Variazione temporale di una proprietà di volume di un fluido

Consideriamo un volume arbitrario di un fluido, che indichiamo con D il quale è delimitato nello spazio da una superficie ∂D. Solitamente D sta per dominio del fluido e ∂D per frontiera del dominio.

Sia f una caratteristica del fluido in tutto il dominio D e definita per ogni istante di tempo t nel quale si considera il fluido.

La funzione f sia continua con derivate continue cioè consideriamo il fluido continuo, un mezzo continuo.

Quindi $f(x, y, z, t) \quad \forall\, x, y, z \in D \text{ e } \forall\, t \in [t_0, t_1]$

Consideriamo l'integrale di f su tutto il dominio D

$$\boxed{F := \int_D f \, d\mathrm{vol}}$$

Data la dipendenza di f da t e dal fatto che, nella visione lagrangiana D può cambiare nel tempo, ha senso chiedersi come sarà F nel tempo, seguendo l'evoluzione di f e D

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = ?}$$

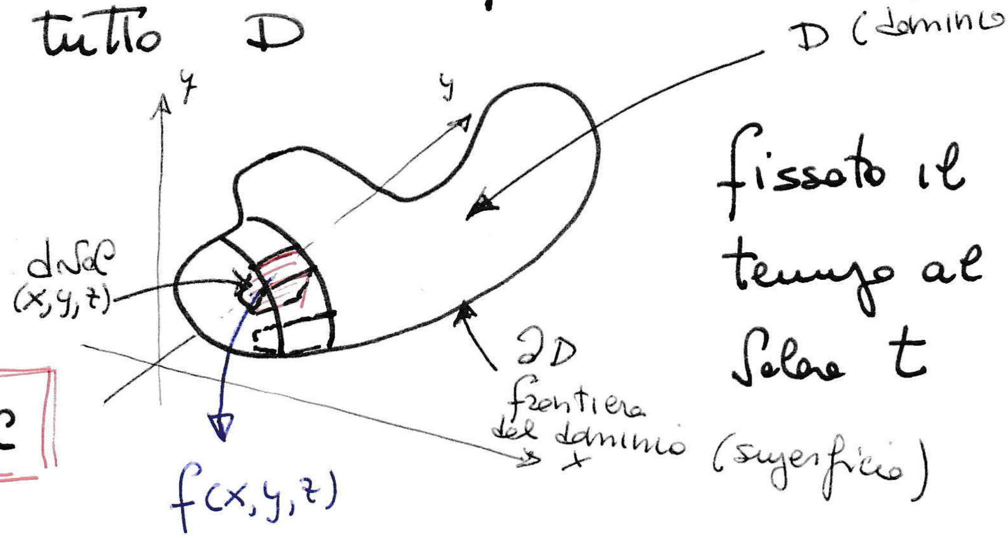
Per definizione di $\frac{dF}{dt}$ si ha:

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t}}$$

Consideriamo ciascun elemento al numeratore

$\Rightarrow$ $$F(t) = \int_D f(x,y,z,t)\, d\,Vol$$

questo esprime la somma di $f(x,y,z,t)$ moltiplicato per $dVol$ su tutto D



fissato il tempo al valore t

$$\boxed{f(x,y,z).dVol}$$

Vediamo ora come esprimere $F(t+\Delta t)$

$\Rightarrow$ $$F(t+\Delta t) = \underbrace{\int_D f(x,y,z,t+\Delta t)\, dVol}_{A} + \underbrace{\int_{\Delta D} f(x,y,z,t+\Delta t)\, dVol}_{B}$$

A: Integrale della funzione con il valore assunto al tempo $t+\Delta t$ sul dominio del tempo t (D)

B: Integrale di f al tempo $t+\Delta t$ sulla parte di volume variata dal tempo t al tempo $t+\Delta t$

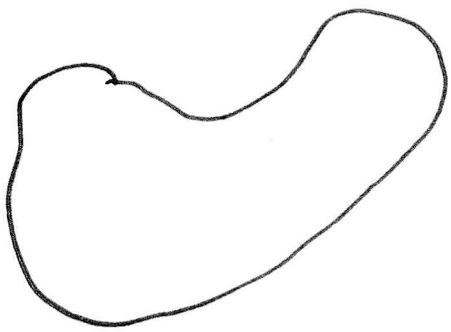
Consideriamo l'addendo A tenendo conto che il dominio D è quello al tempo t e che si osserva la variazione della funzione all'interno del volume D al variare del tempo

$$A = \int_D f(x,y,z,\Delta t)\, dVol \simeq \int_D \left[f(x,y,z,t) + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t\right] dVol$$

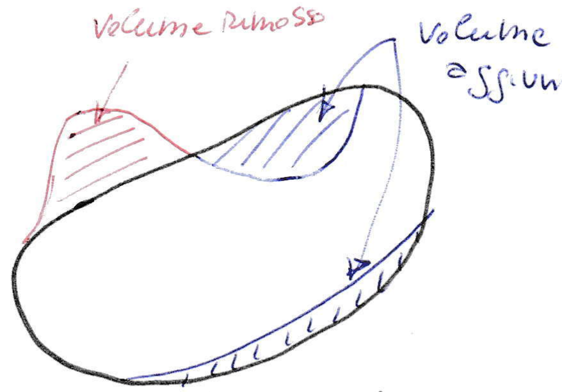
identità in caso $\Delta t \to 0$

Consideriamo l'addendo B, osservando che ΔD è la variazione de volume (dominio) D nel tempo Δt

Esprimiamo ΔD notando che è la superficie che contiene D che si modifica nel tempo, ovvero cambia la frontiera di D

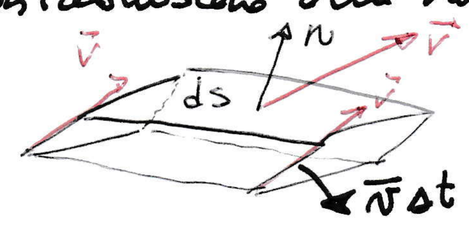


D al tempo t



D al tempo $t+\Delta t$

Le variazioni del volume le possiamo esprimere in funzione della velocità con cui si deforma la frontiera, cioè la velocità del fluido. Queste variazioni di volume contribuiscono alla variazione dell'integrale di f nel dominio



$$\delta Vol = \bar{v}\cdot\bar{n}\, ds\, \Delta t$$

Quindi, il contributo di B all'integrale $F(t+\Delta t)$ è dato dall'integrale sulla superficie che limita il Dominio D, cioè sulla frontiera ∂D

$$B = \int_{\Delta D} f(x,y,z,t+\Delta t)\, dvol = \int_{\partial D} f(x,y,z,t+\Delta t)\, \bar{v}\cdot\bar{w}\, ds \cdot \Delta t$$

Espandendo la funzione in serie nella regione di frontiera si ha:

$$B \cong \int_{\partial D} \left[f(x,y,z,t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \right] \bar{v}\cdot\bar{w}\, ds\, \Delta t =$$

$$= \int_{\partial D} f\, \bar{v}\cdot\bar{w}\, ds\, \Delta t + \underbrace{\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial t}\, \bar{v}\cdot\bar{w}\, ds\, \Delta t^2}_{\text{addendo infinitesimo di ordine superiore a } \Delta t}$$

flusso di f attraverso la superficie conseguente alla variazione della frontiera

Utilizzando il teorema di Gauss è possibile esprimere l'integrale B come integrale di volume

$$B \cong \int_{\partial D} f\, \bar{v}\cdot\bar{w}\, ds\, \Delta t = \int_{D} \bar{\nabla}\cdot[f\bar{v}]\, dvol\, \Delta t$$

Pertanto il limite del rapporto incrementale che definisce $\frac{dF}{dt}$ diventa

$$\boxed{\frac{dF}{dt}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[F(t+\Delta t) - F(t)\right] = \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[A + B - F(t)\right]}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\int_D \left[f + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t\right] dvol + \int_D \bar{\nabla}\cdot[f\bar{v}]\, dvol\, \Delta t \; + \right.$$

$$\left. - \int_D f\, dvol\right]\frac{1}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int_D \left(\cancel{f} + \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot[f\bar{v}]\right]\Delta t - \cancel{f}\right) dvol$$

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\cdot \Delta t \int_D \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot[f\bar{v}]\right) dvol}$$

ovvero

$$\frac{dF}{dt} = \int_D \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot[f\bar{v}]\right) dvol \qquad (*)$$

$$= \int_D \left(\frac{df}{dt} + f\,\bar{\nabla}\cdot\bar{v}\right) dvol \qquad (*)$$

Osservazione; nella forma:

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \int_D \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot [f \bar{v}] \right) dvol}$$

l'interpretazione della variazione tempo di F è la seguente

- $\int_D \frac{\partial f}{\partial t}\, dvol$ — variazione delle proprietà di f nel tempo ~~dt~~ in ciascun punto dello spazio contenuto in D (visione euleriana)

- $\int_D \nabla \cdot [f \bar{v}]\, dvol$ — flusso di f trasportato dal fluido a velocità $\bar{v}$ attraverso il volume D (visione euleriana)

Osservazione: nella forma:

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \int_D \left[\frac{df}{dt} + f(\bar{\nabla} \cdot \bar{v}) \right] dvol}$$

l'interpretazione della variazione nel tempo di F è la seguente

- $\int_D \frac{df}{dt}\, dvol$ — variazione delle proprietà di f seguendo il fluido nel suo moto per ciascun punto contenuto in D (visione lagrangiana)

- $\int_D f(\bar{\nabla} \cdot \bar{v})\, dvol$ — variazione relativa del volume D nell'unità di tempo moltiplicata per la proprietà f del fluido (visione lagrangiana)

Applicazioni notevoli

Conservazione della massa

M = massa di un volume qualsiasi di fluido D

$$M = \int_D \rho \, dvol \quad \longrightarrow \text{ conservazione della massa } \frac{dM}{dt} = 0$$

$$\frac{dM}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\int_D \rho \, dvol = \int_D \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \bar{\nabla}\cdot\bar{v}\right) dvol = 0$$

$$= \int_D \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot(\rho \bar{v})\right] dvol = 0$$

Visto che $\frac{dM}{dt} = 0$ per qualsiasi volume D allora è la funzione integranda identicamente nulla

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \bar{\nabla}\cdot\bar{v} = 0 \; ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot(\rho \bar{v}) = 0$$

Conservazione di una proprietà del fluido esprimibile come prodotto della densità per un campo scalare, per esempio frazione in massa o mixing ratio

$\boxed{f := \eta \cdot \rho}$ $\qquad \rho$ densità

sorgente o pozzo di f

$$F = \int_D f \, dvol \qquad \frac{dF}{dt} = \int_D s \, dvol$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}\int_D f \, dvol = \frac{d}{dt}\int_D (\eta \rho) \, dvol = \int_D s \, dvol$$

$$\int_D \left[\frac{d(\eta\rho)}{dt} + (\eta\rho)(\bar{\nabla}\cdot\bar{v})\right] dvol = \int_D s \, dvol$$

$$\int_D \left[\frac{d(\eta\rho)}{dt} + (\eta\rho)(\bar{\nabla}\cdot\bar{v}) - S \right] dvol = 0$$

Valida per ogni volume D quindi la funzione integranda sarà identicamente nulla.

$$\frac{d(\eta\rho)}{dt} + (\eta\rho)(\bar{\nabla}\cdot\bar{v}) - S = 0$$

$$\rho\frac{d\eta}{dt} + \eta\frac{d\rho}{dt} + (\eta\rho)(\bar{\nabla}\cdot\bar{v}) - S = 0$$

$$\eta\underbrace{\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\bar{\nabla}\cdot\bar{v}\right)}_{=0} + \rho\frac{d\eta}{dt} - S = 0$$

per la conservazione della massa

$$\boxed{\rho\frac{d\eta}{dt} = S}$$

Se S è esprimibile per unità di densità

$S := \rho s$ si ha

$$\boxed{\frac{d\eta}{dt} = s}$$