

# TRAVI RETICOLARI

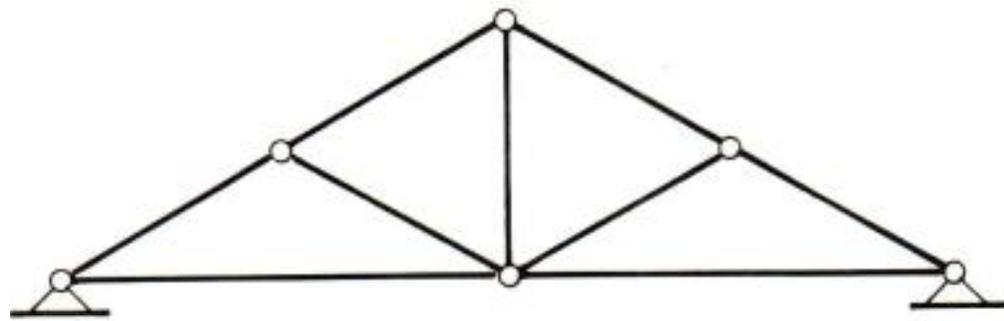
Esempi

Metodi di equilibrio ai nodi

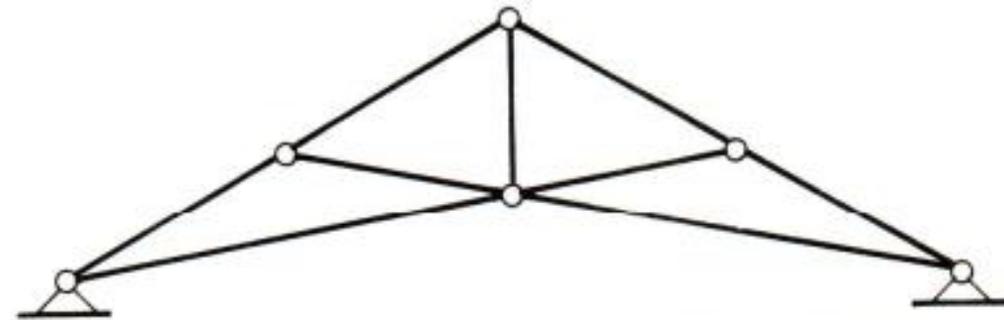
Metodo delle sezioni di Ritter

# TRAVI RETICOLARI

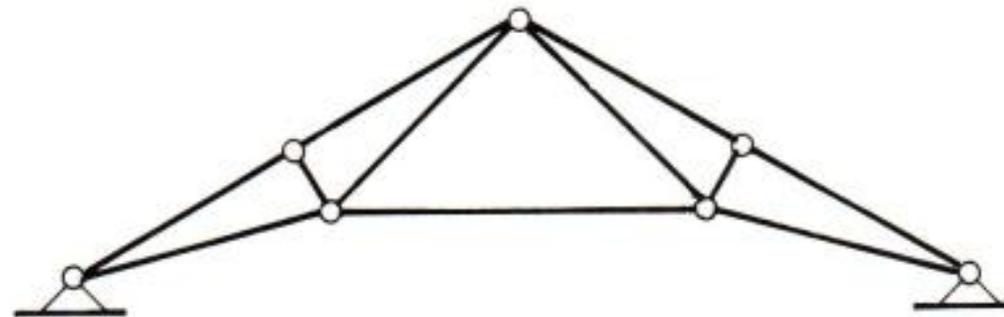
- Una delle più antiche soluzioni al problema delle coperture e dei ponti
- Capacità di coprire luci molto grandi
- Possibilità di adattare lo schema strutturale



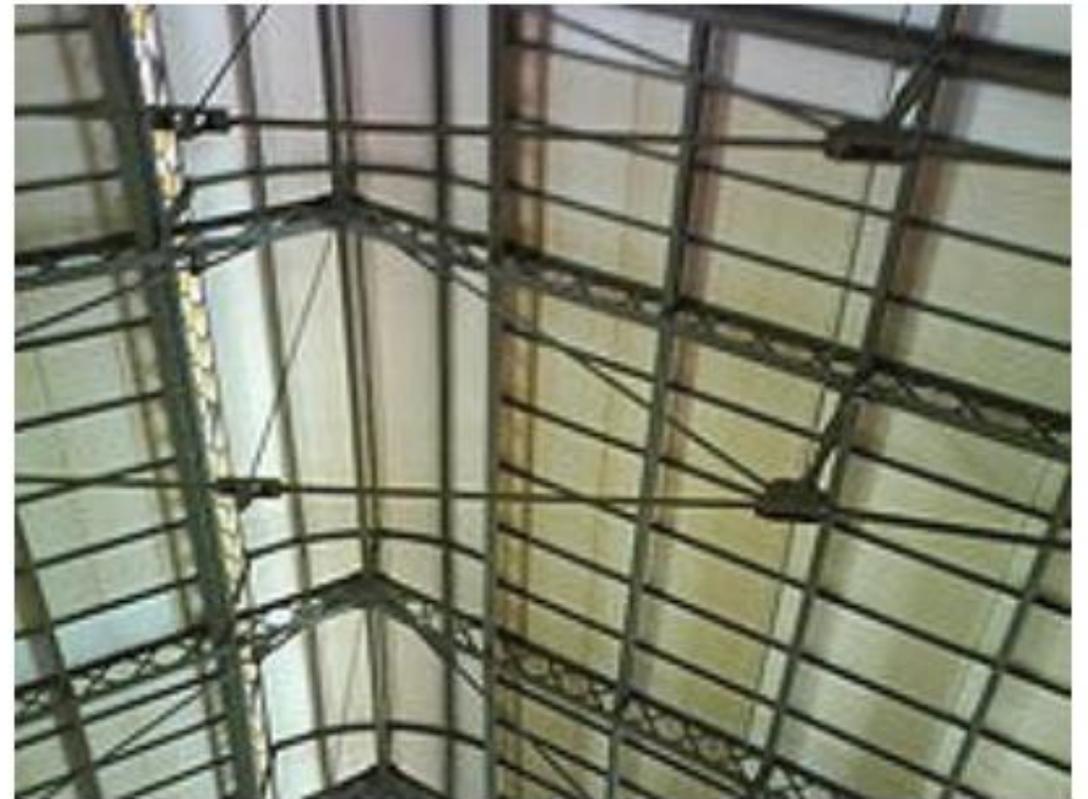
**Travatura tedesca**

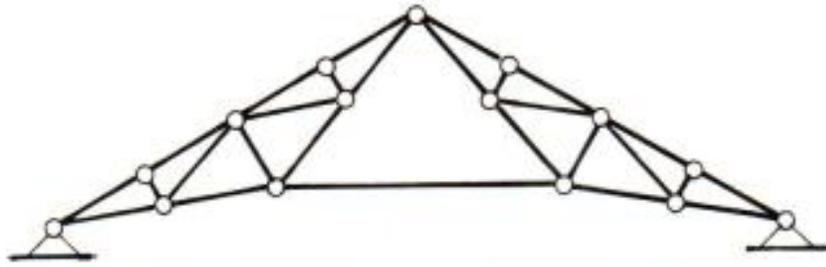


**Travatura tedesca con corrente inferiore spezzato**

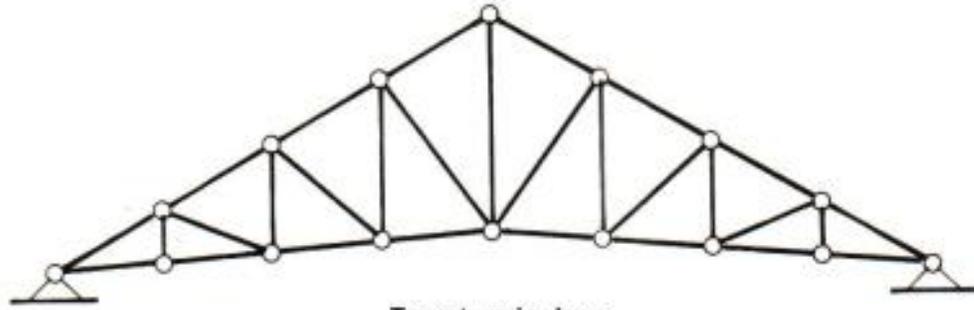


**Travatura francese o Polanceau**

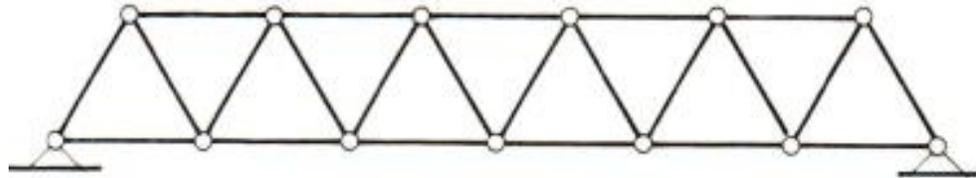




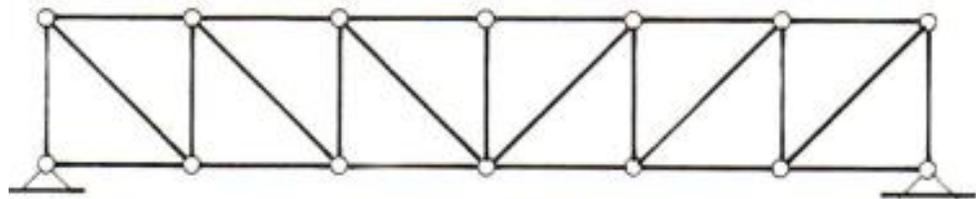
**Travatura francese o Polanceau composta**



**Travatura inglese**

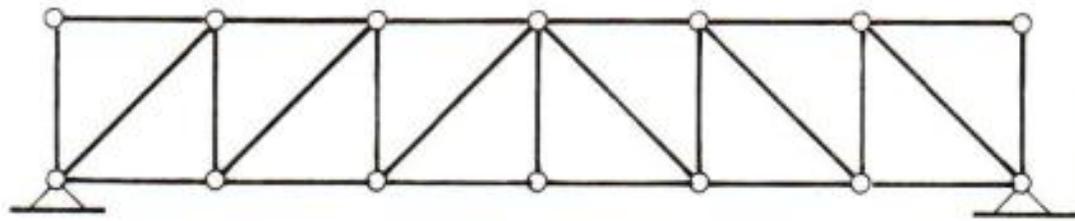


**Travatura da ponte o Neville**

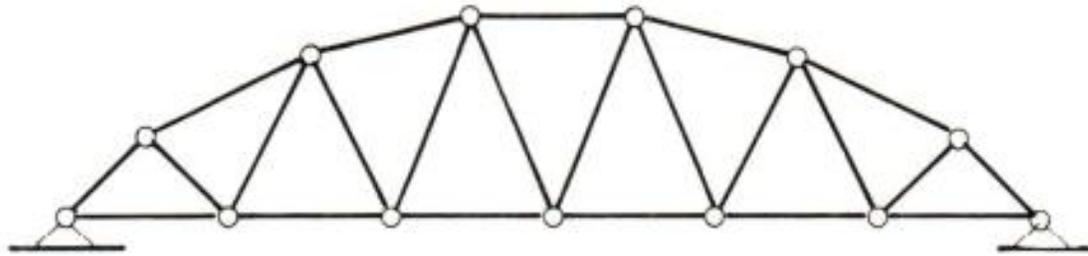


**Trave Mohnié**





**Trave Howe**

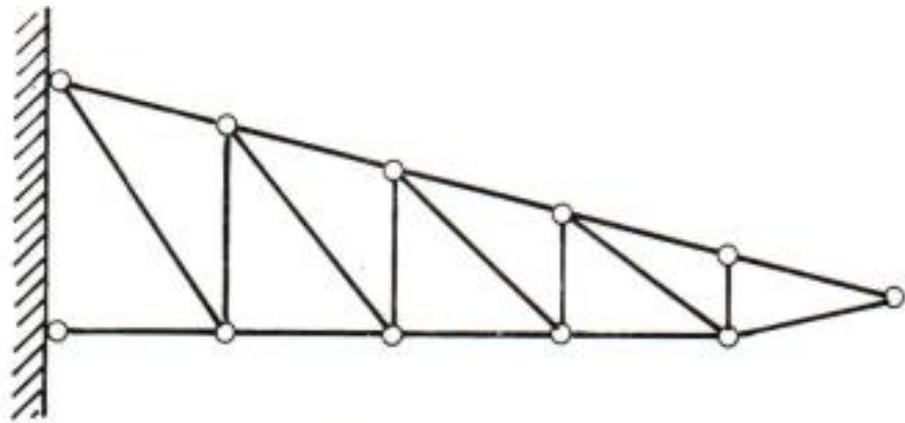


**Trave a corrente parabolico**

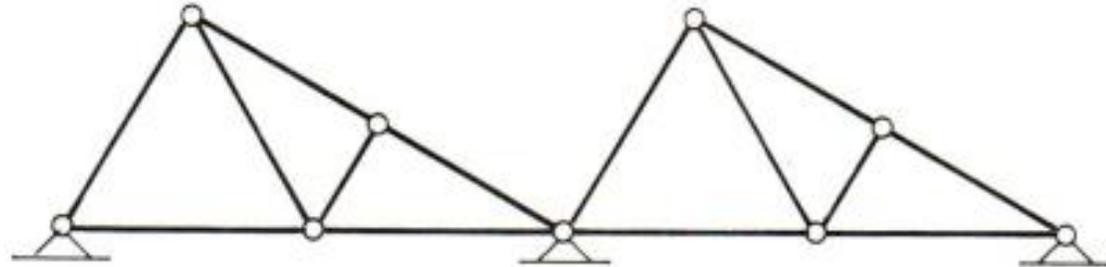


**Trave a falce**





**Trave a mensola**



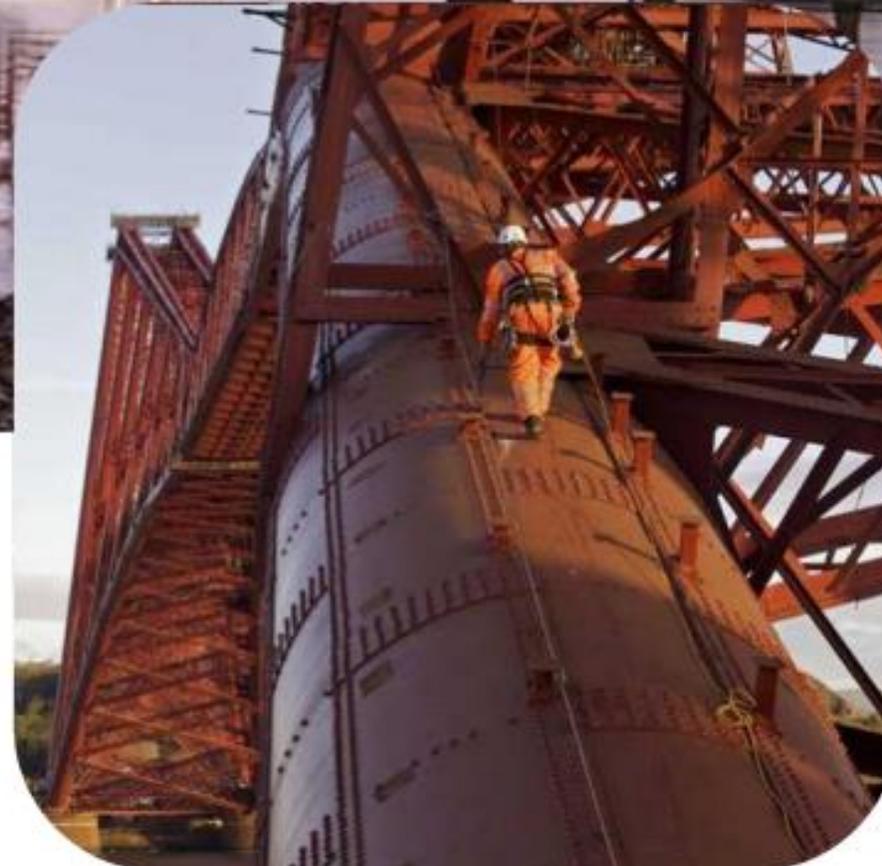
**Trave a Shed**







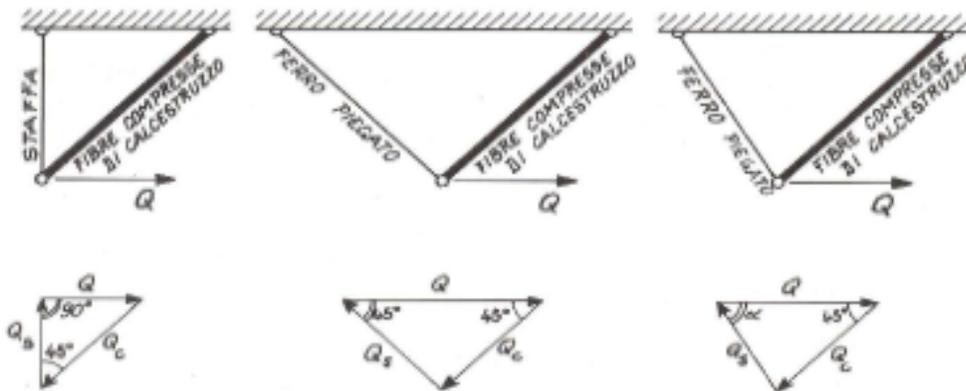
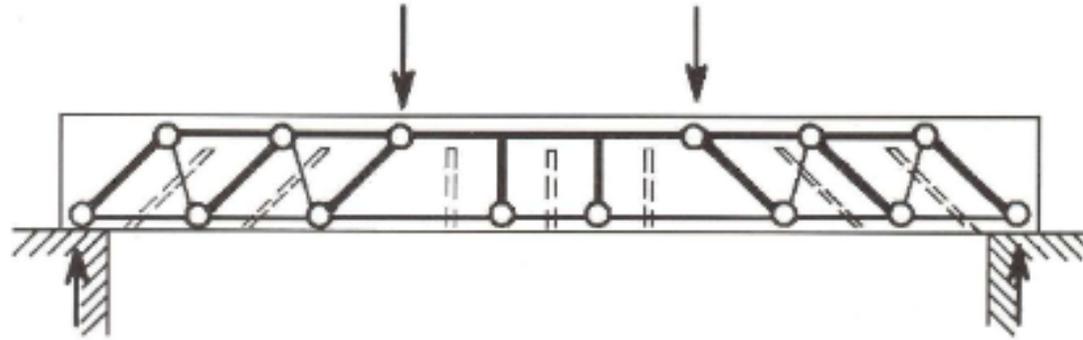
prima struttura importante in acciaio  
4 torri (104m di altezza)



1890 Firth of Forth Bridge (Scozia) - 2528m

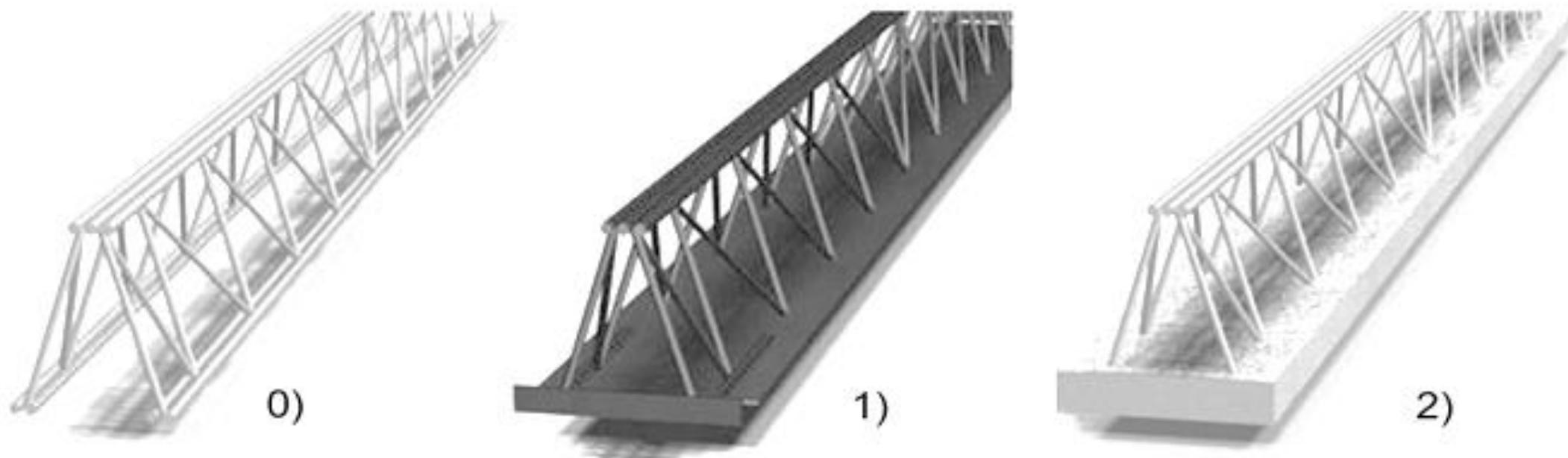
# TRALICCIO DI MÖRSCH

Il modello fondamentale di resistenza al taglio della trave in c.a. è stato dedotto dal suo comportamento fessurativo e vede la trave come una struttura reticolare costituita da un corrente compresso (il calcestruzzo reagente a flessione e le eventuali armature compresse), da un corrente teso (l'armatura reagente a flessione) e da un reticolo di aste di parete (conci compressi di cls isolati da fessure a  $45^\circ$  e armature trasversali tese – staffe o ferri piegati)



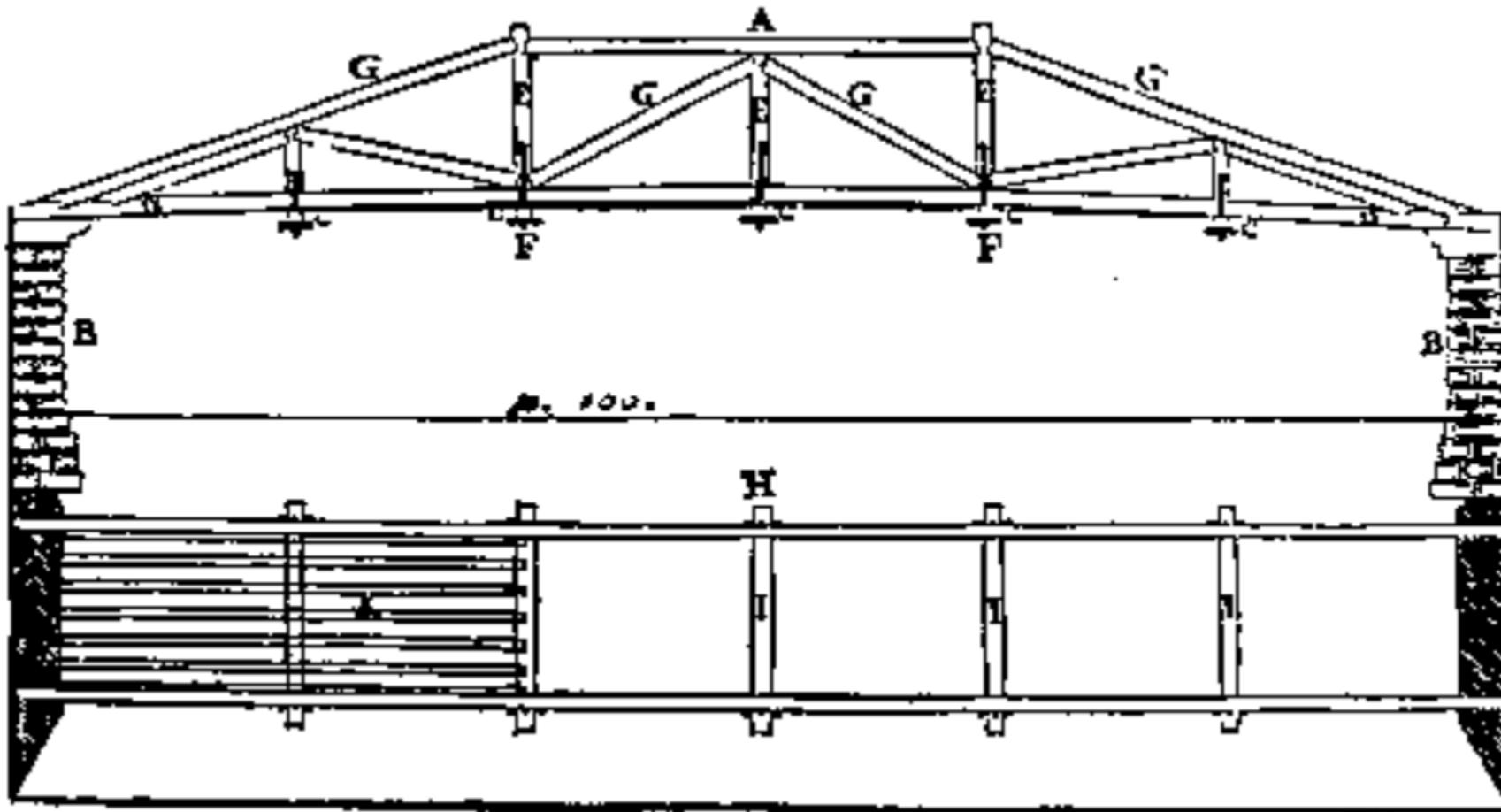
Schemi per il dimensionamento delle armature d'anima

# TRALICCI DI SOLAI



*Figura 1 - Morfologie di Travi PREM: 0) senza fondello, 1) con fondello in acciaio, 2) con fondello prefabbricato in calcestruzzo. (Immagine tratta dalla "Guida-Tecnico Operativa per il Professionista" Ed. Tecniche Nuove - Copyright Assoprem)*



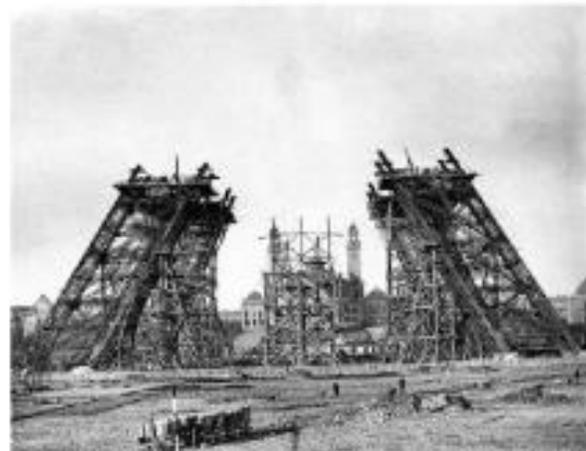


Andrea Palladio – Terzo libro - 1570

## **Torre Eiffel, Gustave Eiffel - Parigi, 1890**

Il famoso simbolo di Parigi altro non è che una grande struttura reticolare: la Torre è formata da una robusta travatura metallica a maglie triangolari, la quale riduce l'area esposta al vento che, dunque, non ha a disposizione molto spazio per esercitare la sua pressione.

La progettazione avvenne secondo attente considerazioni di carattere fisico e geometrico-matematico destinate a ottimizzare gli sforzi a cui la torre era sottoposta. Lo stesso Eiffel afferma che « [Si tratta di] eliminare dalle superfici verticali le grandi sbarre dei tralicci destinate a resistere all'azione del vento. Ecco perché il pilone è disposto in modo che lo sforzo di taglio dovuto al vento passi all'interno dei montanti degli spigoli [...] Le tangenti ai montanti in punti situati alla medesima altezza finiscono sempre per incontrarsi nel punto di passaggio della risultante delle azioni che il vento esercita sulla parte di pilone sovrastante i punti considerati [...] Prima di riunirsi in vetta a un'altezza così elevata, i montanti sembrano scaturire dalla terra e, in qualche maniera, fondersi sotto l'azione stessa del vento ».





***Torre di Šuchov, Vladimir Šuchov - Mosca, 1922***

Monumento edificato nel sobborgo di Šabolovka a Mosca, è una torre alta 160 metri la cui struttura è costituita da un traliccio d'acciaio della forma di un iperboloide di rotazione, costruito con il sistema reticolare spaziale. Il montaggio si ebbe sovrapponendo 6 segmenti separati.



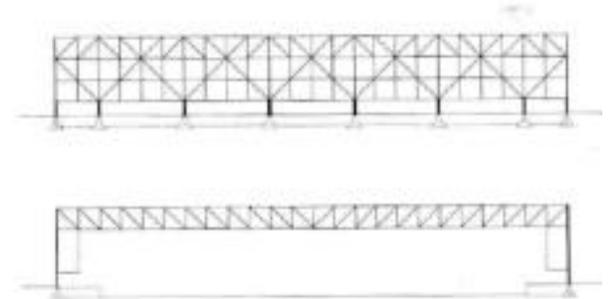
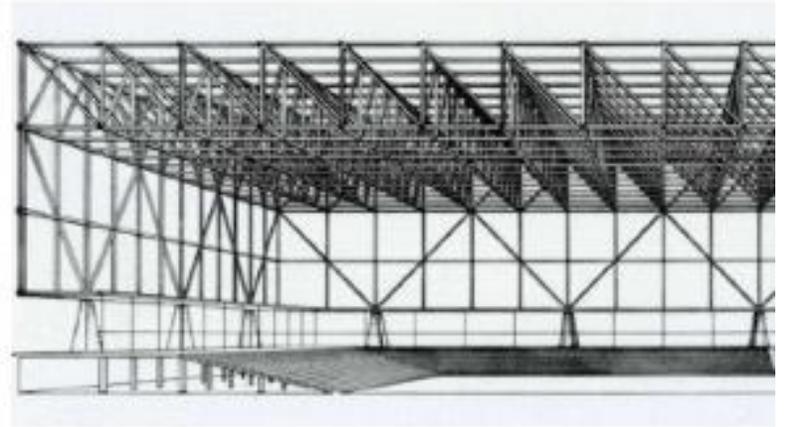
### ***Teatro Nazionale, Mies Van der Rohe - Mannheim, 1953***

Mies, sostenitore del "Less is more", sfruttò spesso le strutture reticolari per la loro efficacia e la loro funzionalità. In questo progetto prevede una struttura basata su travi reticolari di tipo Pratt, molto evidenti nel modello da lui creato, che dividono l'intero edificio in moduli ripetibili e quindi producibili in serie.



## **Convention Hall, Mies Van der Rohe - Chicago, 1954**

L'esempio forse più esemplificativo della consapevolezza di Mies delle possibilità date dalla struttura reticolare si ha nella sua Convention hall: immagina un edificio completamente costituito secondo travi reticolari (quasi totalmente di tipo Pratt) che permette così di ottenere uno spazio di 220 x 220 mt e alto 30 mt, un'area enorme capace di ospitare fino a 50000 posti a sedere. Si viene così a coniugare la struttura con la necessità di creare un grande luogo di scambio e condivisione.

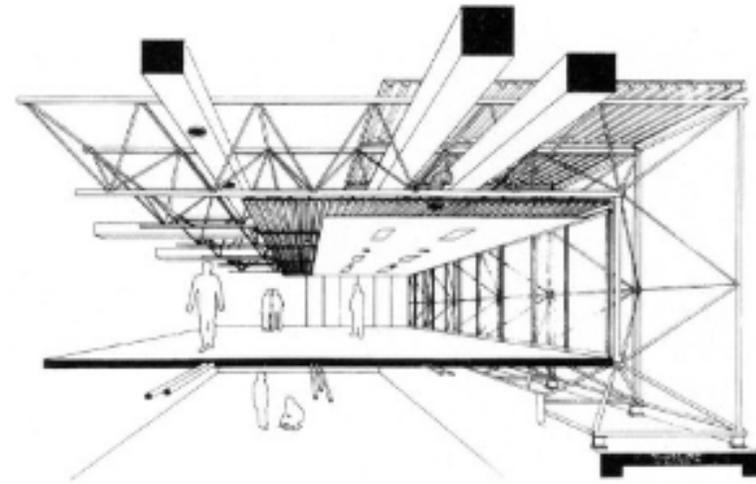


### **Sede di B & B Italia, Renzo Piano e Richard Rogers - Novedrate, 1973**

La sede di B & B Italia a Novedrate, a pochi km da Como, si presenta come uno spazio vitale "sospeso" tra strutture di tubi in acciaio esterni: caratterizzato dalla trasparenza tra spazio interno e esterno e dall'essenzialità degli elementi utilizzati per la costruzione, si basa proprio sulla struttura reticolare che permette di avere 40 metri di campata con elementi autoportanti leggerissimi. Tale sistema ammette l'uso di grandi superfici verticali trasparenti (le pareti non assolvono ad alcuna funzione portante), liberando lo spazio interno aumentando contemporaneamente la sua flessibilità e adattamento alle diverse funzioni lavorative; gli operatori e l'edificio stesso sono messi in un dialogo con il verde circostante.

« La nostra idea era di ridurre tutto a qualcosa di molto sottile, a una specie di filigrana: una ricerca stilistica e plastica fatta con i componenti della struttura metallica portante. Tutti sono capaci di costruire una struttura solida: basta abbondare nei materiali. Se fai un muro spesso un metro, è chiaro che sta su. Togliere peso alle cose, invece, ti insegna a far lavorare la forma, a conoscere i limiti di resistenza dei componenti, a sostituire la rigidità con l'elasticità. Togliere è una scommessa, un gioco. Quando hai finito di togliere, sai che cosa è realmente necessario; e allora il re è nudo, perché tutto quello che c'era in più sai che in fondo era superfluo. »

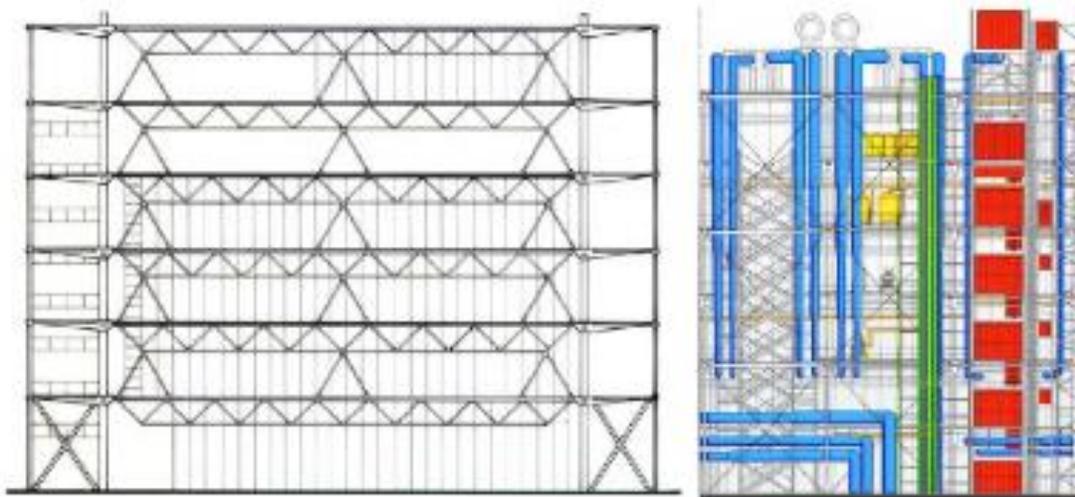
Piano Renzo, *Giornale di bordo*, Passigli, 2016

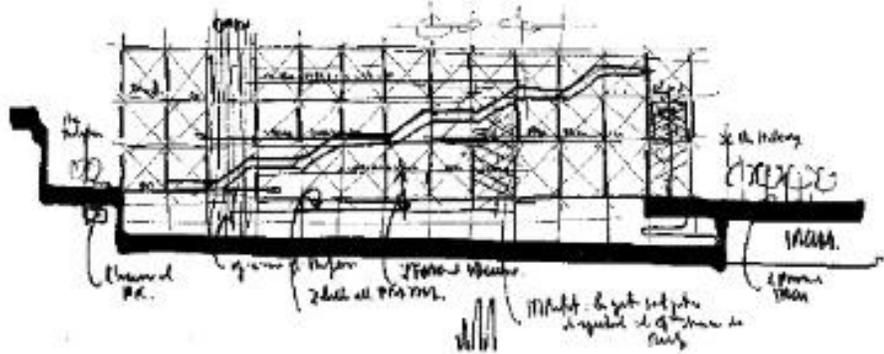
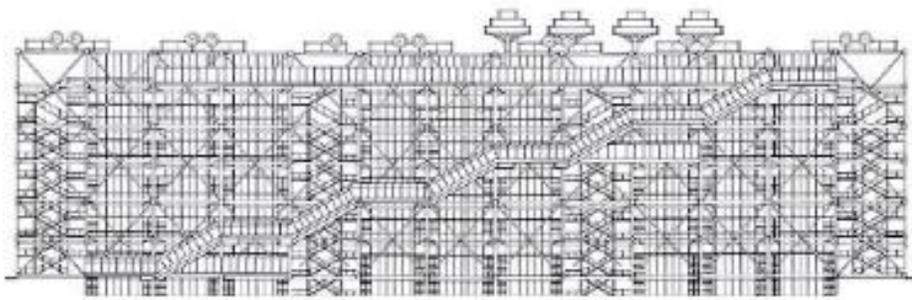


## **Centro Pompidou, Renzo Piano e Richard Rogers - Parigi, 1977**

Gli stessi architetti della sede B&B in Italia progettano con la stessa tecnica e contemporaneamente (entrambi i progetti sono del '71) un museo da 100000 mq di esposizione: un grande parallelepipedo alto 42 metri, lungo 166 metri e largo 60, sostenuto da una struttura in acciaio a forti colori e da pareti in vetro. Grazie alla sua struttura reticolare, è costituito da elementi in acciaio autoportanti che permettono di creare ad ogni piano una superficie libera di 7500 mq; tutti i servizi infatti sono volutamente messi all'esterno ed evidenziati: in rosso vi sono gli impianti di circolazione (scale, ascensori, scale mobili, gallerie di circolazione), in blu l'impianto di circolazione e climatizzazione dell'aria, in verde l'impianto legato alla circolazione dei liquidi, mentre in giallo quello elettrico.

Per Piano progettare è appunto un'esperienza interdisciplinare, che prevede ripensamenti e correzioni. « La progettazione non è una esperienza lineare, cioè hai un'idea, la metti su carta, poi la esegui e buona notte. È un processo circolare: la tua idea viene disegnata, provata, ripensata, ridisegnata tornando infinite volte sullo stesso punto. Sembra un metodo così empirico, poi se vai a vedere scopri che è tipico di tantissime altre discipline: in musica è così, in fisica è così, in astrofisica anche. »

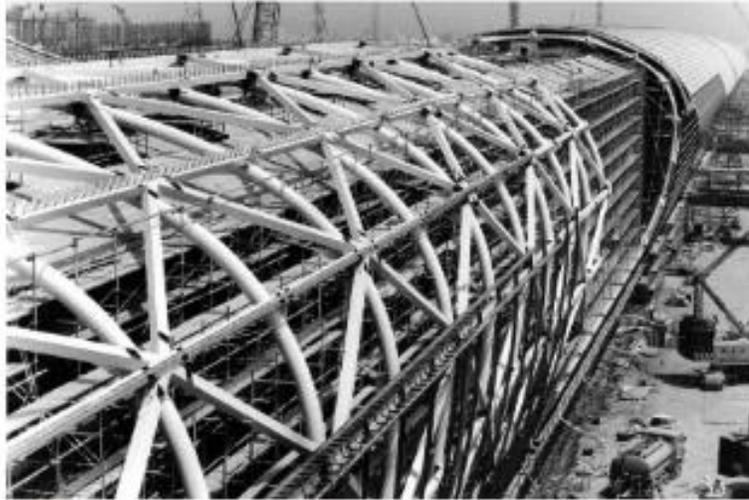




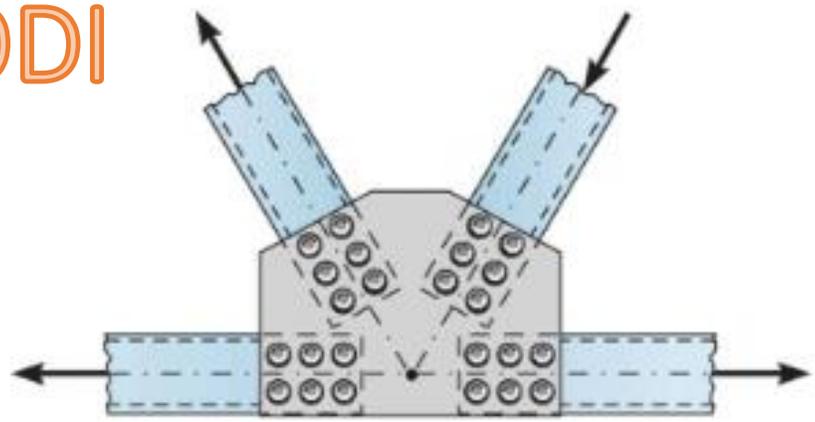
### **Terminal dell'aeroporto di Kansai, Renzo Piano - Osaka, 1988**

Anche se Renzo Piano usò la struttura reticolare per molte delle sue opere, data la sua ricerca nello sfruttamento delle nuove tecnologie e nella sua caratteristica leggerezza che permette una luminosità sempre fortemente presente, la struttura che più simboleggia questa sua tendenza è il terminal per l'aeroporto di Osaka. Si tratta infatti di una struttura lunga 1700 mt e composta da 82000 pannelli identici di acciaio inossidabile (1 mm di spessore l'uno), che grazie a travi reticolari lunghe da 80 a 150 mt collocate a 14,4 mt l'una dall'altra, permette una forma sinuosa e asimmetrica legata alla necessità di creare un ricircolo naturale di aria all'interno, e al tempo stesso di resistere ai terremoti (che ci sono stati, senza danni) nonostante la sua caratteristica leggerezza e fragilità apparente.

« Abbiamo disciplinato i movimenti dell'aria creando un soffitto che è aerodinamico "al rovescio", perché i flussione ci interessano sono all'interno, e non all'esterno. »

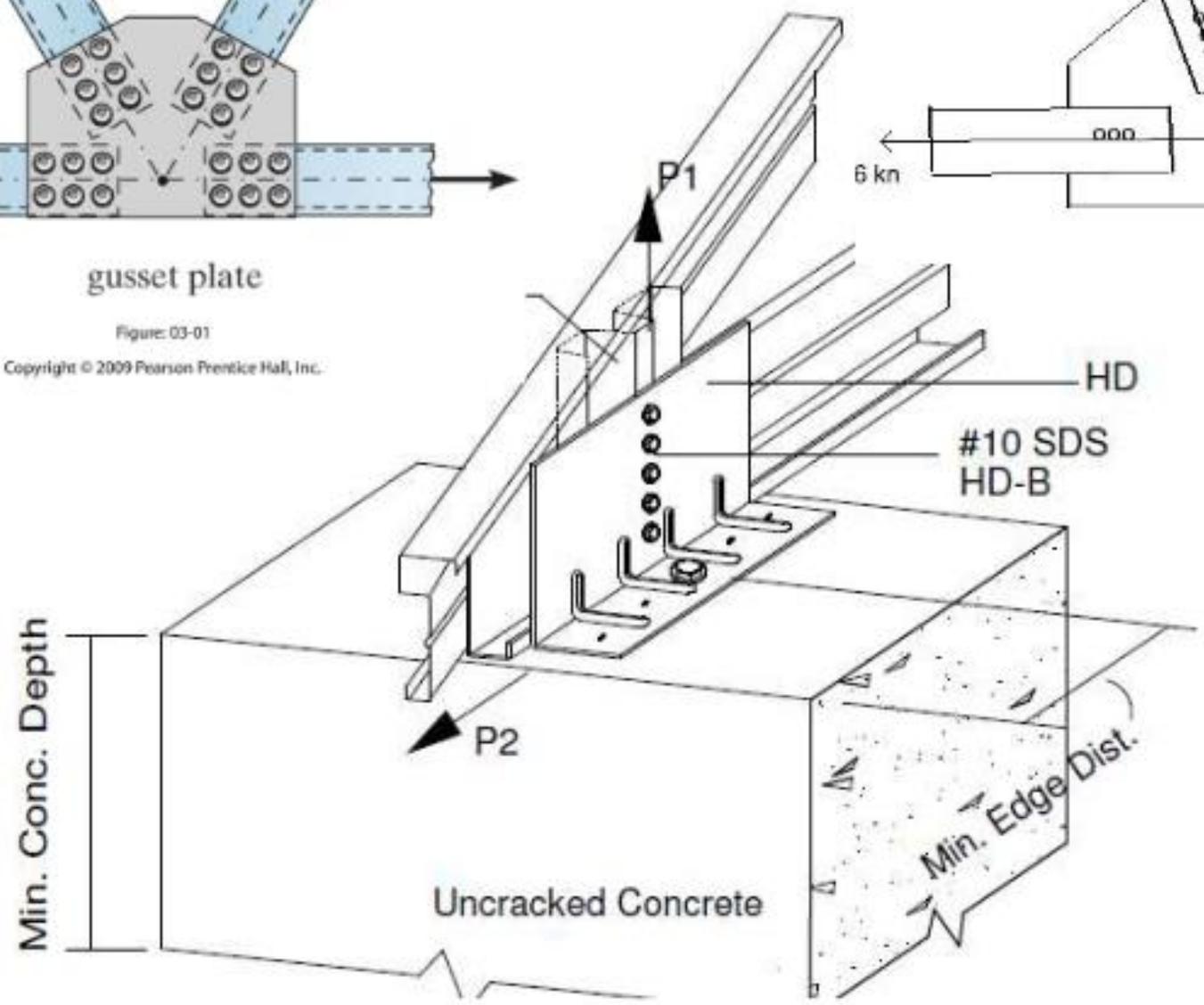
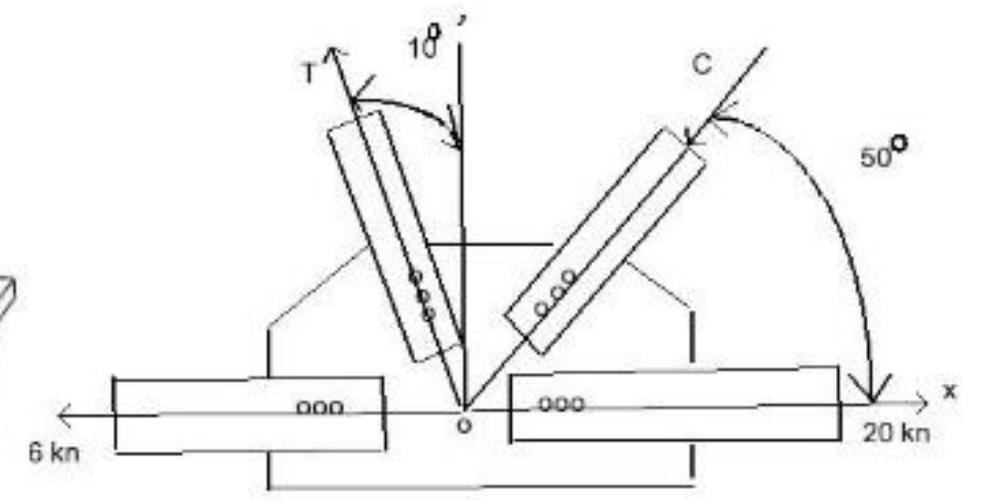


# NODI

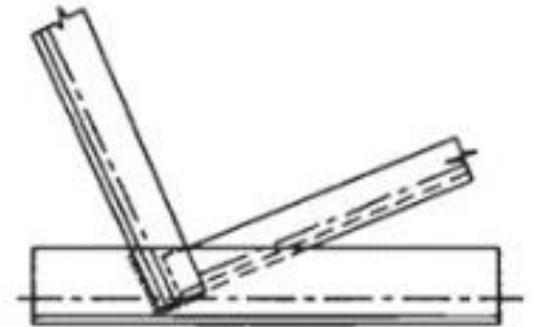
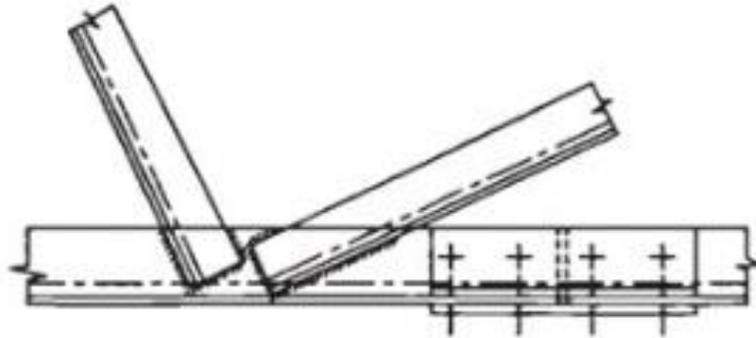
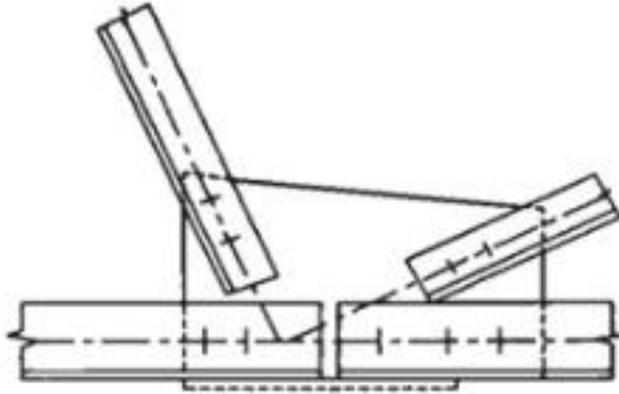
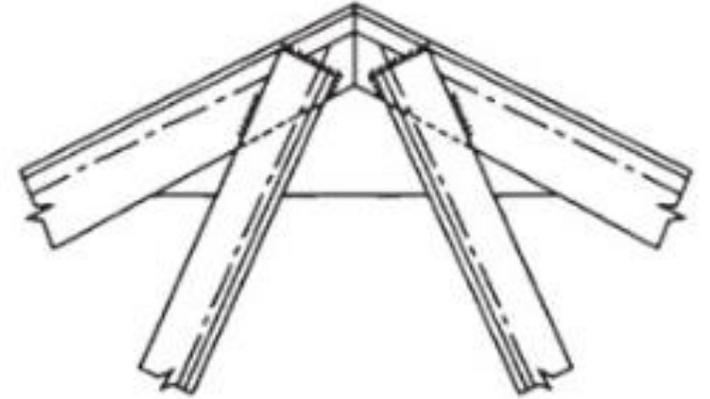
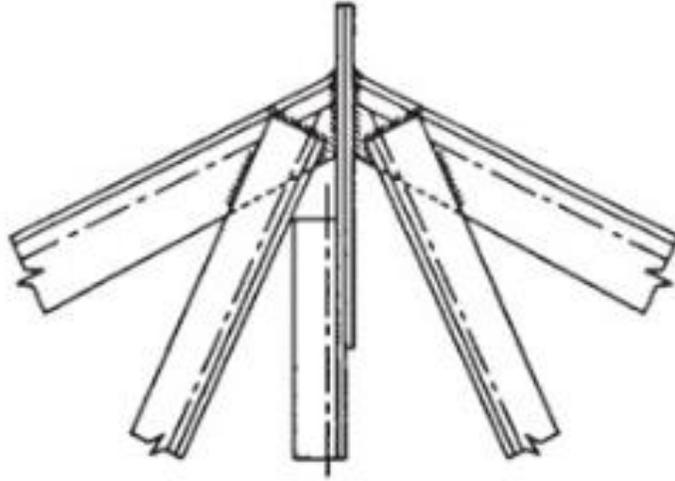
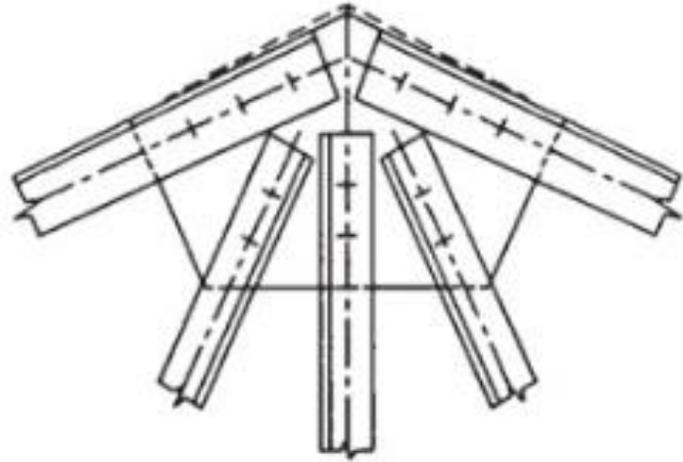


gusset plate

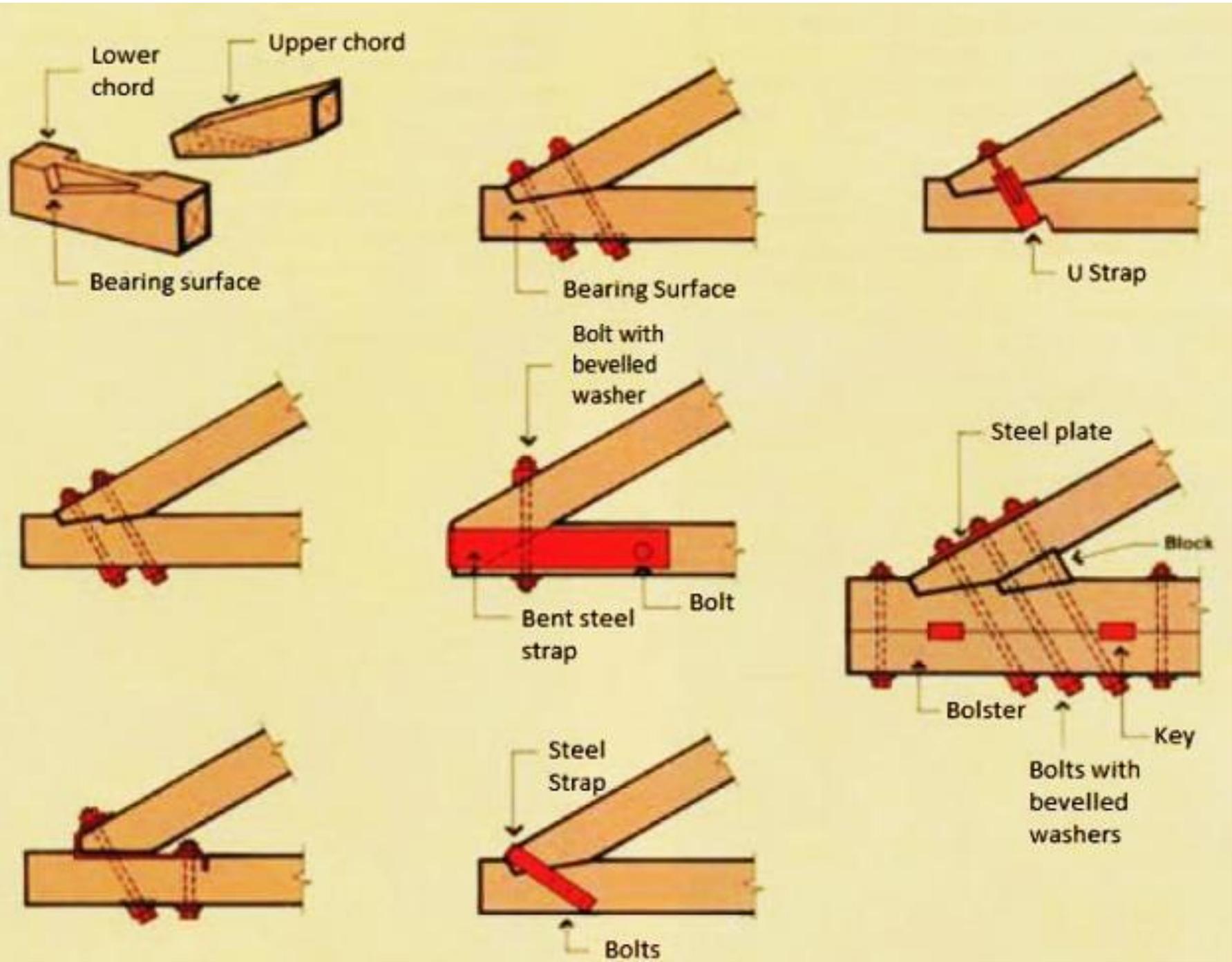
Figure: 03-01  
Copyright © 2009 Pearson Prentice Hall, Inc.



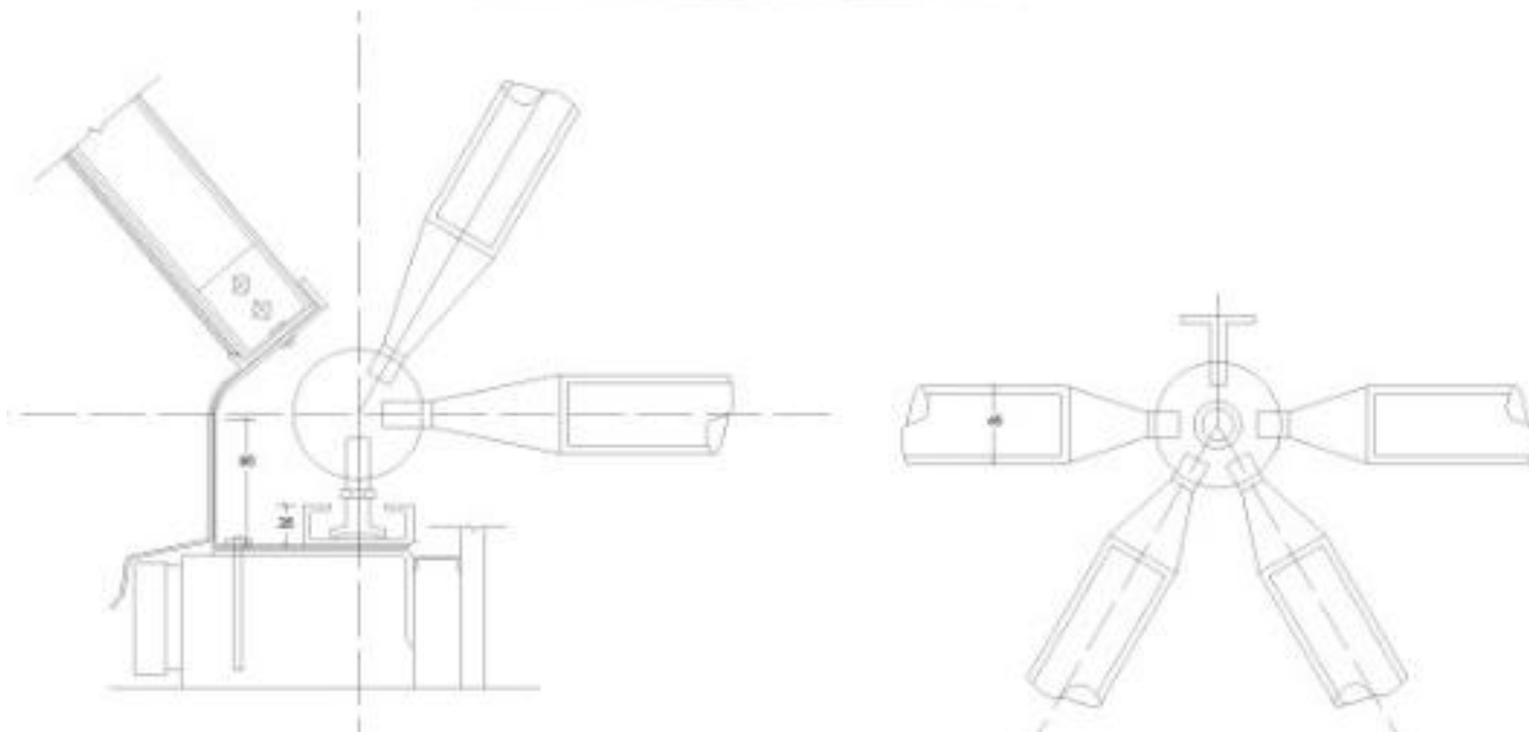
# NODI



# NODI



# NODI



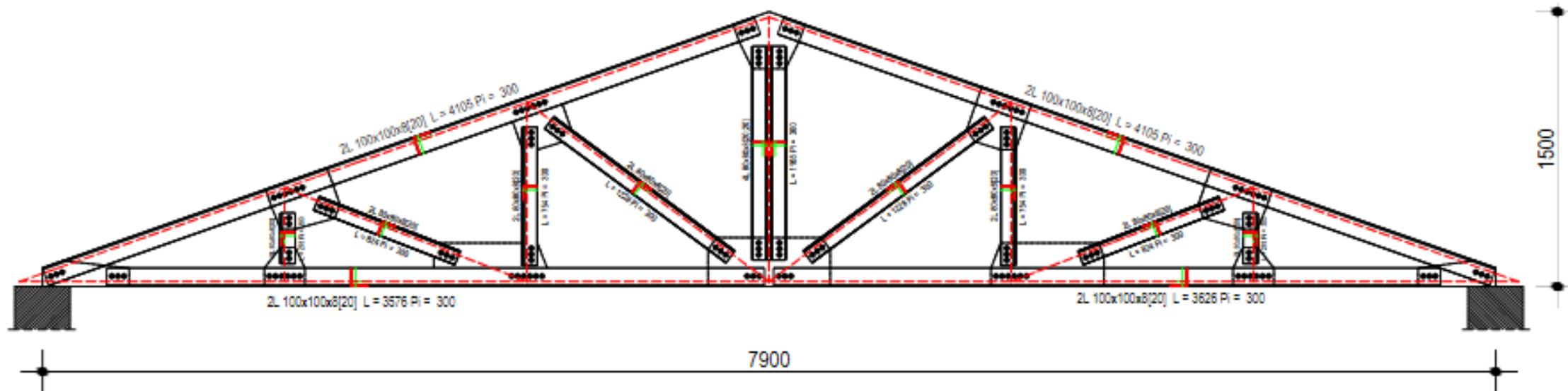
# TRAVI RETICOLARI

- Sono strutture formate da aste rettilinee
- E dai nodi a cerniera che le collegano agli estremi → Rotazioni libere
- La disposizione geometrica dei nodi è tale da formare un sistema indeformabile → Stabilità
- I carichi esterni sono spesso forze concentrate ai nodi
- Le aste sono sollecitate solo da sforzi normali

# TRAVI RETICOLARI

- Gli elementi di una travatura reticolare possono distinguersi in:
  - **corrente superiore**: insieme di aste orizzontali superiori
  - **corrente inferiore**: insieme di aste orizzontali inferiori
  - **aste di parete**, si distinguono a loro volta in:
    - montanti**: aste verticali
    - diagonali**: aste inclinate
- A seconda della sollecitazione (di trazione o compressione), le aste vengono poi definite:
  - **tiranti** se sollecitate a trazione
  - **puntoni** se sollecitate compressione

# Carpenteria metallica



## Caratteristiche dei profili adottati

<p> <math>g</math> (kg/m) = 12.2  <math>h</math> (mm) = 100  <math>b</math> (mm) = 100  <math>t</math> (mm) = 8  <math>A</math> (cm<sup>2</sup>) = 15.51  <math>J_x</math> (cm<sup>4</sup>) = 144.8  <math>W_x</math> (cm<sup>3</sup>) = 19.94  <math>J_y</math> (cm<sup>4</sup>) = 144.8  <math>W_y</math> (cm<sup>3</sup>) = 19.94                 </p>	<p> <math>g</math> (kg/m) = 9.66  <math>h</math> (mm) = 80  <math>b</math> (mm) = 80  <math>t</math> (mm) = 8  <math>A</math> (cm<sup>2</sup>) = 12.3  <math>J_x</math> (cm<sup>4</sup>) = 72.25  <math>W_x</math> (cm<sup>3</sup>) = 12.58  <math>J_y</math> (cm<sup>4</sup>) = 72.25  <math>W_y</math> (cm<sup>3</sup>) = 12.58                 </p>
<p>L 100 x 100 x 8</p>	<p>L 80 x 80 x 8</p>

# TRAVI RETICOLARI

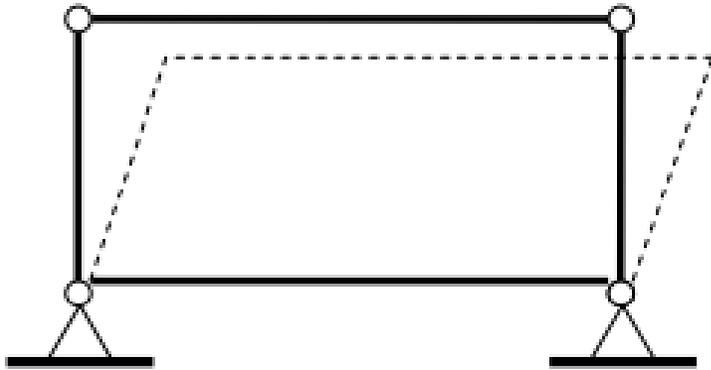
→ Stabilità??

$a$  = numero di aste

$n$  = numero di nodi

→  $a = 2n - 3$

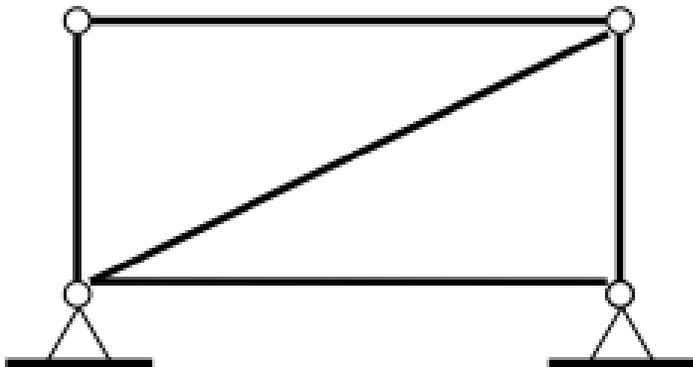
A



$$a = 4 ; 2n - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$$

verifica di stabilità interna NON soddisfatta

B



$$a = 5 ; 2n - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$$

verifica di stabilità interna soddisfatta

# TRAVI RETICOLARI

## → Analisi cinematica (1)

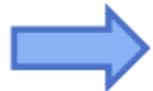
- Si considerano i gradi di libertà dei nodi collegati da aste rigide (e non i gradi di libertà delle aste!)
- È un'analisi semplificata

$$l = 2n - a - V_e$$

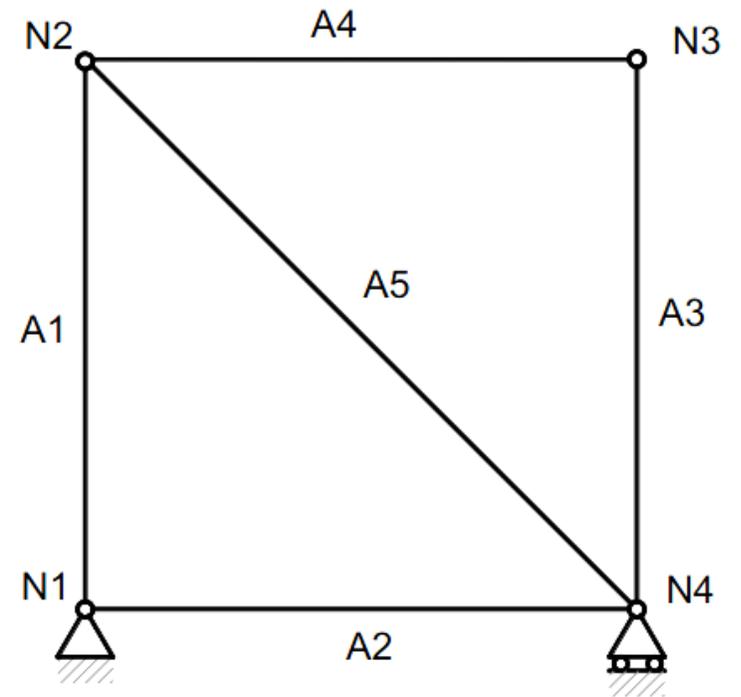
$$n = 4$$

$$a = 5$$

$$V_e = 3$$



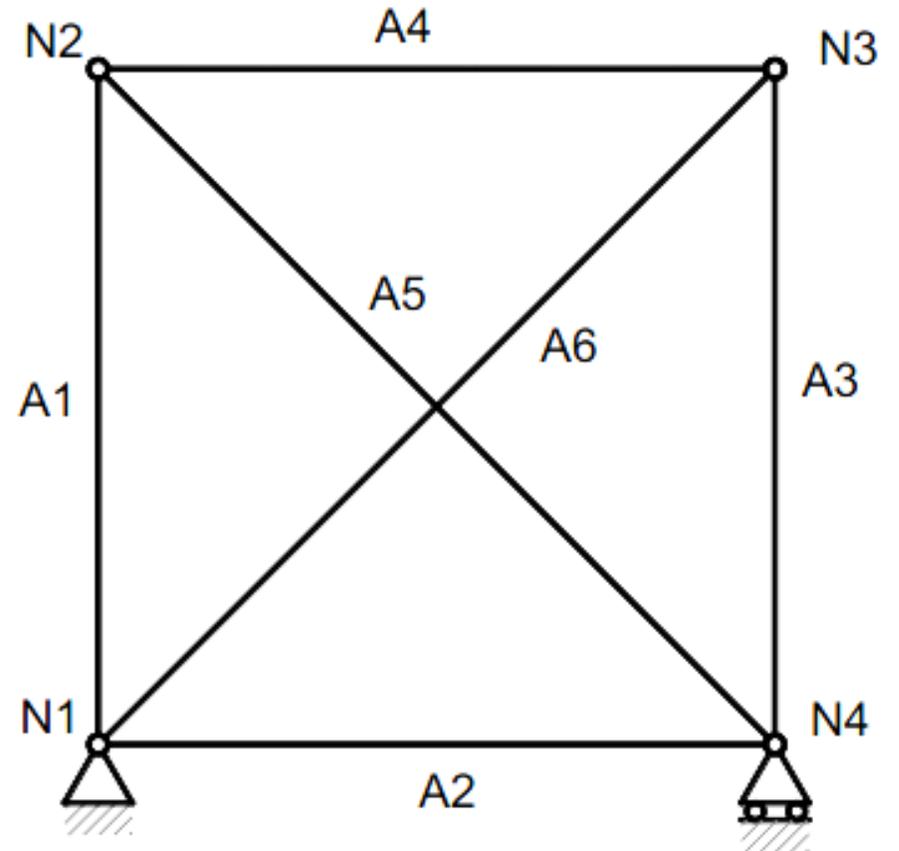
$$l = 2n - a - V_e = 8 - 5 - 3 = 0$$



travatura isostatica

## → Analisi cinematica (2)

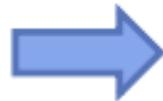
La travatura può comportarsi come un unico corpo rigido ma con aste sovrabbondanti: se i vincoli esterni sono sufficienti ad eliminare i tre gradi di libertà il sistema sarà iperstatico internamente



$$n = 4$$

$$a = 6$$

$$V_e = 3$$



$$l = 2n - a - V_e = 8 - 6 - 3 = -1 \quad \text{travatura iperstatica internamente}$$

## → Analisi cinematica (3)

La travatura può comportarsi come un unico corpo rigido ed essere internamente isostatico, ma può essere vincolata esternamente con vincoli inefficaci: la travatura si dirà labile a vincoli inefficaci

$$n = 4$$

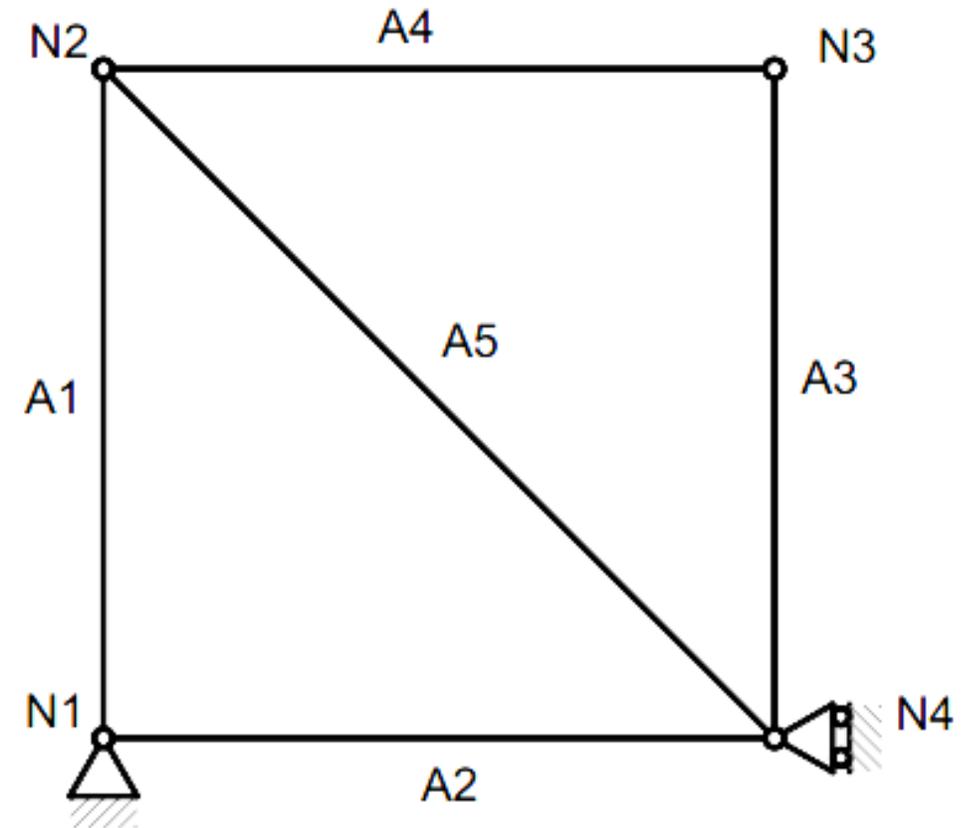
$$a = 5$$

$$V_e = 3$$



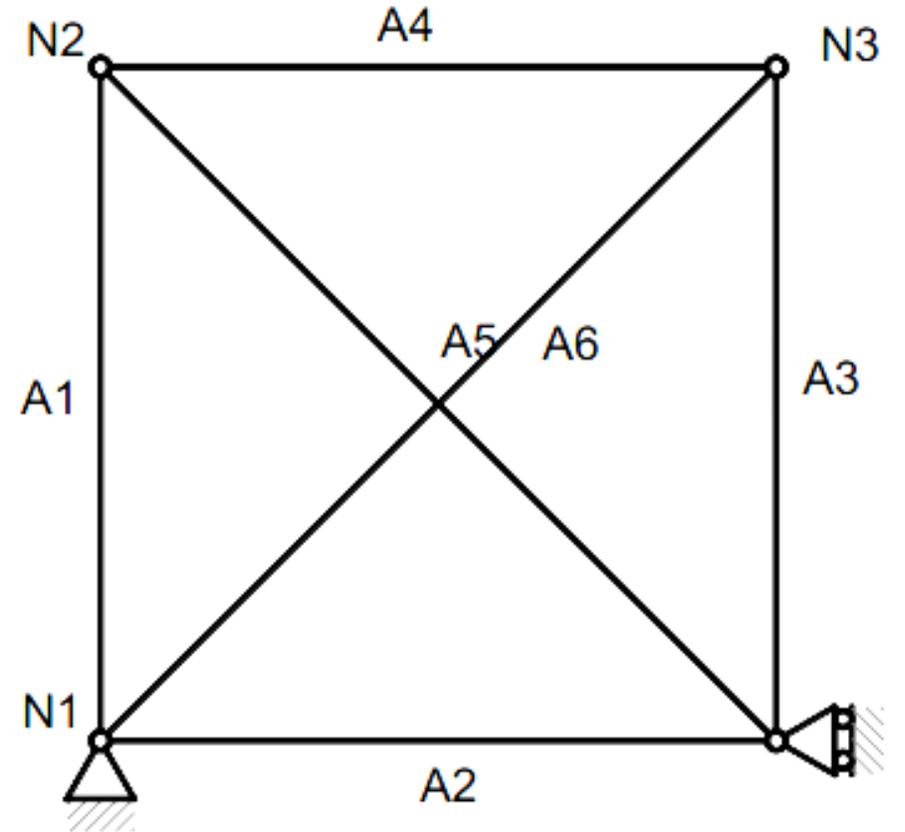
$$l = 2n - a - V_e = 8 - 5 - 3 = 0$$

travatura labile  
vincoli inefficaci



## → Analisi cinematica (4)

La travatura può comportarsi come un unico corpo rigido ed essere internamente iperstatica, ma può essere vincolata esternamente con vincoli inefficaci: la travatura si dirà labile a vincoli inefficaci



$$n = 4$$

$$a = 6$$

$$V_e = 3$$

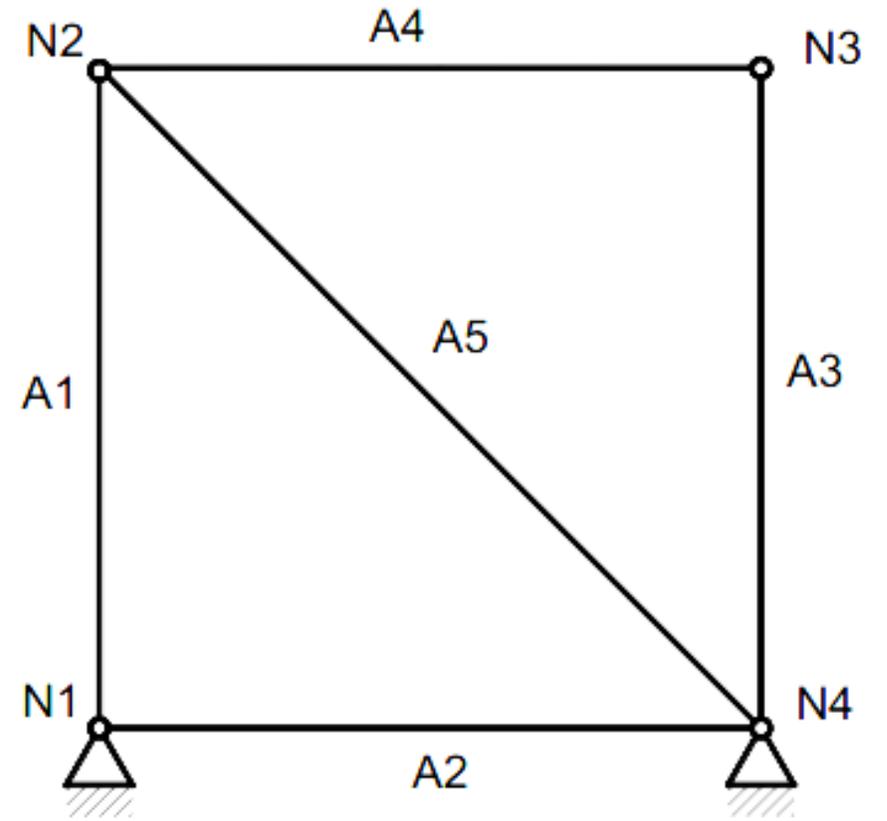


$$l = 2n - a - V_e = 8 - 6 - 3 = -1$$

travatura labile  
vincoli inefficaci

## → Analisi cinematica (5)

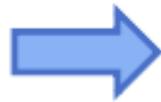
La travatura può comportarsi come un unico corpo rigido ed essere internamente isostatico, ma può essere vincolata con più di tre vincoli esterni: la travatura si dirà iperstatica esternamente



$$n = 4$$

$$a = 5$$

$$V_e = 4$$



$$l = 2n - a - V_e = 8 - 5 - 4 = -1$$

travatura iperstatica  
esternamente

# RISOLUZIONE

- Una trave reticolare è «risolta» quando vengono determinate le entità delle sforzo nelle aste
- Lo sforzo nelle aste è quello trasmesso dai nodi
- Essendo nodi di tipo «cerniera», tutte le aste possono essere solo tese o solo compresse
- I nodi non generano alcun momento flettente
- Lo sforzo assiale nelle aste è uguale e opposto all'azione esercitata dai nodi



# RISOLUZIONE

- La risoluzione di una trave reticolare si concentra proprio sui nodi e sul loro equilibrio
- Applicheremo:
  - **Metodo speditivo (per valutare i versi delle forze sollecitanti)**
  - **Metodo dei nodi**
  - **Metodo (della sezione) di Ritter**



# IPOTESI DI CALCOLO

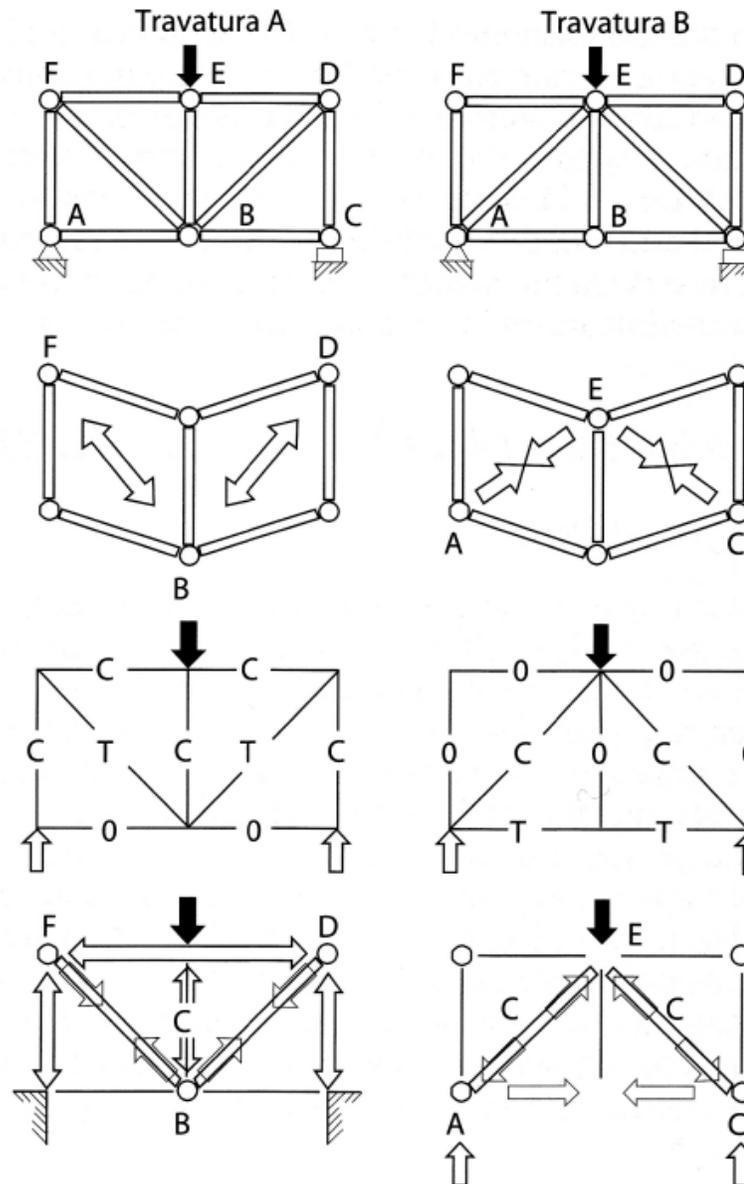
- Carichi e vincoli applicati esclusivamente nei nodi
- Nodi a cerniera
- Elementi rettilinei incernierati alle estremità
- Assenza di attrito nelle cerniere
- Asse baricentrico della sezione coincidente con la linea congiungente i nodi

# IPOTESI DI CALCOLO

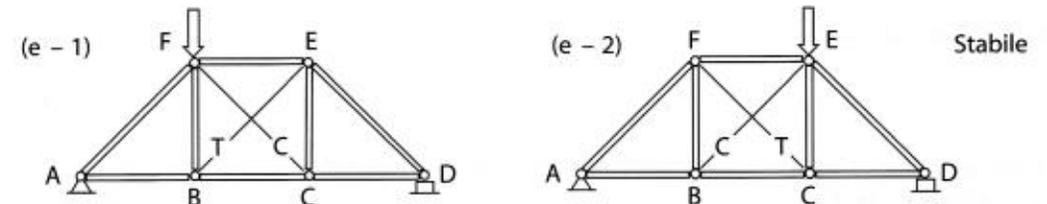
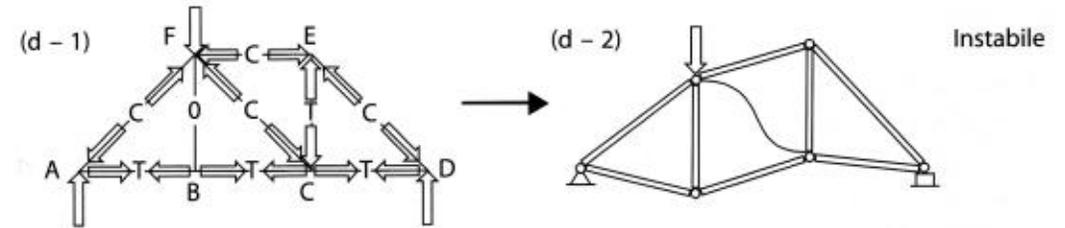
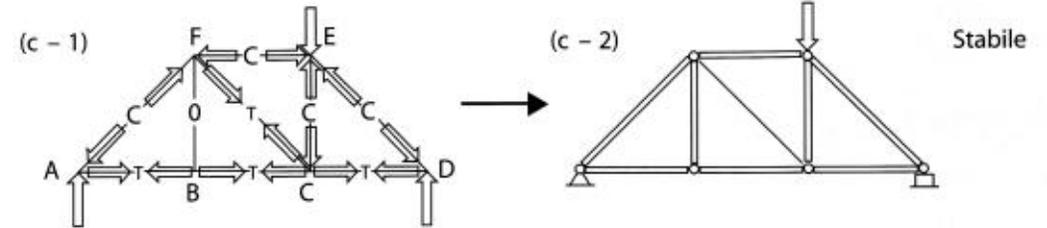
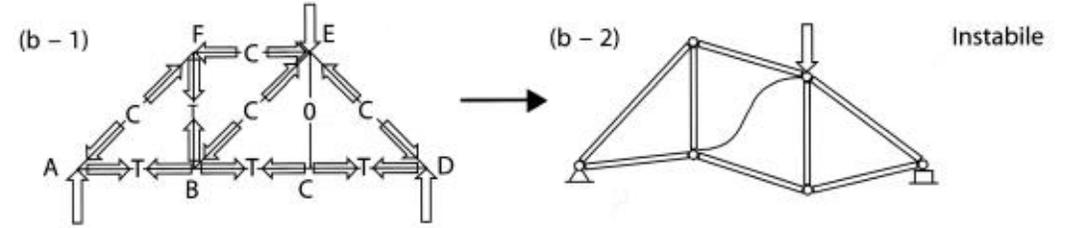
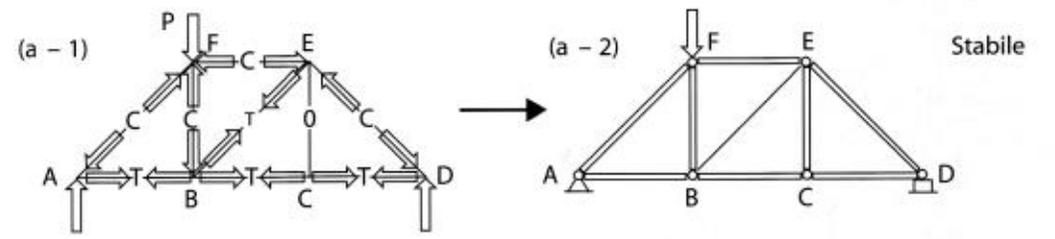
- Ogni nodo, supposto estratto dalla struttura, è soggetto a forze esterne (carichi o reazioni vincolari esterne) e ad azioni provenienti dalle aste che in esso concorrono
- Le forze esterne sono note in intensità, direzione e verso
- Le azioni delle aste sono note solo in direzione (la stessa dell'asse dell'asta) mentre sono incogniti intensità e verso
- L'intensità e il verso delle azioni delle aste sul nodo (e di conseguenza degli sforzi normali sulle aste) possono valutarsi applicando la condizione di equilibrio al nodo
- Nel caso piano, sono sufficienti due condizioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale

# METODO SPEDITIVO

- Composizione di travature semplici.
- Il verso delle forze nelle diagonali può essere determinato immaginando dapprima di rimuovere le diagonali e determinando il loro ruolo nell'impedire la possibile deformazione. In questo modo una diagonale posta tra B e F, nella travatura A, deve essere in trazione dato che, come indicato, la sua presenza previene l'allontanamento dei punti B e D.
- Distribuzione finale delle forze nelle travature:  
C, compressione; T, trazione.
- Per determinare l'andamento delle forze in una travatura è possibile anche ricorrere ad una analogia con il comportamento a "funne", oppure ad "arco". Nella travatura di sinistra, l'elemento FBD viene immaginato come se fosse una fune e quindi in trazione. Gli altri elementi svolgono il ruolo di mantenere in equilibrio questa configurazione basata sulla presenza della "fune".



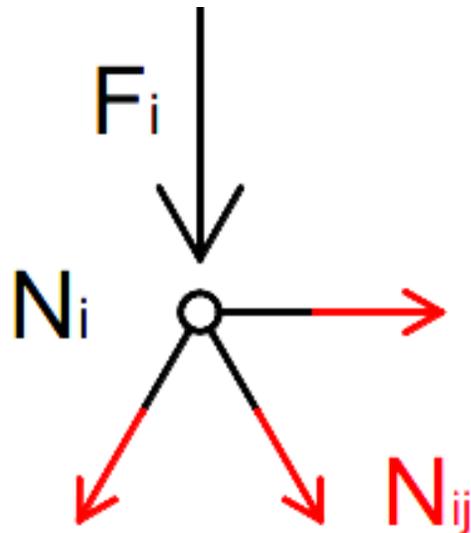
# METODO SPEDITIVO (aste costituite da funi)



# METODO DEI NODI (di equilibrio dei nodi)

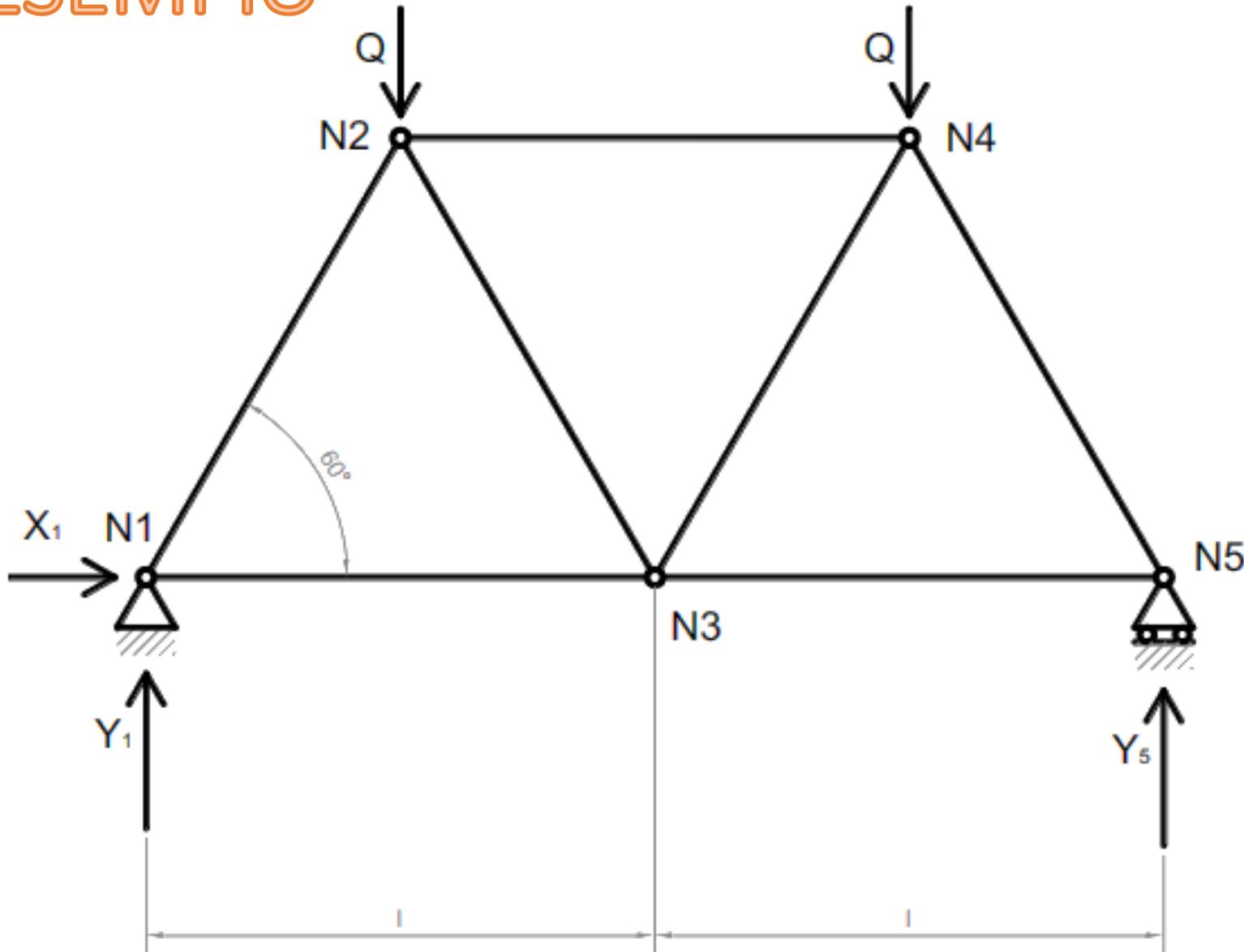
- Si impone che l'i-esimo nodo sia in equilibrio sotto l'azione:
  - dei carichi trasmessi dalle j aste concorrenti
  - e delle eventuali forze esterne
  - e reazioni vincolari applicate al nodo

➔ Si inizia da nodo con 2 sole incognite



$$\vec{F}_i + \sum_j \vec{N}_{ij} = 0$$

# ESEMPIO



# Trave WARREN

Analisi cinematica

$$n = 5$$

$$a = 7$$

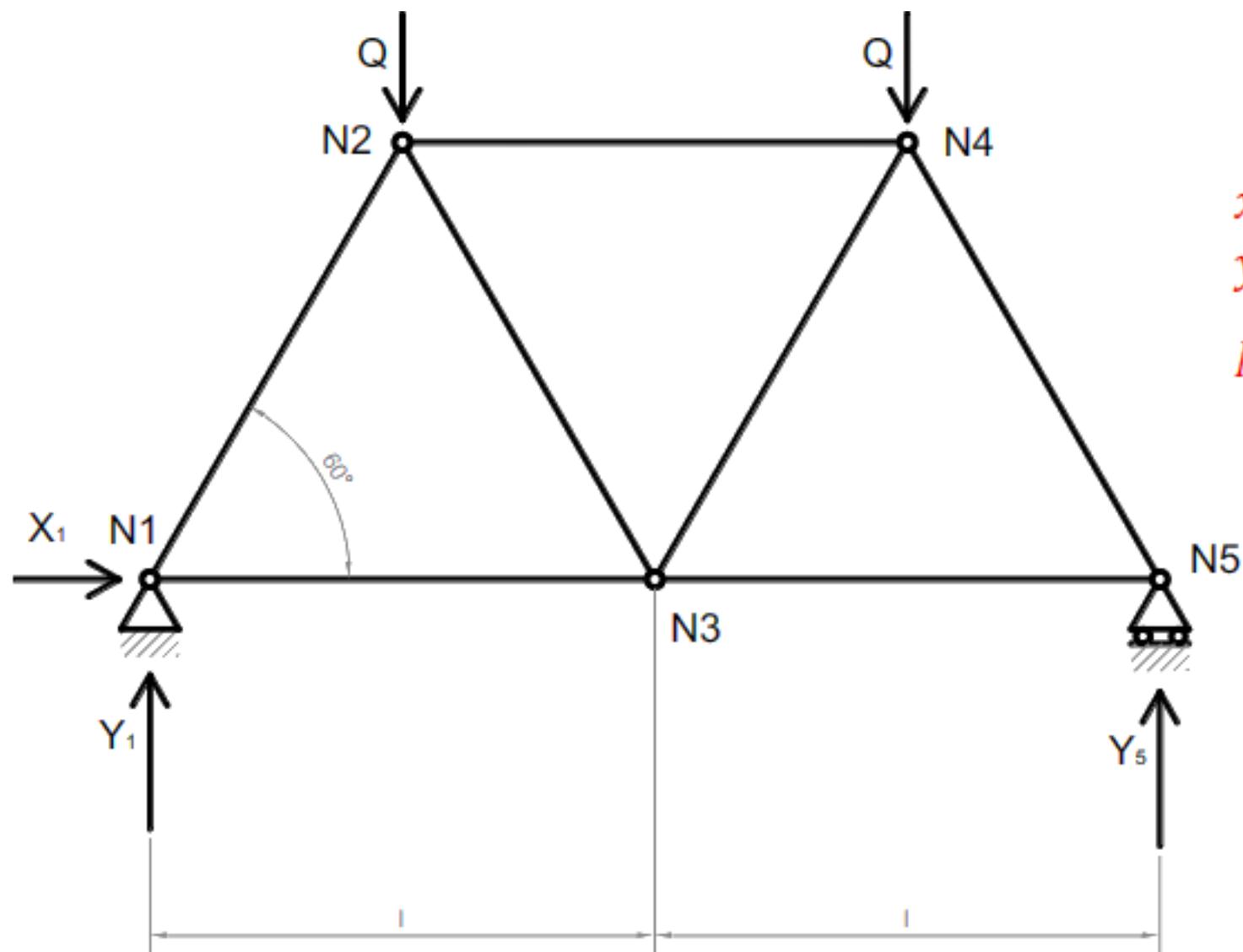
$$V_e = 3$$



$$l = 2n - a - V_e$$

$$l = 10 - 7 - 3 = 0$$

Travatura isostatica



### Equilibrio globale

$$x: X_1 = 0$$

$$y: Y_1 + Y_5 - 2Q = 0$$

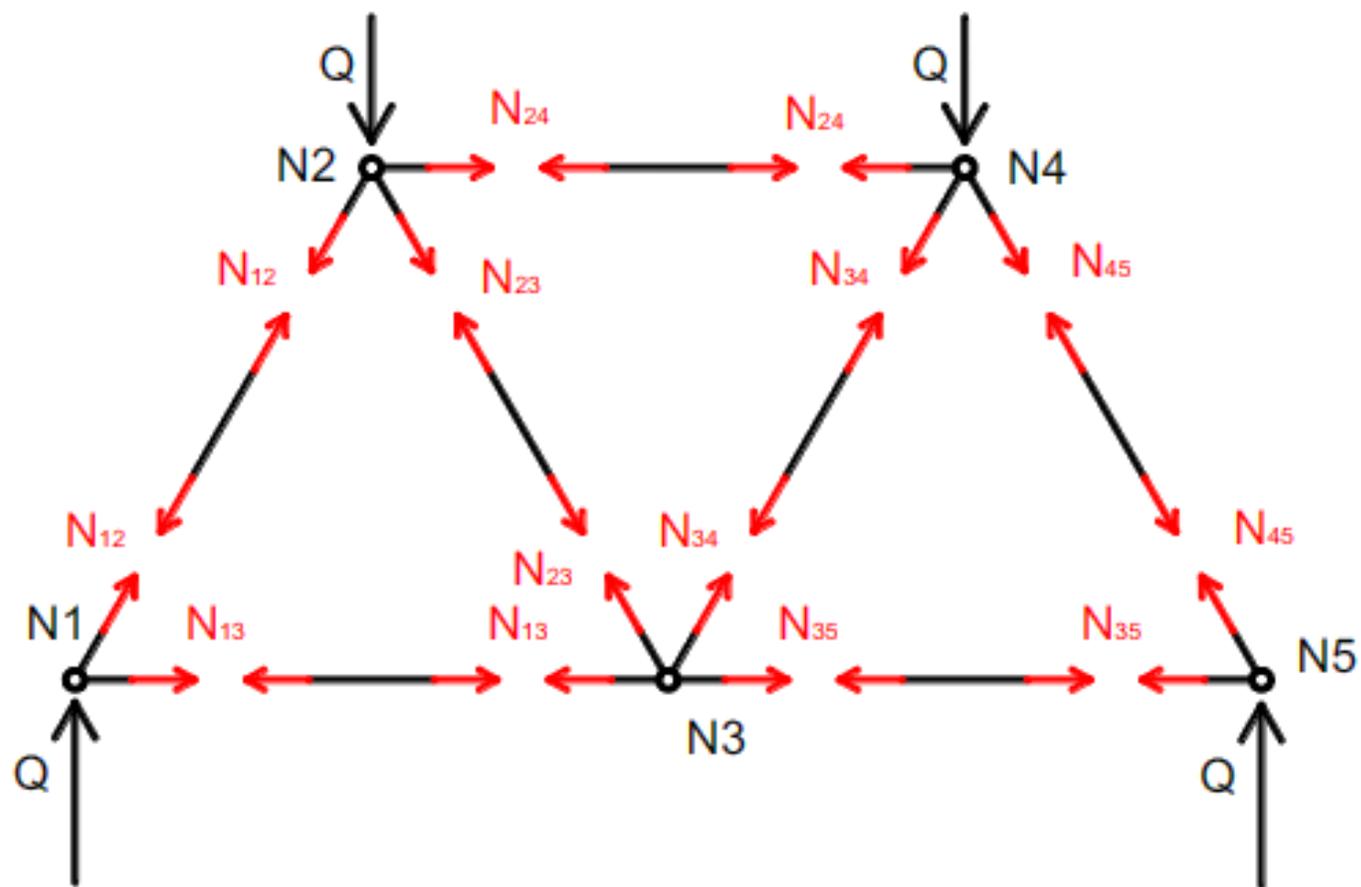
$$N1: Q \frac{l}{2} + Q \frac{3}{2}l - Y_5 \cdot 2l = 0$$



$$X_1 = 0$$

$$Y_1 = Q$$

$$Y_5 = Q$$



## Equilibrio nodo N1

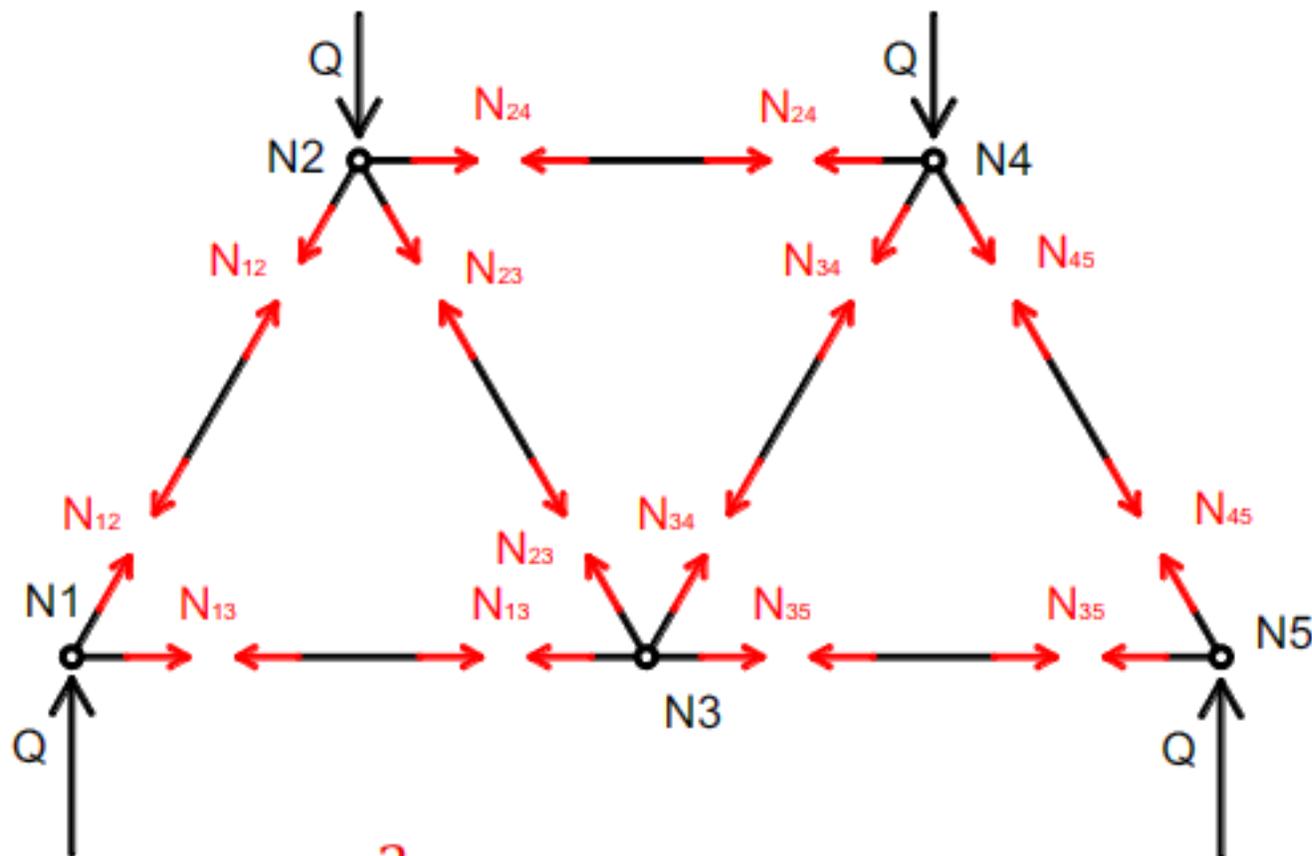
$$Q + N_{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$N_{13} + N_{12} \cdot \frac{1}{2} = 0$$



$$N_{12} = -\frac{2}{\sqrt{3}} Q$$

$$N_{13} = \frac{1}{\sqrt{3}} Q$$



N1

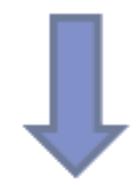
$$N_{12} = -\frac{2}{\sqrt{3}}Q$$

$$N_{13} = \frac{1}{\sqrt{3}}Q$$

### Equilibrio nodo N2

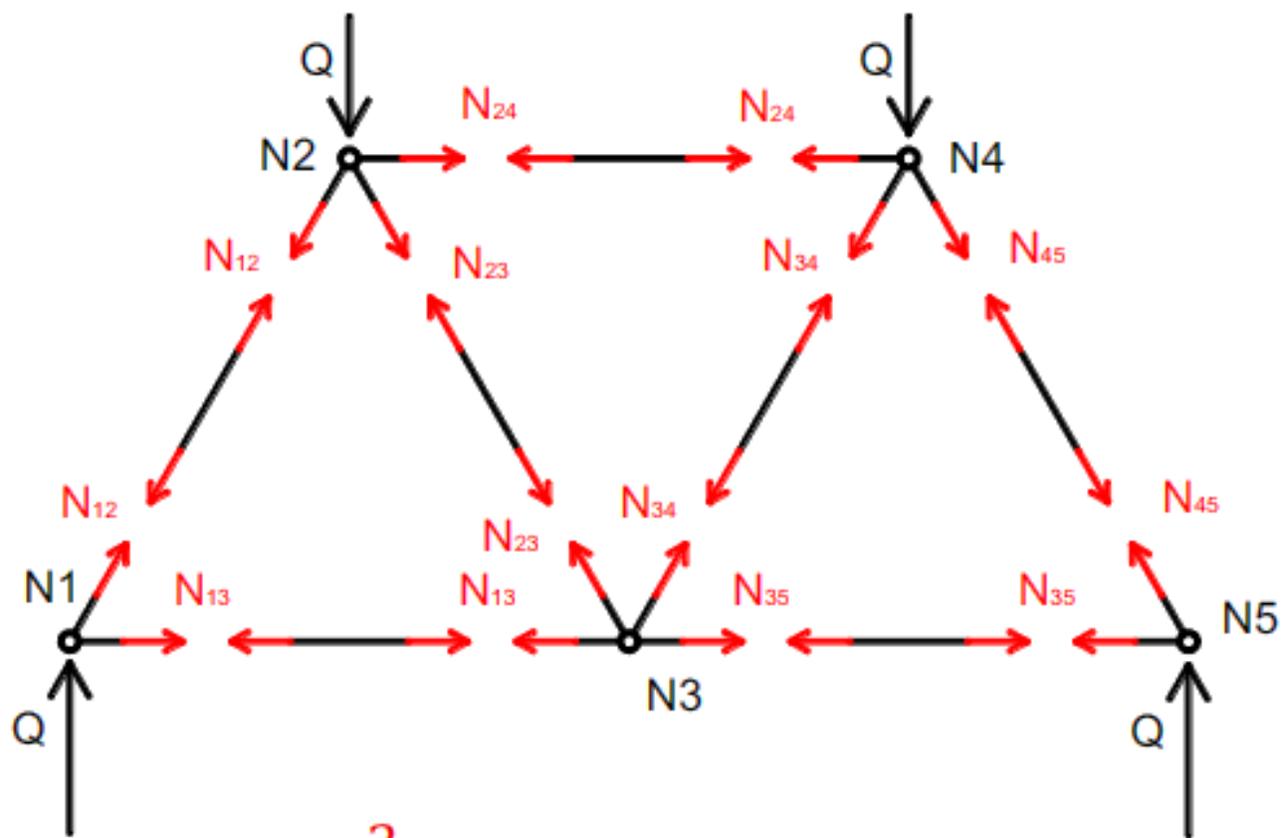
$$Q + N_{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + N_{23} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$N_{24} + N_{23} \cdot \frac{1}{2} - N_{12} \cdot \frac{1}{2} = 0$$



$$N_{23} = 0$$

$$N_{24} = -\frac{1}{\sqrt{3}}Q$$



**N1**

$$N_{12} = -\frac{2}{\sqrt{3}}Q$$

$$N_{13} = \frac{1}{\sqrt{3}}Q$$

**N2**

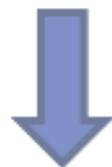
$$N_{23} = 0$$

$$N_{24} = -\frac{1}{\sqrt{3}}Q$$

### Equilibrio nodo N3

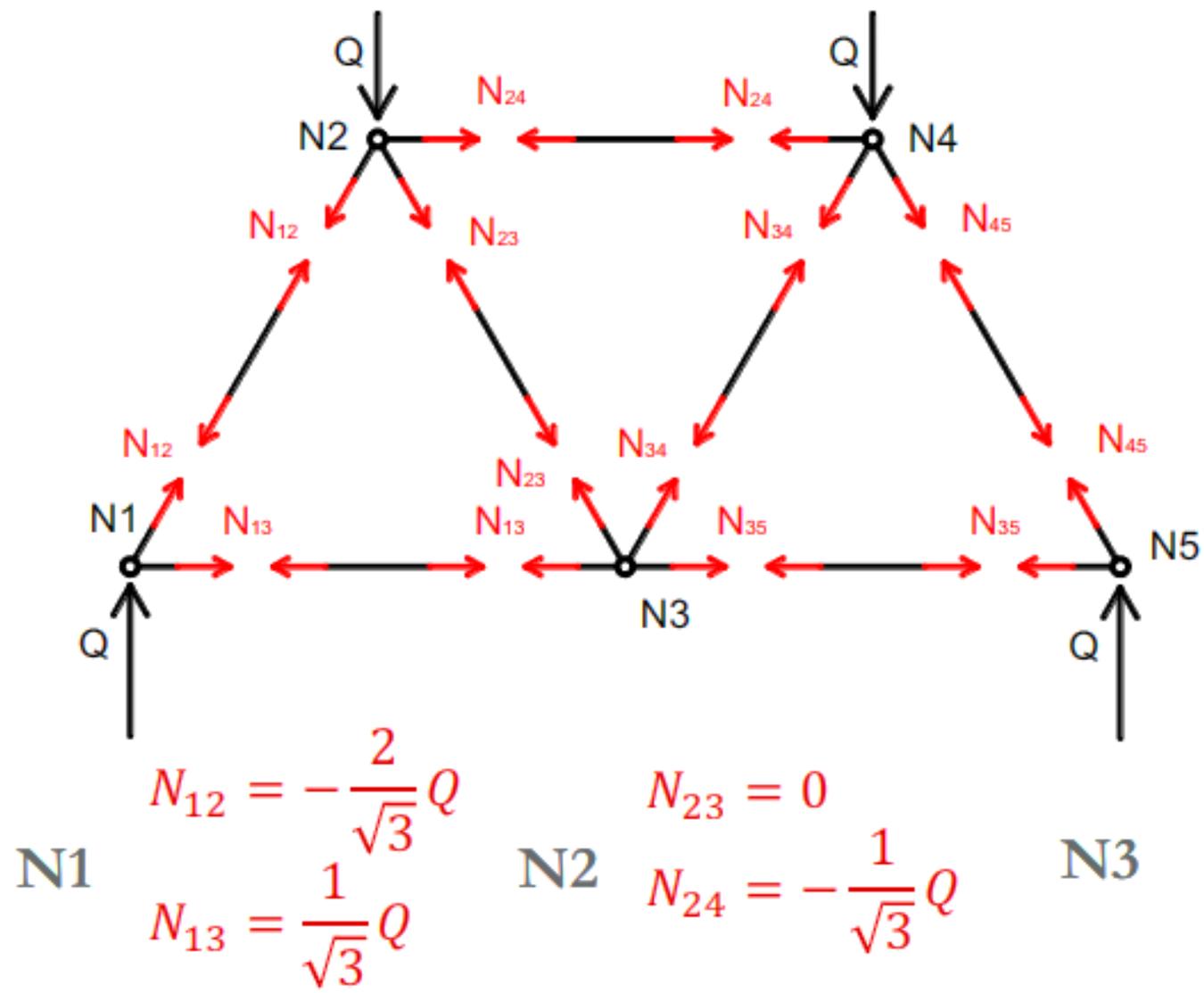
$$N_{23} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + N_{34} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$N_{35} - N_{13} - N_{23} \cdot \frac{1}{2} + N_{34} \cdot \frac{1}{2} = 0$$



$$N_{34} = 0$$

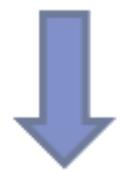
$$N_{35} = \frac{1}{\sqrt{3}}Q$$



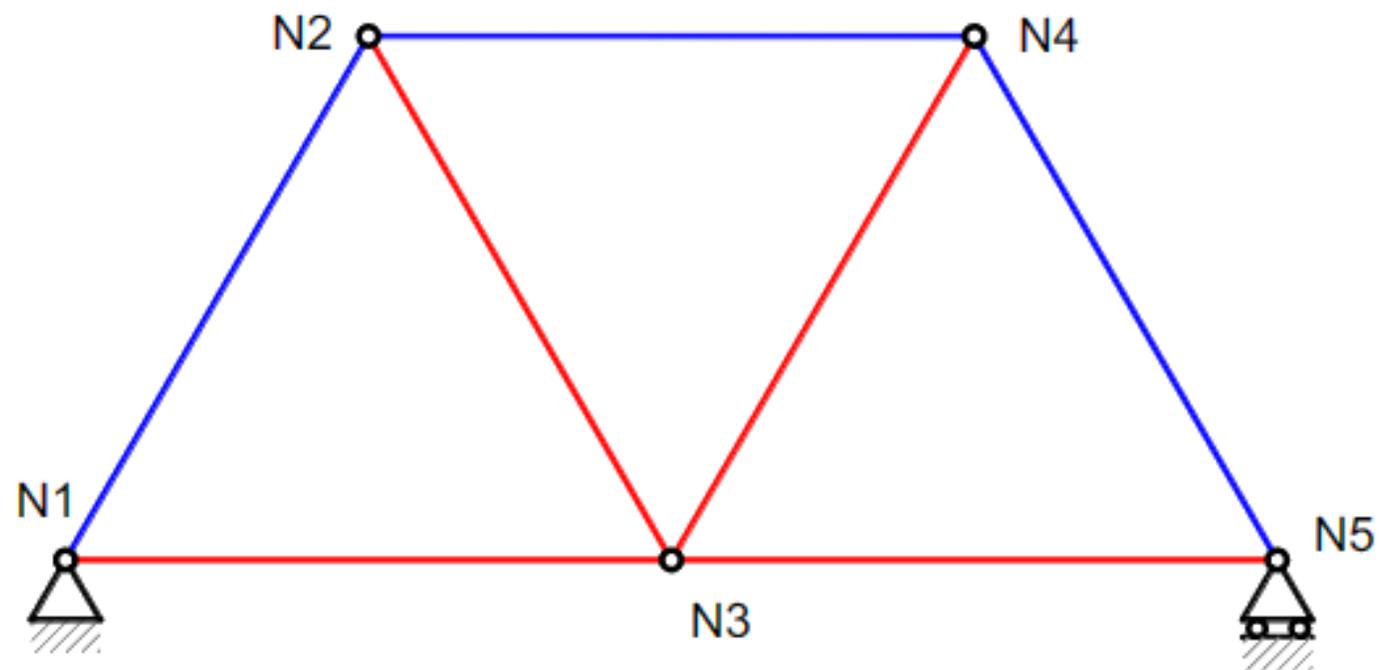
### Equilibrio nodo N4

$$N_{45} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + N_{34} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + Q = 0$$

$$N_{45} \cdot \frac{1}{2} + N_{34} \cdot \frac{1}{2} - N_{24} = 0$$



$$N_{45} = -\frac{2}{\sqrt{3}}Q$$



Aste tese

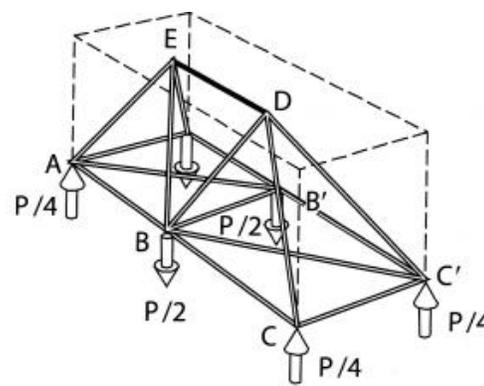


Aste compresse

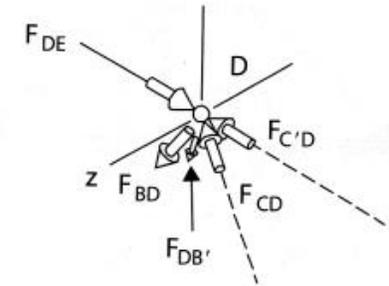


Asta	$N_{ij}$	Risultato
1-2	$N_{12}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}Q$
1-3	$N_{13}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}Q$
2-3	$N_{23}$	0
2-4	$N_{24}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}Q$
3-4	$N_{34}$	0
3-5	$N_{35}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}Q$
4-5	$N_{45}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}Q$

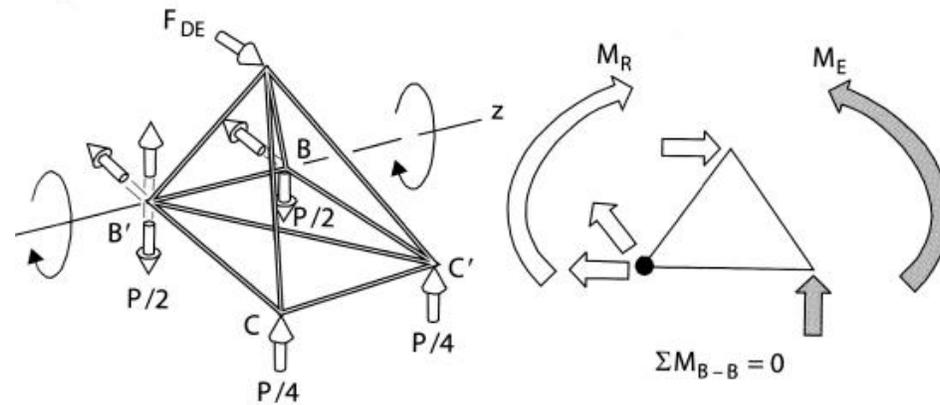
# TRAVI RETICOLARI SPAZIALI



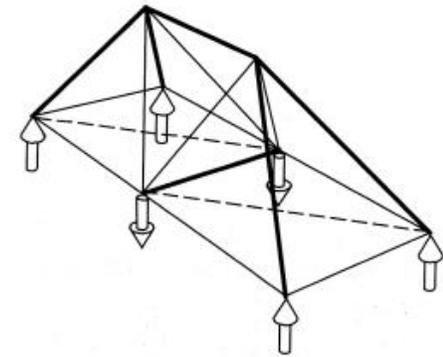
(a) Tipica configurazione tridimensionale.



(b) Ogni nodo deve essere in equilibrio nei confronti della traslazione e della rotazione. Quindi,  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ , e  $\Sigma F_z = 0$ .



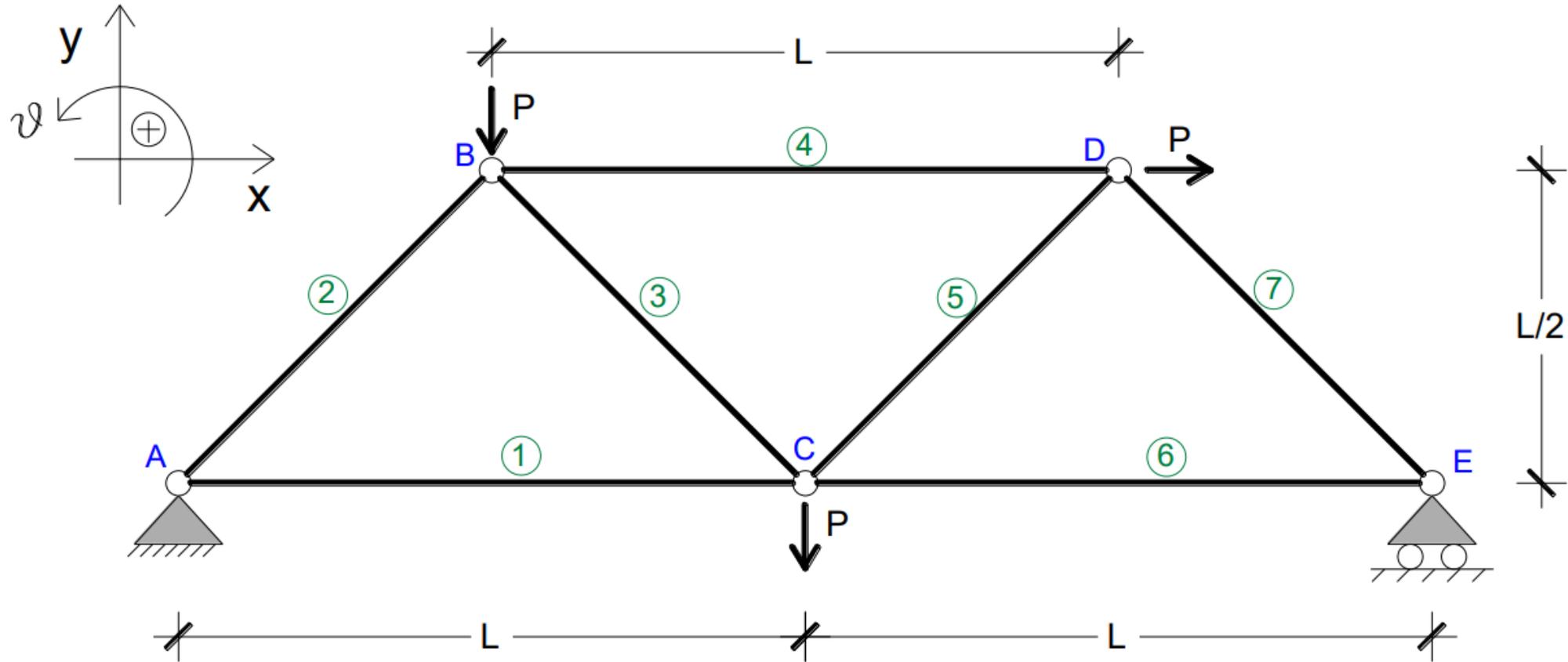
(c) Ciascuna porzione della struttura deve essere in uno stato di equilibrio alla rotazione ed alla traslazione. Facendo riferimento all'equilibrio dei momenti, ad esempio, il momento esterno ( $M_E$ ) generato in una sezione deve essere esattamente bilanciato da un momento resistente interno ( $M_R$ ) generato dalle azioni assiali interne negli elementi.

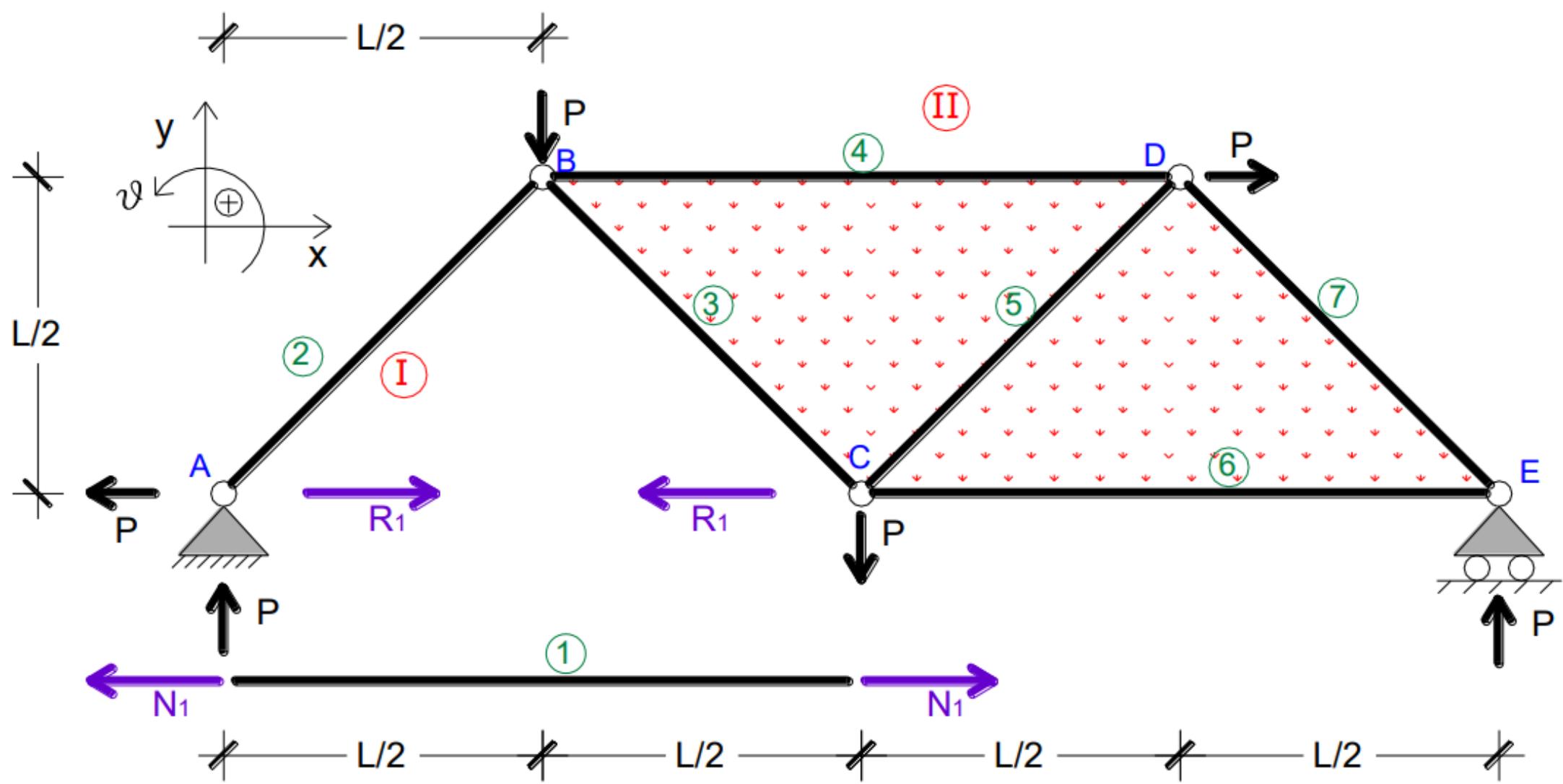


Trazione ———  
 Compressione ———  
 Forza nulla - - - -

(d) Distribuzione delle azioni interne in un traliccio.

# ESEMPIO – METODO SPEDITIVO





Con riferimento alla Fig. 26quater la condizione di equilibrio parziale è una condizione di equilibrio alla rotazione relativa intorno alla cerniera B. Imponendo ad esempio l'equilibrio alla rotazione della porzione I rispetto al nodo B si ottiene in modo immediato (senza cioè ricorrere allo studio della catena cinematica reticolare) l'azione dell'asta soppressa  $R_1$  e quindi lo sforzo normale incognito  $N_1$  (uguale in modulo e direzione ma di verso opposto), si ha infatti:

$$\sum M_B^I = 0 \Rightarrow R_1 \frac{L}{2} - P \frac{L}{2} - P \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_1 = 2P}$$

Il valore analitico determinato per  $R_1$  è positivo, il verso ipotizzato è corretto, e quindi l'asta 1 è in trazione (tirante).

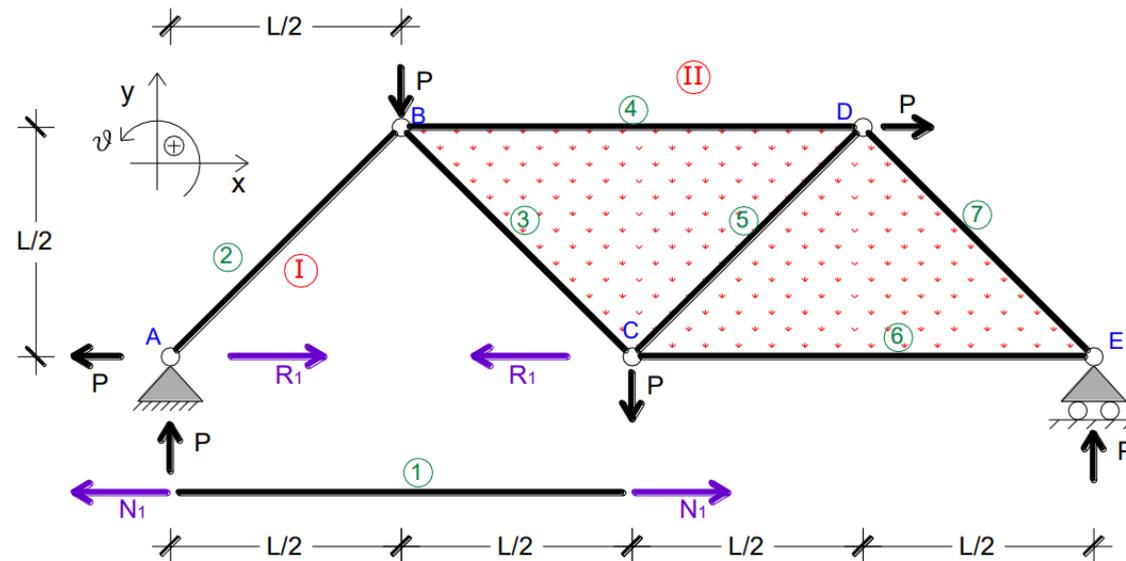
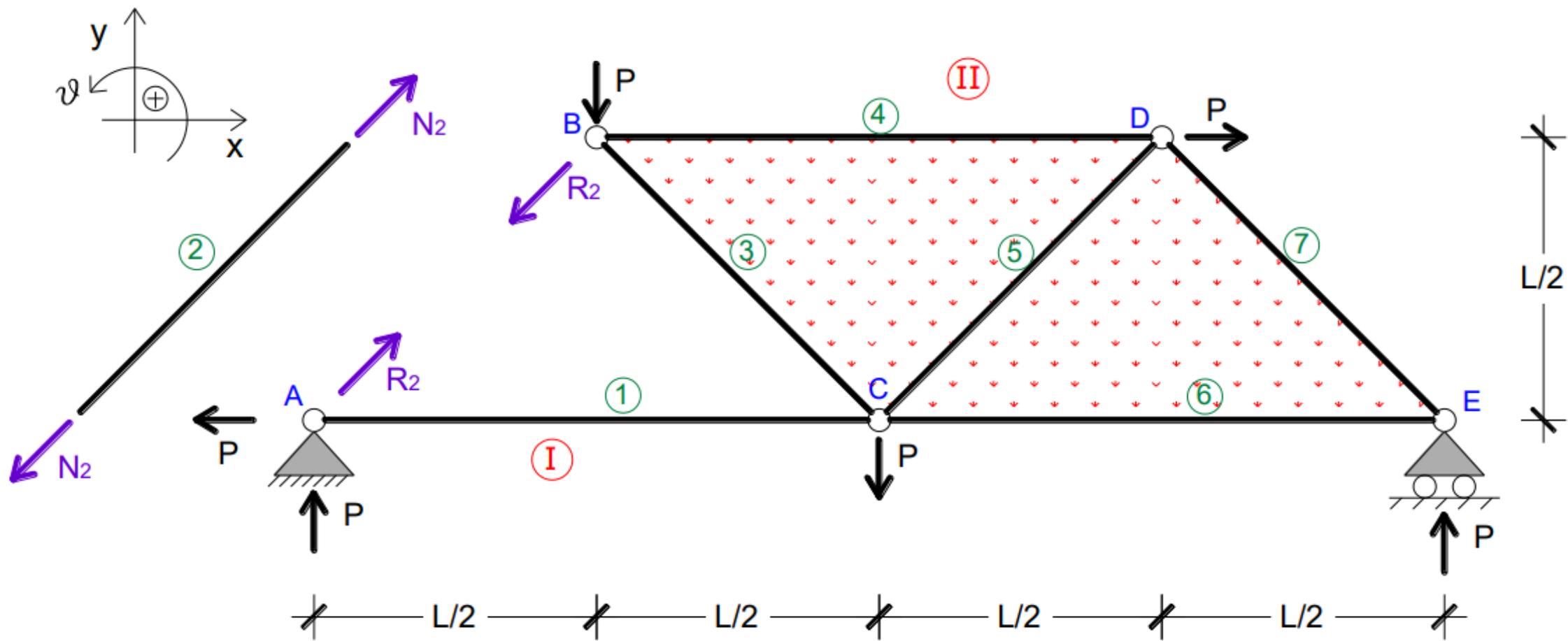
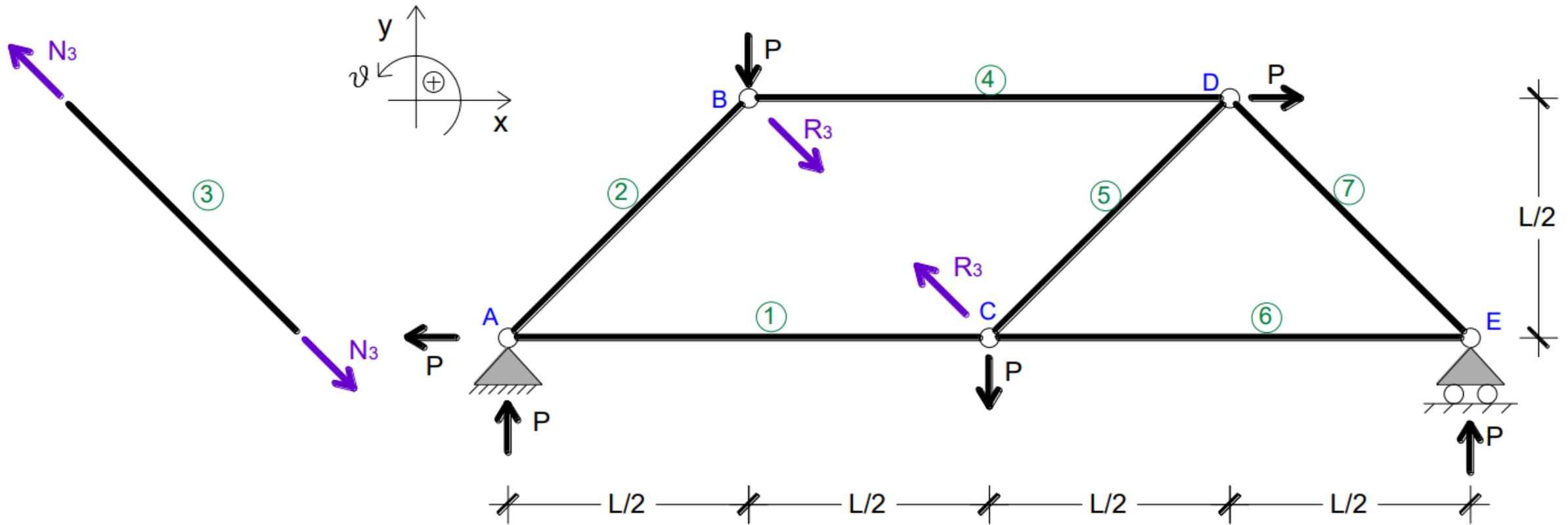


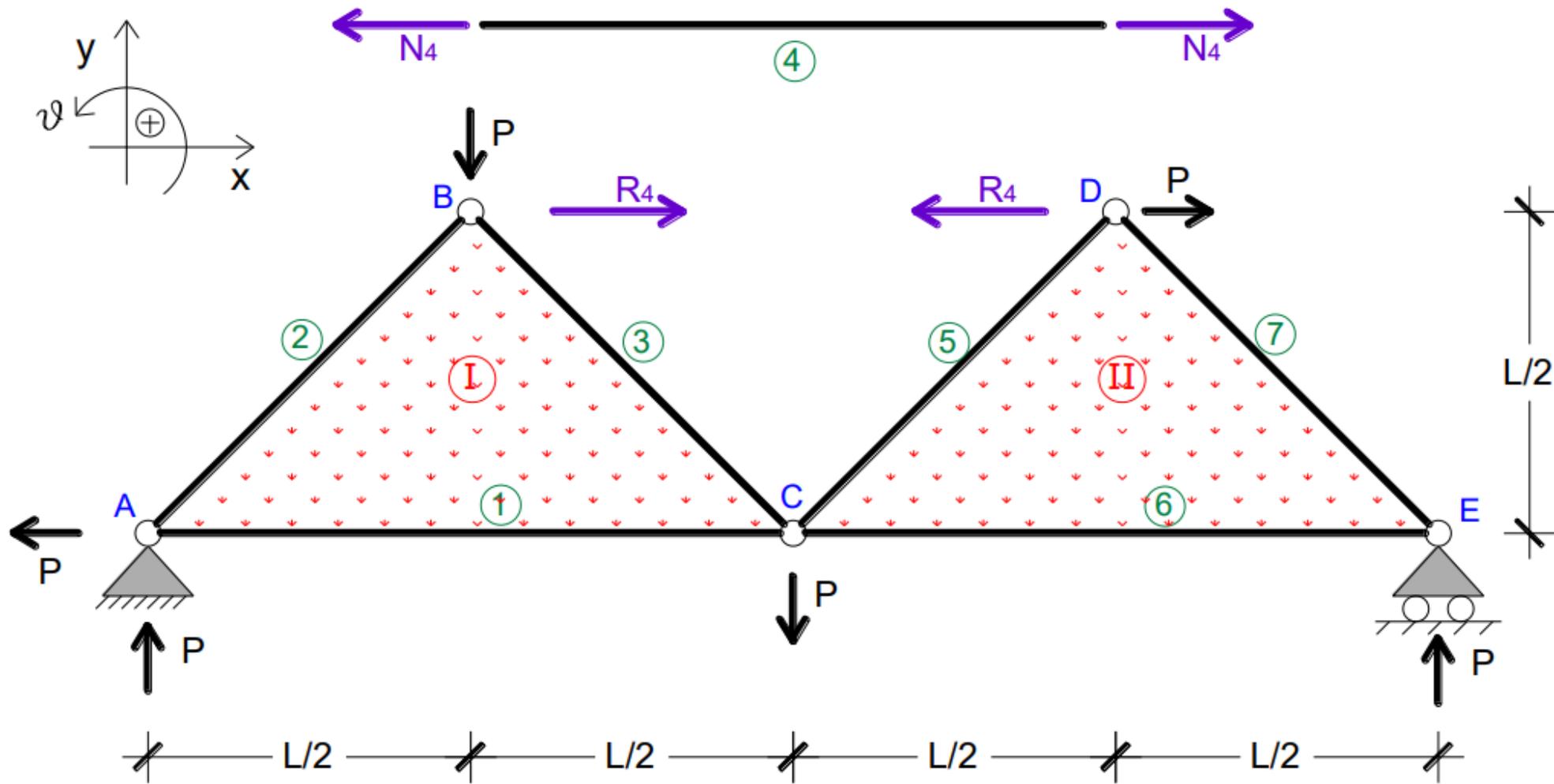
Figura 26 – Catena cinematica reticolare per la determinazione dello sforzo normale sull'asta 1







L'asta 3 risulta scarica. Si noti che in questo caso, non trattandosi di un'asta di contorno, la condizione di equilibrio parziale (metodo speditivo) non si può imporre!! Non vi sono, come già osservato, due porzioni (rigide) mutuamente incernierate.



Con riferimento alla Fig. 29quater la condizione di equilibrio parziale è una condizione di equilibrio alla rotazione relativa intorno alla cerniera C. Imponendo ad esempio l'equilibrio alla rotazione della porzione I rispetto al nodo C si ottiene in modo immediato (senza cioè ricorrere allo studio della catena cinematica reticolare) l'azione dell'asta soppressa  $R_4$  e quindi lo sforzo normale incognito  $N_4$  (uguale in modulo e direzione ma di verso opposto), si ha infatti:

$$\sum M_C^I = 0 \Rightarrow -R_4 \frac{L}{2} - PL + P \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_4 = -P}$$

Il valore analitico determinato per  $R_4$  è negativo, il verso ipotizzato è opposto a quello effettivo, e quindi l'asta 4 è in compressione (puntone).

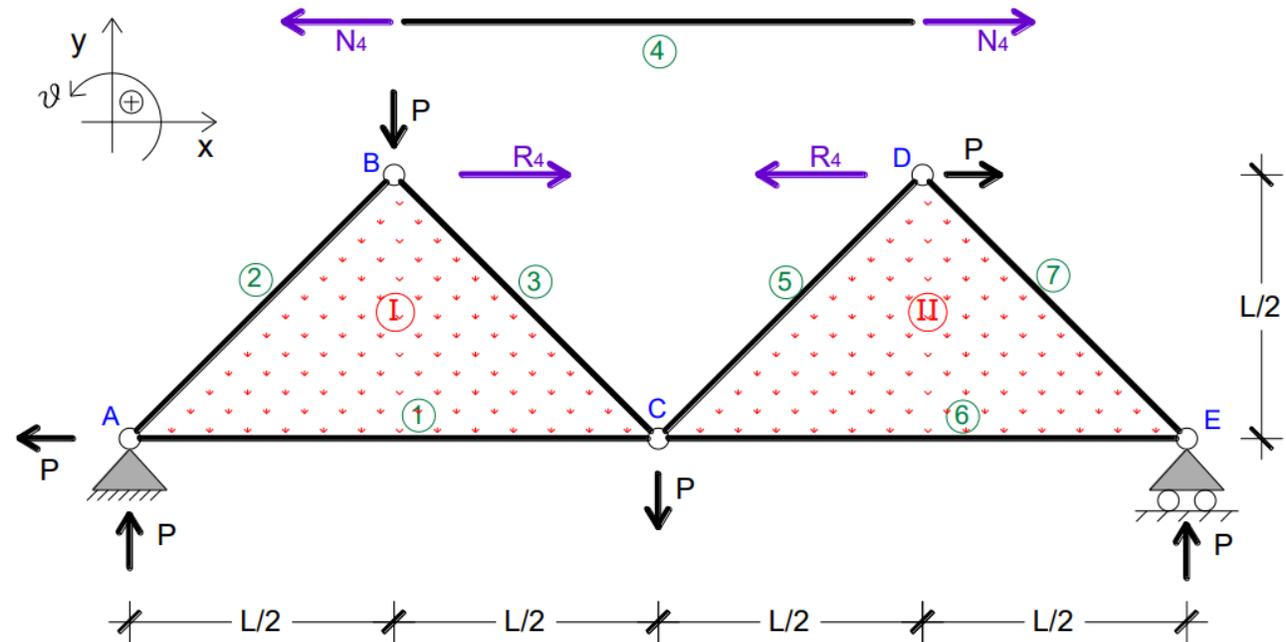
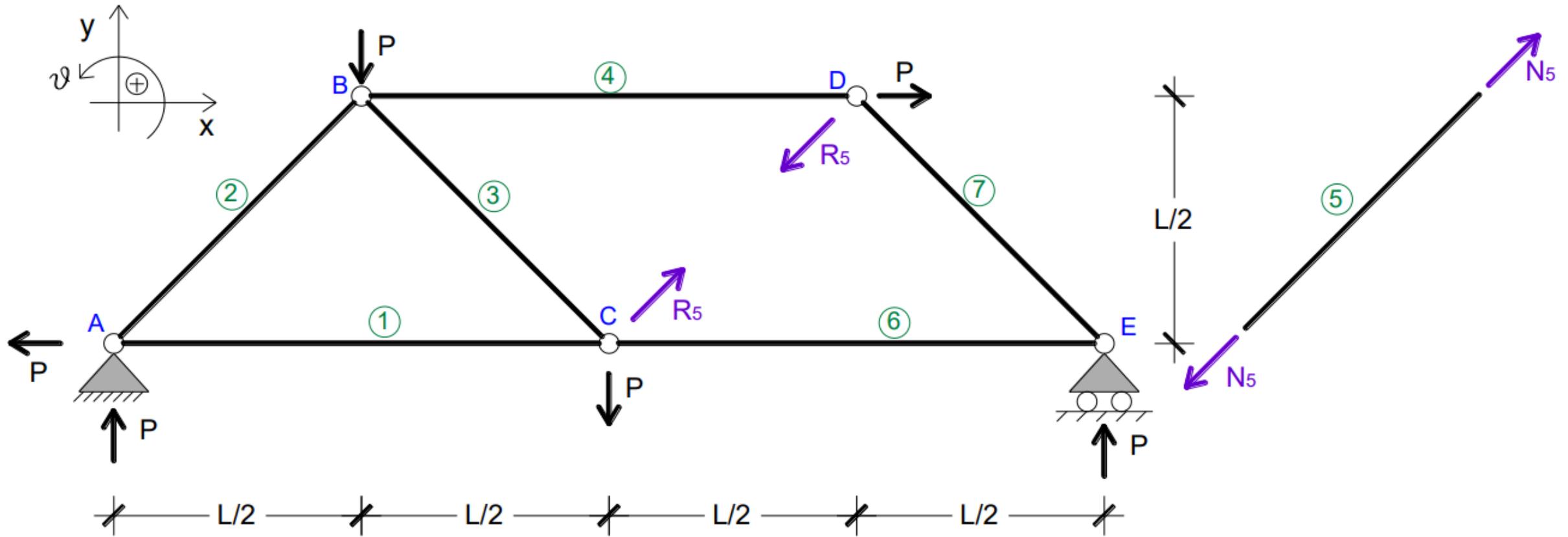
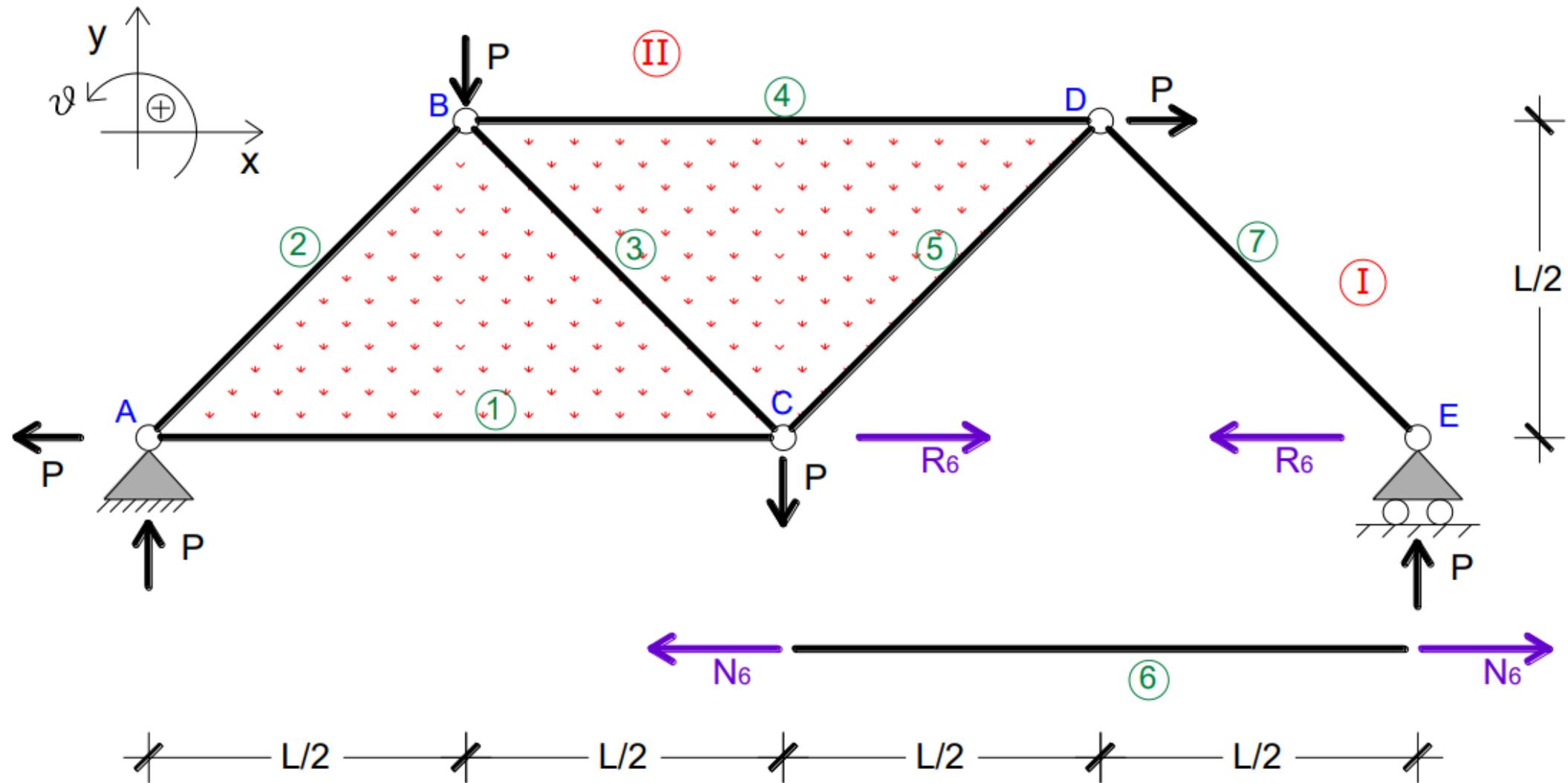


Figura 29 – Catena cinematica reticolare per la determinazione dello sforzo normale sull'asta 4





Con riferimento alla Fig. 31bis la condizione di equilibrio parziale è una condizione di equilibrio alla rotazione relativa intorno alla cerniera D. Imponendo ad esempio l'equilibrio alla rotazione della porzione I rispetto al nodo D si ottiene in modo immediato l'azione dell'asta soppressa  $R_6$  e quindi lo sforzo normale incognito  $N_6$  (uguale in modulo e direzione ma di verso opposto), si ha infatti:

$$\sum M_D^I = -R_6 \frac{L}{2} + P \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_6 = P}$$

Il valore analitico determinato per  $R_6$  è positivo, il verso ipotizzato è corretto, e quindi l'asta 6 è in trazione (tirante).

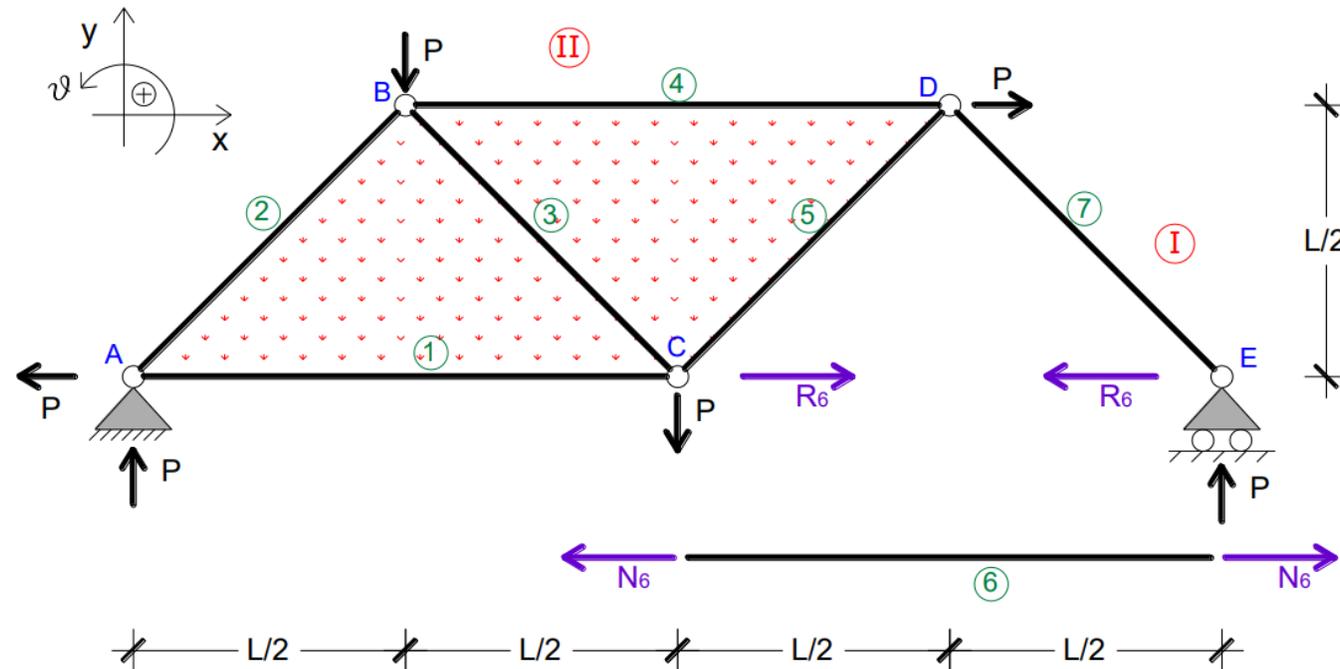
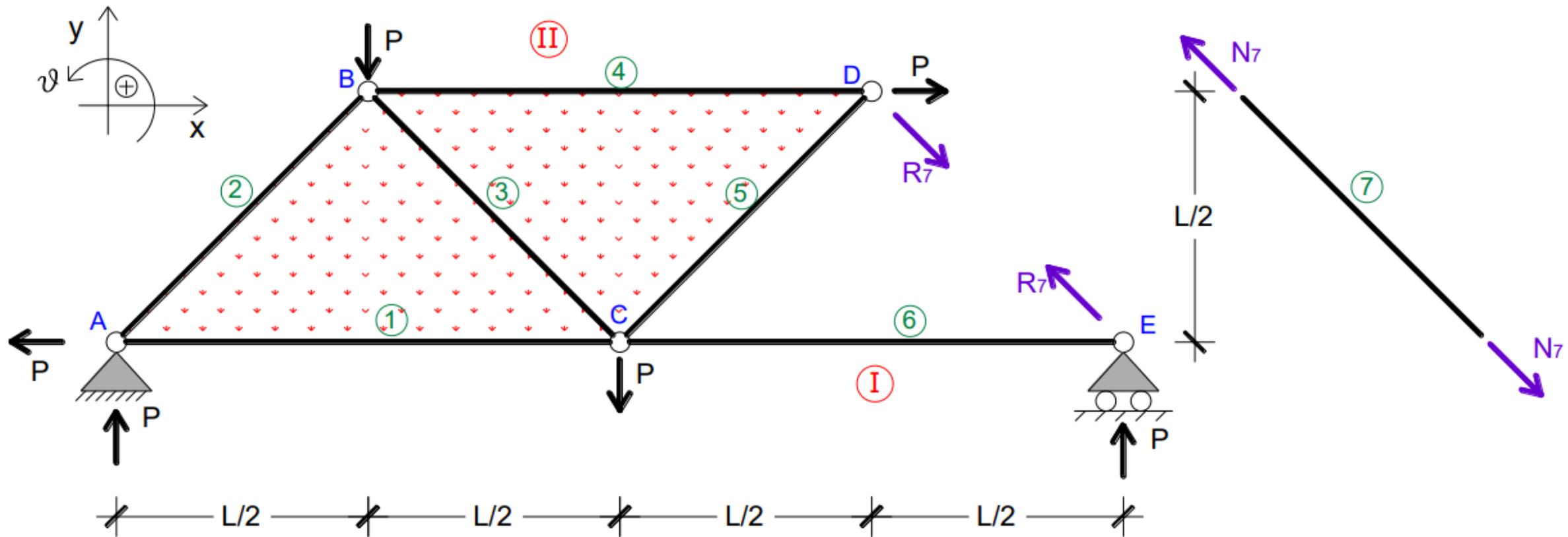


Figura 31 – Catena cinematica reticolare per la determinazione dello sforzo normale sull'asta 6



Con riferimento alla Fig. 32bis la condizione di equilibrio parziale è una condizione di equilibrio alla rotazione relativa intorno alla cerniera C. Imponendo ad esempio l'equilibrio alla rotazione della porzione I rispetto al nodo C si ottiene in modo immediato l'azione dell'asta soppressa  $R_7$  e quindi lo sforzo normale incognito  $N_7$  (uguale in modulo e direzione ma di verso opposto), si ha infatti:

$$\sum M_C^I = R_7 \frac{\sqrt{2}}{2} L + PL = 0 \Rightarrow \boxed{R_7 = -P \frac{2}{\sqrt{2}} = -P\sqrt{2}}$$

Il valore analitico determinato per  $R_7$  è negativo, il verso ipotizzato è opposto a quello effettivo, e quindi l'asta 7 è in compressione (puntone).

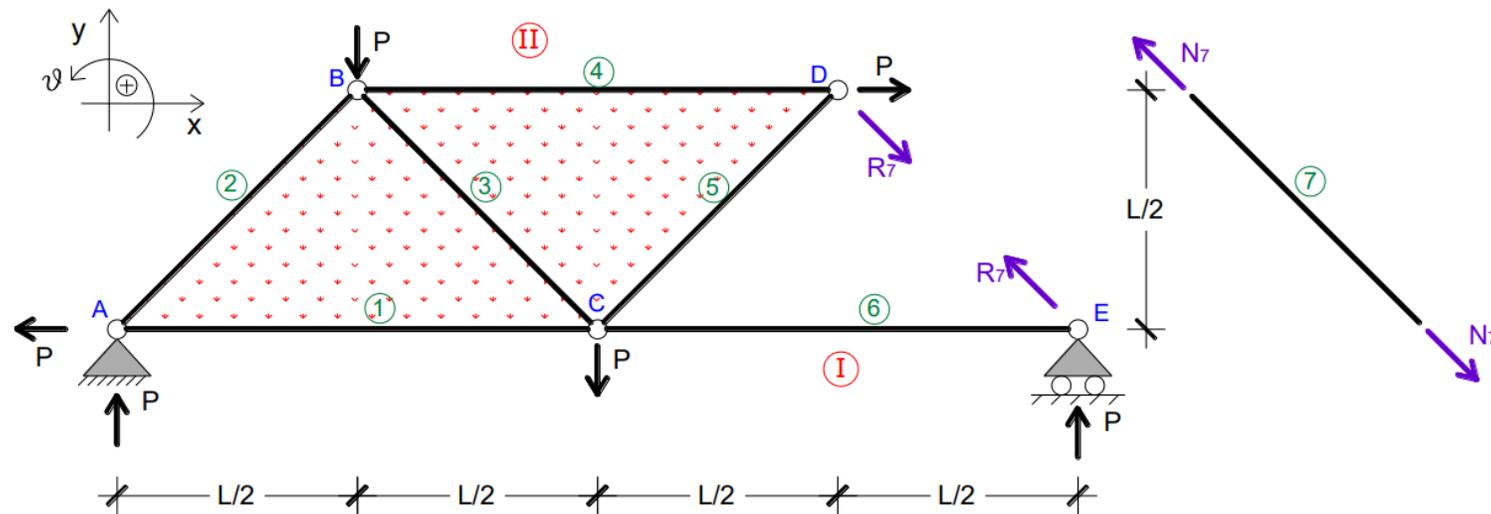


Figura 32 – Catena cinematica reticolare per la determinazione dello sforzo normale sull'asta 7

# METODO DI RITTER

- È un metodo indicato per la verifica piuttosto che per la risoluzione di una struttura
  - È necessario determinare le reazioni vincolari della struttura
  - La travatura deve essere vincolata isostaticamente
  - Si seziona idealmente la travatura in maniera tale da tagliare solo tre aste
  - Si impone l'equilibrio
  - In tal modo si ottiene un numero adeguato di equazioni per determinare gli sforzi incogniti nelle aste
- ➔ attenzione alla scelta dei nodi!

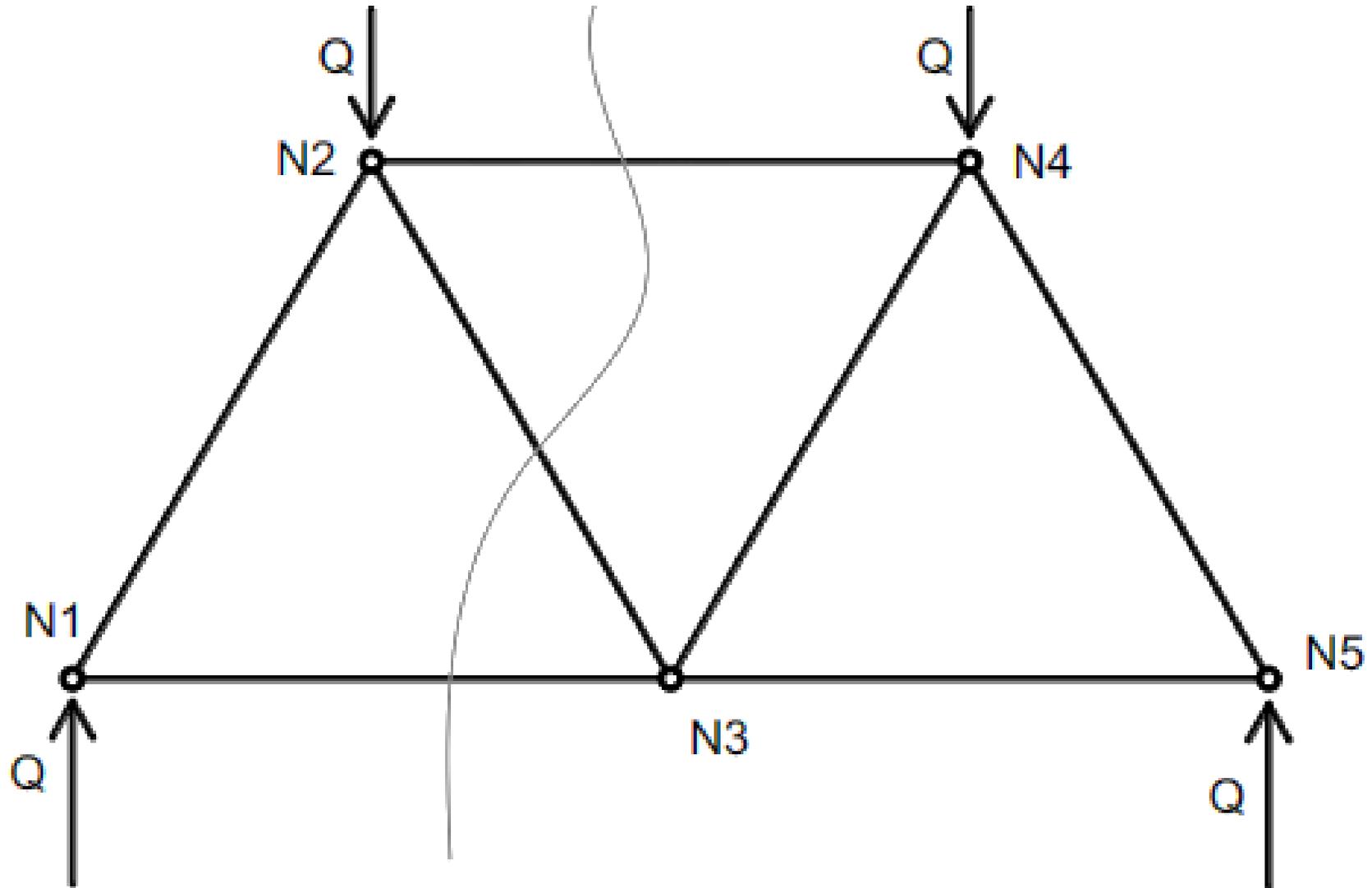
# METODO DI RITTER

- Prevede di suddividere la travatura reticolare piana in due parti distinte mediante un'opportuna sezione
- La sezione di Ritter dovrà interessare l'asta di cui si vuole determinare lo sforzo e altre due aste
- Le tre aste sezionate dovranno essere a due a due concorrenti nello stesso punto (tipicamente un nodo se le rette d'azione si incontrano al finito, un punto all'infinito nella direzione degli assi delle aste per coppie di aste parallele tra loro)
- Sui monconi delle tre aste tagliate si introducono gli sforzi normali incogniti, nell'ipotesi che le aste siano tiranti

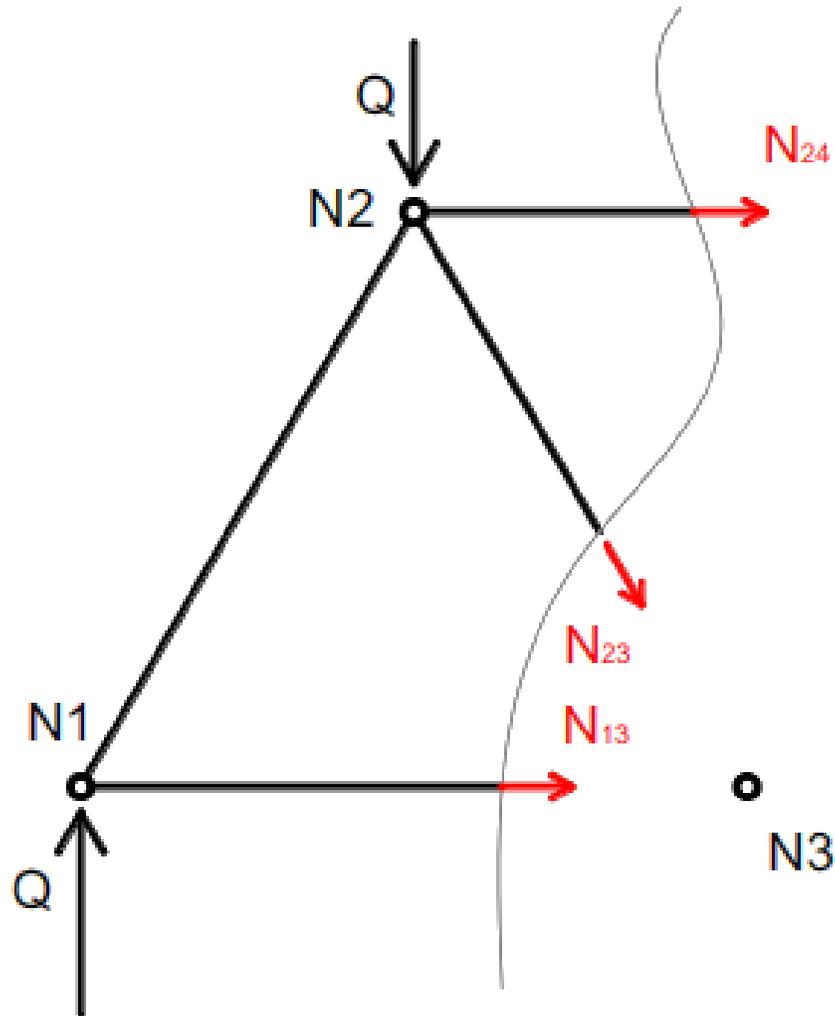
# METODO DI RITTER

- Si impone la condizione di equilibrio alla rotazione di una delle due parti in cui è stata divisa la travatura
- L'equilibrio rispetto al punto d'intersezione degli assi di due delle tre aste interessate dalla sezione di Ritter consente di ottenere lo sforzo normale nella terza asta

# METODO DI RITTER



# METODO DI RITTER



● N4

Equilibrio rotazione

$$N3: \quad N_{24} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l + Q \cdot l - Q \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$N2: \quad N_{13} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l - Q \cdot \frac{l}{2} = 0$$

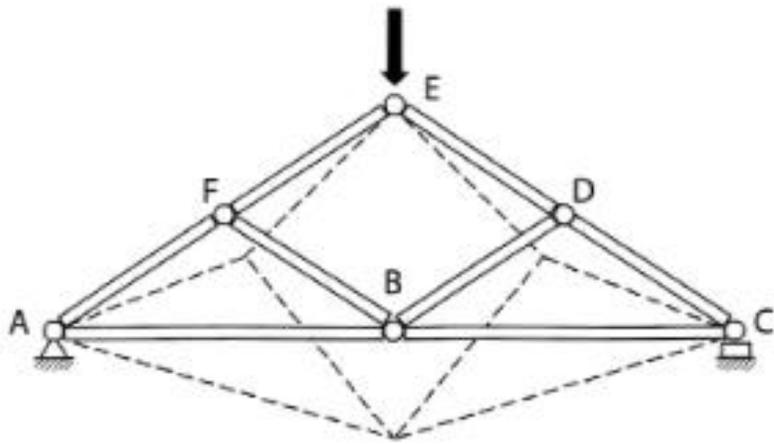
$$y: \quad N_{23} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - Q + Q = 0$$



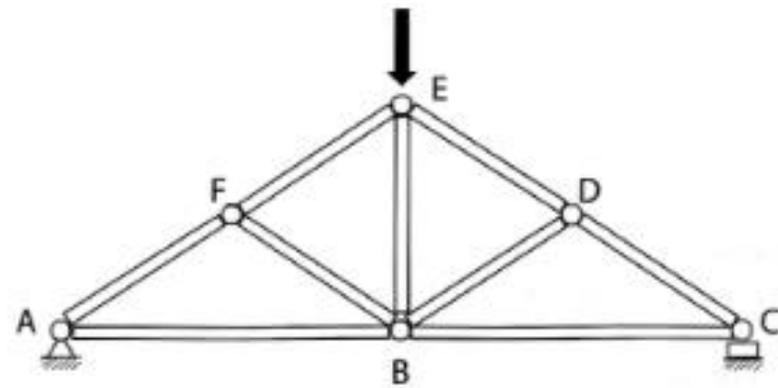
$$N_{24} = -\frac{1}{\sqrt{3}} Q$$

$$N_{13} = \frac{1}{\sqrt{3}} Q$$

$$N_{23} = 0$$

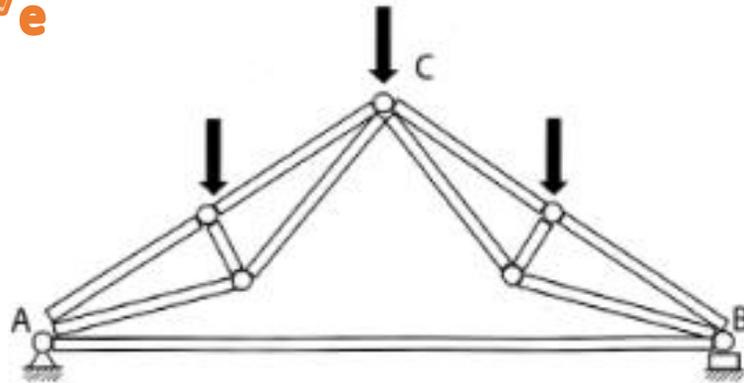


(a) Travatura instabile: l'area centrale non formata da triangoli verrebbe molto distorta sotto l'effetto di un carico applicato alla travatura, al punto da portarla al collasso.

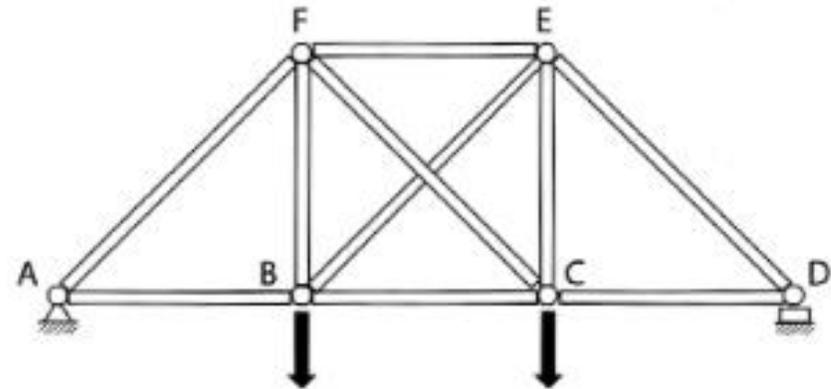


(b) Travatura stabile: la disposizione delle barre è tale da formare solo triangoli aventi un lato in comune.

$$I = 2n - a - V_e$$



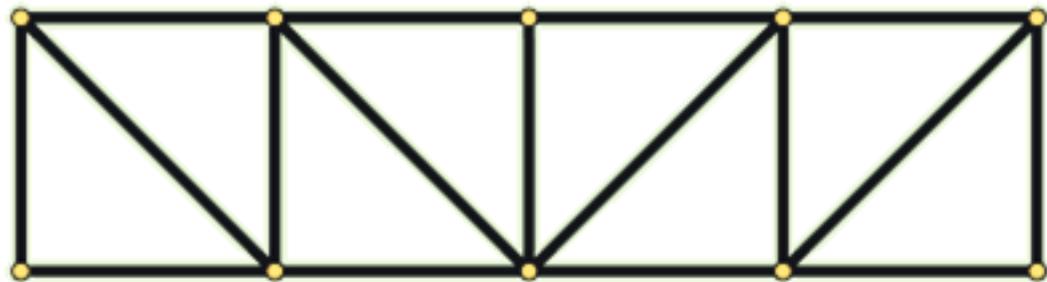
(c) Disposizione delle barre tale da non individuare solo semplici triangoli con un lato in comune, ma ancora in grado di condurre ad una travatura stabile.



(d) Travatura stabile con un numero di barre maggiore di quello minimo necessario per la stabilità.

# Attenzione / controllare:

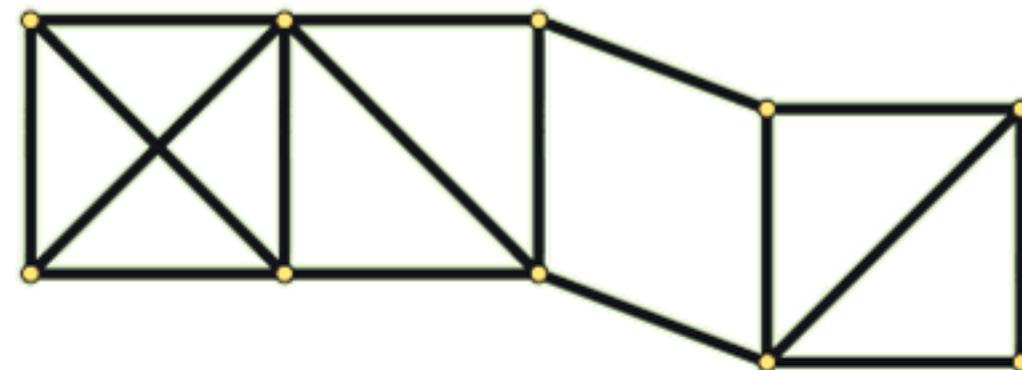
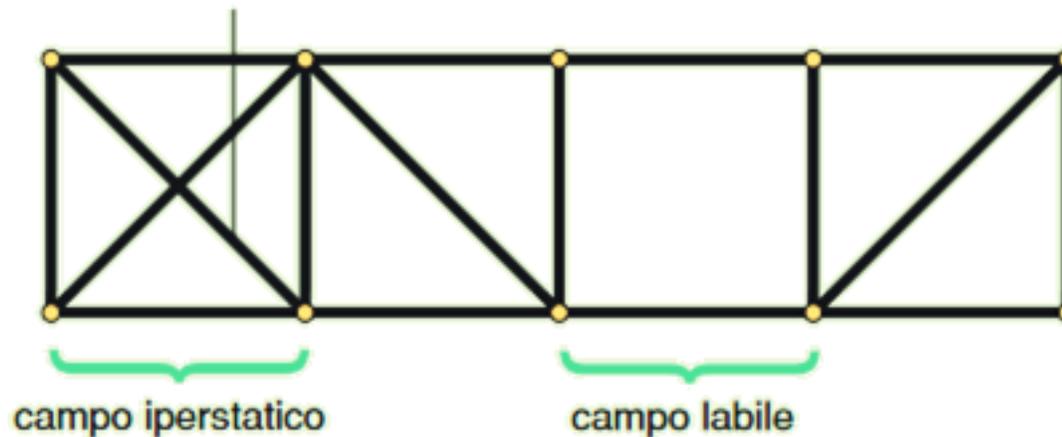
$$n = 10$$
$$a = 2n - 3 = 17$$



CORPO RETICOLARE INDEFORMABILE

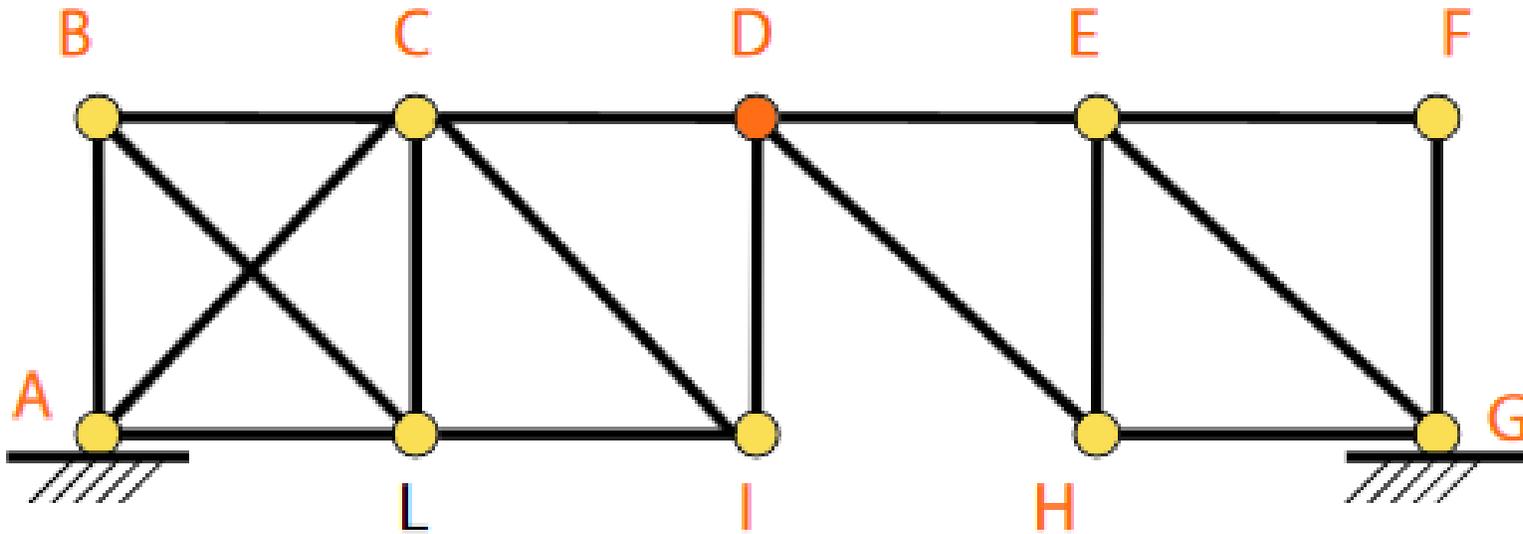
asta  
sovraabbondante

$$n = 10$$
$$a = 2n - 3 = 17$$



CORPO RETICOLARE DEFORMABILE<sup>70</sup>

# Attenzione / controllare:



$$l = 2n - a - V_e$$

$$n = 10$$

$$a = 18$$

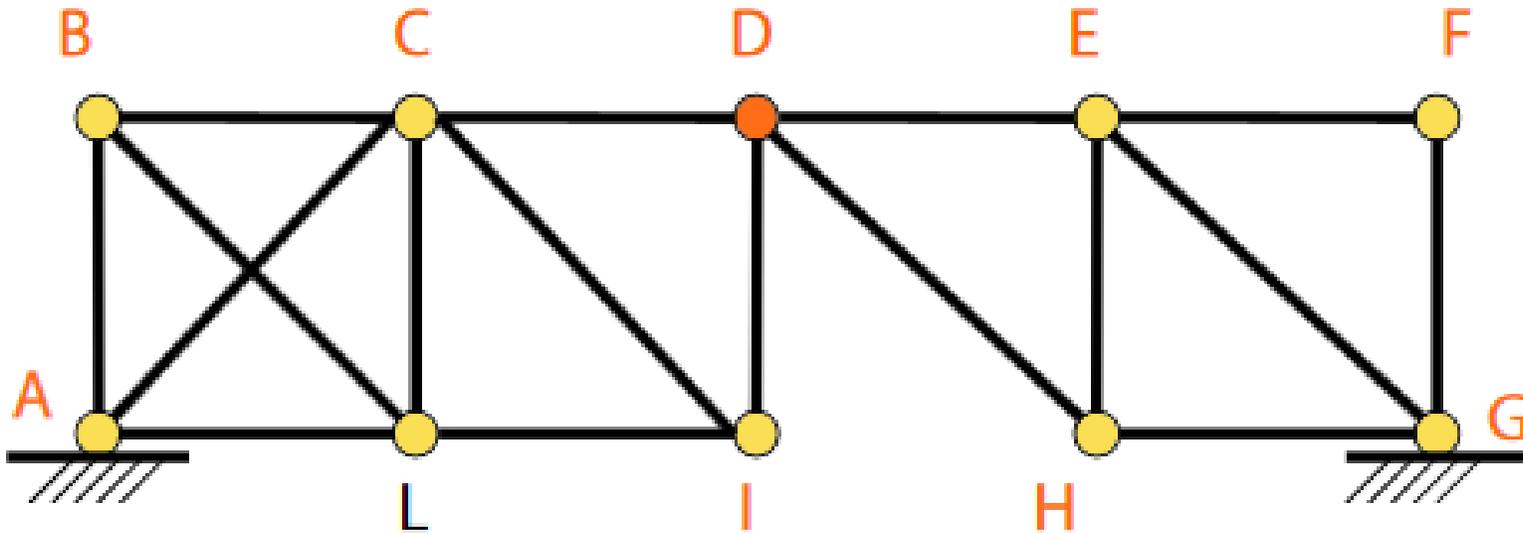
$$V_e = 2$$

La struttura assegnata può immaginarsi composta da due tronchi 1 e 2, rappresentati rispettivamente dai *reticoli indeformabili* **ABDI** e **DFGH**, collegati per mezzo di una cerniera in **D** e aventi i valori:

- $a_1 = 10, n_1 = 6$

- $a_2 = 7, n_2 = 5$

Attenzione / controllare:



$$\begin{aligned}n &= 10 \\ a &= 18 \\ V_e &= 2\end{aligned}$$

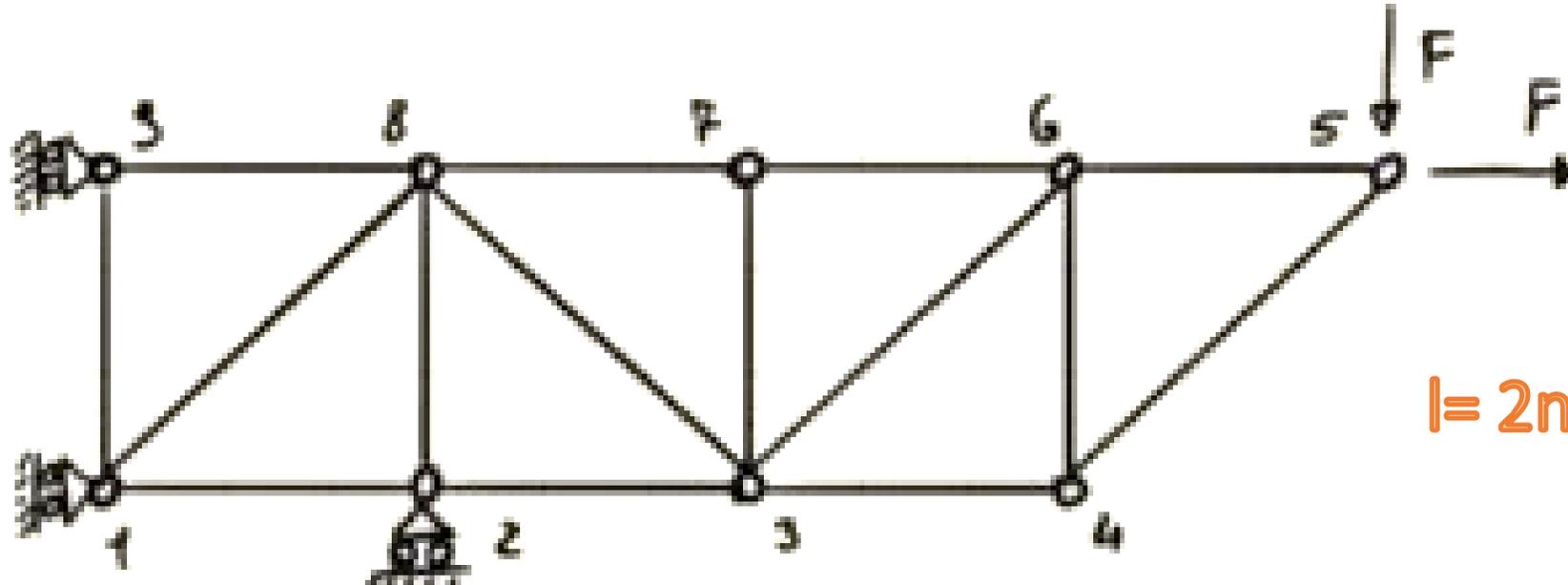
Vogliamo che sia:

$$a > 2n - 3$$

Chiamiamo la quantità  $(a - 2n - 3)$  il «grado di indeterminazione statica interno», a indicare eventuali «aste sovrabbondanti»

⇒ 1 volta iperstatica!

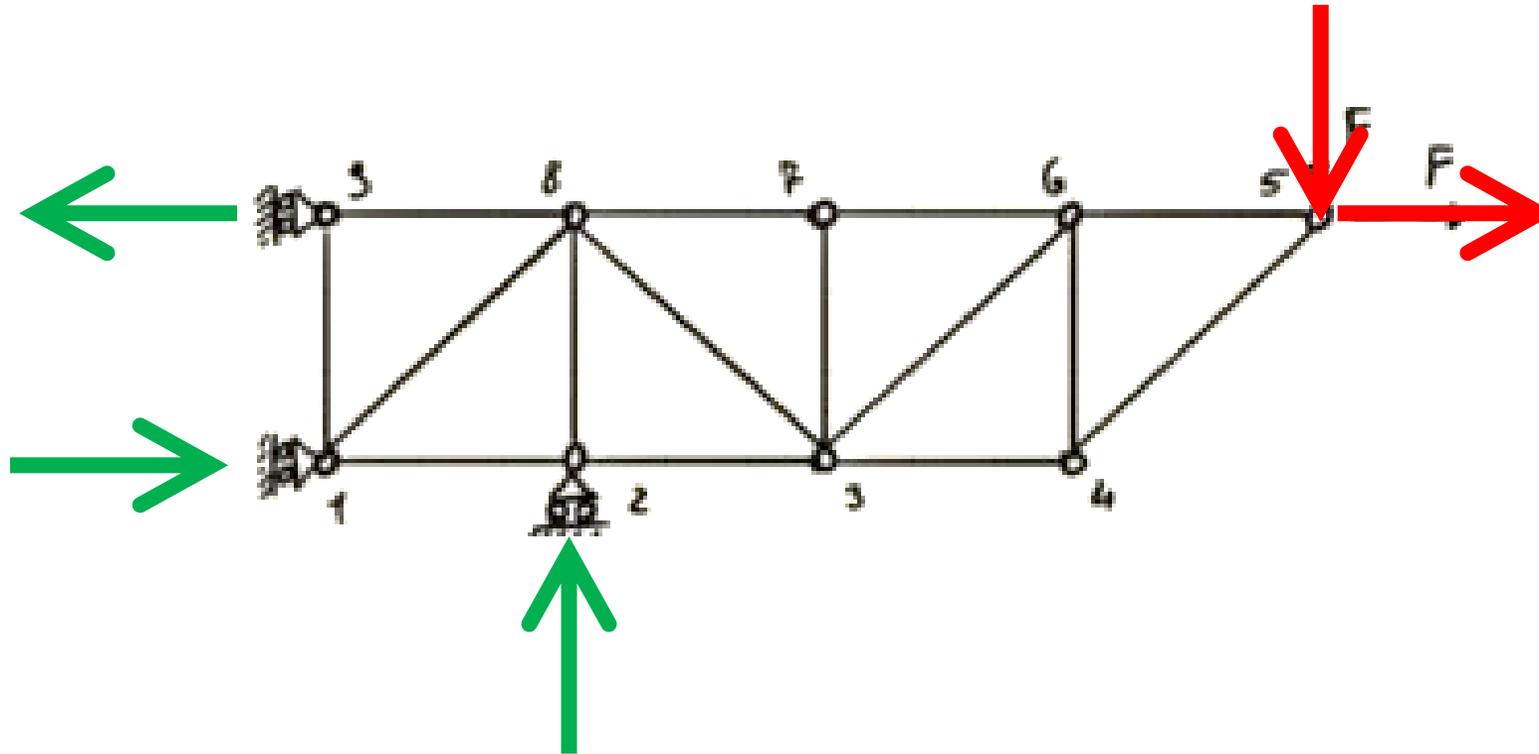
# ESEMPIO



$$l = 2n - a - V_e$$

$$\begin{aligned} n &= 9 \\ a &= 15 \\ V_e &= 3 \end{aligned}$$

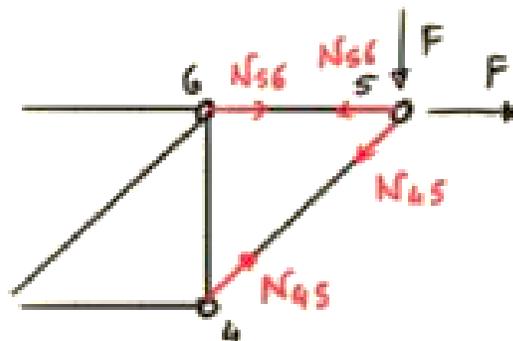
$$l = 2n - a - V_e = 18 - 15 - 3 = 0$$



Si ha:

$$\begin{cases} X_A + X_B + F = 0 \Rightarrow X_A = 4F - F \Rightarrow X_A = 3F \\ \Sigma M(A) := \cancel{Fl} - X_B l - F \cdot 4l - \cancel{Fl} = 0 \Rightarrow X_B = -4F \end{cases}$$

Calcoliamo  $N_{45}$  e  $N_{56}$  con il metodo dei nodi.

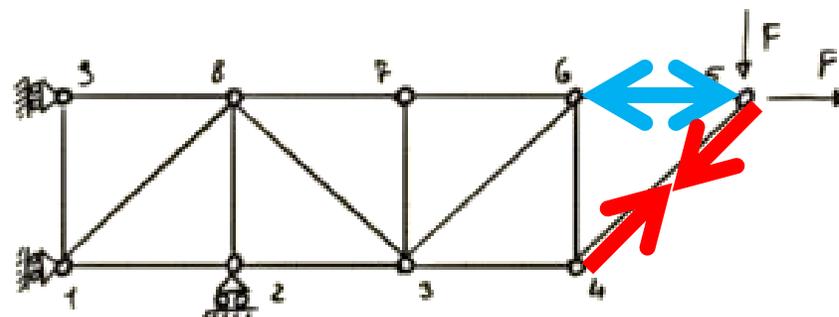


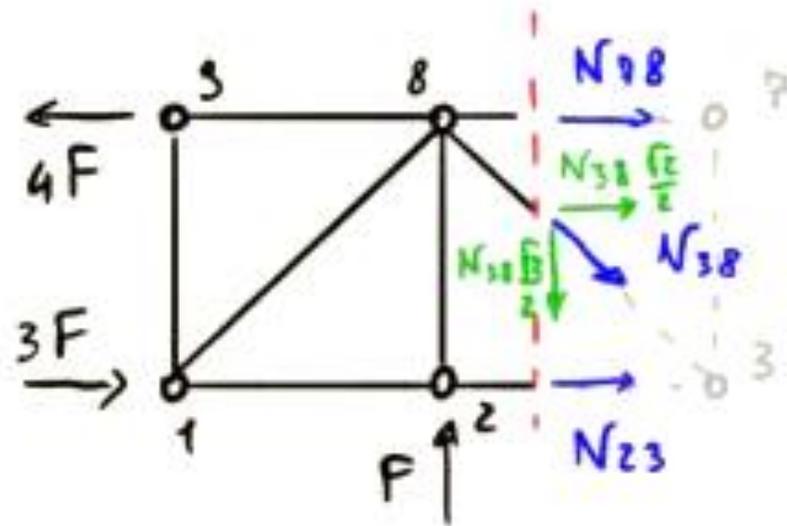
Equilibriamo il nodo 5.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - N_{56} - N_{45} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_{56} = F - (-F) \Rightarrow N_{56} = 2F \\ -F - N_{45} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_{45} \frac{\sqrt{2}}{2} = -F \Rightarrow N_{45} = -\frac{2F}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$N_{45} < 0 \rightarrow$  L'asta 4-5 è un puntone.

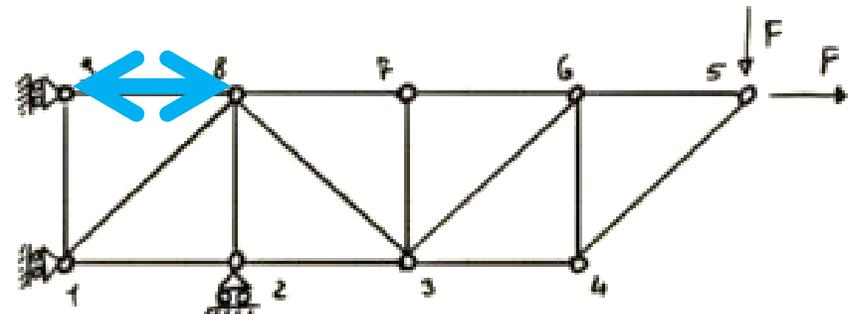
$N_{56} > 0 \rightarrow$  L'asta 5-6 è un tirante.





$$\sum F_y :: - N_{38} \frac{\sqrt{2}}{2} + F = 0 \Rightarrow N_{38} = \frac{2F}{\sqrt{2}}$$

Poiché  $N_{38} > 0$  si ha che l'asta 3-8 è un tirante.

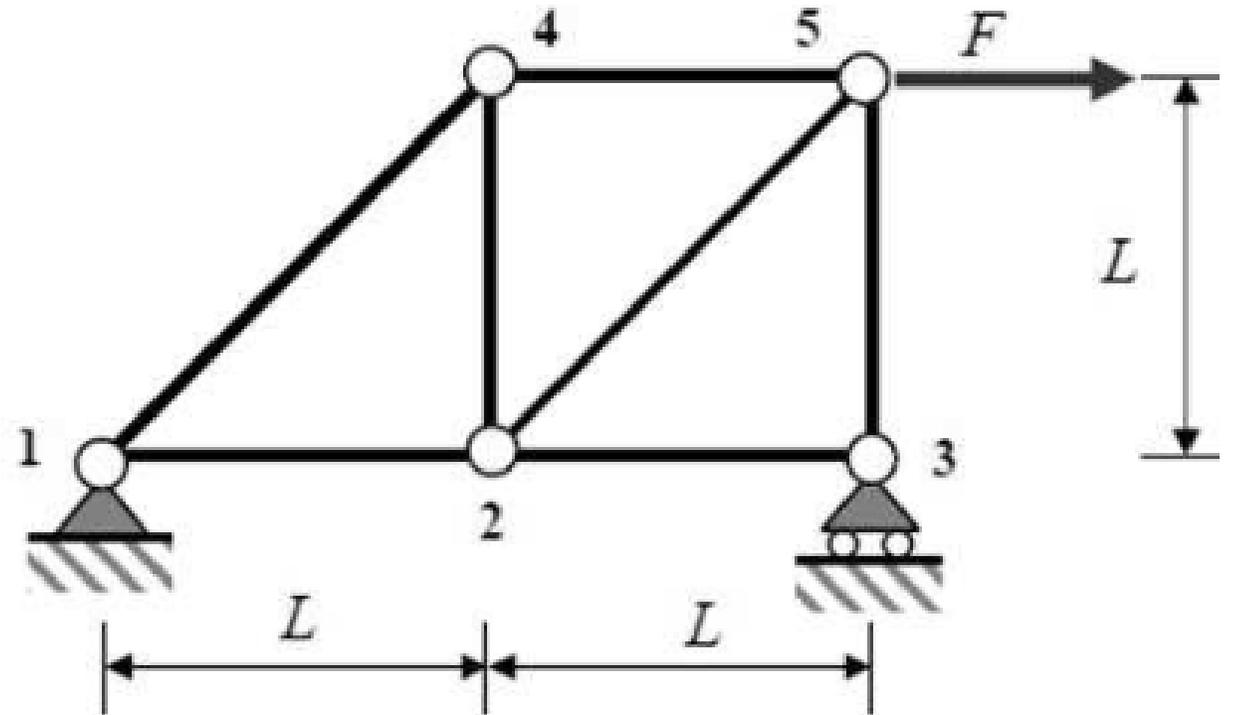


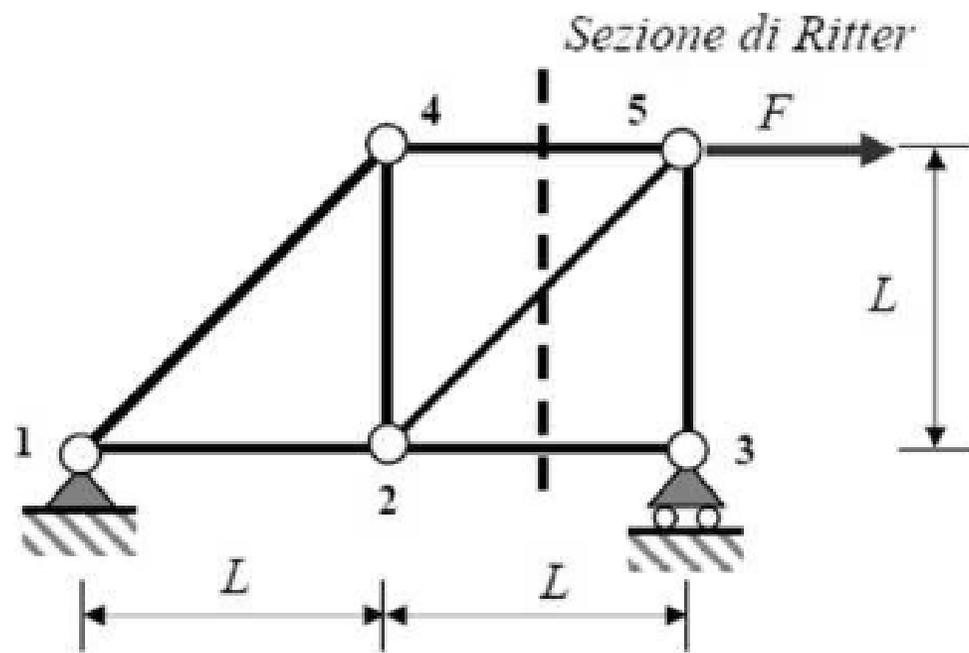
# ESEMPIO

Procediamo innanzitutto al calcolo delle reazioni vincolari esterne:

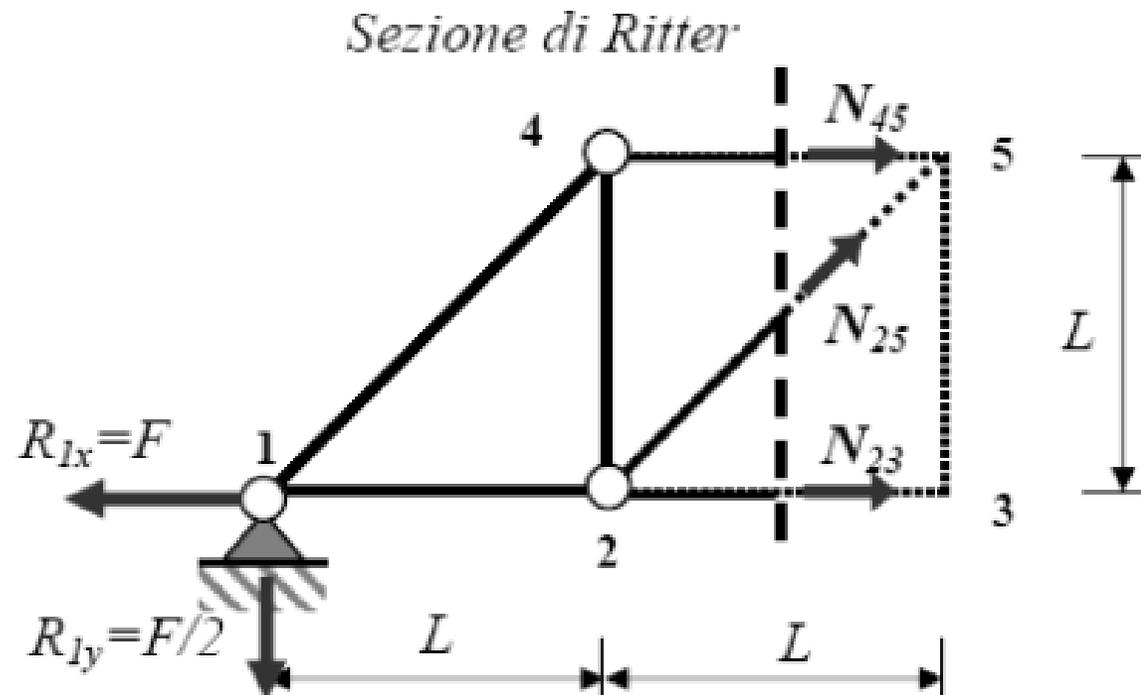
$$R_{1x} = F$$

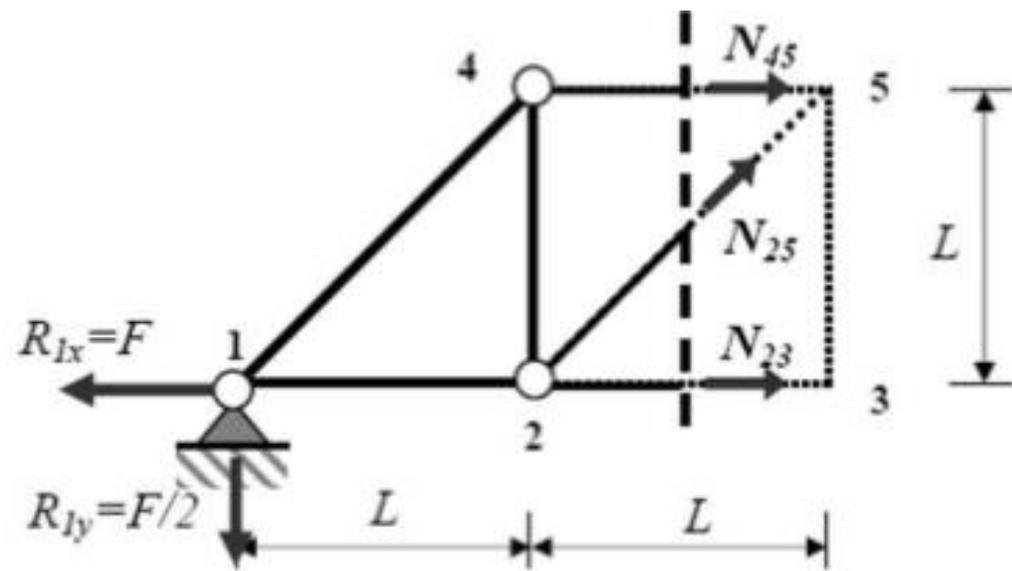
$$R_{1y} = R_{3y} = F/2$$





La sezione taglia 3 aste non concorrenti nello stesso nodo. Lo sforzo in una delle tre aste viene calcolato mediante un'equazione di equilibrio dei momenti intorno al polo in cui convergono le altre 2:





$$\sum M_2 = -N_{45} L + \frac{F}{2} L = 0 \Rightarrow N_{45} = \frac{F}{2}$$

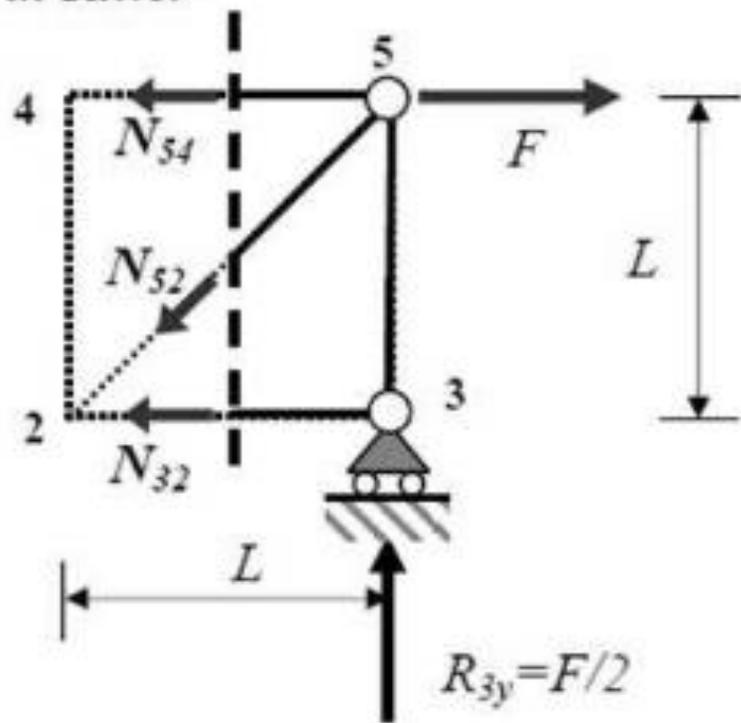
$$\sum M_5 = -N_{23} L + \frac{F}{2} 2L - FL = 0 \Rightarrow N_{23} = 0$$

Per trovare lo sforzo nella terza asta si procede come segue:

$$\sum F_y = \frac{\sqrt{2}}{2} N_{25} - \frac{F}{2} = 0 \Rightarrow N_{25} = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

Lo stesso risultato si ottiene utilizzando la relazione  $\sum F_x = 0$

Sezione di Ritter

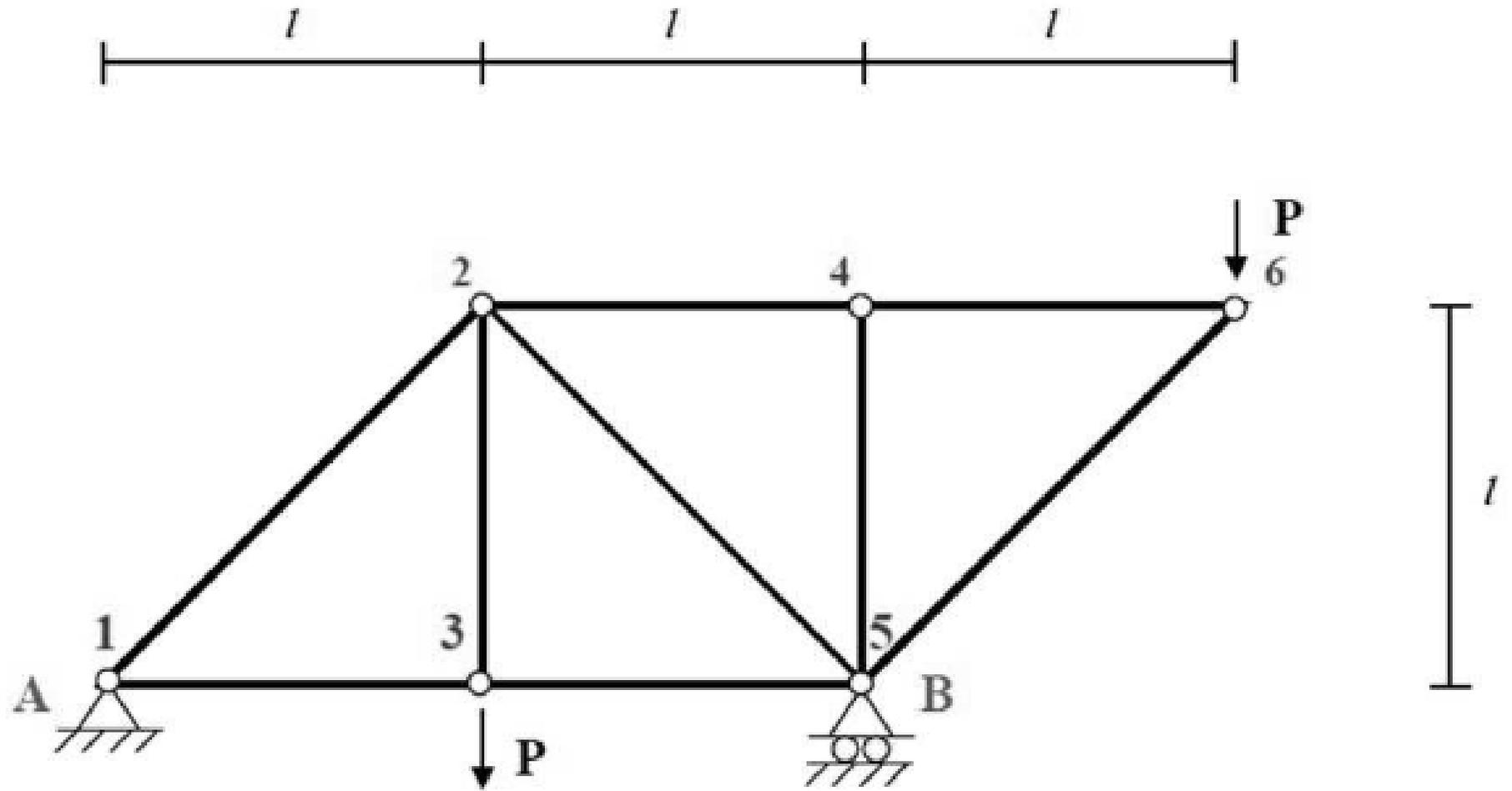


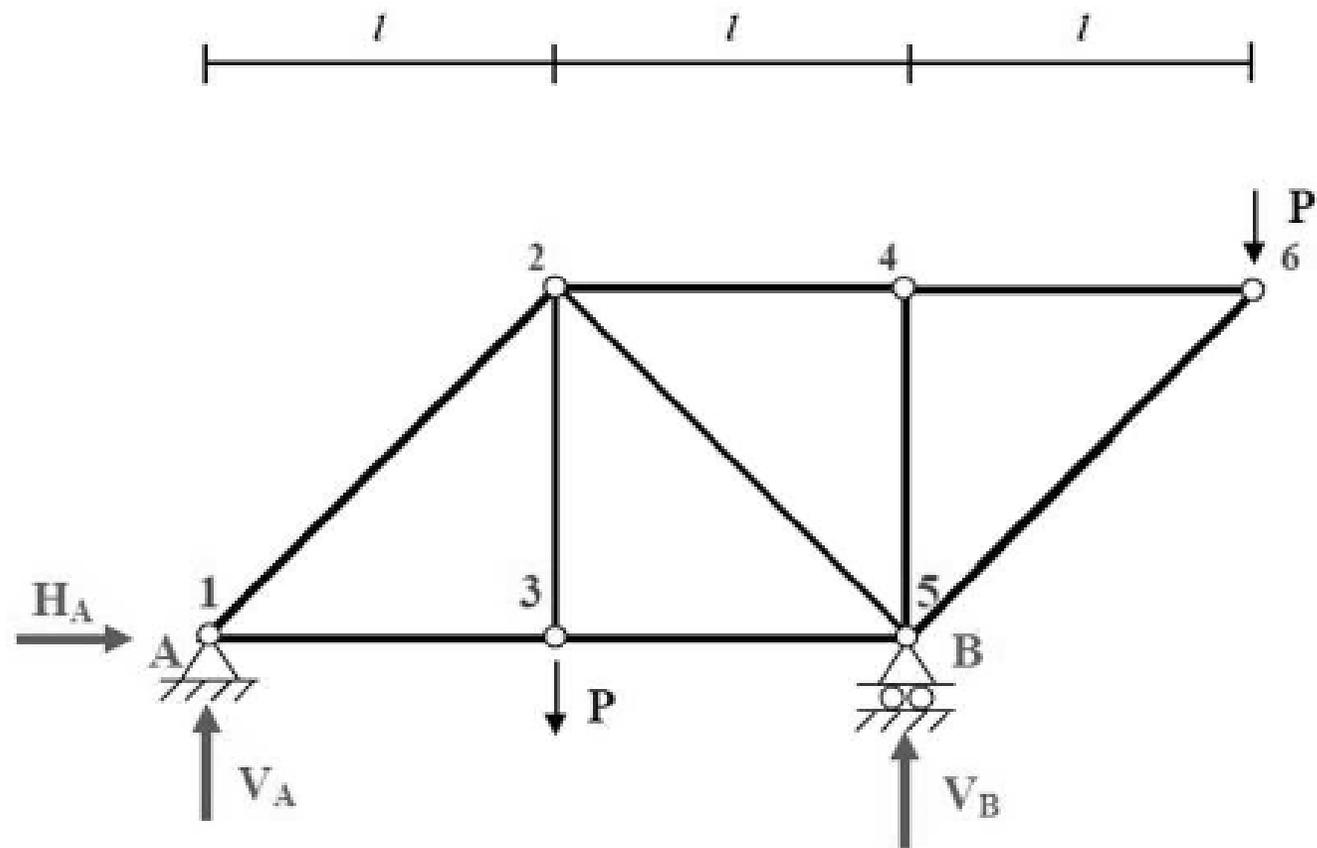
$$\sum M_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{32} = 0$$

$$\sum M_2 = N_{54} L - FL + \frac{F}{2} L = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{54} = \frac{F}{2}$$

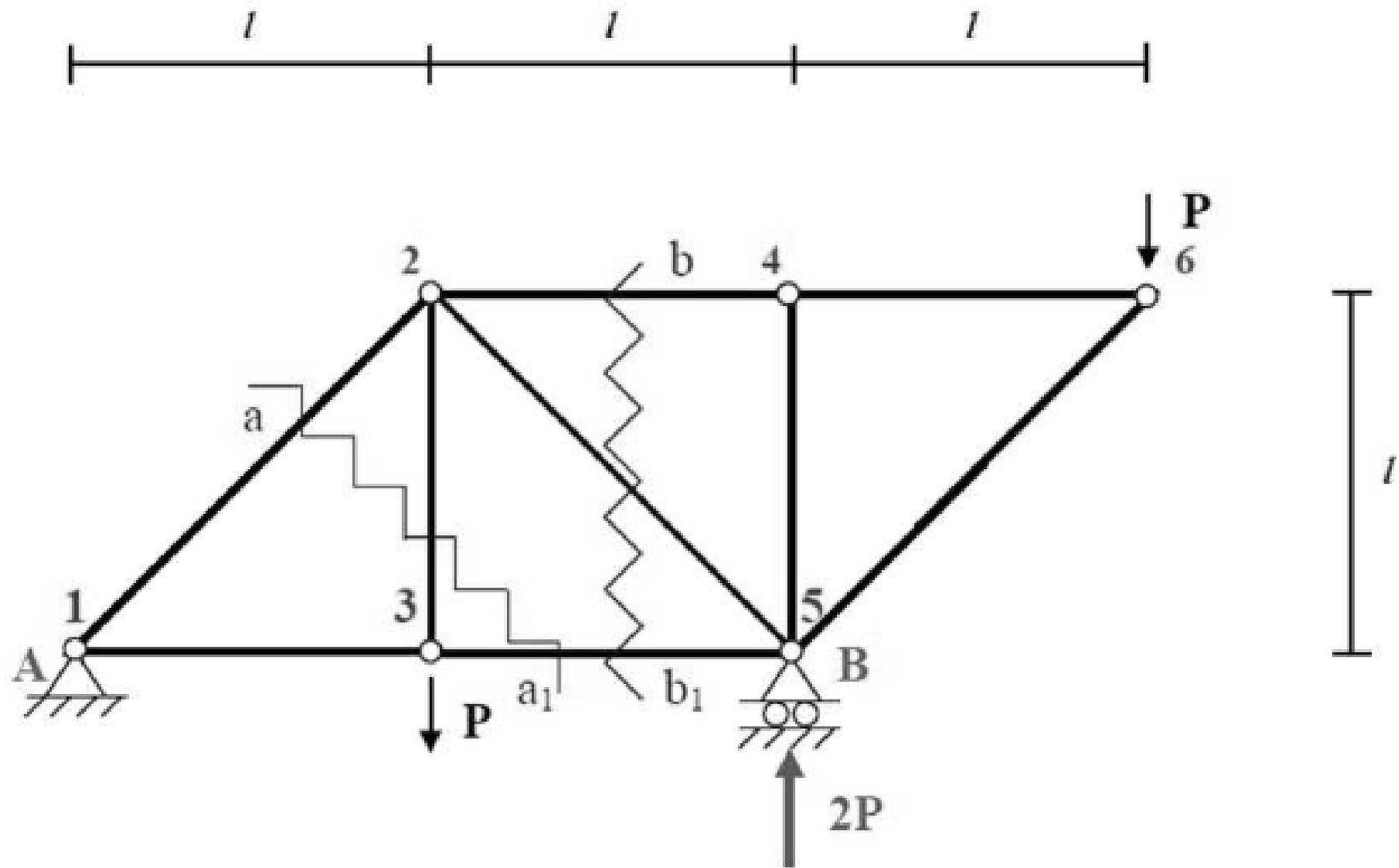
$$\sum F_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} N_{25} + \frac{F}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{25} = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

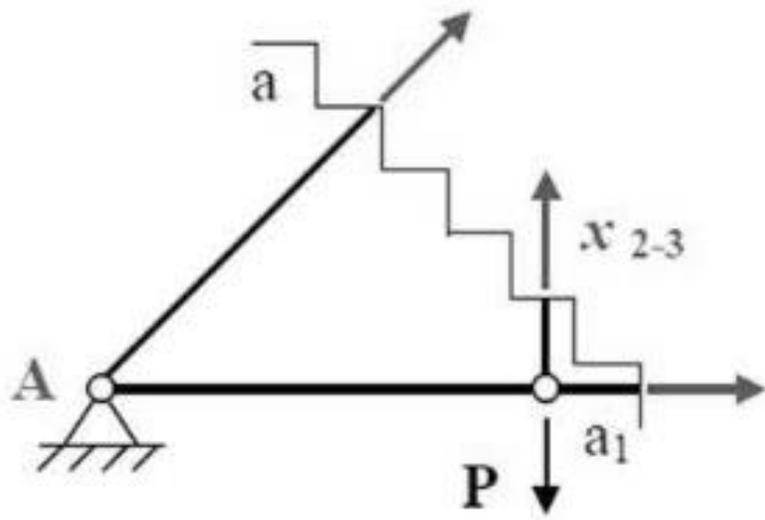
# ESEMPIO





$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_H : H_A = 0 \\ \sum_V : V_A - 2P + V_B = 0 \\ \sum_M (A) : -P \cdot l + V_B \cdot 2l - P \cdot 3l = 0 \end{array} \right.$$

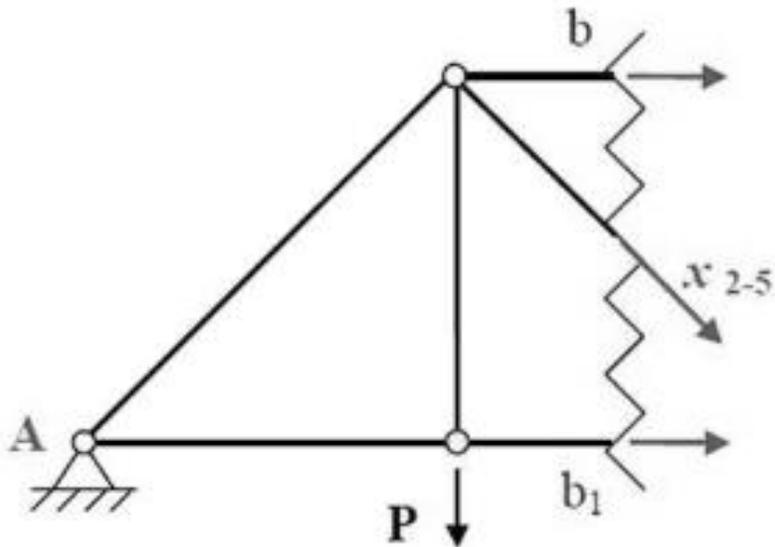




Asta 2-3

$$\sum M(A): -P \cdot l + x_{2-3} \cdot l = 0 \Rightarrow x_{2-3} = P$$

Asta 2-3 =  $P$  ( tirante )



Asta 2-5

$$\sum M(A): -P \cdot l + x_{2-5} \cdot l = 0 \Rightarrow x_{2-5} = P$$

Asta 2-5 =  $\sqrt{2}P$  ( puntone )