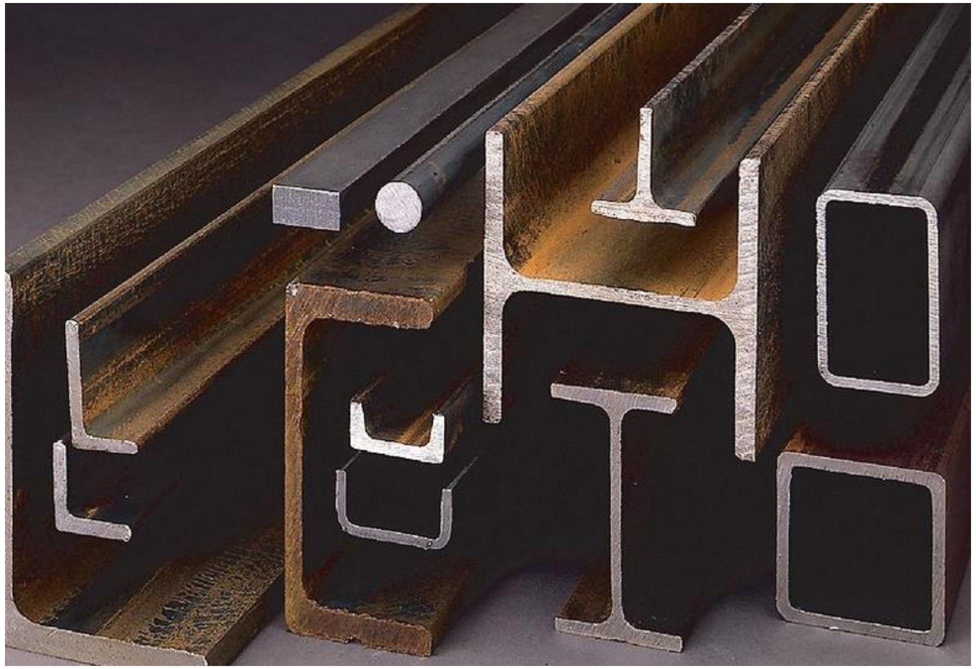
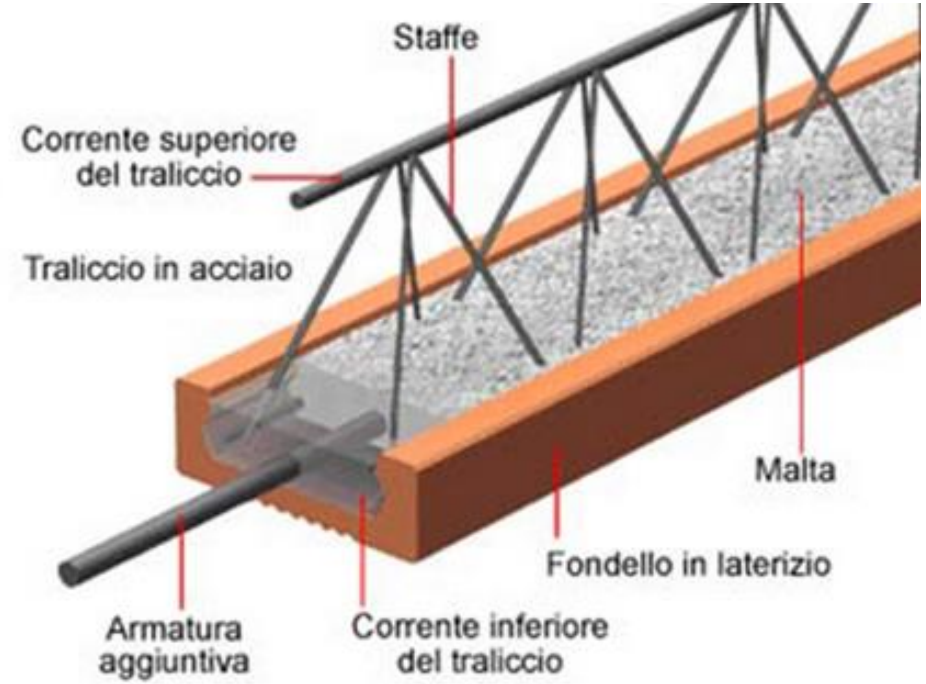
GEOMETRIA DELLE AREE

- Premessa alla meccanica delle strutture
- Fornisce gli strumenti utili all'analisi strutturale
- Viene applicata a figure piane semplici o composte





BARICENTRO [L]

MOMENTO STATICO (primo ordine) $[L^3]$

MOMENTO DI INERZIA ASSIALE (secondo ordine) $[L^4]$

Momento di inerzia polare

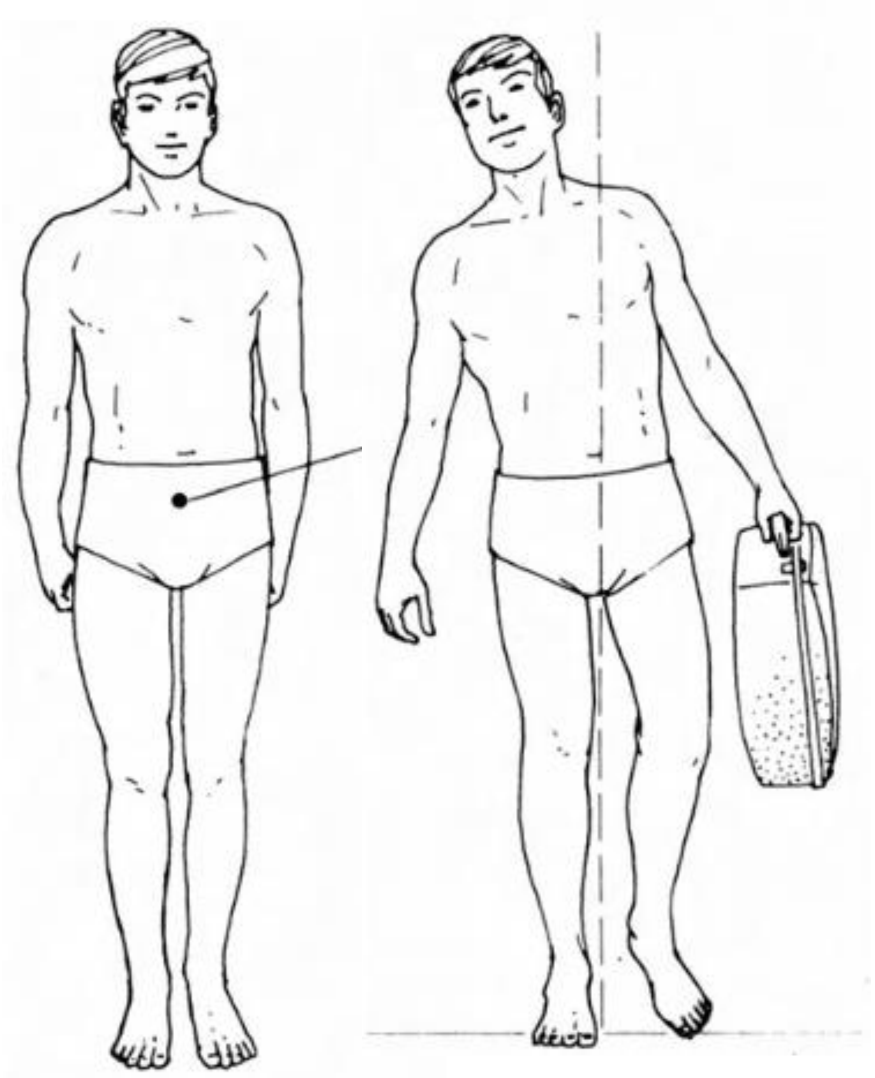
Momento di inerzia centrifugo

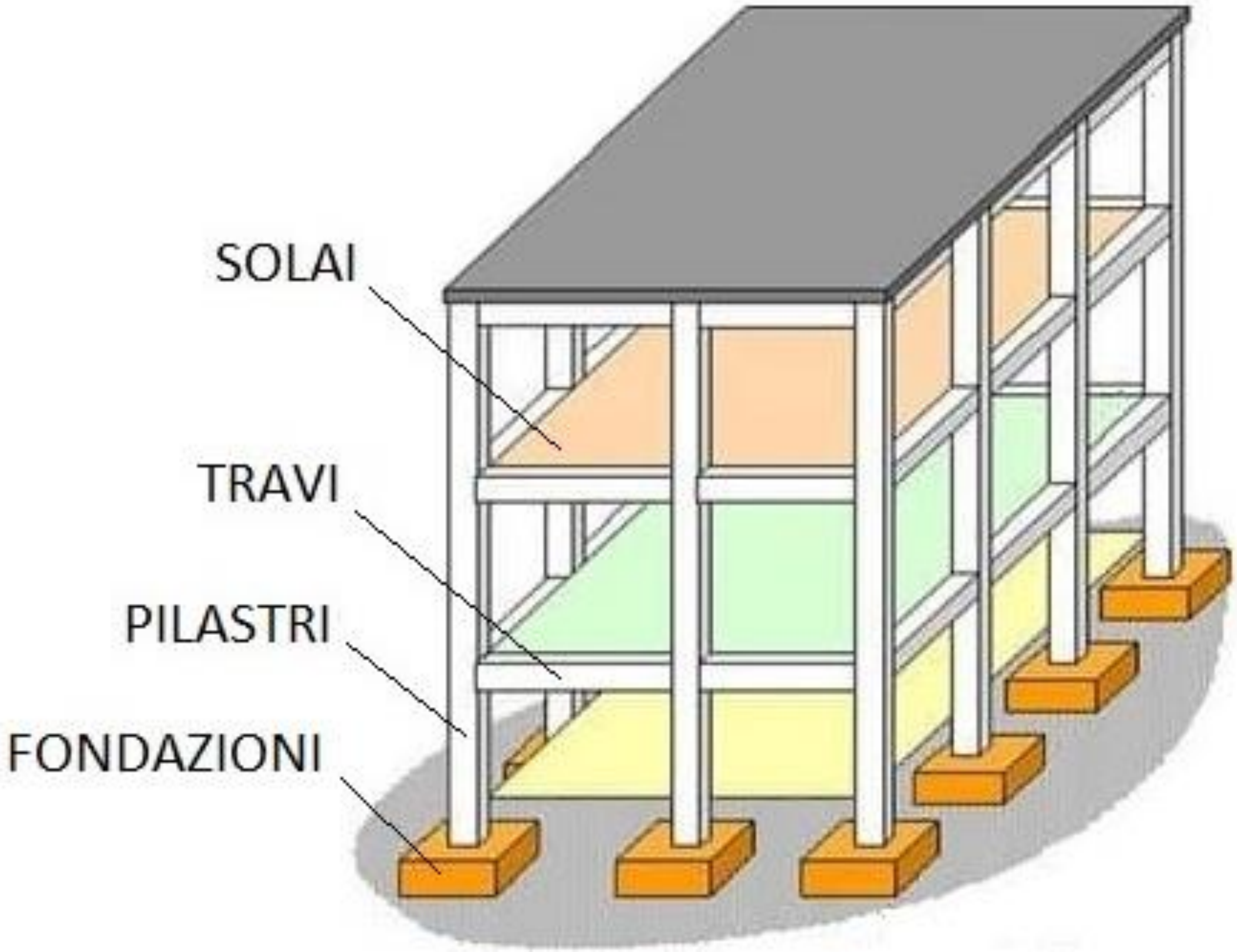
Raggi di inerzia

Assi principali

…

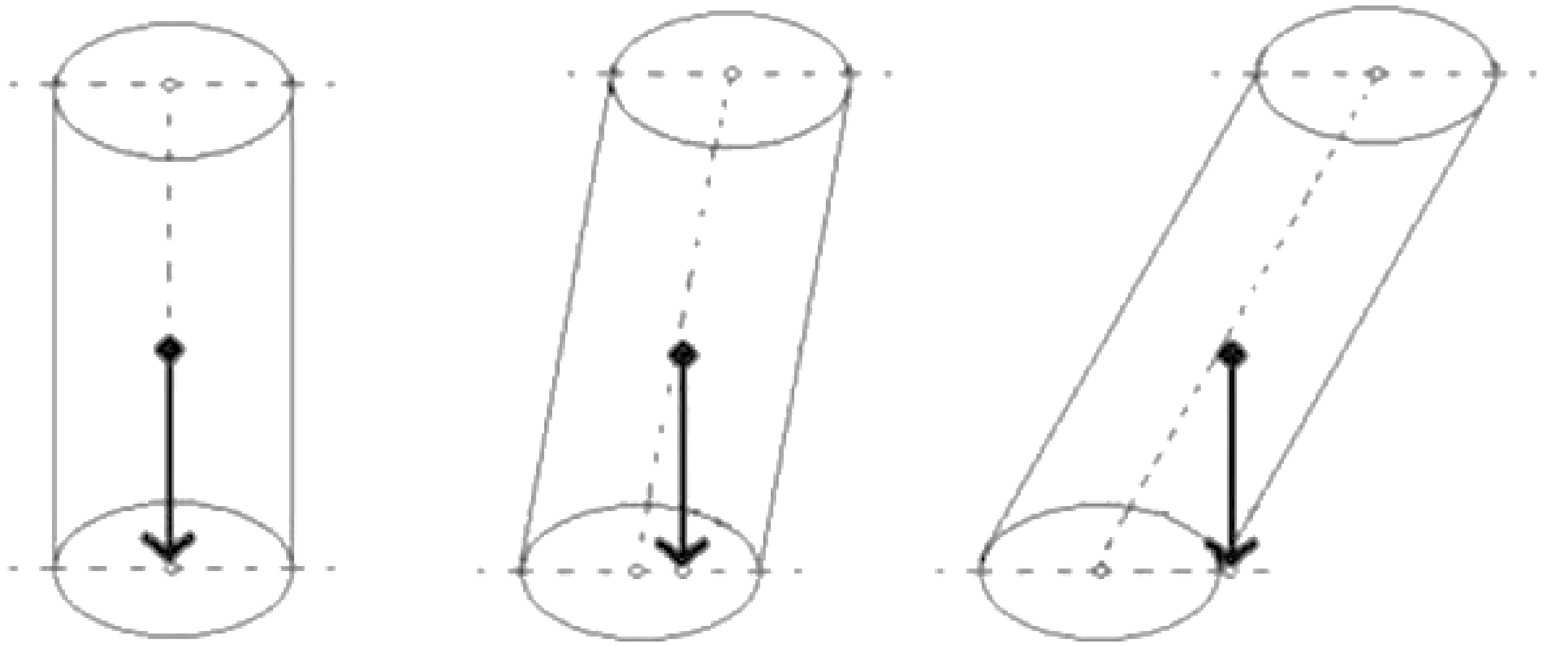
BARICENTRO





BARICENTRO

BARICENTRO



Il cilindro verticale ha il centro di gravità che cade al centro della base

Il centro di gravità cade ancora, sebbene spostato, nella base del cilindro. E' il caso della torre di Pisa

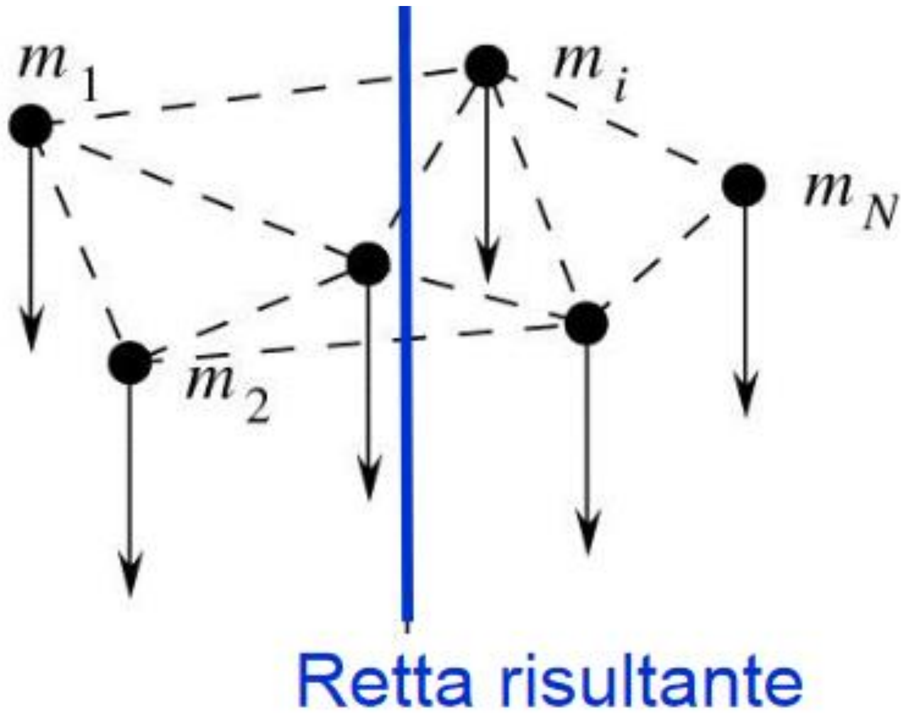
Il centro di gravità cade fuori dalla base del cilindro. In questo caso la costruzione è instabile e rischia di crollare

BARICENTRO

BARICENTRO

Centro di vettori paralleli associati al peso delle masse o aree

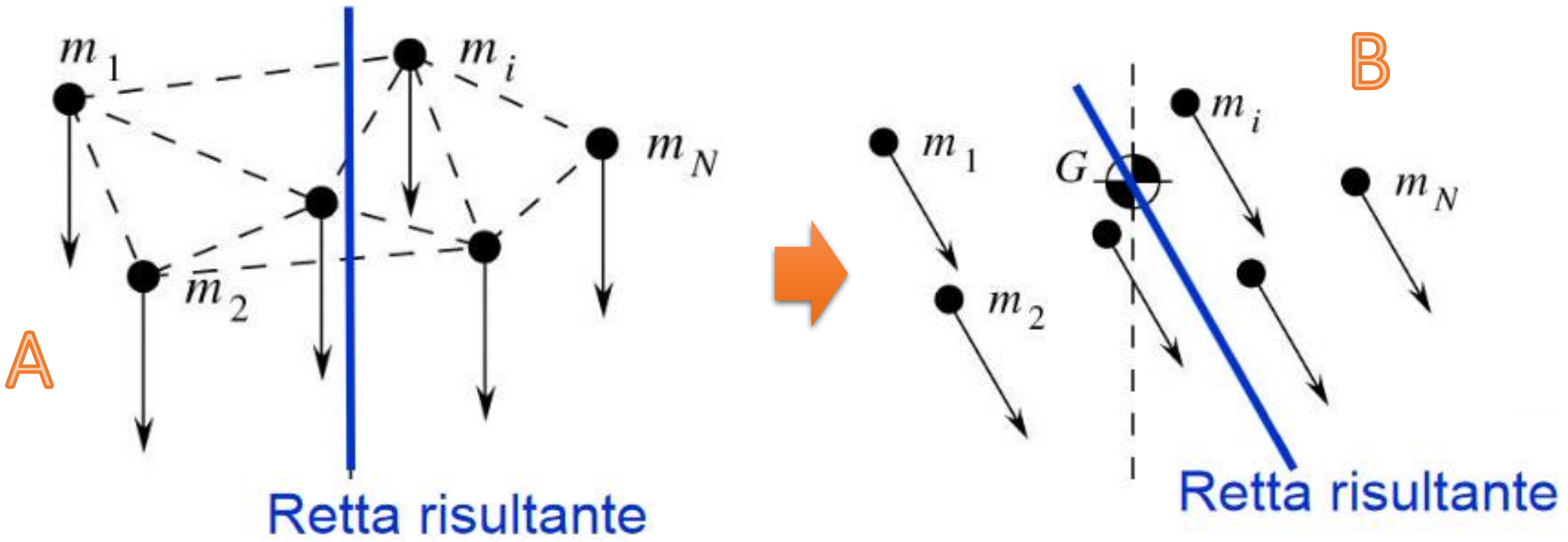
- Insieme di *n* punti materiali P_i
- Masse concentrate m_i
- Sistema di forze parallele $\mathbf{F}_i$, con risultante non nullo



- P_i (x_i, y_i, z_i)
- Risultante **R** applicata nel **«centro delle forze parallele»**, detto G (x_G, y_G, z_G)

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{R}$$

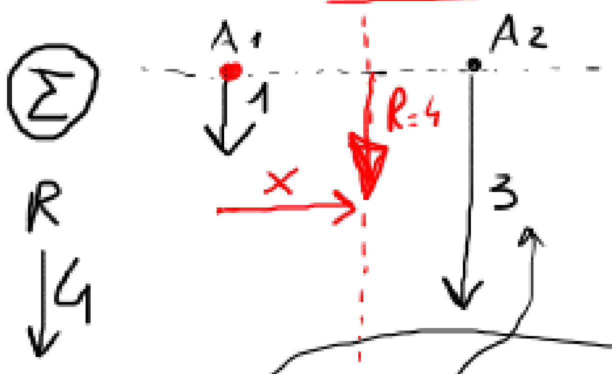
- Facciamo ruotare tutti i vettori di una stesso angolo rispetto al proprio P_i



- L'asse centrale del sistema di *n* vettori, per effetto della rotazione imposta, ruota anch'esso della stessa quantità rispetto al punto G
- I sistemi A e B sono equivalenti se hanno uguale risultante e uguale momento risultante

SIST. DI VETTORI PARALLELI

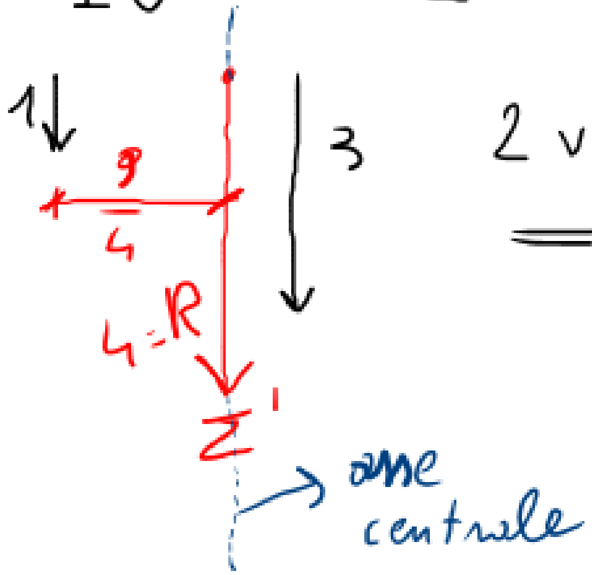
2 vettori concordi $\Rightarrow$ DETERM. LA RETTA SU CUI È APPLICATA LA RISULTANTE CON MOMENTO NULLO



$$\boxed{\Sigma' = \{\underline{R}\} \doteq \Sigma}$$

$$M_{A_1}^{\Sigma} = M_{A_1}^{\Sigma'} \rightarrow \text{equaz. la cui incognita è } x$$

$$\circlearrowleft^{+}: \; 1\cdot 0 - 3\cdot 3 = -4\cdot x \;\Rightarrow\; -9 = -4x \;; \quad \boxed{x = +\frac{9}{4}}$$

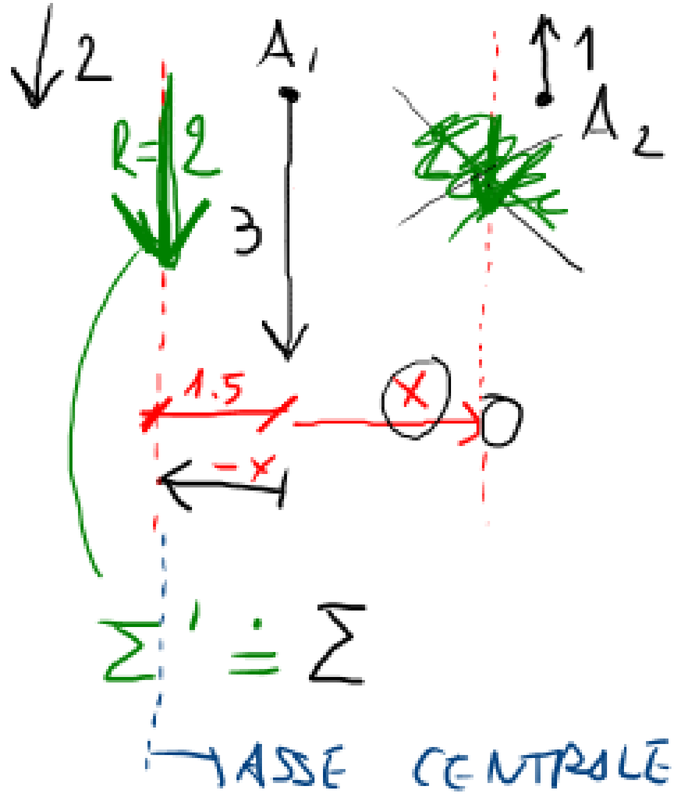


2 vettori // e concordi:

$\Rightarrow$ L'ASSE CENTRALE PASSA TRA I DUE VETTORI, ED È PIÙ VICINO AL VETTORE "PIÙ PESANTE"

2 vettori <u>discordi</u> $\quad \exists\, \Sigma'\{R\} \doteq \Sigma$

$R=2 \qquad \Sigma$



$$M^{\Sigma}_{A_1} = M^{\Sigma'}_{A_1} \;; \quad \overset{+}{\circlearrowright} : \; 3\cdot 0 + 1\cdot 3 = -2\cdot x$$

$$3 = -2x \;; \quad x = -\frac{3}{2} = -1.5$$

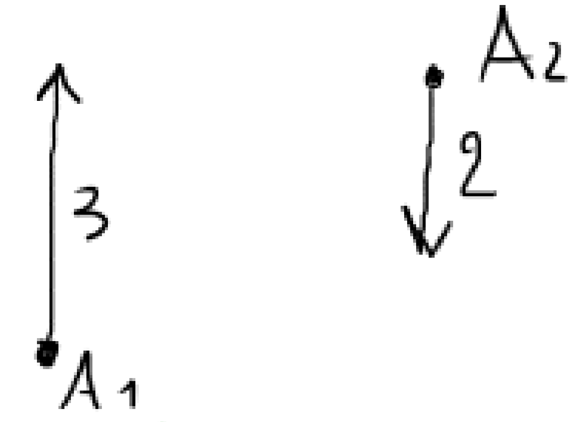
2 VETTORI // DISCORDI ; L'ASSE CENTRALE passa esternamente al SIST., dalla parte del vettore "PIÙ PESANTE"

ES. x_c, y_c? $\uparrow \underline{u}$ $O \to x$, $\uparrow y$

$\underline{u} = \underline{j}$

$A_1 = (3, -3)$

$A_2 = (7, 0)$



$v_1 = 3\,\underline{u}$; $\underline{v}_2 = -2\,\underline{u}$; $R = 1$ $\uparrow 1$

$$x_c = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2}{R} = \frac{3 \cdot 3 + (-2) \cdot 7}{1} = \frac{9 - 14}{1} = -5$$

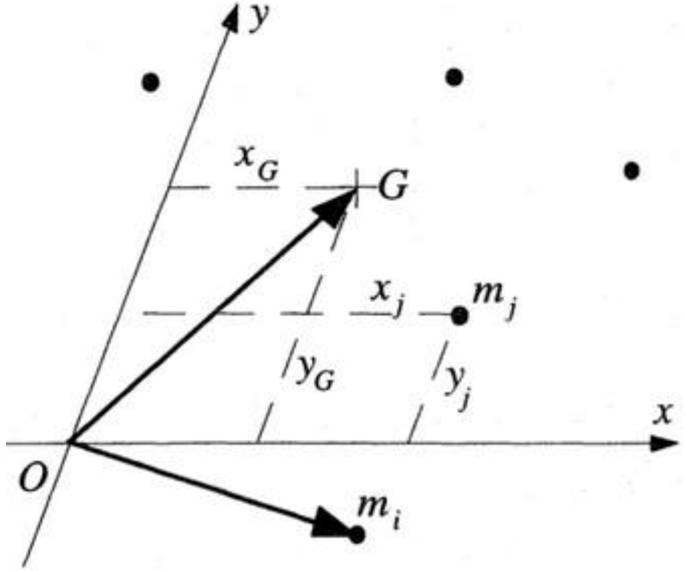
$$y_c = \frac{v_1 y_1 + v_2 y_2}{R} = \frac{3 \cdot (-3) + (-2) \cdot 0}{1} = -9$$

- **Esempio per caso piano di masse puntiformi:**

I sistemi A e B sono equivalenti se hanno uguale risultante e uguale momento risultante

Il punto G che soddisfa le condizioni indicate è definito dalla relazione vettoriale:

$$(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$



Proiettando in un sistema cartesiano di riferimento:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Centro di massa o baricentro delle masse

Alcune osservazioni sul baricentro:

- La posizione del baricentro G è **indipendente** dal sistema di riferimento scelto per la sua determinazione

- Il baricentro G di un sistema è **unico**. Ciò segue dal fatto che l’asse centrale di un sistema di vettori è unico

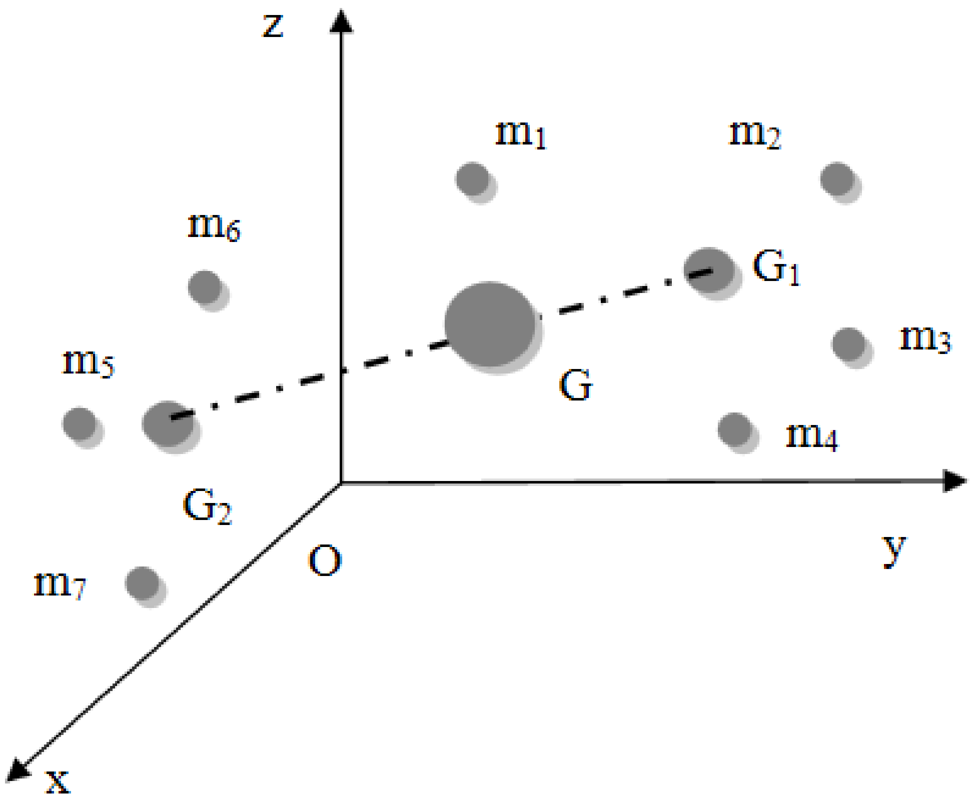
- Il baricentro G di due masse concentrate si trova sulla loro **congiungente**, ad una distanza **inversamente proporzionale** alle masse stesse

- Nel caso esista un **asse di simmetria** nel sistema di masse concentrate, il baricentro G si trova sicuramente su questo asse

Alcune osservazioni sul baricentro:

- **Proprietà distributiva** (o associativa, o di decomposizione in sistemi parziali):

Se si considera il sistema di *n* componenti decomposto in due sistemi parziali e se G1 e G2 sono i baricentri dei subsistemi, il baricentro G dell'intero sistema coincide con il baricentro del sistema dei due punti G1 e G2



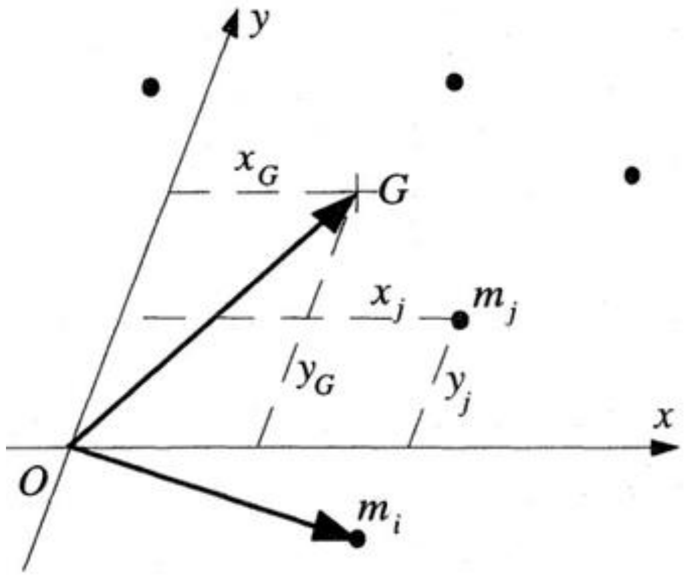
Subsistema 1: masse m_1, m_2, m_3, m_4 $\rightarrow$ G_1

Subsistema 2: masse m_5, m_6, m_7 $\rightarrow$ G_2

Sistema complessivo: masse m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7 $\rightarrow$ G

MOMENTO STATICO (o momento del primo ordine)

- La sua definizione deriva dal principio di equivalenza di un sistema di vettori paralleli con un unico vettore risultante
- Viene calcolato rispetto a due rette x e y di riferimento:



$$S_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

Inoltre:

$$x_G = \frac{S_y}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{S_y}{M} \qquad y_G = \frac{S_x}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{S_x}{M}$$

Alcune osservazioni sul momento statico:

- Il momento statico descrive il **modo** in cui la superficie è distribuita rispetto all’asse rispetto al quale è calcolato

- Il momento statico può essere **positivo, negativo o nullo**

- La sua principale applicazione si concretizza nella ricerca del baricentro, la cui posizione è determinata imponendo la **condizione S=0**

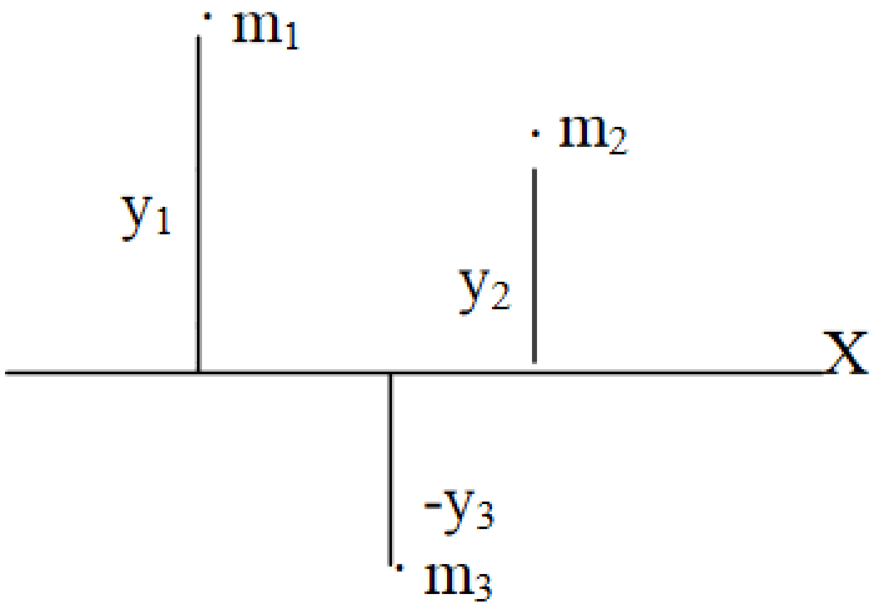
- Il suo calcolo equivale a cercare la posizione dell'asse baricentrico tale che le masse (o aree) di coordinate positive e negative rispetto all’asse di riferimento siano distribuite in maniera equa

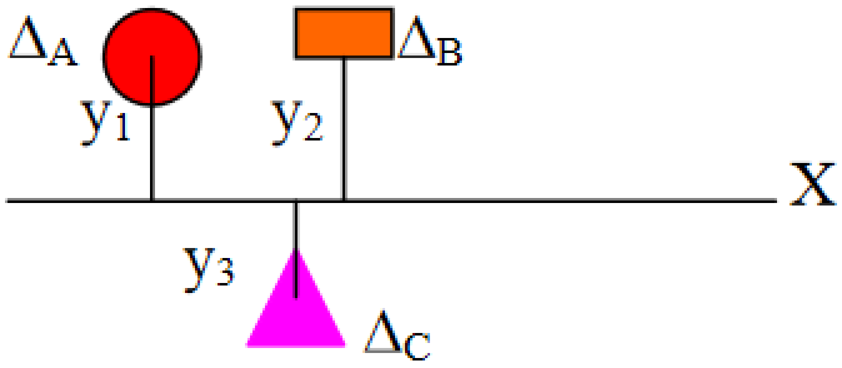
- In ambito di costruzioni e teoria della trave, è una grandezza fondamentale per la sollecitazione di taglio

- **Esempio:**

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

- *Il momento statico può essere positivo, negativo o nullo*
- *È sempre nullo se è calcolato rispetto a una retta passante per il baricentro (asse baricentrico)*





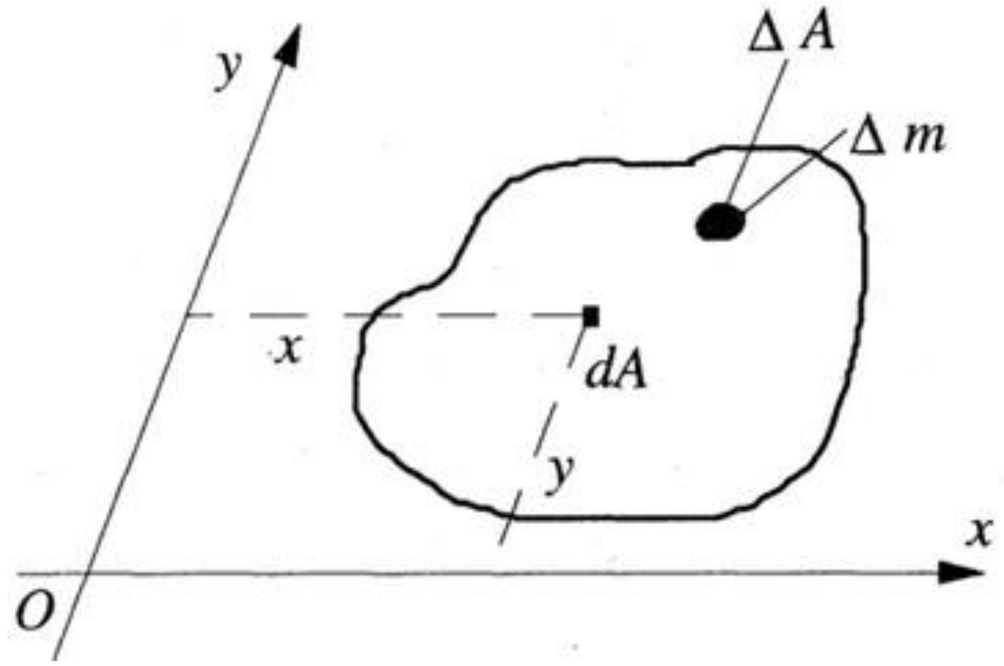
$$S_x = m_1 y_1 + m_2 y_2 - m_3\, y_3$$

$$S_x = \Delta_A y_1 + \Delta_B y_2 - \Delta_C\, y_3$$

- **Geometria delle aree:**

Se distribuiamo una massa su una superficie piana, le definizioni di baricentro si mantengono analoghe.

Tuttavia, è necessario introdurre i concetti di densità di massa e area.



Si ottiene:

$$x_G = \frac{\int_A x\, dA}{A} \qquad y_G = \frac{\int_A y\, dA}{A}$$

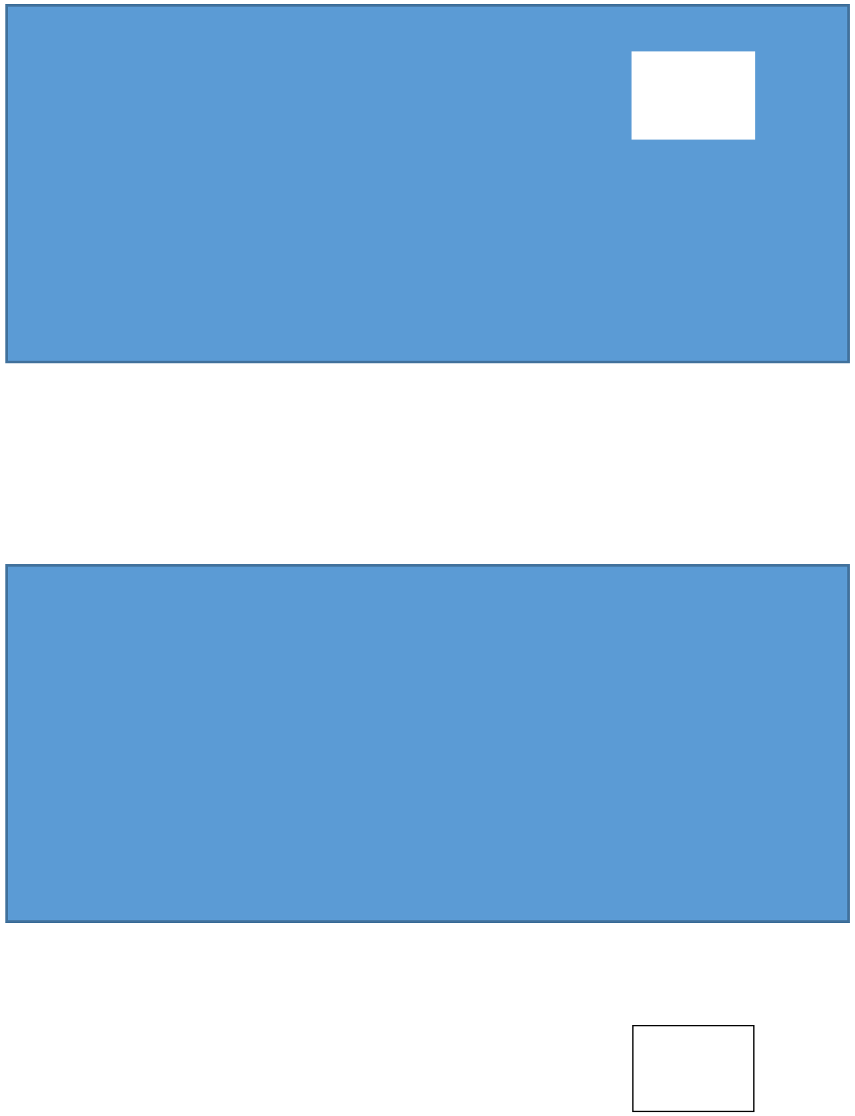
$$S_x = \int_A x\, dA \qquad S_y = \int_A y\, dA$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} \qquad y_G = \frac{S_x}{A}$$

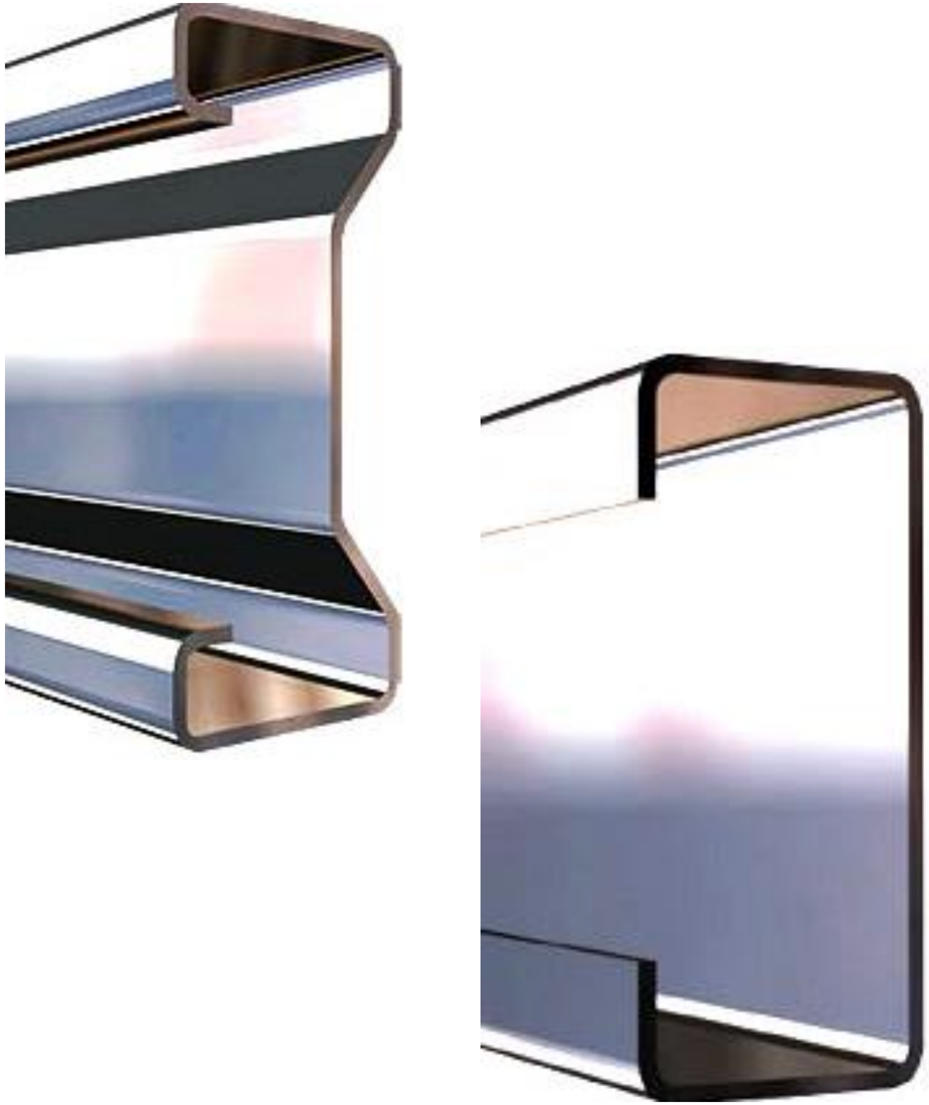
- *Il momento statico può essere positivo, negativo o nullo*
- *È sempre nullo se è calcolato rispetto a una retta passante per il baricentro (asse baricentrico)*

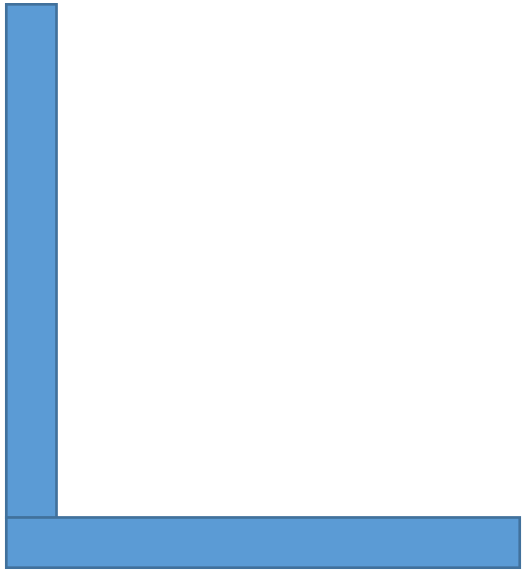
- **Sezioni con fori:**

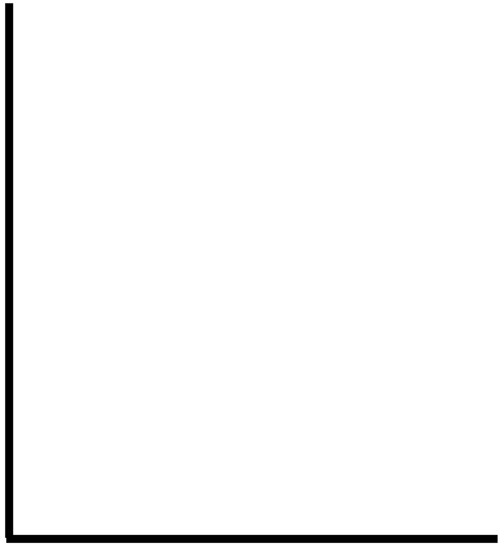
Si ottiene il baricentro di una sezione forata come somma delle componenti.



- **Sezioni a profilo sottile:**



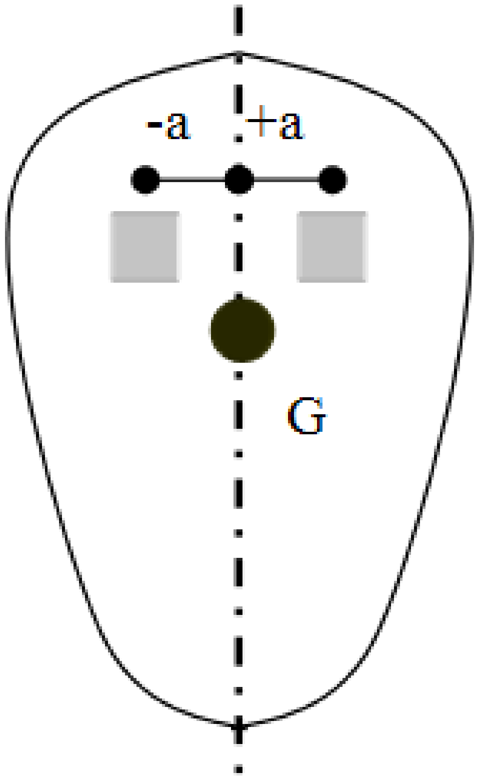




Ci sono elementi di sezione considerati due volte, ed elementi trascurati

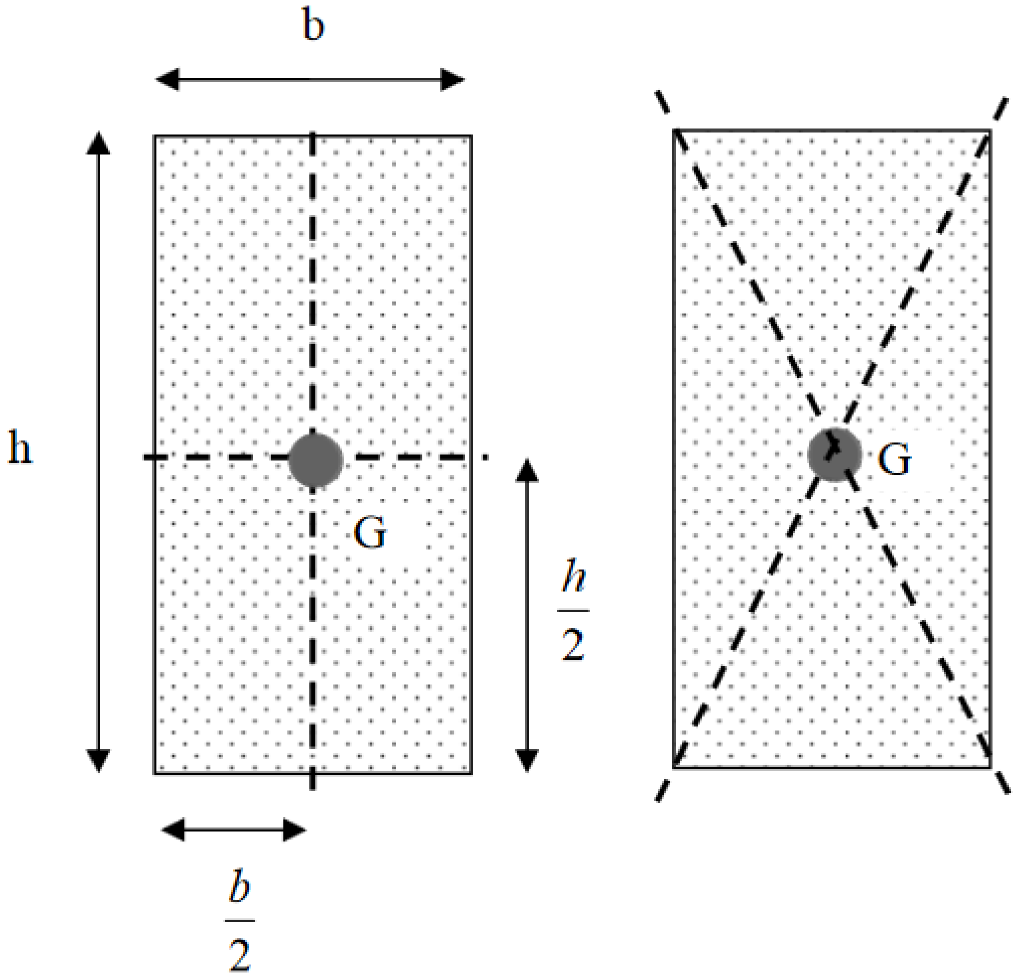
- **<u>ESEMPIO</u>:**

- Il baricentro si trova sempre su un asse di simmetria, ove presente
- Se la sezione ha due assi di simmetria, il baricentro si trova sulla loro intersezione

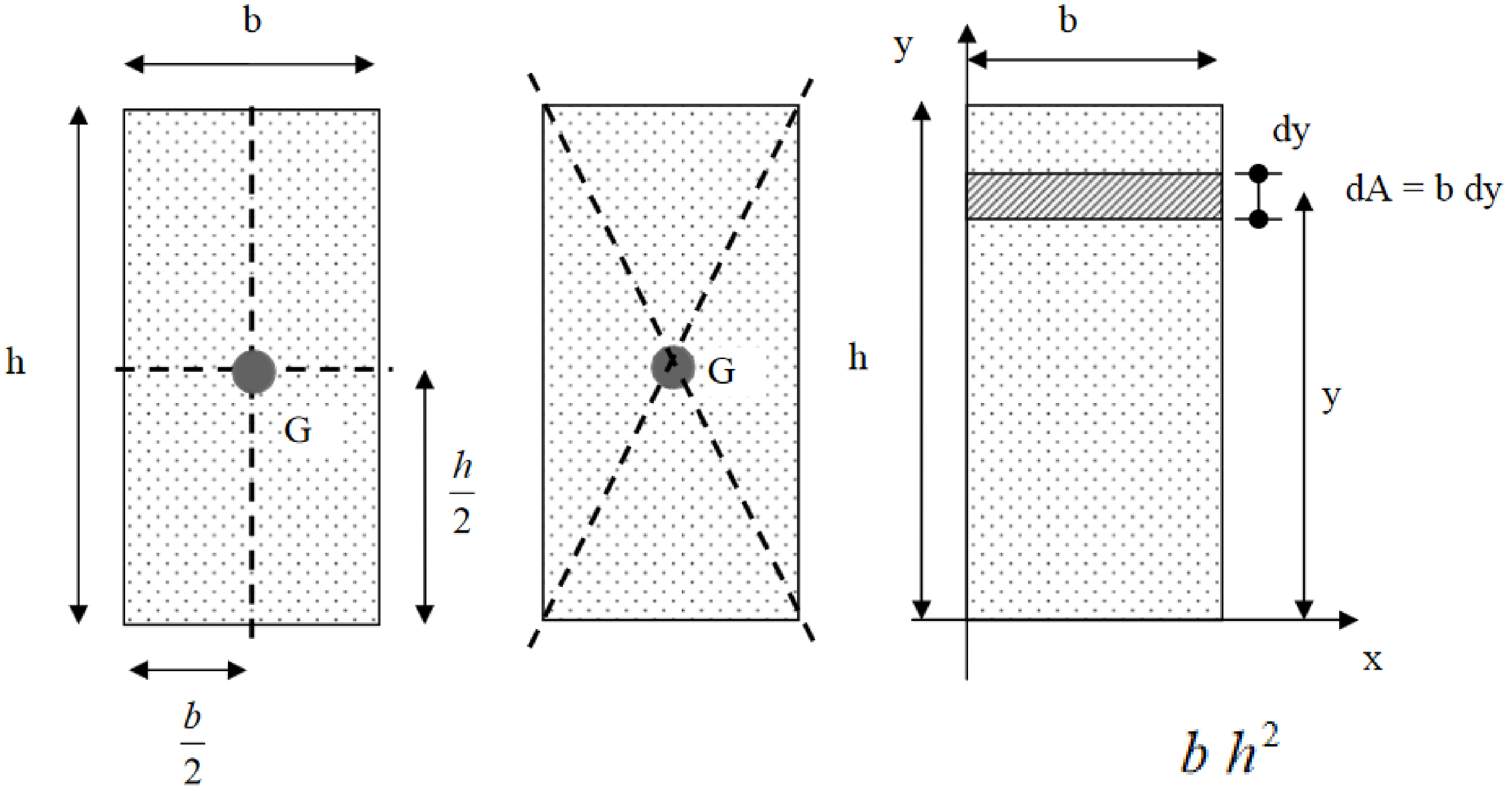


*Parliamo di assi di simmetria **normale** ma anche di assi di simmetria **obliqua** coniugati*

Possiamo determinare G per via grafica o per via analitica



- **<u>ESEMPIO</u>:**



Assi tangenti:

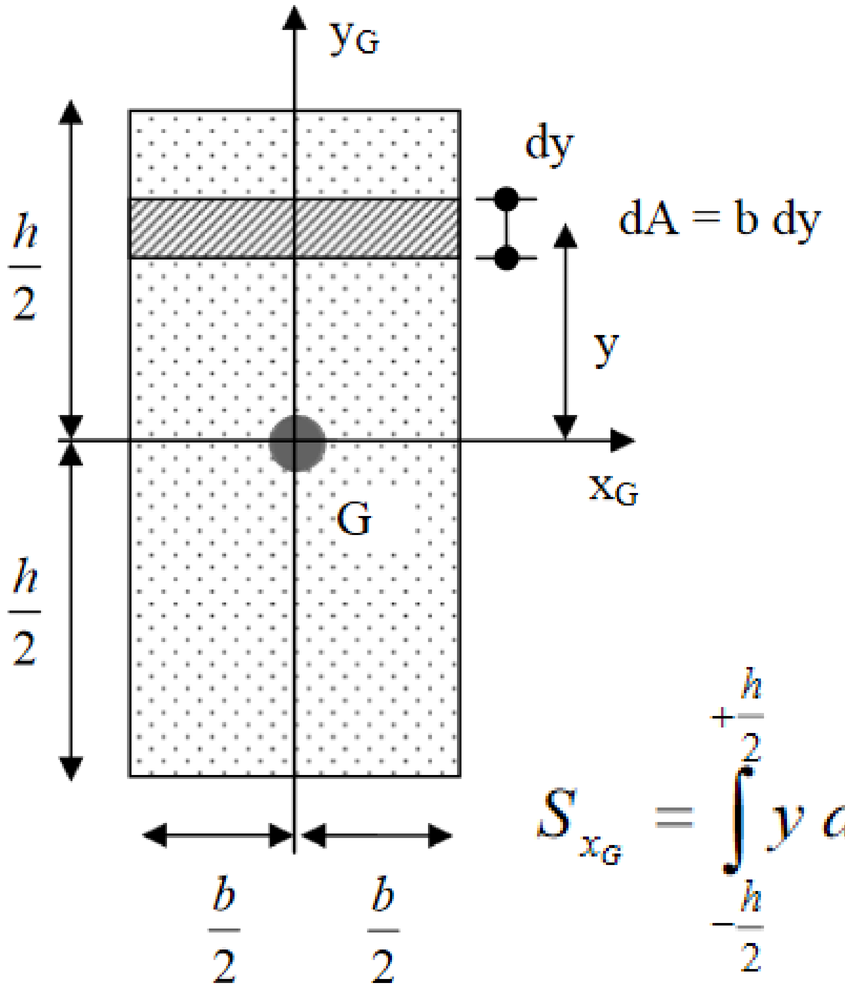
$$S_x = \int_0^h y\, dA = \int_0^h b\, y\, dy = b\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \frac{b\, h^2}{2}$$

$$S_y = \int_0^b x\, dA = \int_0^b h\, x\, dx = h\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{h\, b^2}{2}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{b\, h^2}{2}}{b\, h} = \frac{h}{2}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{h\, b^2}{2}}{b\, h} = \frac{b}{2}$$

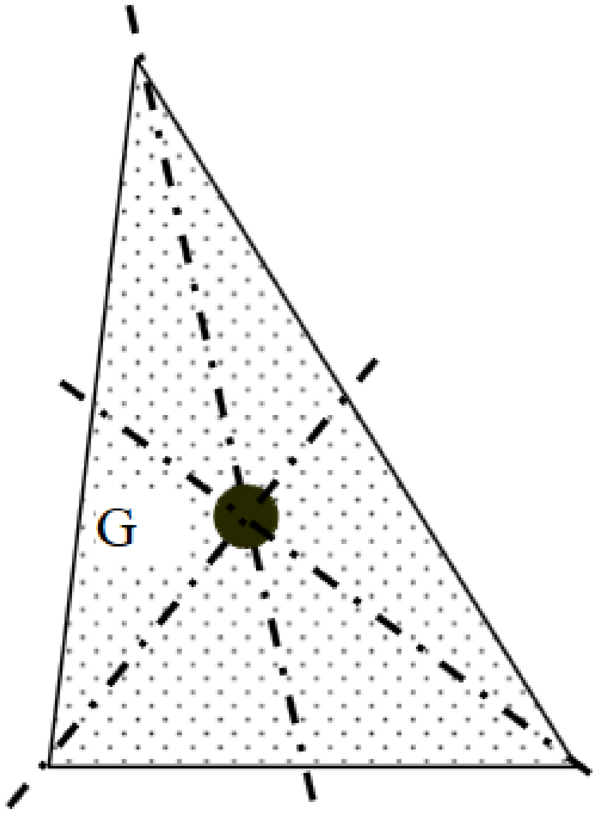
Verifica rispetto al baricentro (noto):

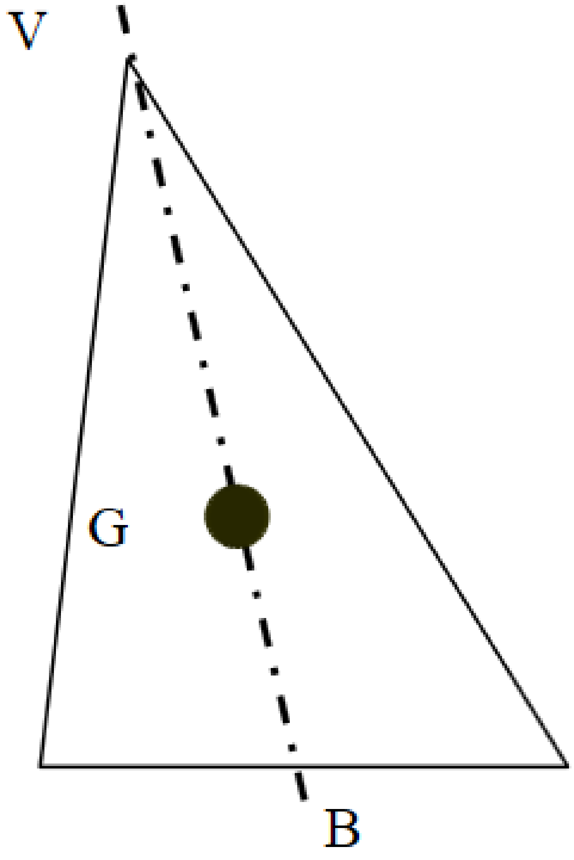


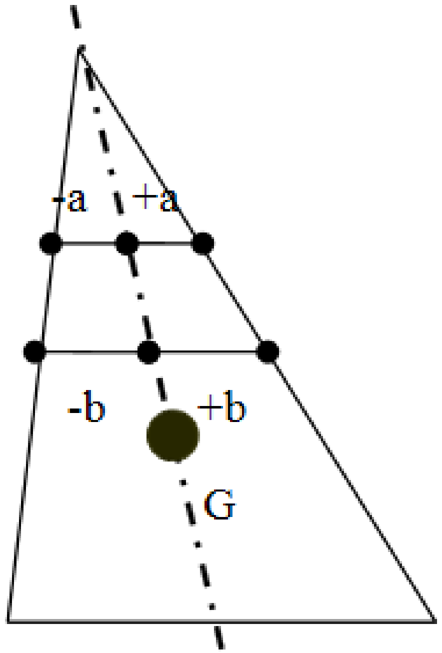
$$S_{x_G} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y\, dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b\, y\, dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y\, dy = b \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b\, h^2}{8} - \frac{b\, h^2}{8} = 0$$

- **ESEMPIO**:

  Mediante simmetria





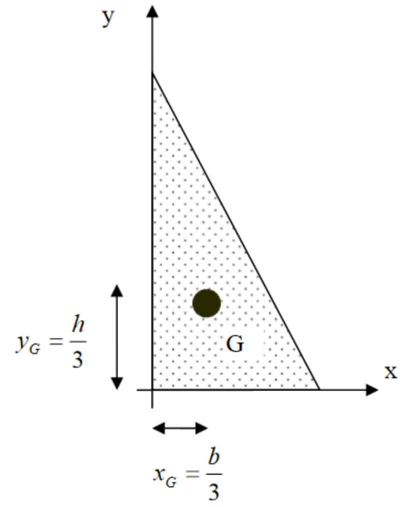


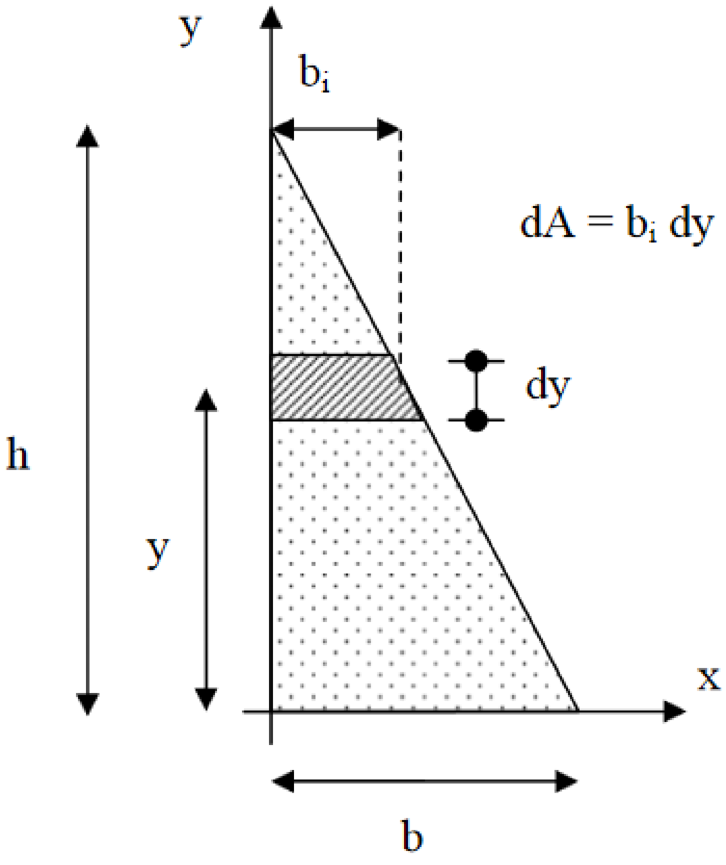
$$\overline{VG} = \frac{2}{3}\overline{VB}$$

$$\overline{GB} = \frac{1}{3}\overline{VB}$$

- **ESEMPIO**:

Triangolo rettangolo (1)





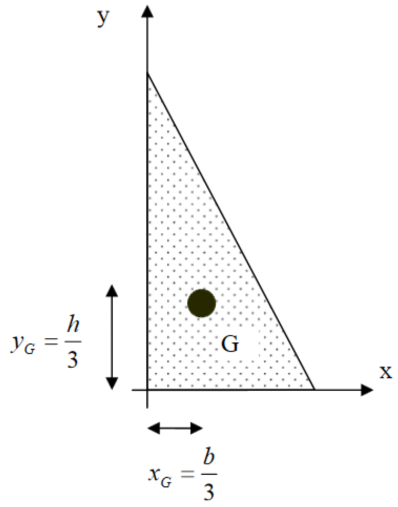
$$b_i = \frac{b}{h}(h-y) \qquad \Rightarrow \qquad dA = \frac{b}{h}(h-y)dy$$

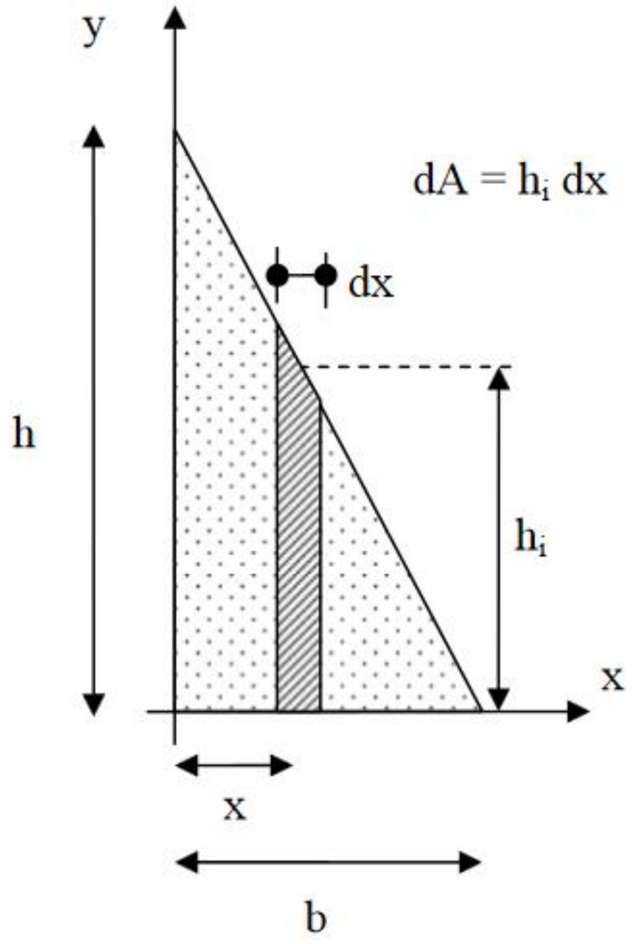
$$S_x = \int_o^h y\, dA = \int_o^h \frac{b}{h}(h-y)\, y\, dy = b\int_o^h y\, dy - \frac{b}{h}\int_o^h y^2\, dy = b\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h - \frac{b}{h}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{b\, h^2}{6}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{b\, h^2}{6}}{\frac{b\, h}{2}} = \frac{h}{3}$$

- **ESEMPIO**:

Triangolo rettangolo (2)





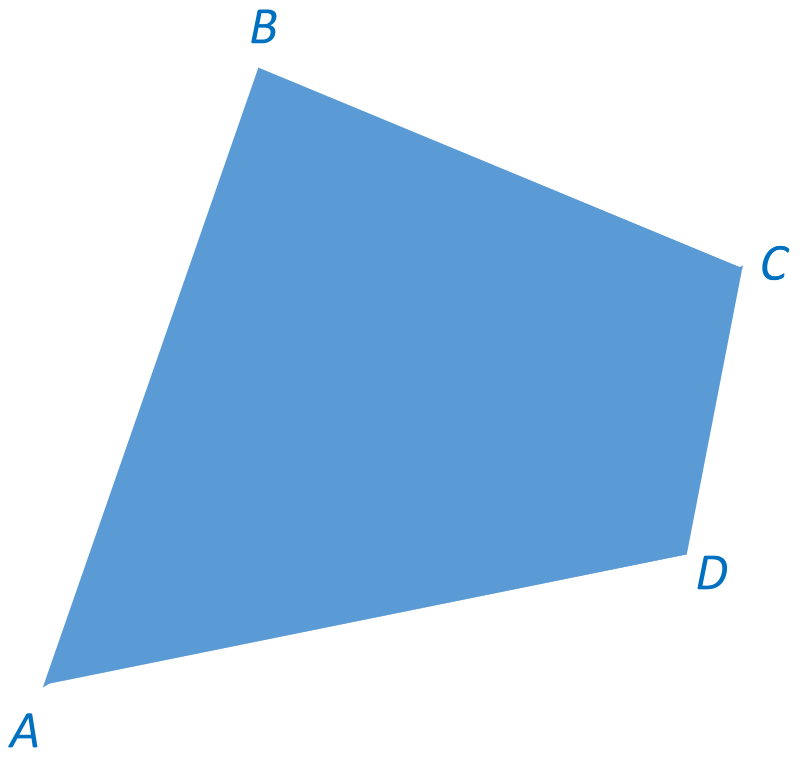
$$h_i = \frac{h}{b}(b-x) \qquad \Rightarrow \qquad dA = \frac{h}{b}(b-x)dx$$

$$S_y = \int_o^b x\, dA = \int_o^b \frac{h}{b}(b-x)\, x\, dx = h\int_o^b x\, dx - \frac{h}{b}\int_o^b x^2\, dx = h\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b - \frac{h}{b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{h\, b^2}{6}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{h\, b^2}{6}}{\frac{b\, h}{2}} = \frac{b}{3}$$

- **ESEMPIO**:

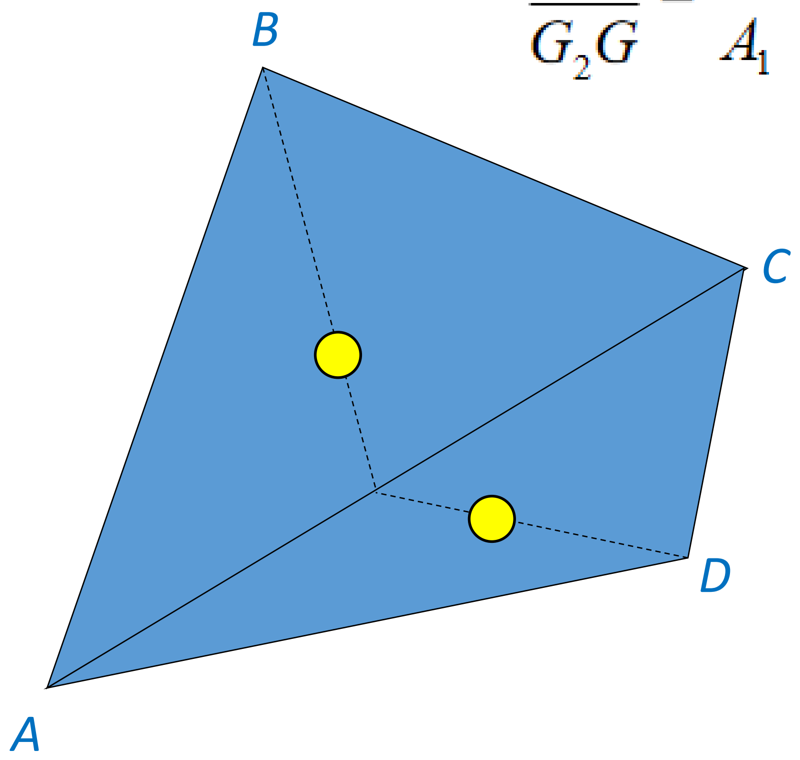
Quadrilatero (1)



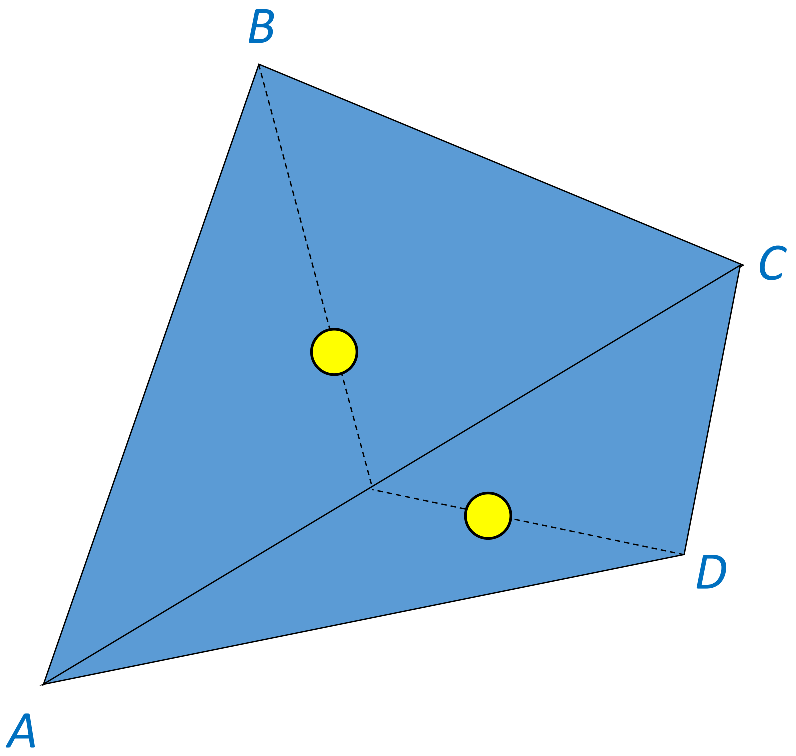
Triangolo ABC $\rightarrow$ Area A_1 Baricentro G_1

Triangolo ACD $\rightarrow$ Area A_2 Baricentro G_2

$$\frac{\overline{G_1G}}{\overline{G_2G}} = \frac{A_2}{A_1}$$



Quadrilatero (2)



Il baricentro G divide G_1G_2 in parti inversamente proporzionali alle aree dei triangoli concentrate nei rispettivi baricentri:

$$\overline{G_1G_2} \cdot A_2 = \overline{G_1G} \cdot (A_1 + A_2) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\overline{G_1G_2}}{A_1 + A_2} = \frac{\overline{G_1G}}{A_2}$$

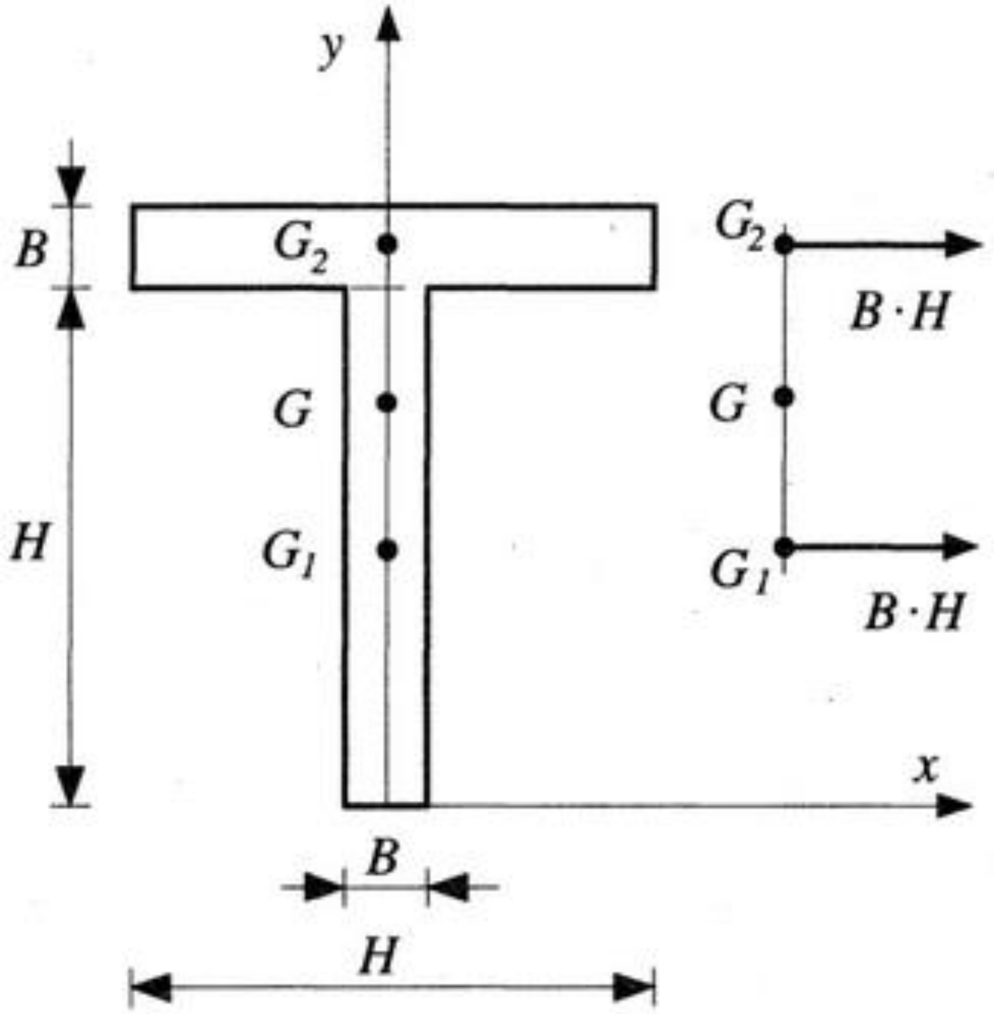
Analogamente rispetto a G_2:

$$\overline{G_1G_2} \cdot A_1 = \overline{G_2G} \cdot (A_1 + A_2) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\overline{G_1G_2}}{A_1 + A_2} = \frac{\overline{G_2G}}{A_1}$$

e quindi:

$$\frac{\overline{G_1G}}{A_2} = \frac{\overline{G_2G}}{A_1}$$

- **ESERCIZIO 1:**



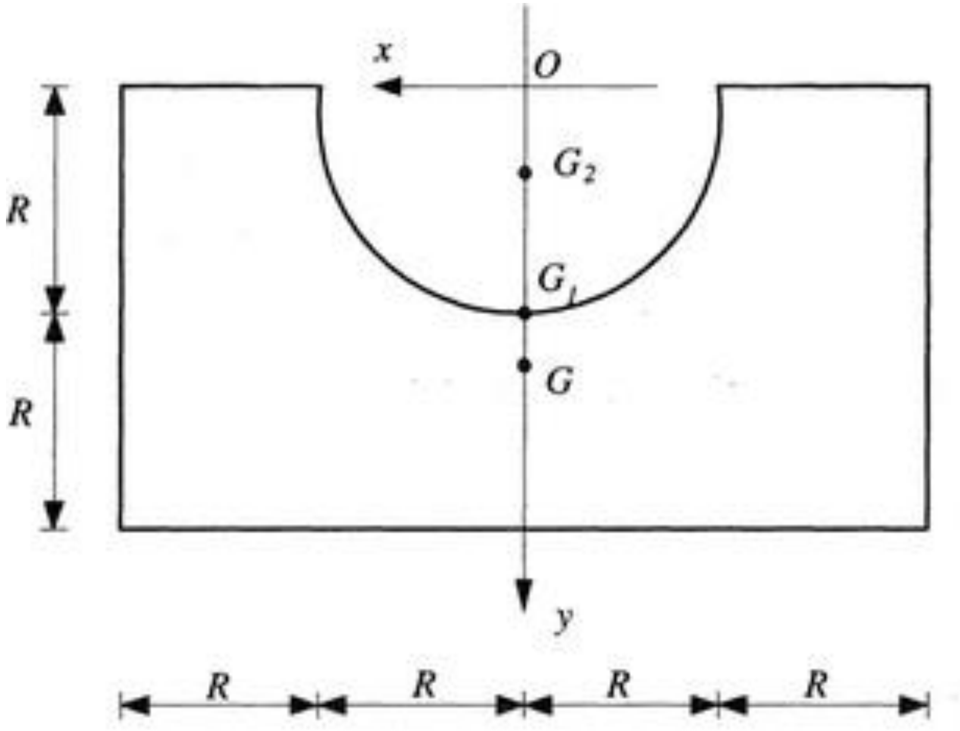
$$y_G = \frac{S_x}{A}$$

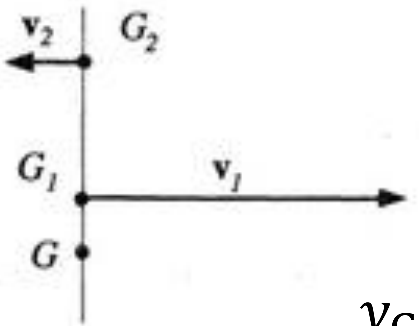
$$y_G = \frac{B\,H\,\frac{H}{2} + B\,H\left(H + \frac{B}{2}\right)}{2B\,H} = \frac{3H+B}{4}$$

- *Il baricentro G si determina in termini di asse centrale di un sistema di vettori paralleli*
- *La sua distanza da G1 e G2 è inversamente proporzionale alle aree associate*

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{BH}{BH}$$

- **ESERCIZIO 2:**





Semicerchio

$$y_G = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$$

$$y_G = \frac{2}{3}\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

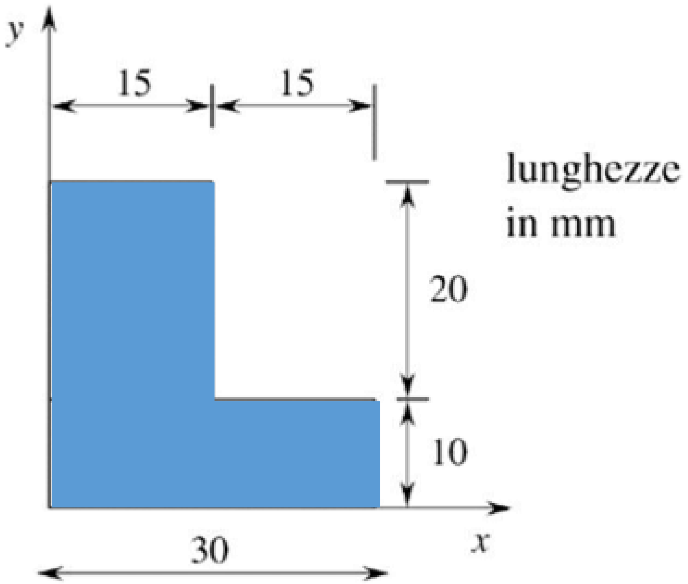
$$y_G = \frac{S_x}{A}$$

$$y_G = \frac{(8R^2)R + \left(-\frac{\pi R^2}{2}\right)\frac{4R}{3\pi}}{8R^2 - \frac{\pi R^2}{2}} = 1.1406\ R$$

Area rettangolo= A_1= $8R^2$
Area semicerchio= A_2= $-\pi\ R^2/2$

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{-\pi\, R^2/2}{8R^2}$$

- **ESERCIZIO 3:**



$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_{G_i}}{A} \qquad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_{G_i}}{A}$$

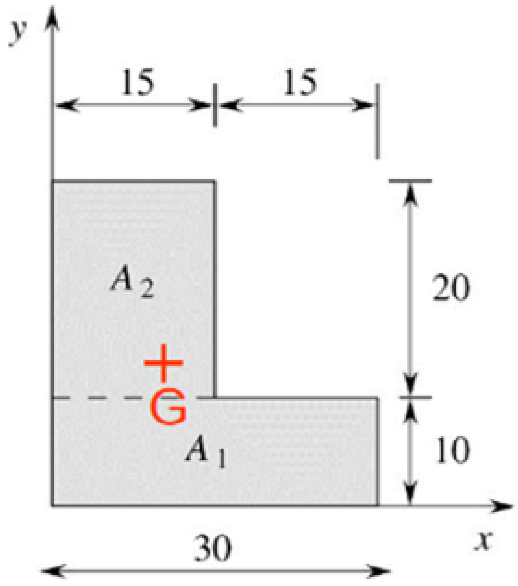
$$A_1 = 30 \cdot 10 = 300$$

$$A_2 = 15 \cdot 20 = 300$$

$$A = 300 + 300 = 600$$

$$x_{G_1} = 15 \qquad y_{G_1} = 5$$

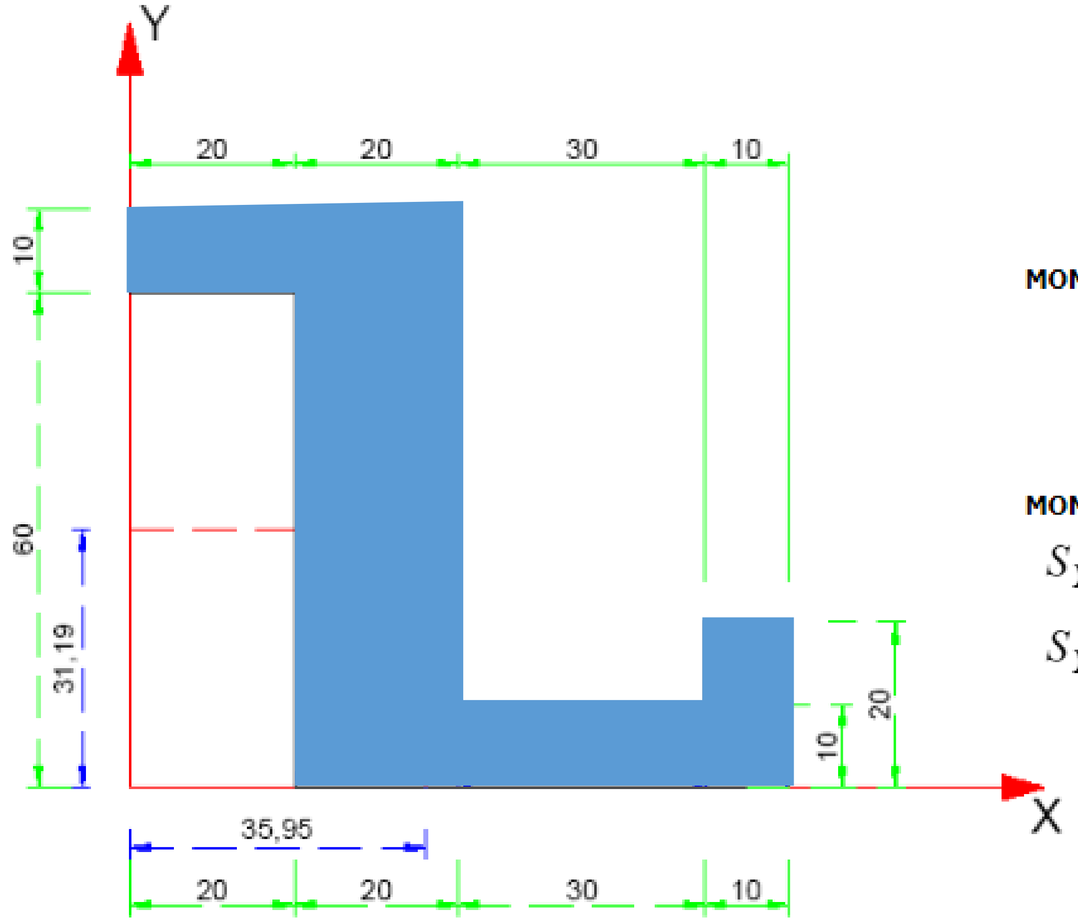
$$x_{G_2} = 7.5 \qquad y_{G_1} = 20$$



$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_{G_i}}{A} = \frac{A_1 \cdot x_{G_1} + A_2 \cdot x_{G_2}}{A_1 + A_2} = \frac{300 \cdot 15 + 300 \cdot 7.5}{300 + 300} = 11.25$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_{G_i}}{A} = \frac{A_1 \cdot y_{G_1} + A_2 \cdot y_{G_2}}{A_1 + A_2} = \frac{300 \cdot 5 + 300 \cdot 20}{300 + 300} = 12.5$$

- **ESERCIZIO 4:**



$$A_1 = 20 \cdot 10 = 200 cm^2 \qquad X_1 = \frac{20}{2} = 10 cm \qquad Y_1 = 60 + \frac{10}{2} = 65 cm$$

$$A_2 = 20 \cdot 70 = 1400 cm^2 \qquad X_2 = 20 + \frac{20}{2} = 30 cm \qquad Y_2 = \frac{70}{2} = 35 cm$$

$$A_3 = 30 \cdot 10 = 300 cm^2 \qquad X_3 = 20 + 20 + \frac{30}{2} = 55 cm \qquad Y_2 = \frac{10}{2} = 5 cm$$

$$A_4 = 10 \cdot 20 = 200 cm^2 \qquad X_4 = 20 + 20 + 30 + \frac{10}{2} = 75 cm \qquad Y_2 = \frac{20}{2} = 10 cm$$

$$A_t = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 200 + 1400 + 300 + 200 = 2100 cm^2$$

MOMENTO STATICO RISPETTO ALL'ASSE X:

$$S_X = \sum A_i \cdot Y_i = A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2 + A_3 \cdot Y_3 + A_4 \cdot Y_4$$

$$S_X = 200 \cdot 65 + 1400 \cdot 35 + 300 \cdot 5 + 200 \cdot 10 = 65500 cm^3$$

MOMENTO STATICO RISPETTO ALL'ASSE Y:

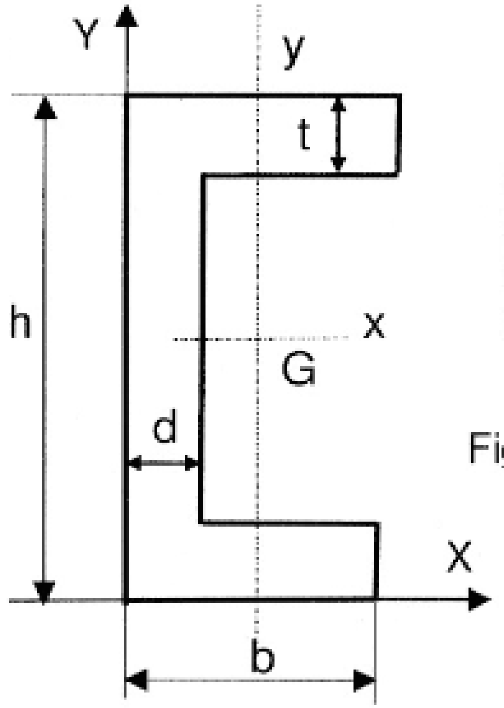
$$S_Y = \quad = \sum A_i \cdot X_i = (A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + A_3 \cdot X_3 + A_4 \cdot X_4)$$

$$S_Y = (200 \cdot 10 + 1400 \cdot 30 + 300 \cdot 55 + 200 \cdot 75) = 75500 cm^3$$

$$X_G = \frac{S_Y}{A_t} = \frac{75500}{2100} = 35{,}95 cm$$

$$Y_G = \frac{S_X}{A_t} = \frac{65500}{2100} = 31{,}19 cm$$

- **ESERCIZIO 4:**



d=8 mm
t=20
b=100
h=160

Fig. 4.2

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_{G_i}}{A} \qquad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_{G_i}}{A}$$

$$A_1 = (100 \cdot 20) = 2000\,mm^2$$

$$A_2 = d \cdot (h - 2 \cdot t) = 8 \cdot (160 - 2 \cdot 20) = 8 \cdot 120 = 960\,mm^2$$

$$A_3 = (100 \cdot 20) = 2000\,mm^2$$

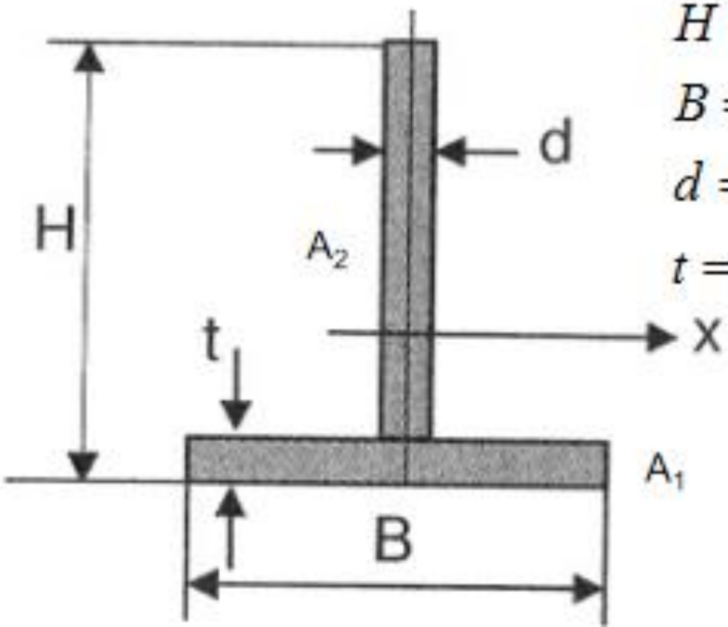
$$A = 2000 + 960 + 2000 = 4960\,mm^2$$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1} A_i \cdot x_{G_i}}{A} = \frac{A_1 \cdot x_{G_1} + A_2 \cdot x_{G_2} + A_3 \cdot x_{G_3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{2000 \cdot 50 + 960 \cdot 4 + 2000 \cdot 50}{2000 + 960 + 2000} = 41.10\,mm$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_{G_i}}{A} = \frac{A_1 \cdot y_{G_1} + A_2 \cdot y_{G_2} + A_3 \cdot y_{G_3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{2000 \cdot 150 + 960 \cdot 80 + 2000 \cdot 10}{2000 + 960 + 2000} = 80\,mm$$

$$S_y = x_G \cdot A \quad \Rightarrow \quad S_y = 41.1 \cdot 4960 = 203856\,mm^3$$

- **ESERCIZIO 5:**



$$H = 100\,mm$$
$$B = 100\,mm$$
$$d = 11\,mm$$
$$t = 11\,mm$$

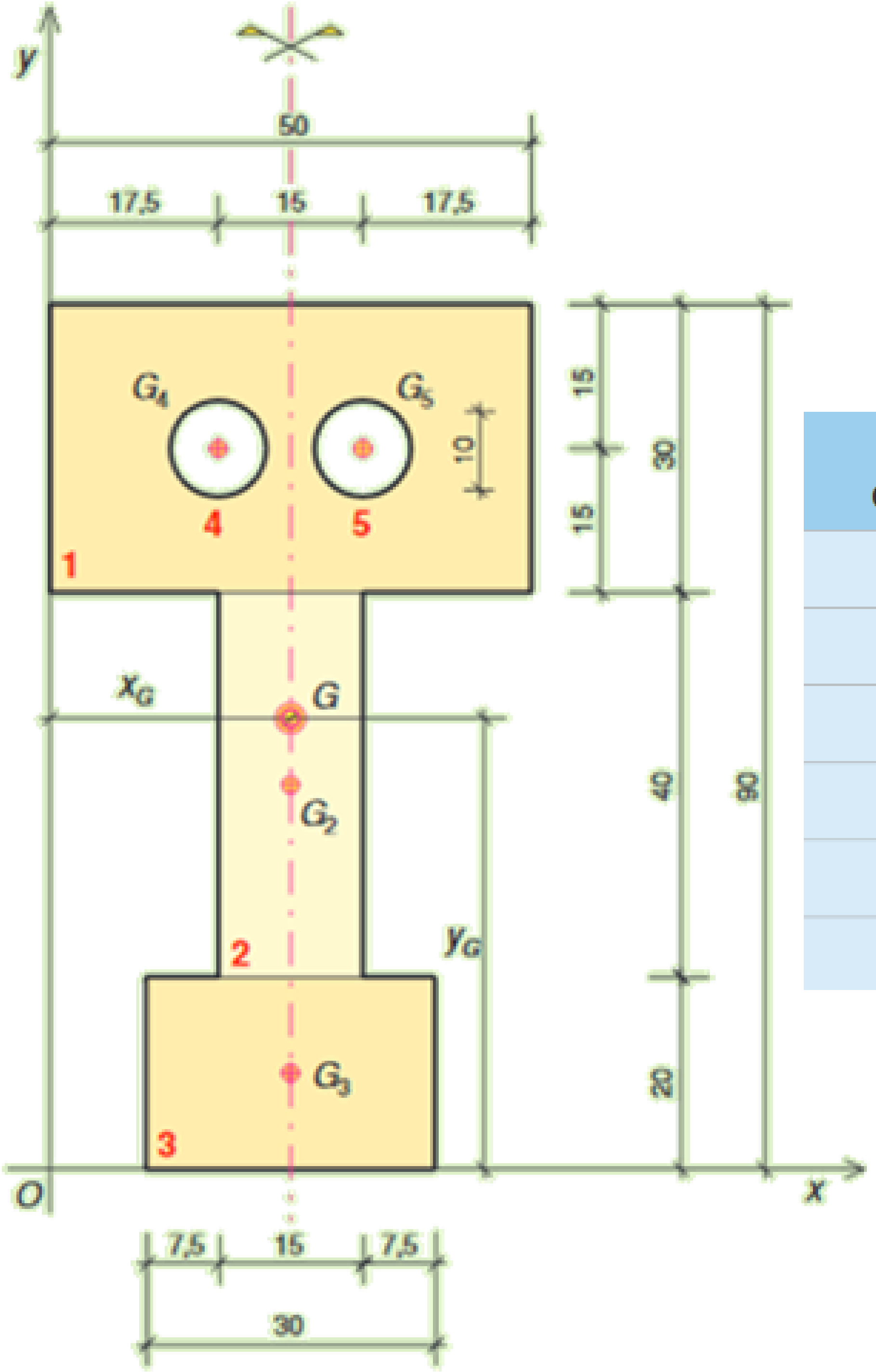
$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_{G_i}}{A} \qquad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_{G_i}}{A}$$

$$A_1 = (100 \cdot 11) = 1100\,mm^2$$
$$A_2 = d \cdot (h - t) = 11 \cdot (100 - 11) = 979\,mm^2$$
$$A = 1100 + 979 = 2079\,mm^2$$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_{G_i}}{A} = \frac{A_1 \cdot x_{G_1} + A_2 \cdot x_{G_2}}{A_1 + A_{23}} = \frac{1100 \cdot 50 + 979 \cdot 50}{2079} = 50\,mm$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_{G_i}}{A} = \frac{A_1 \cdot y_{G_1} + A_2 \cdot y_{G_2}}{A_1 + A_2} = \frac{1100 \cdot 5.5 + 979 \cdot 55.5}{1100 + 979} = 29.04\,mm$$

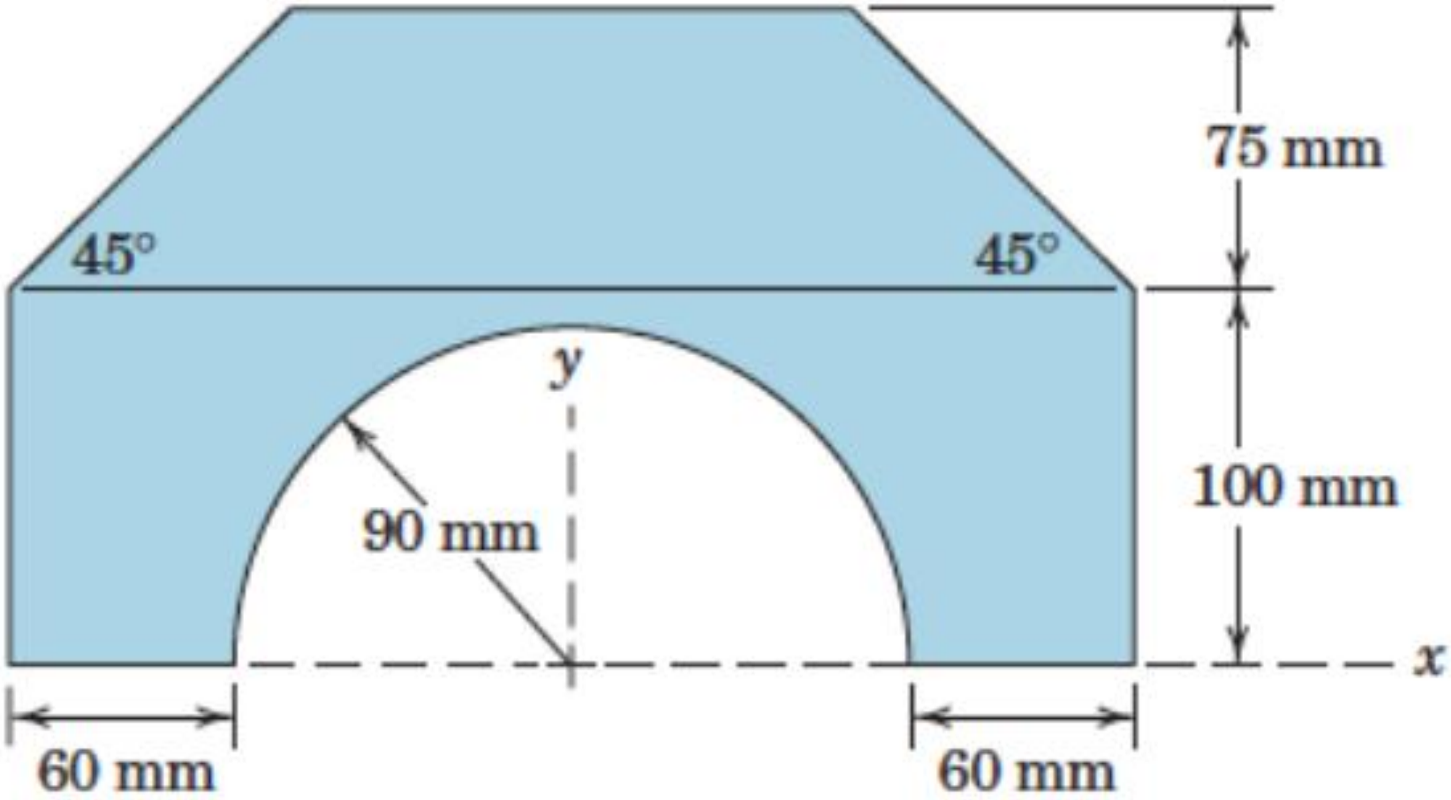
$$S_y = x_G \cdot A \Rightarrow S_y = 50 \cdot 2079 = 103950\,mm^3 \qquad S_x = y_G \cdot A \Rightarrow S_x = 29.04 \cdot 2079 = 60384.5\,mm^3$$



- **ESERCIZIO 6:**

Sezioni elementari	Aree A_i (cm^2)	Distanze y_i (cm)	Momenti statici $A_i\,y_i$ (cm^3)
1	$30 \cdot 50 = 1500$	75	112 500
2	$15 \cdot 40 = 600$	40	24 000
3	$20 \cdot 30 = 600$	10	6000
4	$-\pi 5^2 = -78{,}54$	75	$-5890{,}5$
5	$-\pi 5^2 = -78{,}54$	75	$-5890{,}5$
	$\sum_i A_i = 2542{,}92$		$\sum_i A_i\,y_i = 130\,719$

- **ESERCIZIO DA RISOLVERE:**



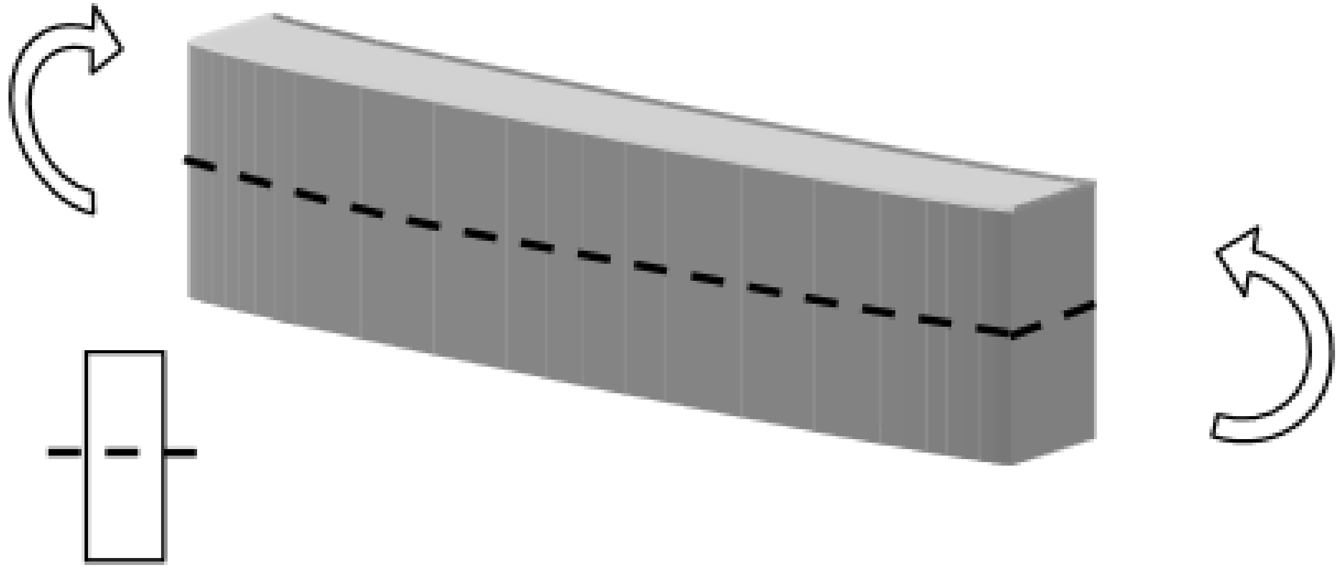
Semicerchio

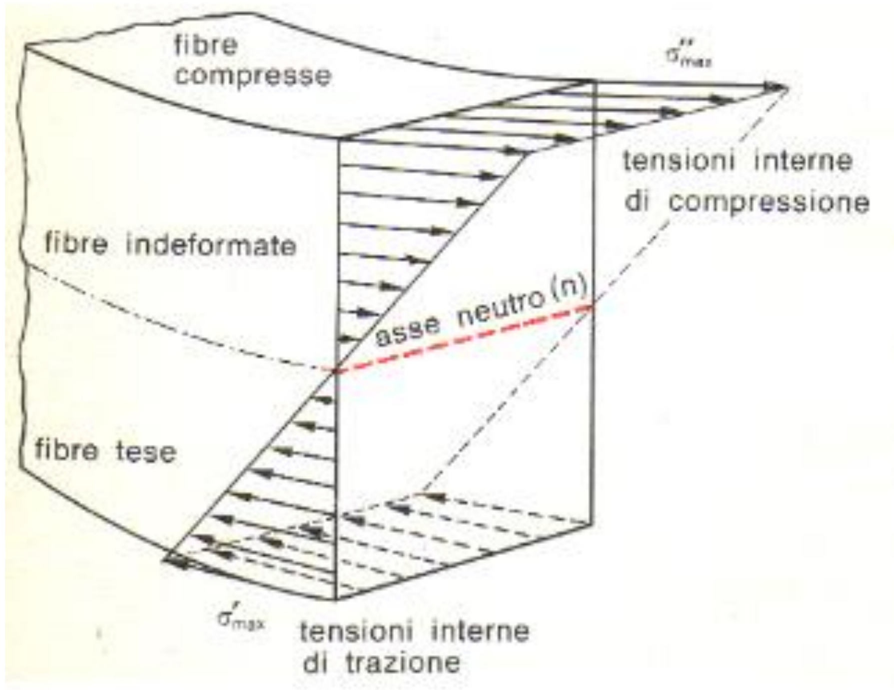
$$y_G = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$$

$$y_G = 95.6mm$$

MOMENTO DI INERZIA ASSIALE (del secondo ordine)

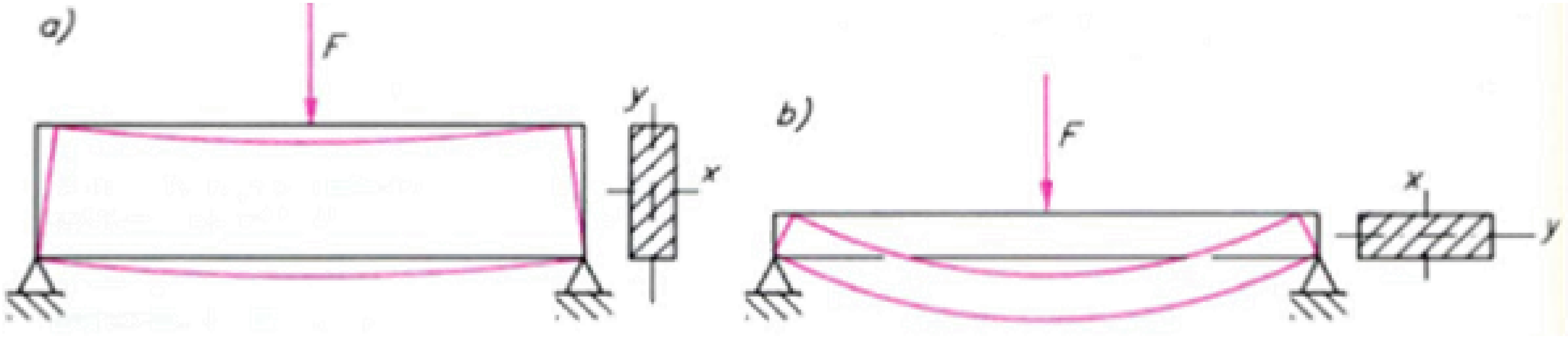
- E’ una grandezza che dipende esclusivamente dalle dimensioni e dalla forma di una superficie
- Ha quindi un significato geometrico importante
- È anche una quantità che esprime la capacità di un corpo di opporsi a variazioni di velocità angolare (movimento rotatorio attorno ad un asse)



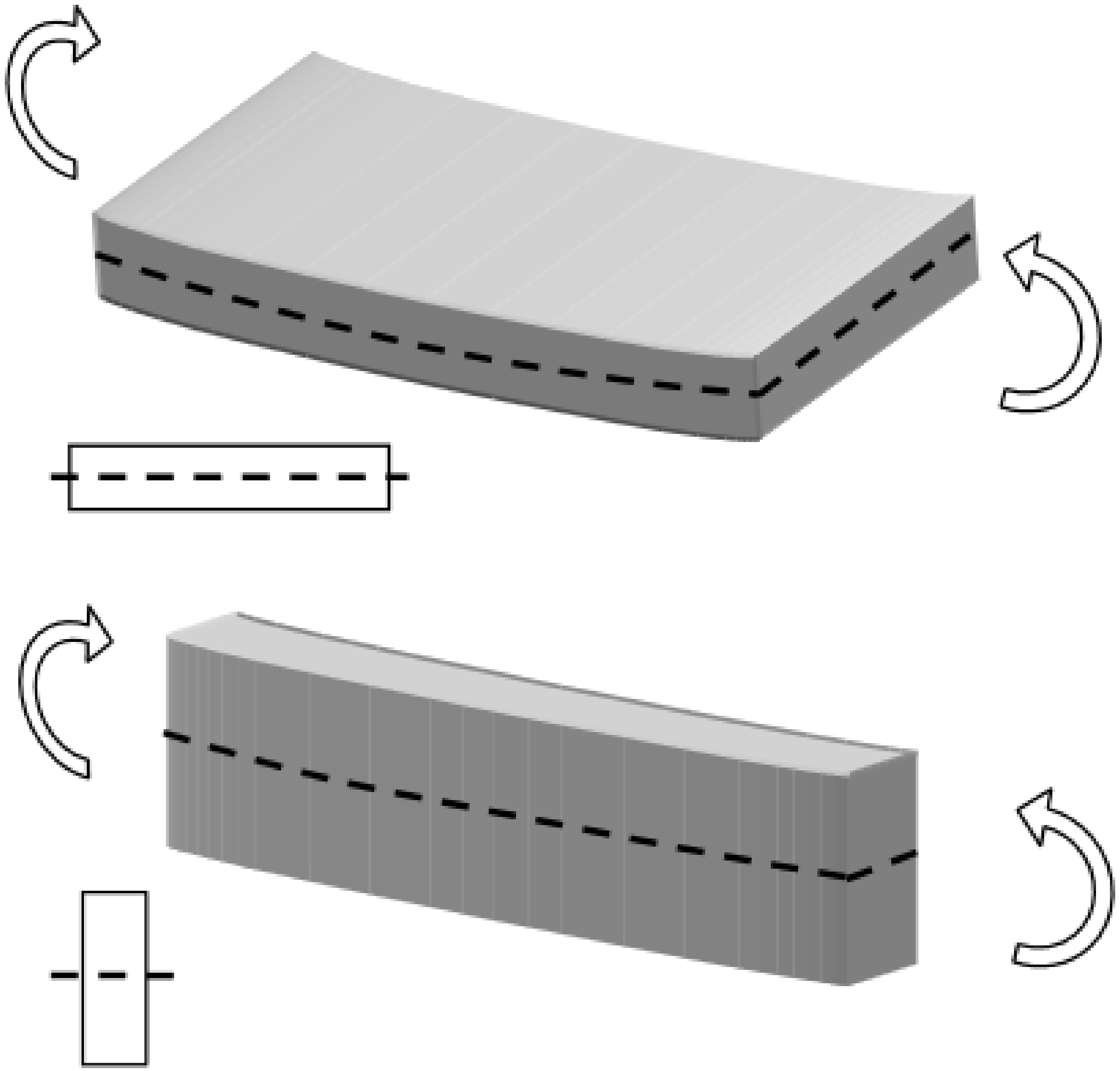


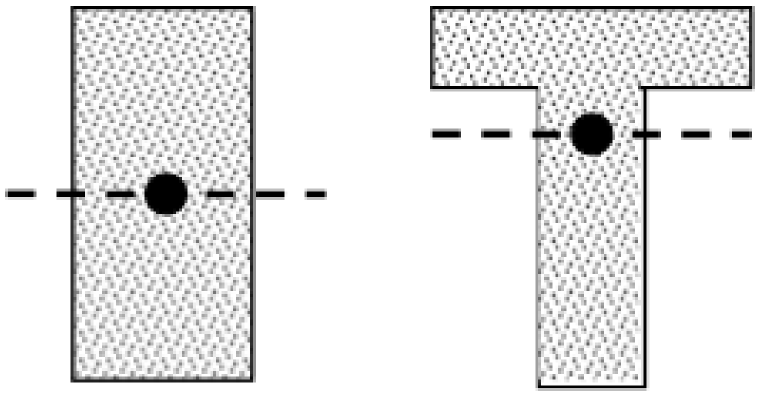
MOMENTO DI INERZIA ASSIALE

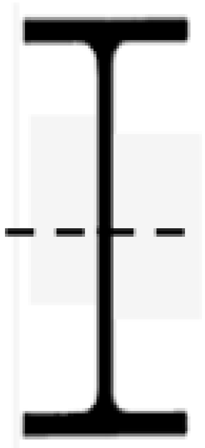
- È una grandezza di riferimento per il dimensionamento e la verifica di componenti strutturali ed elementi semplici
- Se ne fa ampio uso in tutti i casi fondamentali di sollecitazione, specialmente nel caso della flessione
- La sua utilità si riscontra sia nella progettazione a deformazione che nella progettazione a resistenza



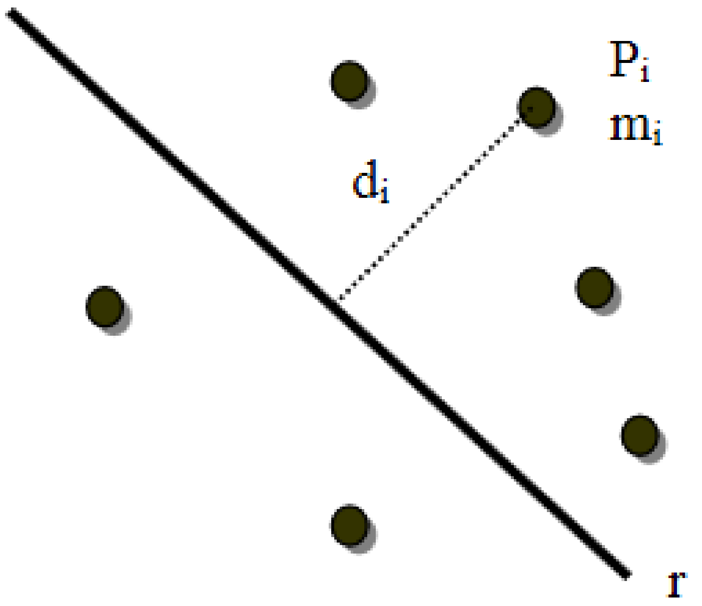
MOMENTO DI INERZIA ASSIALE

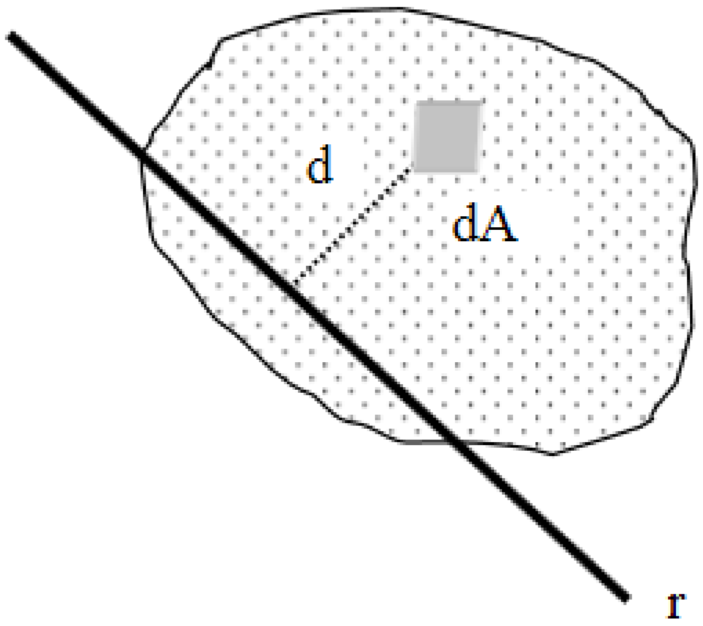






MOMENTO DI INERZIA ASSIALE





$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$J_r = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$$

$$A = \int_A dA$$

$$J_r = \int_A d^2 dA$$

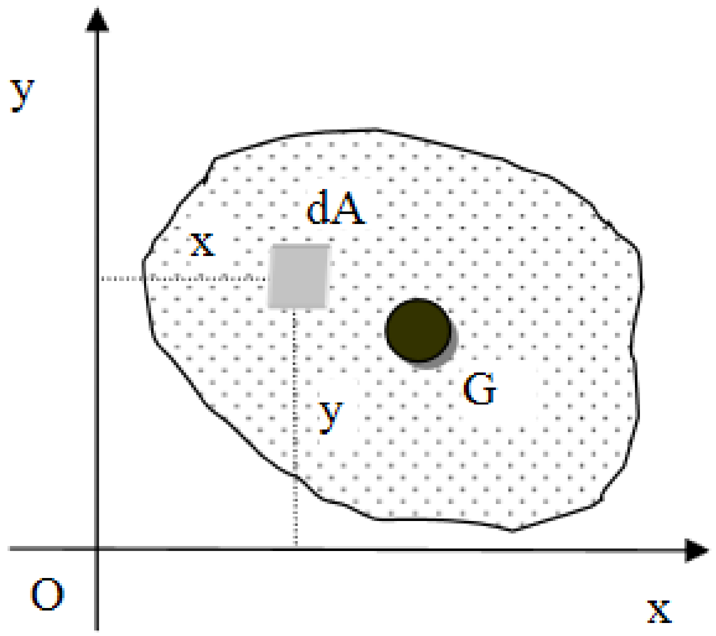
MOMENTO DI INERZIA ASSIALE

- Il momento di inerzia è una quantità sempre positiva, indipendentemente dalla scelta degli assi di riferimento per il calcolo

- È inoltre una quantità che può basarsi sull'additività

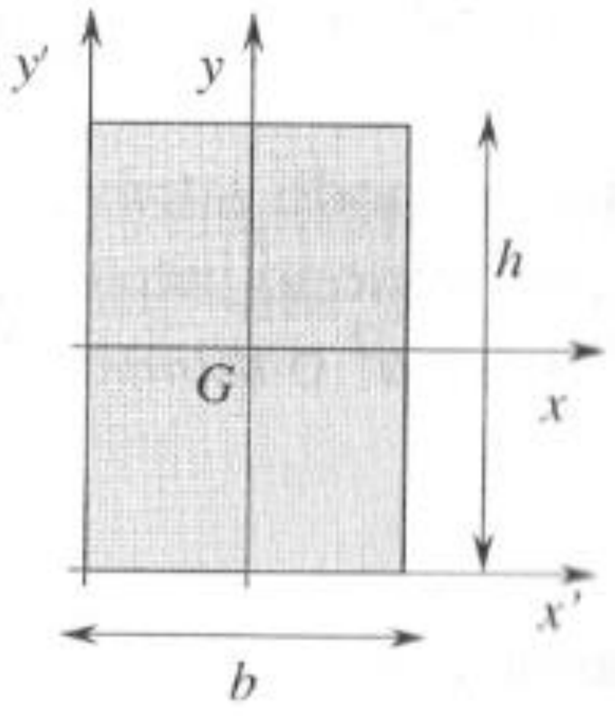
- Si può ottenere come la somma dei prodotti delle areole dA per la loro distanza dall'asse x (o y) elevata al quadrato

$$J_x = \iint_A y^2 \, dA \qquad J_y = \iint_A x^2 \, dA$$



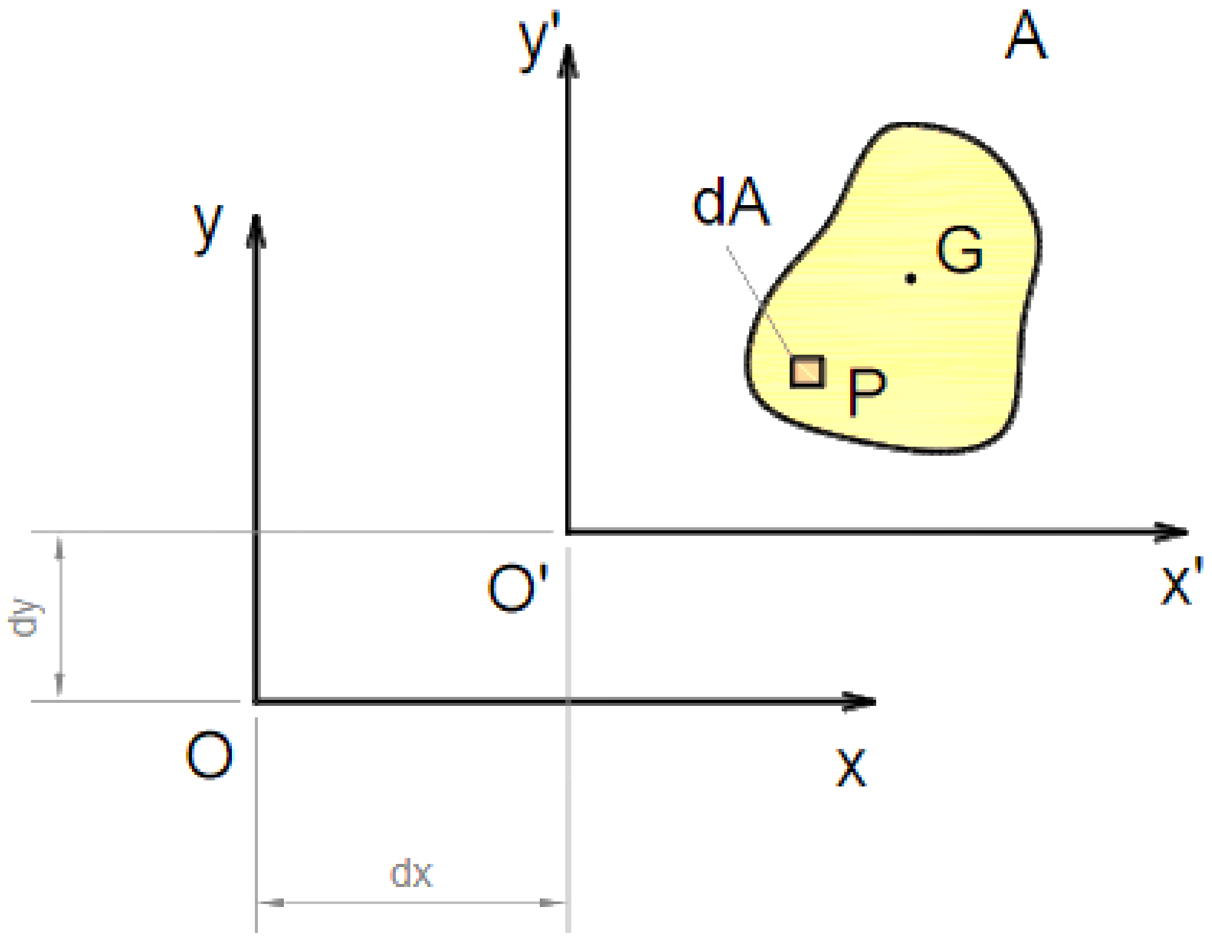
- <u>ESEMPIO</u>:

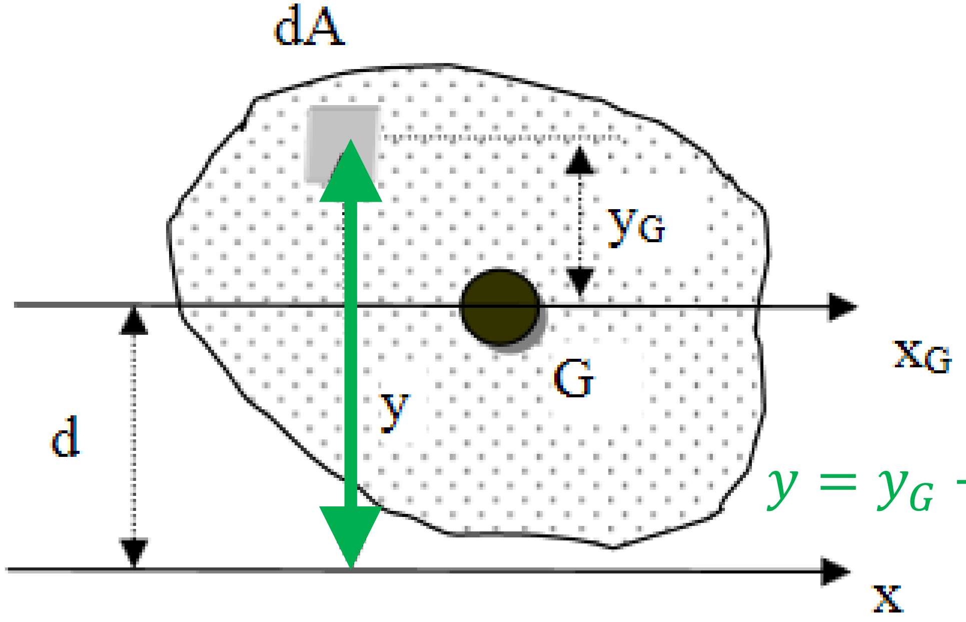
$$J_x = \iint_A y^2 \, dA$$



$$J_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b \cdot y^2 dy = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b \cdot \left[\frac{\frac{h^3}{8}}{3} \right] - \left[\frac{-\frac{h^3}{8}}{3} \right] = b \cdot \frac{h^3}{12}$$

TEOREMA DI HUYGENS
o teorema del trasporto (o di trasposizione)





$y = y_G + d$

$$J_{x_G} = \int_A y_G^2 dA$$

$$J_x = \int_A y^2 dA$$

TEOREMA DI HUYGENS o teorema del trasporto

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y_G + d)^2 dA = \int_A (y_G^2 + 2y_G d + d^2) dA$$

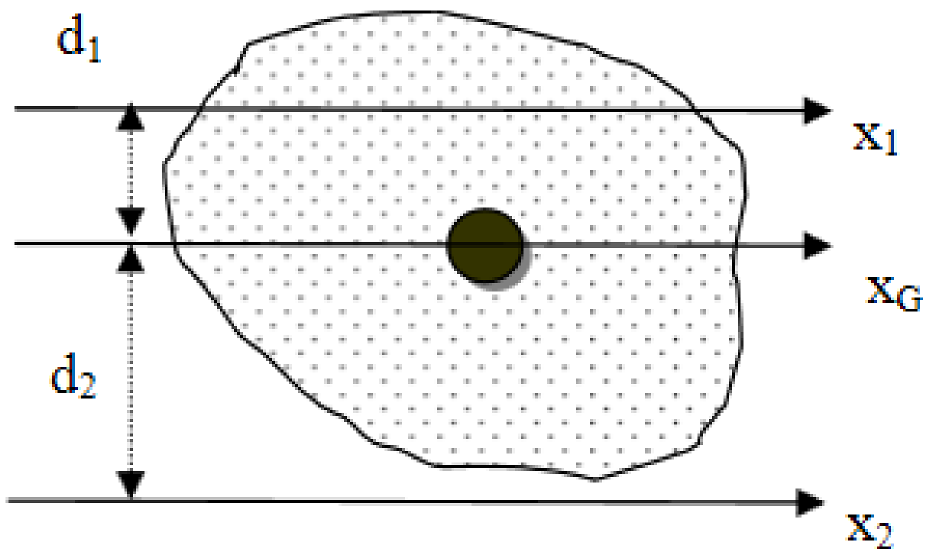
$$J_x = \int_A y_G^2 dA + 2d \int_A y_G dA + d^2 \int_A dA$$

$$S_{x_G} = \int_A y_G dA = 0$$

$$\int_A dA = A$$

$$\Rightarrow \quad J_x = J_{x_G} + d^2 A$$

ASSI PARALLELI



$$J_{x_1} = J_{x_G} + d_1^2 A$$

$$J_{x_2} = J_{x_G} + d_2^2 A$$

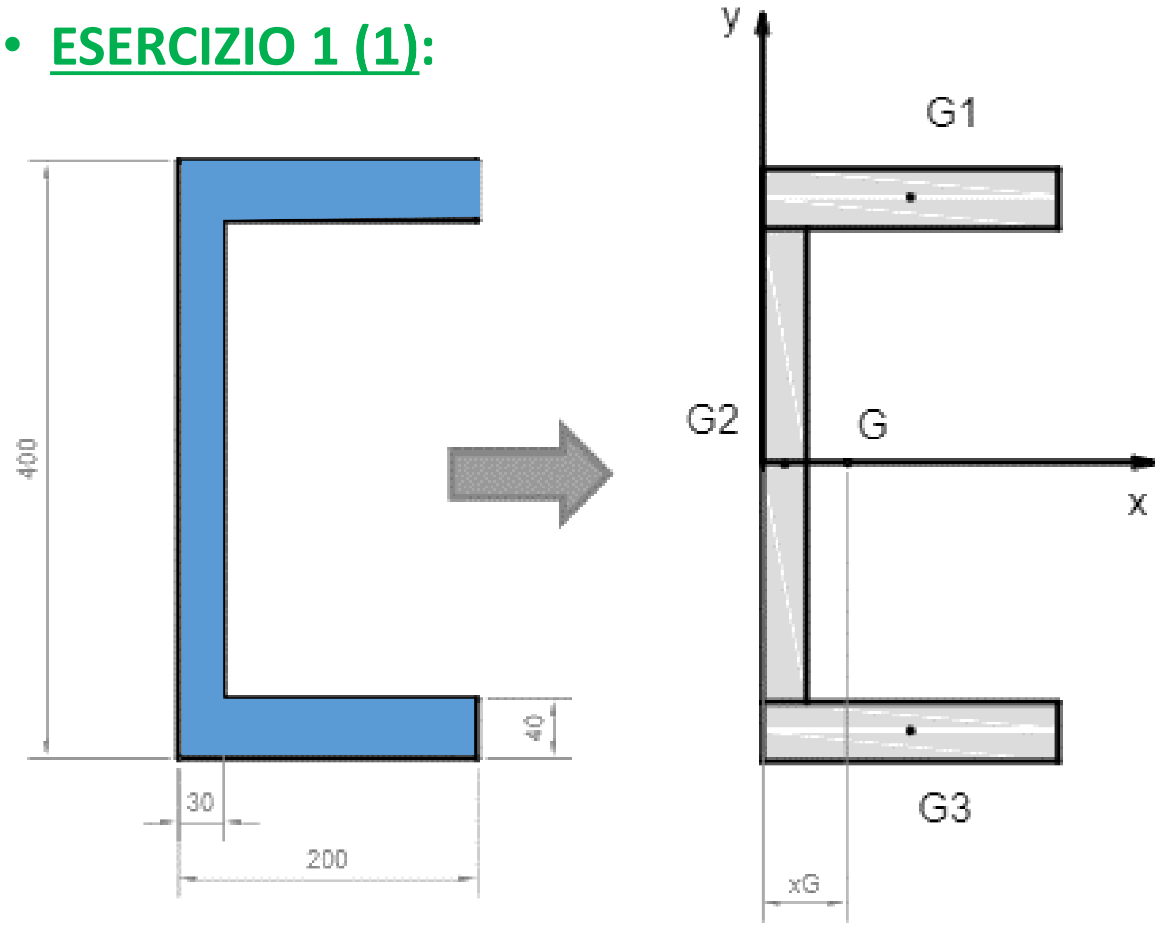
$$J_{x_2} = J_{x_1} + (d_2^2 - d_1^2)\, A$$

Questa espressione consente di calcolare il momento d'inerzia rispetto a un asse x_2, noto quello rispetto a un asse parallelo qualunque x_1 e la posizione del baricentro.

Tra tutte le possibili rette parallele, il momento di inerzia calcolato rispetto ad un asse generico sarà sempre minimo in caso di asse baricentrico

- **ESERCIZIO 1 (1):**

Sezione a C



$$A_1 = 200 \cdot 40 = 8000\, mm^2$$

$$S_{y1} = A_1 \cdot x_{G1} = 8000 \cdot 100 = 800000\, mm^3$$

$$A_2 = 320 \cdot 30 = 9600\, mm^2$$

$$S_{y2} = A_2 \cdot x_{G2} = 9600 \cdot 15 = 144000\, mm^3$$

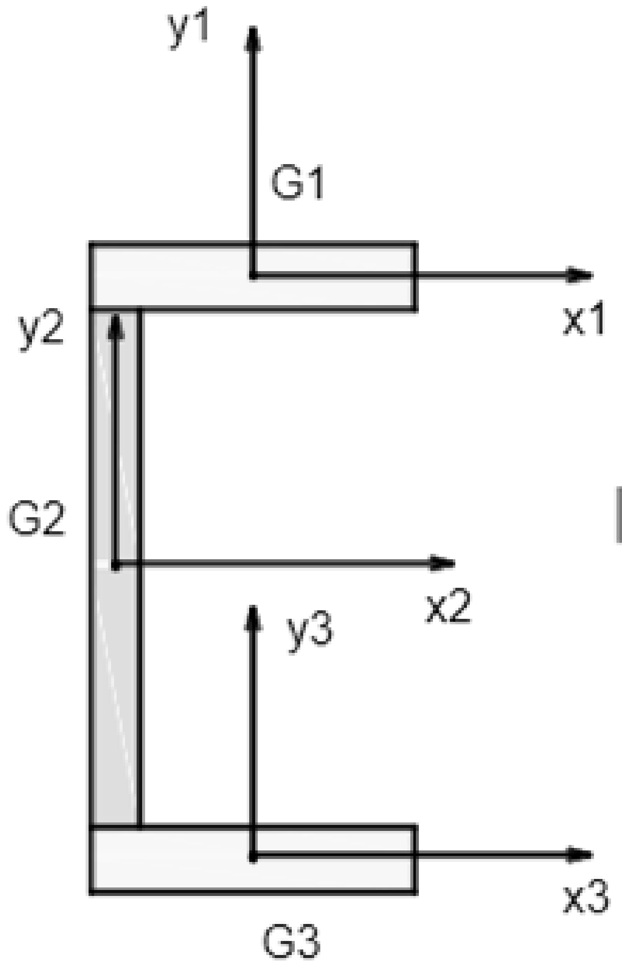
$$A_3 = 200 \cdot 40 = 8000\, mm^2$$

$$S_{y3} = A_3 \cdot x_{G3} = 8000 \cdot 100 = 800000\, mm^3$$

$$x_G = \frac{S_{y1} + S_{y2} + S_{y3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{1744000}{25600} = 68.125\, mm$$

- **ESERCIZIO 1 (2):**

Sezione a C



$$J_{x1} = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 = \frac{1}{12} 200 \cdot 40^3 = 1.066E6\ mm^4$$

$$J_{y1} = \frac{1}{12} h_1 b_1^3 = \frac{1}{12} 40 \cdot 200^3 = 26.666E6\ mm^4$$

$$J_{x2} = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 = \frac{1}{12} 30 \cdot 320^3 = 81.92E6\ mm^4$$

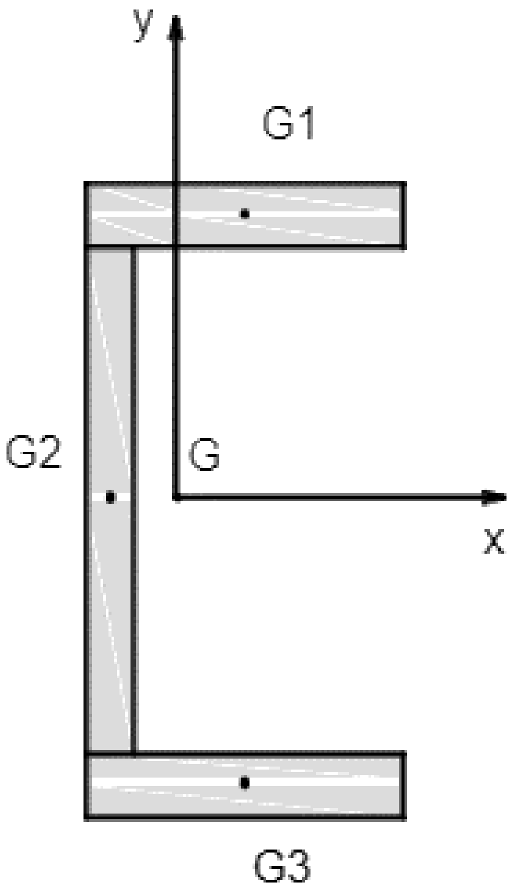
$$J_{y2} = \frac{1}{12} h_2 b_2^3 = \frac{1}{12} 320 \cdot 30^3 = 0.72E6\ mm^4$$

$$J_{x3} = \frac{1}{12} b_3 h_3^3 = \frac{1}{12} 200 \cdot 40^3 = 1.066E6\ mm^4$$

$$J_{y3} = \frac{1}{12} h_3 b_3^3 = \frac{1}{12} 40 \cdot 200^3 = 26.666E6\ mm^4$$

- **ESERCIZIO 1 (3):**

Sezione a C



$$J_x = (J_{x1} + A_1 y_1^2) + (J_{x2} + A_2 y_2^2) + (J_{x3} + A_3 y_3^2)$$

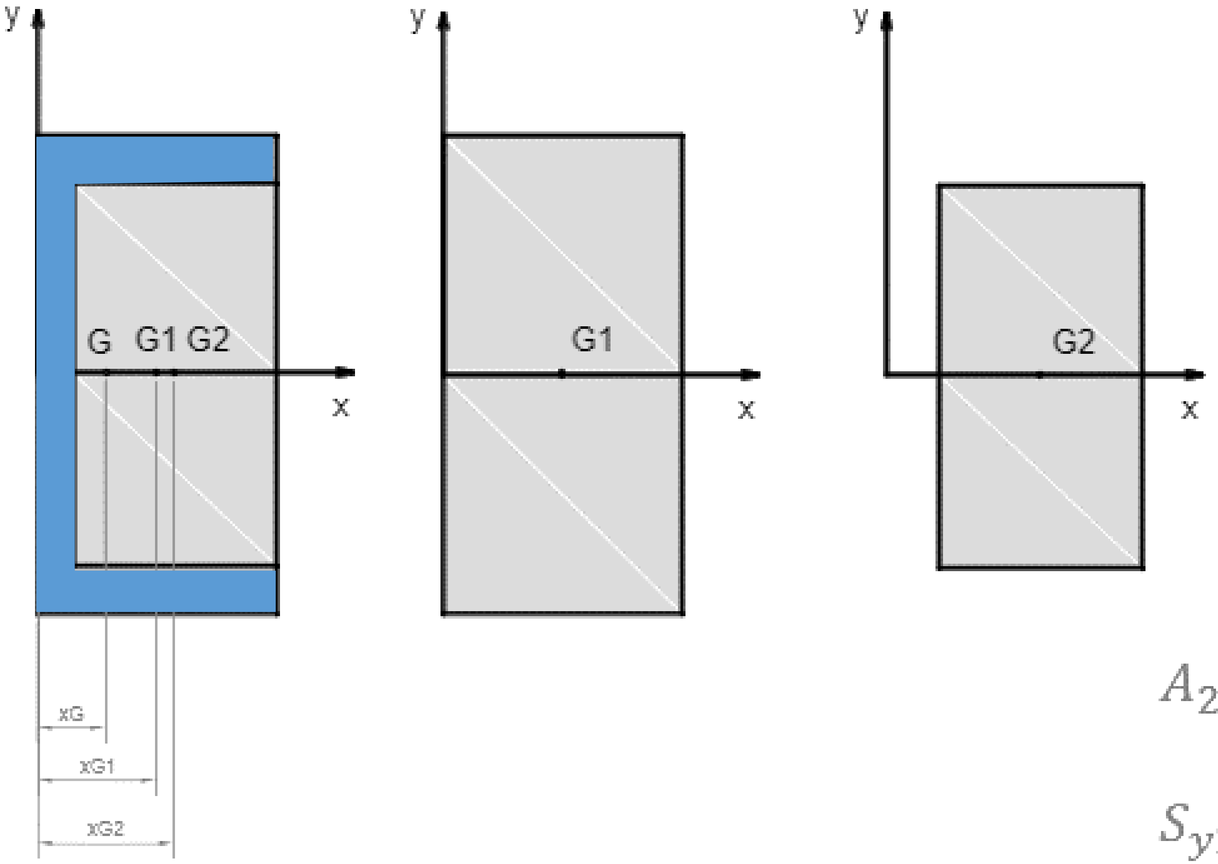
$$J_x = (1.066E6 + 8000 \cdot 180^2) + (81.92E6 + 0) + \\ +(1.066E6 + 8000 \cdot 180^2) = 602.452E6\, mm^4$$

$$J_y = (J_{y1} + A_1 x_1^2) + (J_{y2} + A_2 x_2^2) + (J_{y3} + A_3 x_3^2)$$

$$J_y = (26.666E6 + 8000 \cdot 31.875^2) + \\ +(0.72E6 + 9600 \cdot 53.125^2) + \\ +(26.666E6 + 8000 \cdot 31.875^2) = 97.402E6\, mm^4$$

- **ESERCIZIO 2 (1):**

Sezione composta



$$A_1 = 200 \cdot 400 = 80000\,mm^2$$

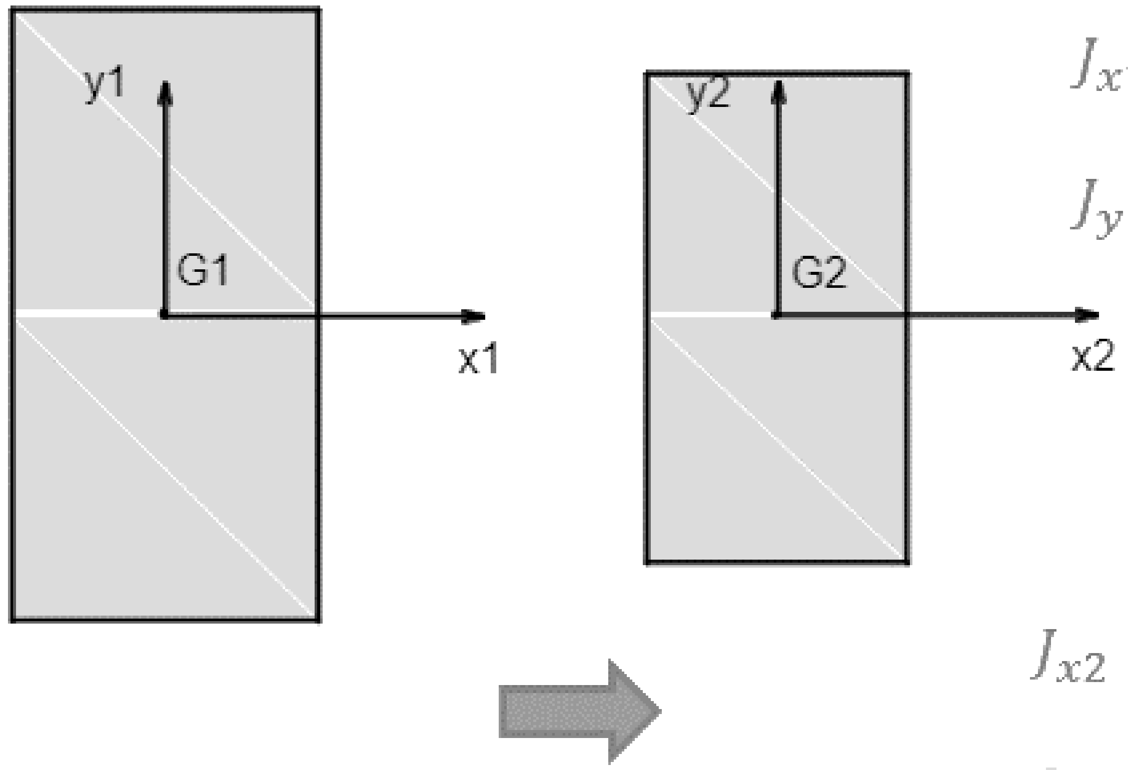
$$S_{y1} = A_1 \cdot x_{G1} = 80000 \cdot 100 = 8E6\,mm^3$$

$$A_2 = 320 \cdot 170 = 54400\,mm^2$$

$$S_{y2} = A_2 \cdot x_{G2} = 54400 \cdot 115 = 6.256E6\,mm^3$$

$$x_G = \frac{S_{y1} - S_{y2}}{A_1 - A_2} = \frac{1744000}{25600} = 68.125\,mm$$

- **ESERCIZIO 2 (2):**



$$J_{x1} = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 = \frac{1}{12} 200 \cdot 400^3 = 1.066E9\ mm^4$$

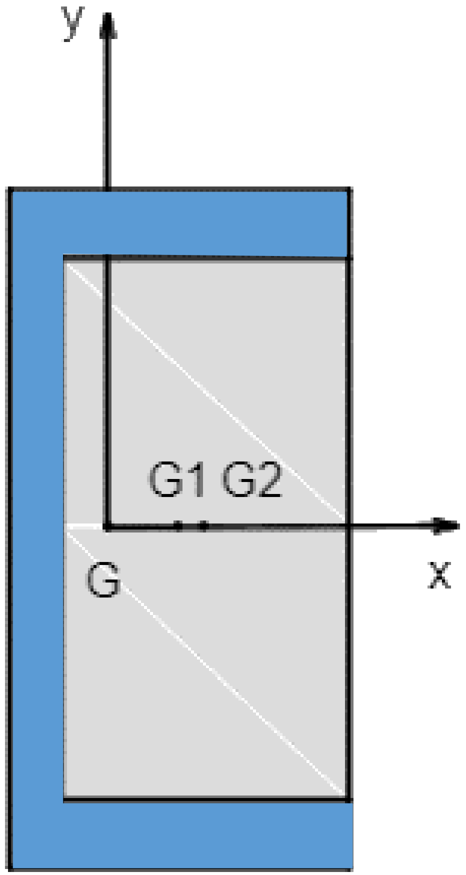
$$J_{y1} = \frac{1}{12} h_1 b_1^3 = \frac{1}{12} 400 \cdot 200^3 = 0.266E9\ mm^4$$

$$J_{x2} = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 = \frac{1}{12} 170 \cdot 320^3 = 0.464E9\ mm^4$$

$$J_{y2} = \frac{1}{12} h_2 b_2^3 = \frac{1}{12} 320 \cdot 170^3 = 0.131E9\ mm^4$$

- **ESERCIZIO 2 (3):**

Sezione composta



$$J_x = J_{x1} - J_{x2}$$

$$J_x = 1.066E9 - 0.464E9 = 602E6\ mm^4$$

$$J_y = \left(J_{y1} + A_1 x_1^2\right) - \left(J_{y2} + A_2 x_2^2\right)$$

$$J_y = (0.266E9 + 80000 \cdot 31.875^2) -$$
$$+(0.131E9 + 54400 \cdot 46.875^2) = 96.75E6\ mm^4$$

RAGGIO DI INERZIA (raggio di girazione o giratore)

- Il raggio di inerzia rappresenta la distanza alla quale è necessario concentrare la massa /area totale del sistema per ottenere uno stesso momento di inerzia assiale

- Nel caso delle figure piane da noi analizzate, il raggio di inerzia esprime la distribuzione dell’area rispetto al proprio asse di rotazione

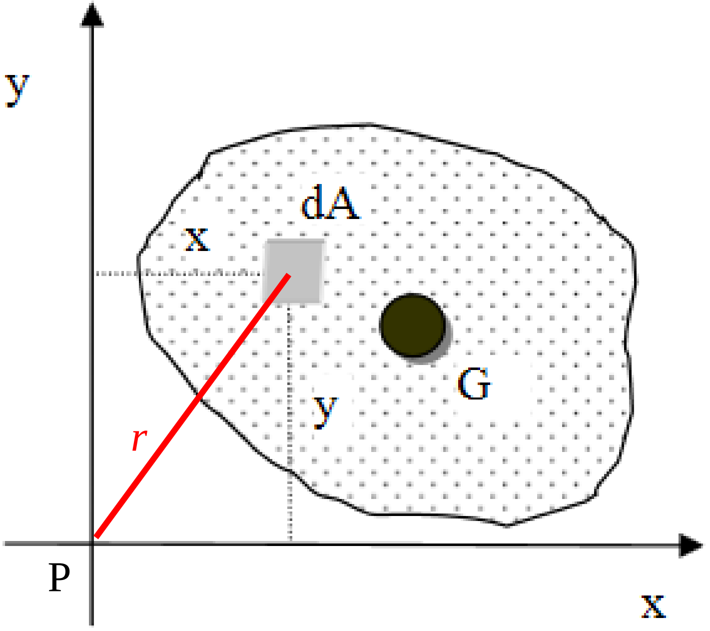
- Il suo valore dipende dall’asse considerato per il calcolo

$$\rho_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} \qquad \rho_{x_G} = \sqrt{\frac{J_{x_G}}{A}}$$

$$\rho_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \qquad \rho_{y_G} = \sqrt{\frac{J_{y_G}}{A}}$$

MOMENTO DI INERZIA POLARE

Si definisce **momento di inerzia polare** il momento d'area del second'ordine espresso dalla seguente relazione:



$$J_P = \int_A r^2 dA$$

Calcolato rispetto ad un polo P generico

Con riferimento alla figura, si osservi che la distanza di un qualunque punto dall'origine degli assi può essere espressa come:

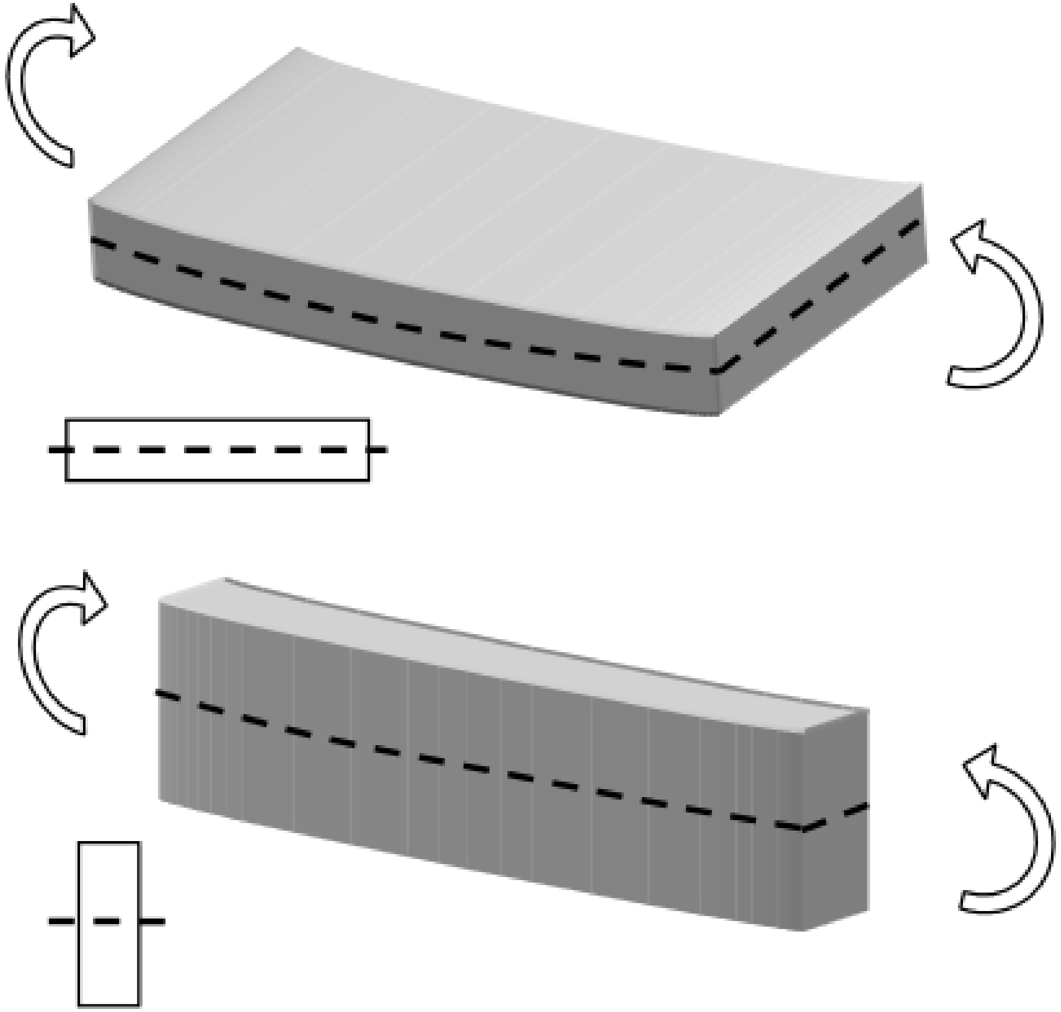
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

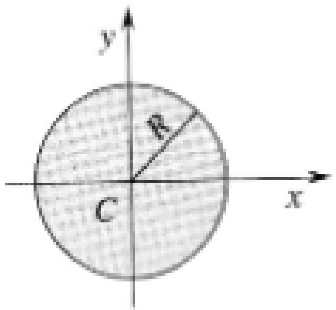
- *Somma dei momenti d'inerzia rispetto a due rette ortogonali qualunque passanti per un punto*
- *Invariante al ruotare degli assi di riferimento rispetto al polo di riferimento*
- *Quantità sempre positiva*

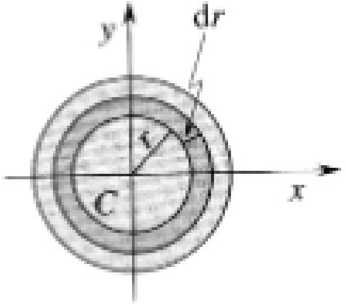
E quindi potremo scrivere:

$$J_P = \int_A r^2 \cdot dA = \int_A \left(x^2 + y^2\right) \cdot dA = \int_A x^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA = J_y + J_x$$


Asse di rotazione
Centro di massa
Il momento di inerzia polare







Il momento di inerzia polare di una sezione circolare rispetto al suo baricentro C si calcola mediante la relazione

$$J_C = \int_A r^2 \cdot dA$$

L'area della corona circolare si può esprimere come prodotto della circonferenza media per lo spessore dr, quindi

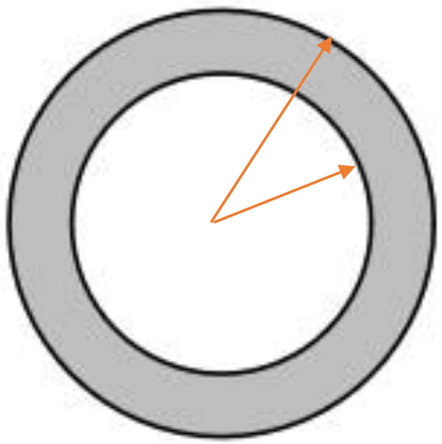
$$dA = 2\pi r \cdot dr$$

$$J_C = \int_0^R r^2 2\pi r \cdot dr = 2\pi \int_0^R r^3 \cdot dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 2\pi \frac{R^4}{4} = 2\pi \frac{D^4}{16 \cdot 4} = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$

si possono fare, inoltre, delle considerazioni sulla simmetria della sezione. Infatti la scelta dell'asse diametrale rispetto al quale fare il calcolo è assolutamente arbitraria

$$J_x = J_y \qquad J_C = J_y + J_x \qquad J_x = J_y = \frac{J_C}{2}$$

e quindi infine si ha: $J_x = J_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi \cdot D^4}{32}\right) = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$



Si consideri una sezione circolare cava, la cui geometria è individuabile attraverso un diametro esterno D ed un diametro interno d.

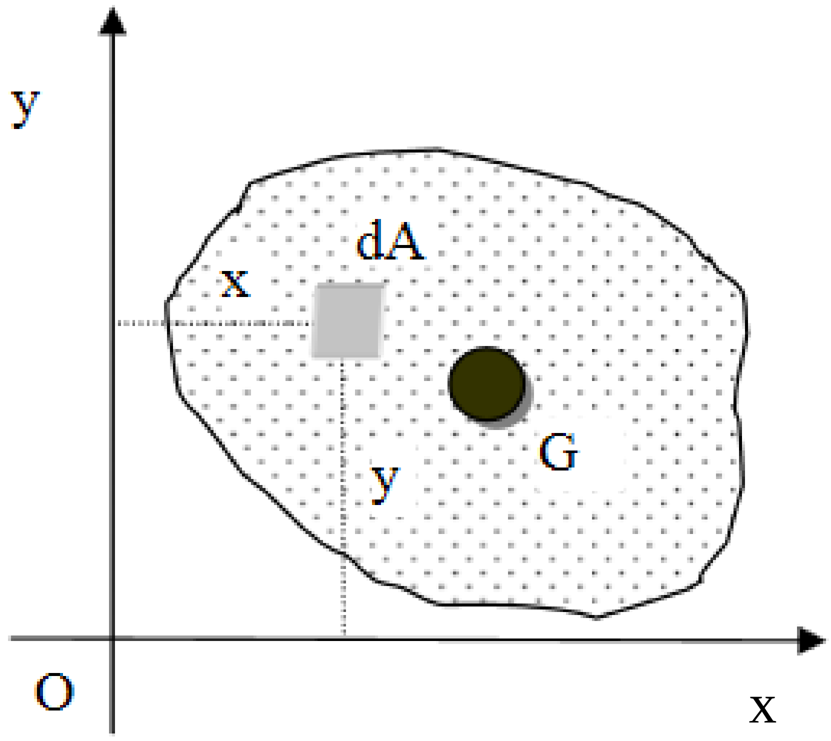
Il momento di inerzia di questa sezione si può calcolare facilmente per **differenza tra il momento di inerzia relativo alla sezione avente diametro D e il momento di inerzia relativo alla sezione di diametro minore d**. Ricordando che:

$$J_C = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$

$$J_C = \frac{\pi \cdot D^4}{32} - \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right)$$

MOMENTO CENTRIFUGO

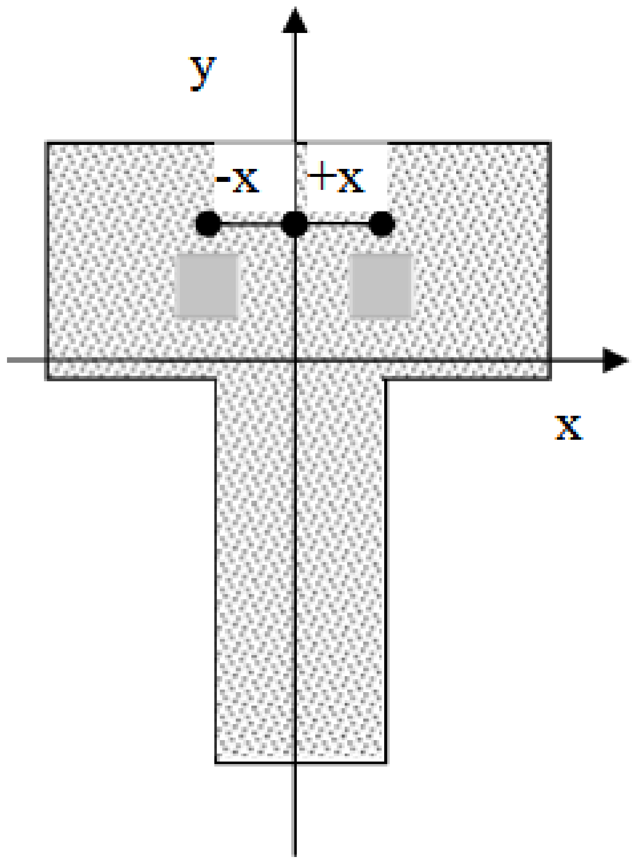
Si consideri una figura piana e un sistema di riferimento x y. Si definisce Momento Centrifugo o Prodotto d'Inerzia rispetto agli assi x e y l'integrale:



$$J_{xy} = \int_A x\, y\, dA$$

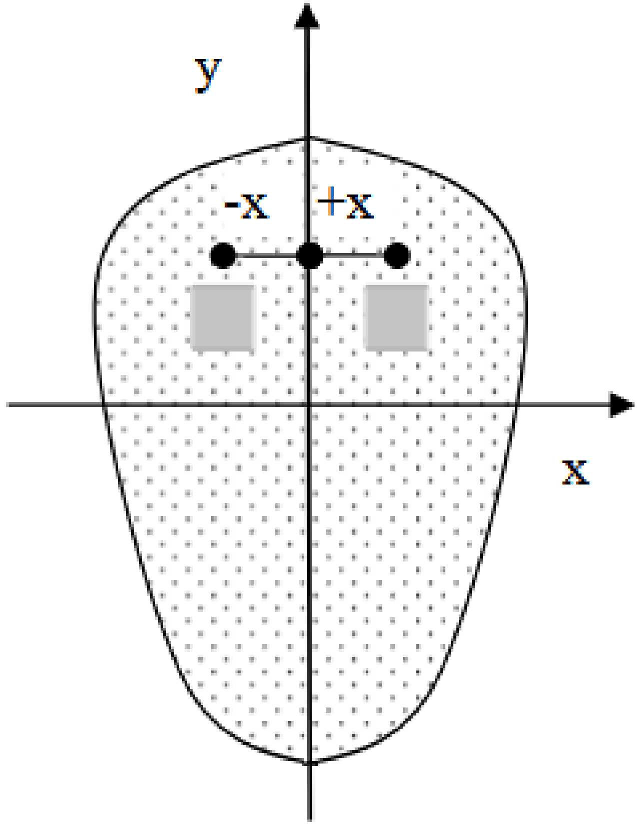
- Come si può intuire dalla definizione sopra riportata, il momento centrifugo può assumere valori tanto positivi che negativi
- Il momento centrifugo è nullo se una delle due rette rappresenta un asse di simmetria per il sistema

$$J_{xy} = \int_A x\, y\, dA$$

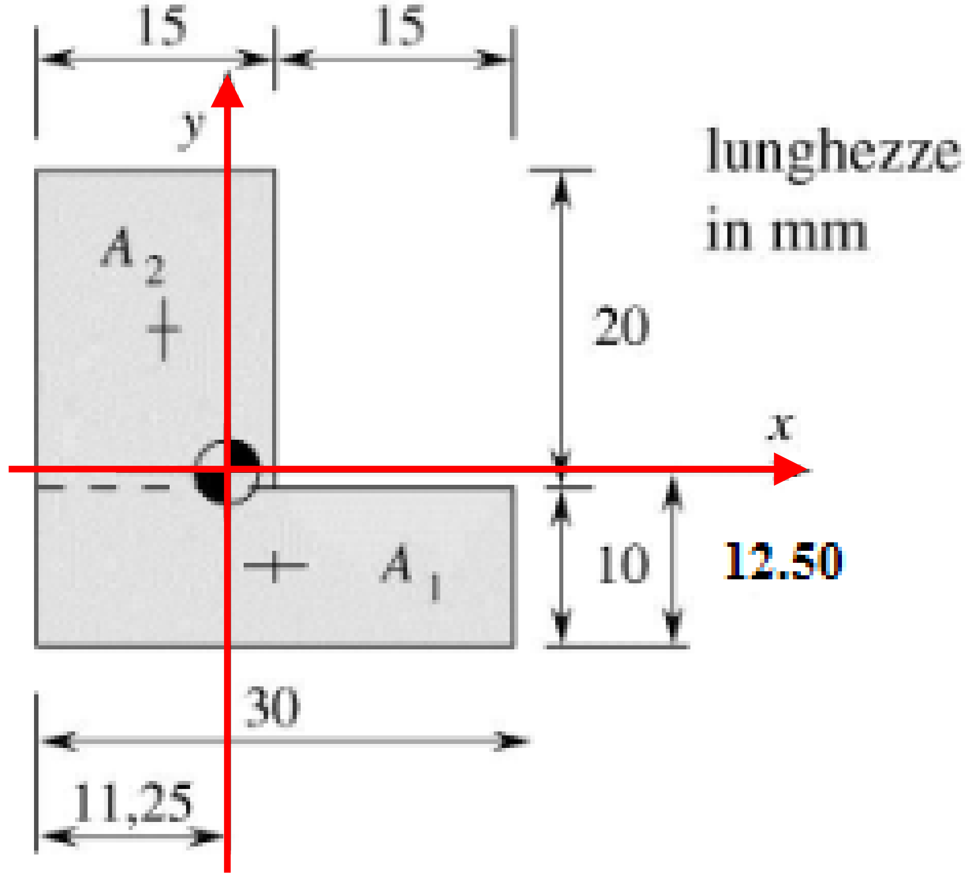


Asse di simmetria

$$I_{xy} = 0$$



Asse di simmetria



$$J_{x1} = \frac{1}{12}\left(30 \cdot 10^3\right) + \left(-12.5 + 5\right)^2 \cdot 300 = 19375\ mm^4$$

$$J_{x2} = \frac{1}{12}\left(15 \cdot 20^3\right) + \left(10 + 10 - 12.5\right)^2 \cdot 300 = 26875\ mm^4$$

$$J_x = J_{x1} + J_{x2} = 46250\ mm^2$$

$$J_{y1} = \frac{1}{12}\left(10 \cdot 30^3\right) + \left(15 - 11.25\right)^2 \cdot 300 = 26718\ mm^4$$

$$J_{y2} = \frac{1}{12}\left(20 \cdot 15^3\right) + \left(-11.25 + 7.5\right)^2 \cdot 300 = 9843\ mm^4$$

$$J_y = J_{y1} + J_{y2} = 36561\ mm^2$$

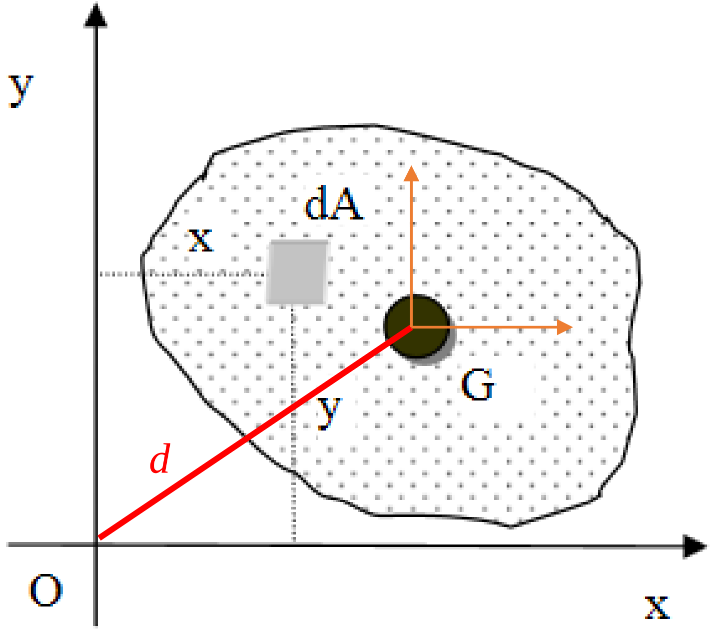
$$J_{xy1} = 0 + \left(15 - 11.25\right)\left(-12.5 + 5\right) \cdot 300 = -8437\ mm^4$$

$$J_{xy2} = 0 + \left(-11.25 + 7.5\right)\left(20 - 12.5\right) \cdot 300 = -8437\ mm^4$$

$$J_{xy} = J_{xy1} + J_{xy2} = -16875\ mm^2$$

N.B. J_{xy} risulta negativo perché la figura si sviluppa soprattutto nel II e IV quadrante (ove xy è negativo)

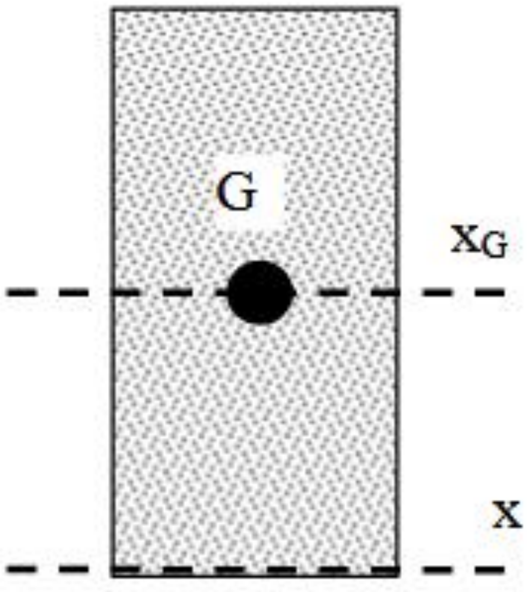
TRASPORTO del momento di inerzia polare e del momento centrifugo



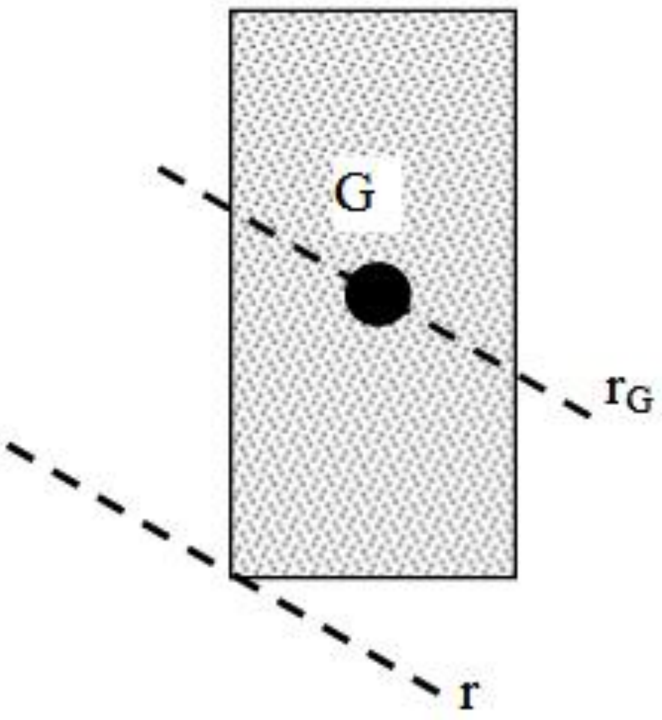
$$J_o = J_G + d^2 A$$

$$J_{xy} = J_{x_G y_G} + x_G y_G A$$

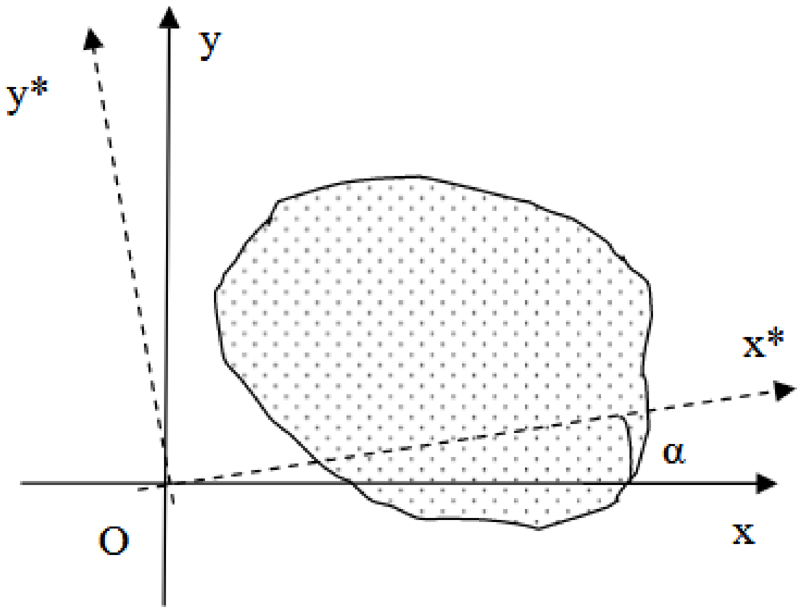
ROTAZIONE DEGLI ASSI
e momenti del secondo ordine



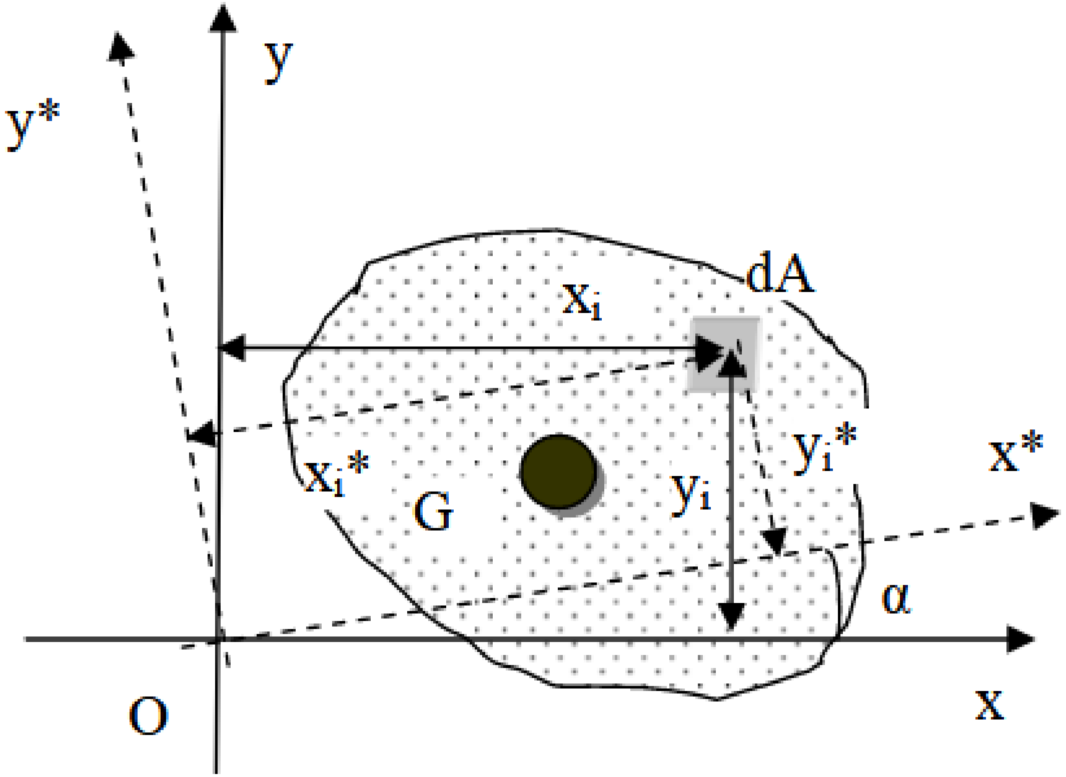
J_{x_G} , J_x



J_{r_G} , J_r ???



J_{x*}??? J_{y*}???



$$x^* = y \sin \alpha + x \cos \alpha$$

$$y^* = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$J_{x*} = \int_A (y^*)^2 \, dA$$

$$J_{x*} = \int_A (y^*)^2 \, dA = \int_A (y\,cos\alpha \; - x\,sin\alpha)^2 \, dA =$$

$$= \int_A y^2 \cos^2\alpha \;\, dA - \int_A 2\,y\,cos\alpha\,x\,sin\alpha \, dA + \int_A x^2 \sin^2\alpha \;\, dA$$

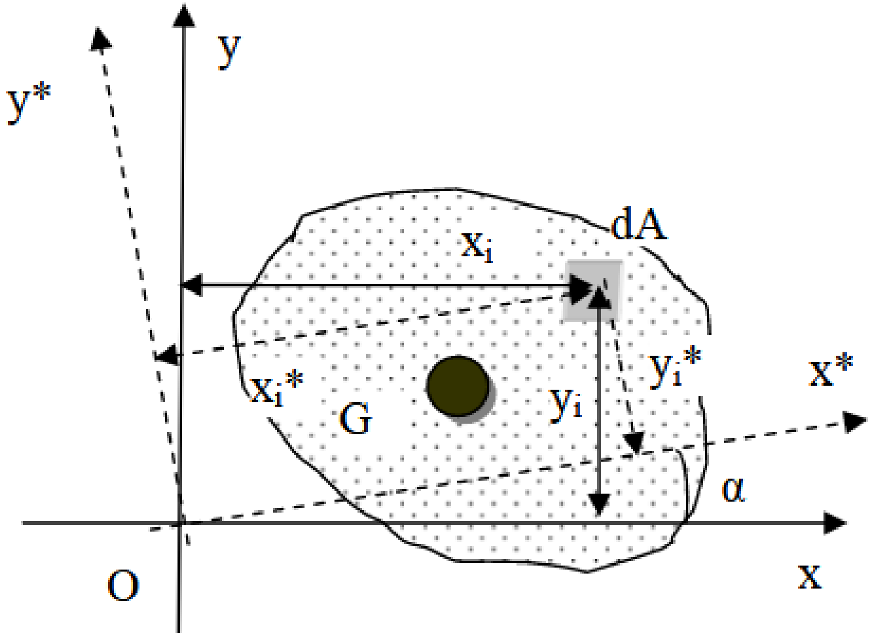
$$= \cos^2\alpha \int_A y^2 \, dA - 2cos\alpha\,sin\alpha \int_A xy \, dA + \sin^2\alpha \int_A x^2 \, dA$$

$$= \cos^2\alpha \, J_x - 2\,cos\,\alpha\,sin\alpha \, J_{xy} + \sin^2\alpha \, J_y$$

$$J_{x*} = \cos^2 \alpha\, J_x - 2\, cos\, \alpha\, sin\alpha\, J_{xy} + \sin^2 \alpha\, J_y$$

$$J_{y*} = \sin^2 \alpha\, J_x + 2\, cos\, \alpha\, sin\alpha\, J_{xy} + \cos^2 \alpha\, J_y$$

$$J_{x^*y^*} = sin\, \alpha\, cos\, \alpha\, J_x - 2\, sin\, \alpha\, cos\alpha\, J_y + (\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha)\, J_{xy}$$



$$J_{x*} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} cos\, 2\alpha - sin\, 2\alpha\, J_{xy}$$

$$J_{y*} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} cos\, 2\alpha + sin\, 2\alpha\, J_{xy}$$

$$J_{x*y^*} = \frac{J_x - J_y}{2} sin\, 2\alpha + cos\, 2\alpha\, J_{xy}$$

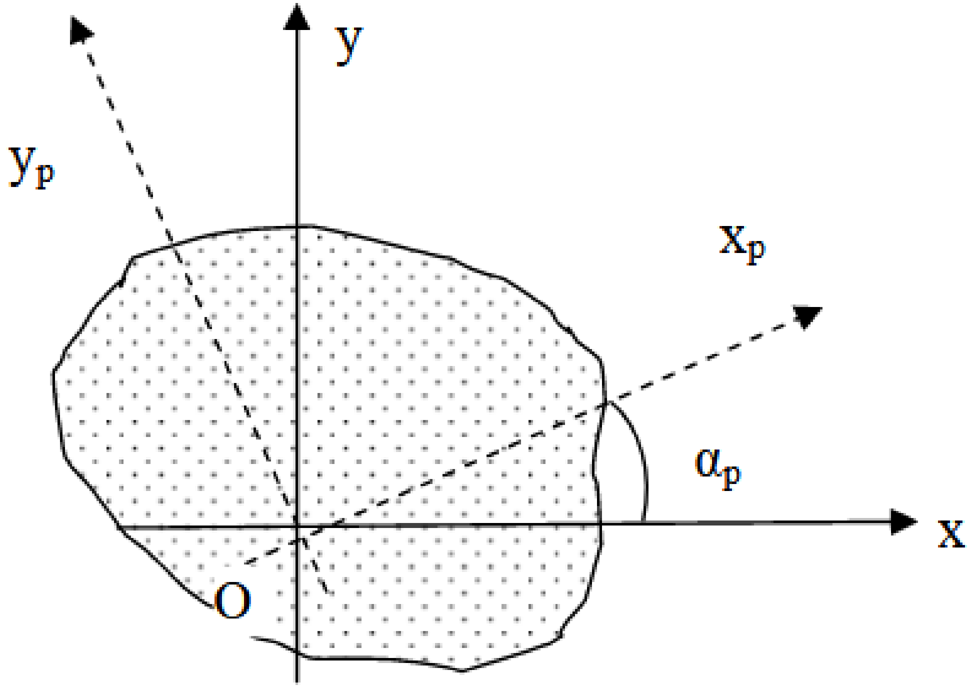
$$tan\, 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(-\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \right)$$

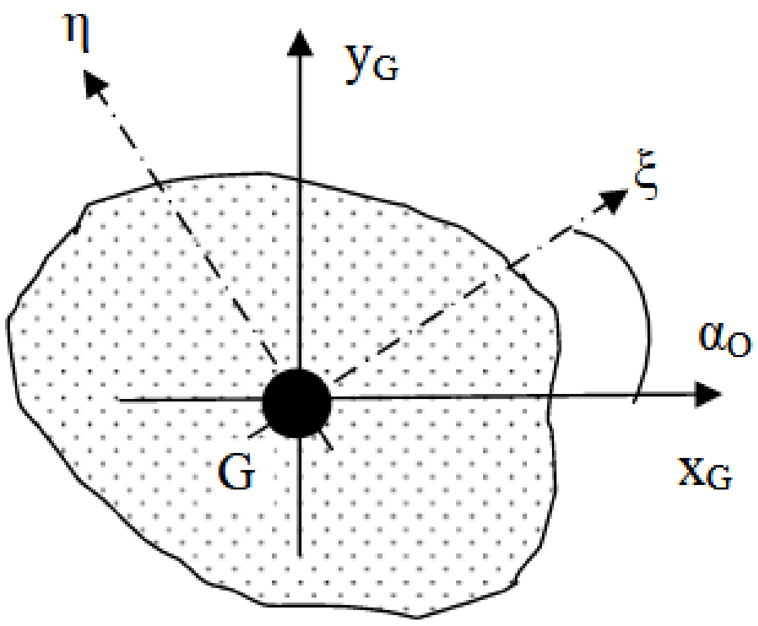
Si parla di **«assi principali di inerzia»** quando il momento di inerzia calcolato risulta massimo o minimo. Questi assi hanno punto di origine generico.

Per definizione, la coppia di assi così definiti è tale che il **momento centrifugo risulti nullo**

Quando il punto di origine coincide con il baricentro G, si parla di **«assi principali centrali d'inerzia»**



(O; x_p; y_p) **Assi Principali**



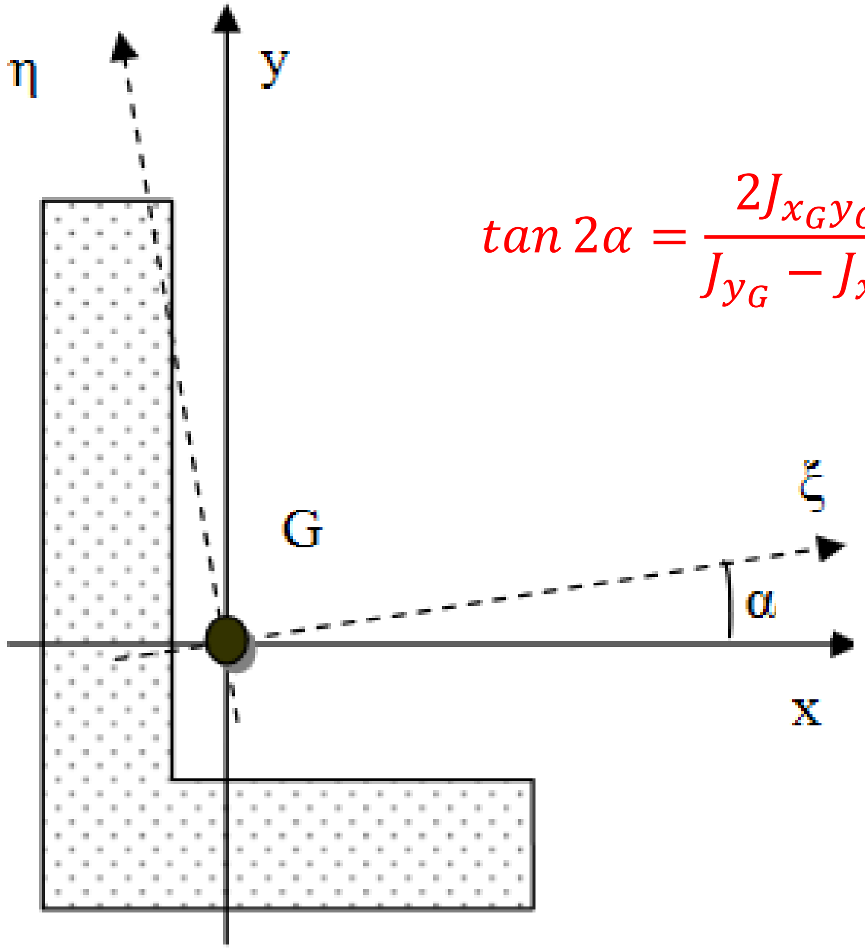
(G; ξ; η) **Assi Principali Centrali**

$$tan\,2\alpha_p = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}$$

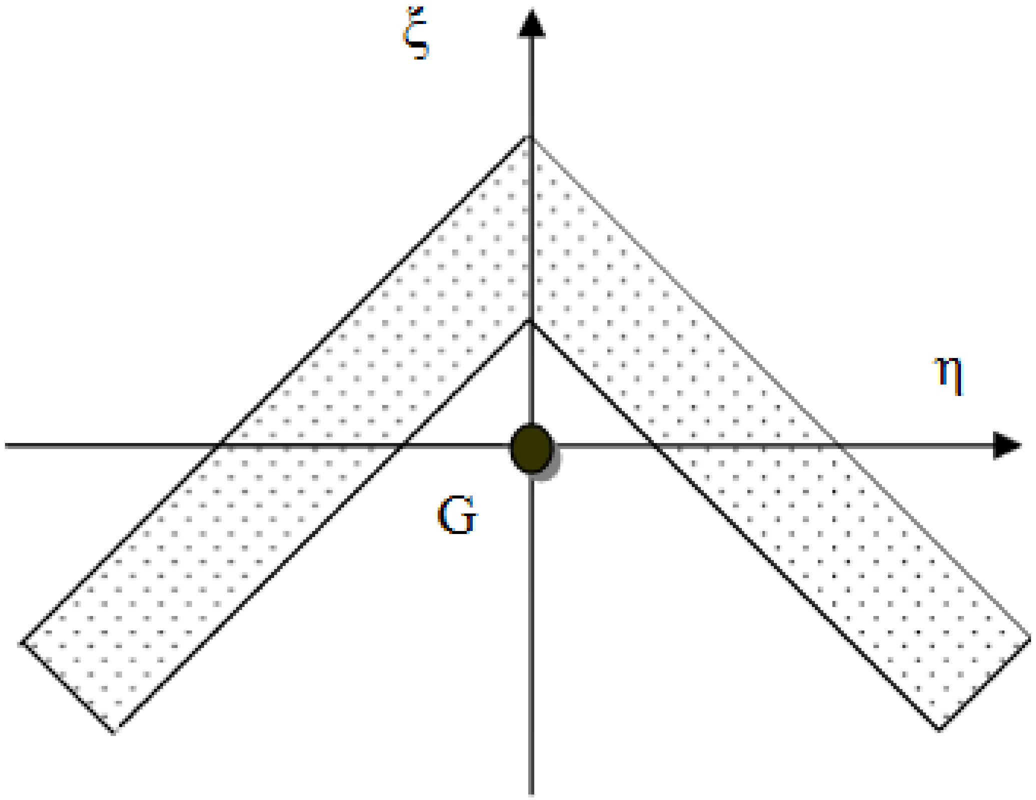
$$J_{x_p y_p} = 0$$

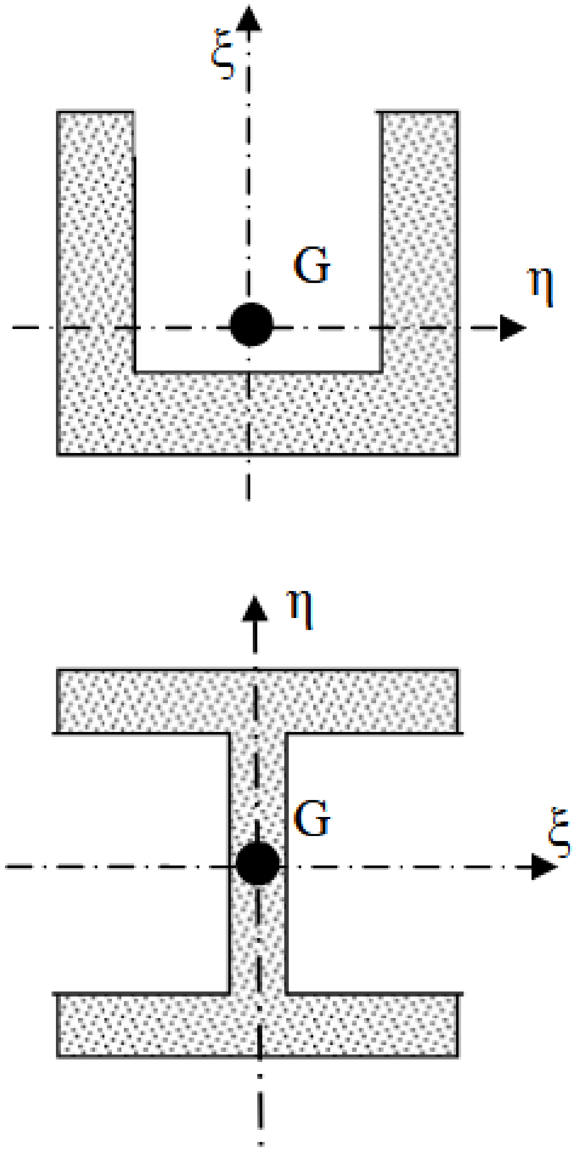
$$tan\,2\alpha_O = \frac{2J_{x_G y_G}}{J_{y_G} - J_{x_G}}$$

$$J_{\xi\eta} = 0$$

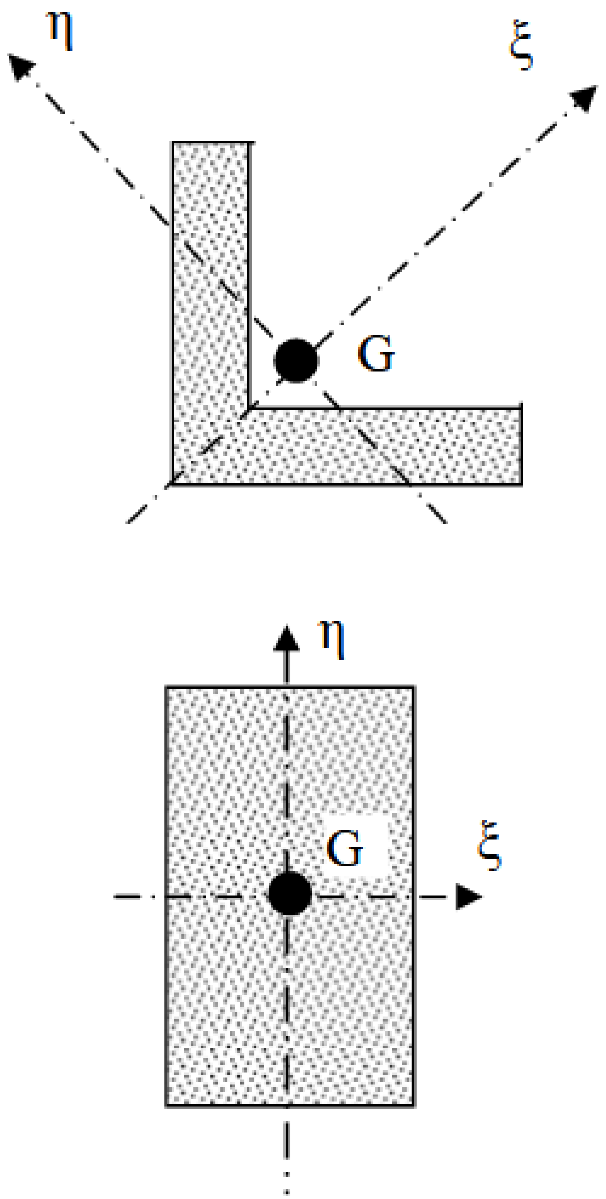


$$\tan 2\alpha = \frac{2J_{x_G y_G}}{J_{y_G} - J_{x_G}}$$

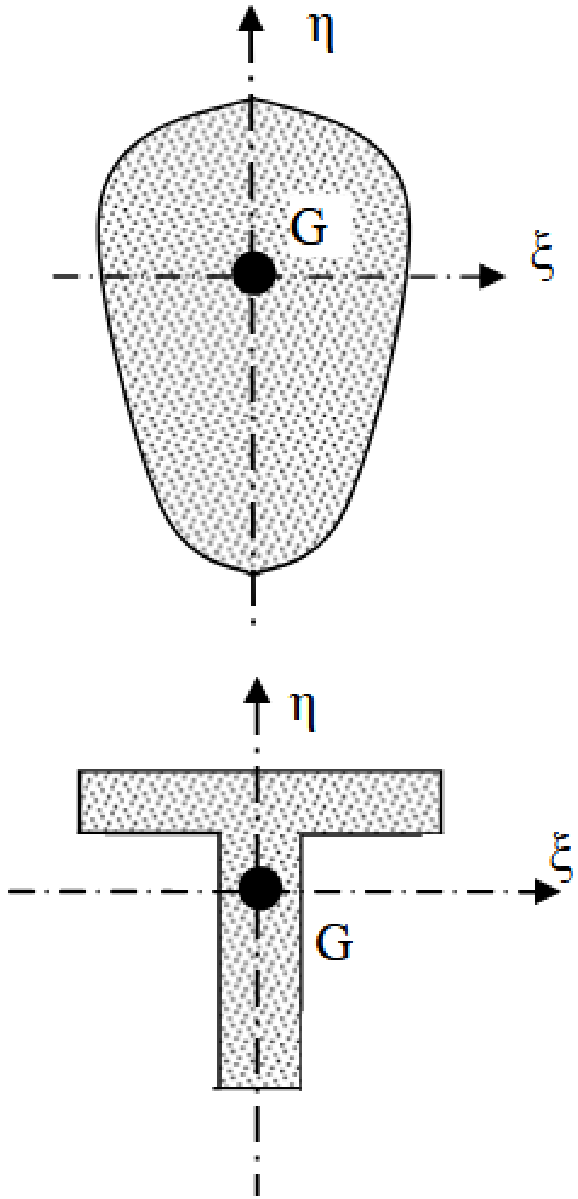




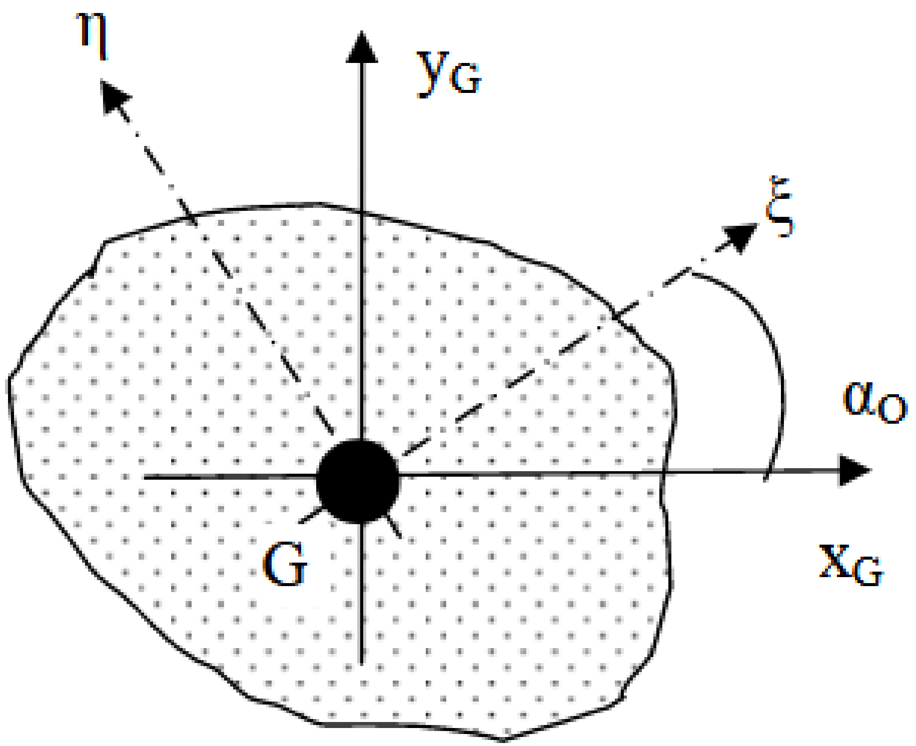
$I_\xi \rightarrow$ Massimo



$I_\eta \rightarrow$ Minimo



$I_{\xi\eta} = 0$

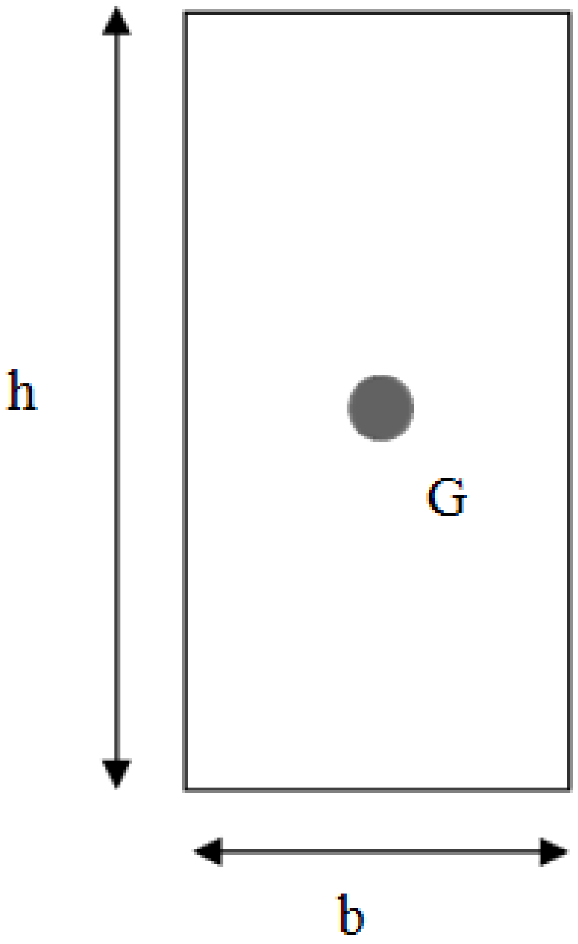


$$J_\xi = \frac{J_{x_G}+J_{y_G}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(J_{x_G}-J_{y_G}\right)^2 + 4J_{x_G y_G}^2}$$

$$J_\eta = \frac{J_{x_G}+J_{y_G}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(J_{x_G}-J_{y_G}\right)^2 + 4J_{x_G y_G}^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{2J_{x_G y_G}}{J_{x_G}-J_{y_G}}\right)$$

- **ESEMPIO:**

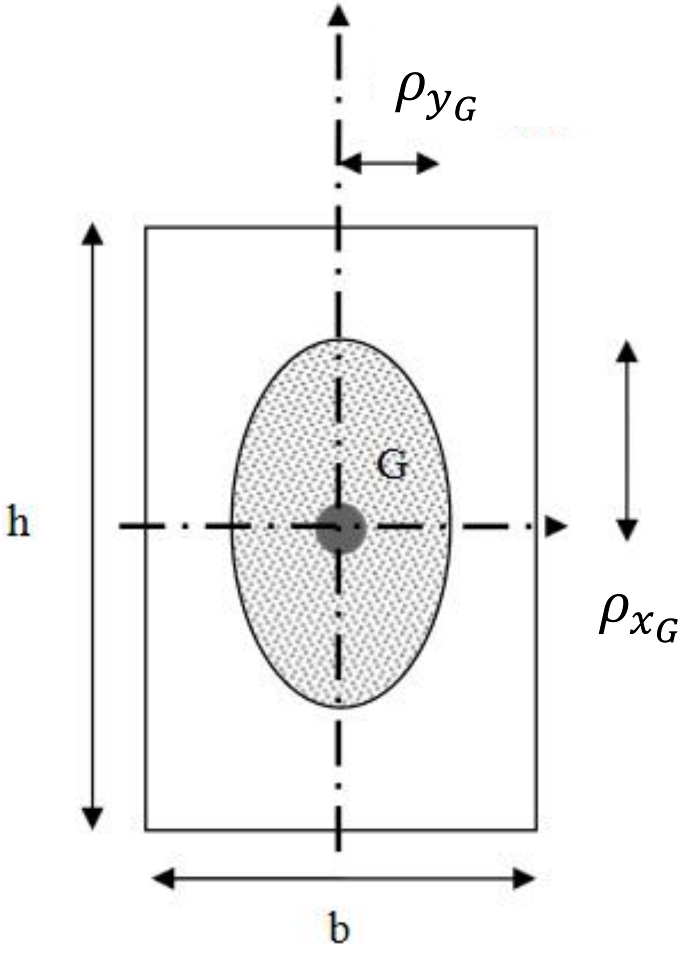


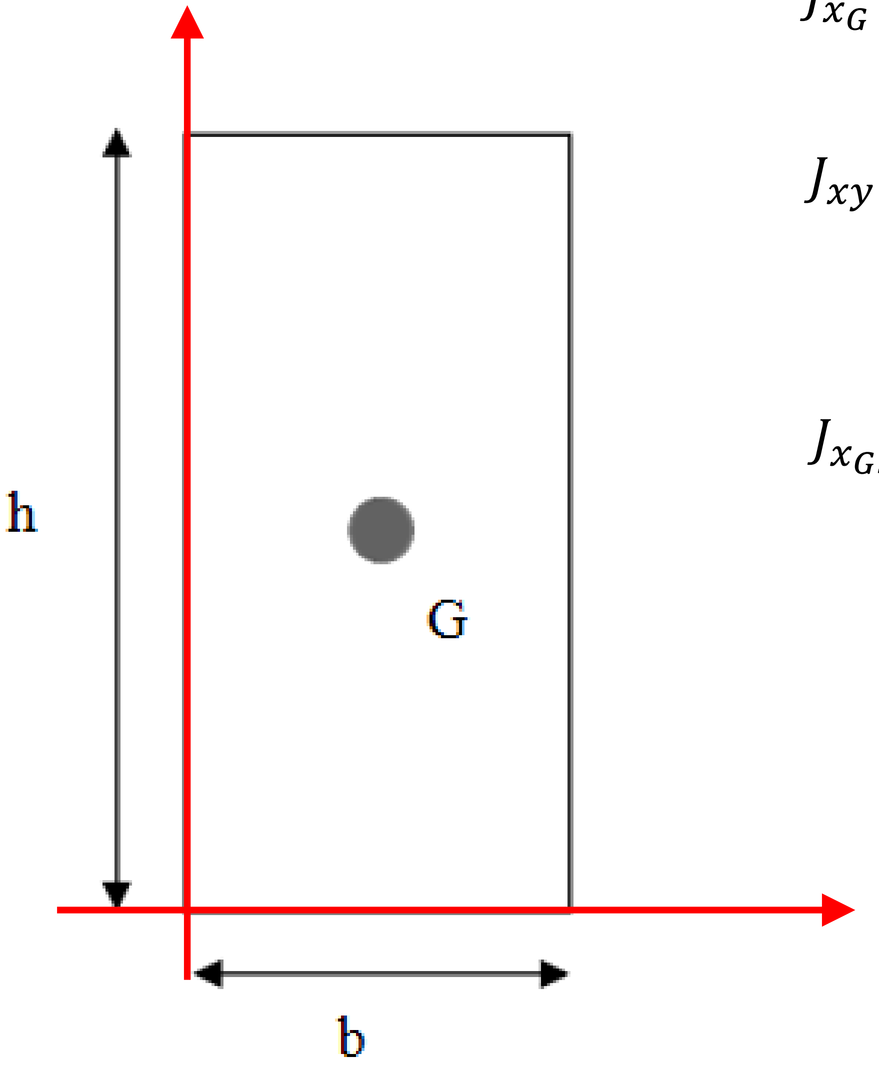
$$J_{x_G} = \frac{bh^3}{12} \qquad J_{y_G} = \frac{hb^3}{12}$$

$$J_p = J_G = J_{x_G} + J_{y_G} = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{hb}{12}(h^2 + b^2)$$

$$\rho_{x_G} = \sqrt{\frac{J_{x_G}}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12}\frac{1}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0.289h$$

$$\rho_{y_G} = \sqrt{\frac{J_{y_G}}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12}\frac{1}{bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = 0.289b$$





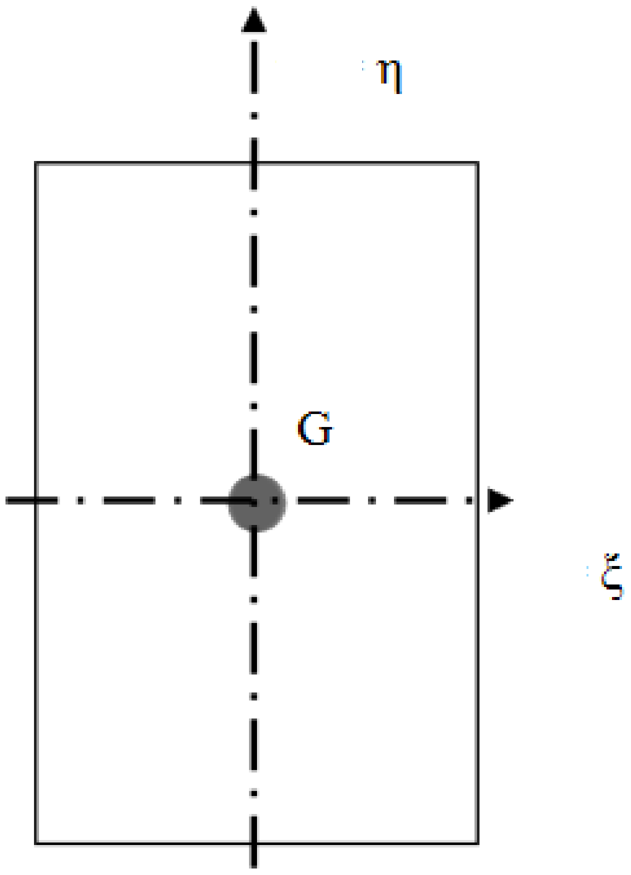
$$J_{x_G} = \frac{bh^3}{12} \qquad J_{y_G} = \frac{hb^3}{12}$$

$$J_{xy} = \int_A xy\,dA = \int_0^h \int_0^b xy\,dy\,dy = \frac{b^2\,h^2}{4}$$

$$J_{x_G y_G} = J_{xy} - A x_g y_G = \frac{b^2\,h^2}{4} - bh\,\frac{b}{2}\,\frac{h}{2} = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{2J_{x_G y_G}}{J_{x_G} - J_{y_G}}\right)$$

$$\alpha = 0° \Rightarrow \xi$$



$$J_\xi = J_{x_G} = \frac{bh^3}{12} = max \qquad J_\eta = J_{y_G} = \frac{hb^3}{12} = min$$