità, il moltiplicatore di Lagrange λ rappresenta l'utilità aggiuntiva generata dall'allentarsi del vincolo di bilancio – in questo caso dall'aggiunta di un euro al budget. Per comprendere il funzionamento del principio, calcoliamo il differenziale totale della funzione di utilità $U(X, Y)$ rispetto a RD:

$$dU/dRD = U'_X(X, Y)(dX/dRD) + U'_Y(X, Y)(dY/dRD) \quad \text{(A4.9)}$$

Dato che ogni incremento del reddito deve essere suddiviso tra i due beni, ne segue che:

$$dRD = P_X dX + P_Y dY \quad \text{(A4.10)}$$

Sostituendo da (A4.5) in (A4.9), otteniamo:

$$dU/dRD = \lambda(dX/dRD) + \lambda P_Y(dY/dRD) = \lambda(P_X dX + P_Y dY)/dRD \quad \text{(A4.11)}$$

e sostituendo da (A4.10) in (A4.11), otteniamo:

$$dU/dRD = \lambda(P_X dX + P_Y dY)/(P_X dX + P_Y dY) = \lambda \quad \text{(A4.12)}$$

Quindi il moltiplicatore di Lagrange è l'utilità aggiuntiva prodotta da un euro in più di reddito.

Tornando alla nostra analisi iniziale delle condizioni di massimizzazione dell'utilità, vediamo dall'equazione (A4.5) che la massimizzazione richiede che l'utilità ricavata dal consumo di ogni bene, per euro di spesa su tale bene, sia uguale all'utilità marginale di un euro di reddito in più. Se così non fosse, l'utilità potrebbe essere accresciuta da una spesa maggiore sul bene per cui è più alto il rapporto tra l'utilità marginale e il prezzo e da una spesa minore sull'altro bene.

Un esempio

In generale le tre equazioni (A4.4) possono essere risolte per determinare le tre incognite X, Y e λ come funzioni dei due prezzi e del reddito. La sostituzione di λ consente allora di risolvere esprimendo la domanda di ciascuno dei due beni nei termini del reddito e dei due prezzi. Questo principio può essere compreso più facilmente con un esempio.

Una funzione di utilità di uso comune è la **funzione di utilità di Cobb-Douglas**, che può essere rappresentata in due forme:

• Funzione di utilità di Cobb-Douglas Funzione di utilità $U(X,Y) = X^aY^{1-a}$, dove X e Y sono due beni e a è una costante.

$$U(X, Y) = a \log(X) + (1 - a) \log(Y)$$

e:

$$U(X, Y) = X^aY^{1-a}$$

Ai fini della teoria della domanda, queste due forme sono equivalenti, perché producono funzioni di domanda identiche per i beni X e Y. Ricaveremo le funzioni di domanda per la prima forma e lasceremo allo studente la seconda come esercizio.

Per trovare le funzioni di domanda per X e Y, dato il consueto vincolo di bilancio, scriviamo prima di tutto la lagrangiana:

$$\phi = a \log(X) + (1 - a)\log(Y) - \lambda(P_XX + P_YY - RD)$$

Ora, differenziando rispetto a X, Y e λ e uguagliando a zero le derivate, otteniamo:

$$\partial\phi/\partial X = a/X - \lambda P_X = 0$$
$$\partial\phi/\partial Y = (1 - a)/Y - \lambda P_Y = 0$$
$$\partial\phi/\partial\lambda = P_XX + P_YY - RD = 0$$

Le prime due condizioni implicano che:

$$P_XX = a/\lambda \tag{A4.13}$$

$$P_YY = (1 - a)/\lambda \tag{A4.14}$$

Combinando queste espressioni con l'ultima condizione (il vincolo di bilancio) si ottiene:

$$a/\lambda + (1 - a)/\lambda - RD = 0$$

ovvero $\lambda = 1/RD$. Ora possiamo sostituire questo valore di λ in (A4.13) e in (A4.14) per ottenere le funzioni di domanda:

$$X = (a/P_X)RD$$
$$Y = [(1 - a)/P_Y]RD$$

In questo esempio la domanda di ciascun bene dipende solo dal prezzo del bene stesso e dal reddito, non dal prezzo dell'altro bene. Quindi, le elasticità incrociate della domanda sono uguali a zero.

Nel §2.4 abbiamo spiegato che l'elasticità incrociata della domanda è la variazione percentuale della quantità domandata di un bene determinata da un incremento dell'1 per cento del prezzo di un altro bene.

Possiamo inoltre utilizzare questo esempio per riconsiderare il significato dei moltiplicatori di Lagrange. A questo scopo, sostituiamo specifici valori a ciascuno dei parametri del problema. Poniamo $a = 1/2$, $P_X = €1$, $P_Y = €2$ e $RD = €100$. Il moltiplicatore di Lagrange indica che, se il consumatore avesse a disposizione un euro in più di reddito, il livello di utilità raggiunto aumenterebbe di 1/100. Questa conclusione è relativamente semplice da verificare. Con un reddito di €101, la scelta ottimale è $X = 50{,}5$ e $Y = 25{,}25$. Con un po' di aritmetica si ricava che il livello di utilità iniziale è 3,565 e che il nuovo livello di utilità è 3,575. Come si può vedere, l'euro di reddito in più ha in effetti aumentato l'utilità di 0,01, ovvero di 1/100.

LEGGERE

Dualità nella teoria del consumatore

• **Dualità** Modo alternativo per considerare la decisione di massimizzazione dell'utilità del consumatore: invece di scegliere la curva di indifferenza più alta dato un vincolo di bilancio, il consumatore sceglie la retta di bilancio più bassa che tocchi una determinata curva di indifferenza.

La decisione di ottimizzazione del consumatore può essere considerata in due modi differenti. La scelta ottimale di X e Y può essere analizzata non solo come il problema di scegliere la curva di indifferenza più alta – il valore massimo di $U()$ – che tocca la retta di bilancio, ma anche come il problema di scegliere la più bassa retta di bilancio – la spesa minima – che tocca una data curva di indifferenza. Utilizziamo il termine **dualità** per riferirci a queste due prospettive. Per comprendere il principio, consideriamo il seguente problema di ottimizzazione del consumatore: minimizzare il costo del raggiungimento di un determinato livello di utilità:

$$\text{Minimizzare } P_X X + P_Y Y$$

dato il vincolo:

$$U(X, Y) = U^*$$

La lagrangiana corrispondente è data da:

$$\Phi = P_X X + P_Y Y - \mu(U(X, Y) - U^*) \quad \text{(A4.15)}$$

dove μ è il moltiplicatore di Lagrange. Differenziando Φ rispetto a X, Y e μ e uguagliando a zero le derivate troviamo le seguenti condizioni necessarie per la minimizzazione della spesa:

$$P_X - \mu U'_X(X, Y) = 0$$
$$P_Y - \mu U'_Y(X, Y) = 0$$

e:

$$U(X, Y) = U^*$$

Risolvendo le prime due equazioni, e ricordando la (A4.5), vediamo che:

$$\mu = [P_X/U'_X(X, Y)] = [P_Y/U'_Y(X, Y)] = 1/\lambda$$

Poiché è vero anche che:

$$U'_X(X, Y)/U'_Y(X, Y) = \text{SMS}_{XY} = P_X/P_Y$$

la scelta di X e Y che minimizza il costo deve corrispondere al punto di tangenza tra la retta di bilancio e la curva di indifferenza che genera l'utilità U^*. Poiché si tratta dello stesso punto che massimizza l'utilità nel problema originale, il problema duale di minimizzazione della spesa conduce alle stesse funzioni di domanda ottenute nel problema di massimizzazione dell'utilità.

Per comprendere il funzionamento dell'approccio duale, riconsideriamo l'esempio con la funzione di Cobb-Douglas. Il procedimento algebrico è più semplice se si utilizza la forma esponenziale della funzione di utilità di Cobb-Douglas, $U(X, Y) = X^a Y^{1-a}$. In questo caso, la lagrangiana è data da:

$$\Phi = P_X X + P_Y Y - \mu\, [X^a Y^{1-a} - U^*] \quad \text{(A4.16)}$$

Differenziando rispetto a X, Y e μ e uguagliando a zero otteniamo:

$$P_X = \mu a U^*/X$$
$$P_Y = \mu (1 - a)U^*/Y$$

Moltiplicando la prima equazione per X e la seconda per Y e sommando otteniamo:

$$P_X X + P_Y Y = \mu U^*$$

Sia RD la spesa che minimizza il costo (se l'individuo non ha speso tutto il proprio reddito per raggiungere il livello di utilità U^*, U^* non avrebbe massimizzato l'utilità nel problema iniziale). Ne segue che $\mu = RD/U^*$. Sostituendo nelle equazioni precedenti otteniamo:

$$X = aRD/P_X \text{ e } Y = (1 - a)RD/P_Y$$

Sono le stesse funzioni di domanda ricavate in precedenza.

Effetto di reddito ed effetto di sostituzione

La funzione di domanda indica il modo in cui le scelte di massimizzazione dell'utilità di ciascun individuo reagiscono alle variazioni del reddito e dei prezzi dei beni. È importante, tuttavia, distinguere la porzione di ogni variazione di prezzo che implica *spostamenti lungo una curva di indifferenza* dalla porzione che implica *spostamenti a una diversa curva di indifferenza* (e di conseguenza una variazione del potere d'acquisto). Per effettuare questa distinzione, consideriamo ciò che accade alla domanda del bene X quando il prezzo di X cambia. Come abbiamo spiegato nel Paragrafo 4.2, la variazione della domanda può essere scomposta in un *effetto di sostituzione* (la variazione della quantità domandata quando il livello di utilità rimane invariato) e un *effetto di reddito* (la variazione della quantità domandata quando il livello di utilità varia, ma il prezzo relativo del bene X rimane invariato). Indichiamo la variazione di X prodotta da una variazione unitaria del prezzo di X, a utilità invariata, con:

Nel §4.2 l'effetto di una variazione del prezzo viene scomposto in effetto di reddito e in effetto di sostituzione.

$$\partial X/\partial P_X|_{U=U^*}$$

La variazione complessiva della quantità domandata di X determinata da una variazione unitaria di P_X è quindi:

$$dX/dP_X = \partial X/\partial P_X|_{U=U^*} + (\partial X/\partial RD)(\partial RD/\partial P_X) \quad \text{(A4.17)}$$

Il primo termine del membro di destra dell'equazione (A4.17) è l'effetto di sostituzione (perché l'utilità è fissa); il secondo membro è l'effetto di reddito (perché il reddito aumenta).

Dal vincolo di bilancio del consumatore, $RD = P_X X + P_Y Y$, per differenziazione otteniamo che:

$$\partial RD/\partial P_X = X \quad \text{(A4.18)}$$

Supponiamo per il momento che il consumatore possieda i beni X e Y. In questo caso, l'equazione (A4.18) indicherebbe che, quando il prezzo del bene X aumenta di €1, il reddito che il consumatore può ottenere vendendo il bene aumenta di €X. Nella nostra teoria del comportamento del consumatore, tuttavia, non è previsto che il consumatore possieda il bene. Di conseguenza, l'equazione (A4.18) indica il reddito aggiuntivo che sarebbe necessario al consumatore per essere soddisfatto, dopo la variazione del prezzo, tanto quanto lo era prima. Per questa ragione, è consuetudine esprimere l'effetto di reddito come negativo (poiché riflette una perdita di potere d'acquisto) piuttosto che positivo. L'equazione (A4.17) diventa allora:

$$dX/dP_X = \partial X/\partial P_X|_{U=U^*} - X(\partial X/\partial RD) \quad \text{(A4.19)}$$

• **Equazione di Slutsky** Formula che consente di scomporre l'effetto di una variazione del prezzo in effetto di sostituzione e in effetto di reddito.

• **Effetto di sostituzione di Hicks** Alternativa all'equazione di Slutsky per la scomposizione delle variazioni di prezzo, che non richiede il ricorso alle curve di indifferenza.

Nel §3.4 abbiamo spiegato come le informazioni sulle preferenze del consumatore siano rivelate dalle scelte di consumo che questi compie.

Nel §3.1 abbiamo spiegato che una curva di indifferenza è convessa se il tasso marginale di sostituzione diminuisce quando si scende lungo la stessa.

In questa nuova forma, detta **equazione di Slutsky**, il primo termine rappresenta l'*effetto di sostituzione*: la variazione della domanda del bene X ottenuta mantenendo invariata l'utilità. Il secondo termine è l'*effetto di reddito*: la variazione del potere d'acquisto determinata dalla variazione del prezzo, moltiplicata per la variazione della domanda prodotta da una variazione del potere d'acquisto.

Un modo alternativo per scomporre una variazione di prezzo negli effetti di sostituzione e di reddito, che viene solitamente attribuito a John Hicks, non coinvolge le curve di indifferenza. Nella Figura A4.1, inizialmente il consumatore sceglie il paniere A sulla retta di bilancio RS. Supponiamo di sottrarre, dopo la diminuzione del prezzo del cibo (e lo spostamento della retta di bilancio in RT), una parte di reddito sufficiente a far sì che l'individuo non si trovi in una situazione più favorevole (né in una più sfavorevole) della precedente. A questo scopo, tracciamo una retta di bilancio parallela a RT. Se la retta di bilancio passasse per A, il consumatore sarebbe soddisfatto almeno quanto lo era prima della variazione di prezzo: avrebbe tuttora la possibilità di acquistare il paniere A, se lo desiderasse. Secondo l'**effetto di sostituzione di Hicks**, quindi, la retta di bilancio che lascia invariato il livello di soddisfazione deve essere una retta come $R'T'$, che è parallela a RT e interseca RS in un punto B al di sotto e a destra del punto A.

Le preferenze rivelate indicano che il nuovo paniere scelto deve trovarsi sul segmento di retta BT'. Perché? Perché tutti i panieri sul segmento di retta $R'B$ avrebbero potuto essere scelti ma non lo sono stati, quando la retta di bilancio era RS (il consumatore aveva preferito il paniere A a tutti gli altri panieri raggiungibili). Notate che tutti i punti sul segmento di retta BT' implicano un maggior consumo di cibo del paniere A. Ne segue che la quantità di cibo domandata aumenta ogni volta che il prezzo del cibo diminuisce a utilità invariata. Questo effetto di sostituzione negativo vale per tutte le variazioni di prezzo e non poggia sull'ipotesi della convessità delle curve di indifferenza formulata nel Paragrafo 3.1.

FIGURA A4.1

Effetto di sostituzione di Hicks

L'individuo inizialmente consuma il paniere di mercato A. Una diminuzione del prezzo del cibo fa spostare la retta di bilancio da RS a RT. Se si sottrae una parte di reddito sufficiente a far sì che l'individuo non si trovi in una situazione più favorevole rispetto ad A, devono essere soddisfatte due condizioni: il nuovo paniere di mercato deve trovarsi sul segmento BT' della retta di bilancio $R'T'$ (che interseca RS a destra di A) e la quantità di cibo consumata deve essere maggiore rispetto a quella di A.