Moti adiabatici a scala sinottica - conservazione dell'energia interna.

Consideriamo l'equazione per la conservazione dell'energia nella sua forma adiabatica, che riteniamo essere una buona approssimazione per la scala sinottica e planetaria

$$0 = C_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}$$

Si ottiene la seguente relazione tra i differenziali della temperatura e della pressione

$$\boxed{C_p\, dT = \frac{1}{\rho}\, dp}$$

Riscrivendo la densità in funzione della temperatura e della pressione, utilizzando l'equazione di stato

$$C_p\, dT = \frac{RT}{p}\, dp$$

da cui si ottiene una relazione solo tra pressione e temperatura

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{C_p}\frac{dp}{p}$$

$$d\ln(T) = \frac{R}{C_p}\, d\ln(p)$$

Integrando i differenziali tra due estremi, in particolare uno definito da una pressione di riferimento p_0 (1000 hPa) si ottiene la funzione che descrive la variazione della temperatura con la pressione in processi adiabatici

$$\int_{T(p)}^{T(p=1000\,hPa)} d\ln(T) = \frac{R}{C_p}\int_{p}^{p_0=1000\,hPa} d\ln(p)$$

$$\frac{T(p=1000\,hPa)}{T(p)} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p}$$

È consuetudine consolidata attribuire il simbolo θ alla temperatura alla pressione di riferimento $P_0 = 1000\ hPa$.

Da cui

$$\boxed{\theta := T(p)\left(\frac{P_0}{p}\right)^{R/c_p}}$$

detta anche equazione di Poisson

θ viene chiamata temperatura potenziale e rappresenta la temperatura di una massa d'aria che dalla pressione p viene portata alla pressione P_0 per mezzo di compressioni o espansioni adiabatiche

Osservazione

Per un'atmosfera in cui la temperatura diminuisce con l'altezza solo a causa dell'espansione adiabatica si ha

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

Osservazione

Mediamente l'atmosfera terrestre è in condizioni non adiabatiche ma per piccole deviazioni dovute ai processi di avvezione a scala sinottica, oppure per interventi scambi di calore con l'ambiente circostante. Dipende dalla scala spaziale e temporale a cui si presta attenzione

Alla scala sinottica si constata che mediamente nelle regioni spaziali tipiche di tale scala si ha

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \gtrsim 0$$

quindi la temperatura potenziale è una funzione "abbastanza" monotona crescente con l'altezza

Pertanto θ potrebbe essere utilizzata come coordinata verticale al posto della quota z.

Domanda

Quali vantaggi offre l'uso della temperatura potenziale rispetto alla quota?

Risposta

Se assumiamo che, alla scala che stiamo considerando, i volumi d'aria non scambiano energia con l'ambiente che li circonda, allora θ è una proprietà che si conserva durante il moto del volume cioè: $\frac{d\theta}{dt} = 0$

Quindi i volumi d'aria si muovono su superfici in cui θ è costante, pertanto trovare tali superfici significa identificare una caratteristica rilevante del moto.

Le coordinate x, y, θ, t nelle quali si possono scrivere le equazioni per la conservazione della quantità di moto, della massa e dell'energia, sono dette coordinate isoentropiche.

I gradienti orizzontali in coordinate isoentropiche per il campo di pressione.

Si ricordi che sulla superficie isoentropica $Z_\theta(x, y, t)$

da cui per x

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_\theta = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_z + \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_\theta \frac{\partial}{\partial z}$$

su superficie isoentropica θ=cost

Quindi il gradiente della pressione, solo componente x, è:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_z = \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_\theta - \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_\theta \frac{\partial p}{\partial z}$$

Ricordando la relazione tra $\frac{\partial p}{\partial z}$ e la densità per condizioni idrostatiche e utilizzando la definizione di temperatura potenziale (equazione di Poisson)

$$\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_z = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_0\left(\frac{T}{\theta}\right)^{c_p/R}\right)\Big|_\theta + \rho g \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_\theta$$

A secondo membro le derivate sono eseguite su superficie a θ = costante quindi

$$\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_z = p_0 \frac{c_p}{R}\left(\frac{T}{\theta}\right)^{c_p/R-1}\frac{1}{\theta}\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_\theta + \rho g \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_\theta$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_z = \frac{c_p p}{RT}\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_\theta + \rho g \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_\theta$$

Utilizzando l'equazione di stato per sostituire p e ricordando che $g\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_\theta = \frac{\partial (gz)}{\partial x}\Big|_\theta = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_\theta$

Si ottiene la relazione tra la componente x del gradiente di pressione a z costante con una nuova funzione, in particolare il suo gradiente, componente x

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_z = \rho \frac{\partial}{\partial x}\left[c_p T + \Phi\right]\Big|_\theta}$$

La funzione $\boxed{\psi(x,y,\theta,t) := c_p T + \Phi}$ viene chiamata la Montgomery stream function e ha le dimensioni di un'energia per unità di massa

Quindi i termini che coinvolgono i gradienti di pressione, nell'equazione per la conservazione della quantità di moto, componenti orizzontali, nel sistema di coordinate verticale z si possono sostituire con il gradiente della Montgomery stream function

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}_{z_H} p = \vec{\nabla}_{\theta_H} \psi}$$

Quindi le componenti orizzontali dell'equazione per la conservazione della quantità di moto, in forma vettoriale, indicando con $\bar{V}_H = (u, v)$ cioè la componente lungo x e lungo y, sono

$$\boxed{\frac{d\bar{V}_H}{dt} = -f\bar{k}\times\bar{V}_H - \bar{\nabla}_{\theta_H}\psi}$$

Passando a ricavare la componente verticale che deve esprimere l'equilibrio idrostatico, cioè $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ in coordinate z

Si osservi che la variazione della pressione con la temperatura potenziale, cioè la nuova coordinata verticale è:

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial \theta}} = \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\rho g\frac{\partial z}{\partial \theta} = \boxed{-\rho\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}}$$

Si osservi anche che la variazione della Montgomery stream function con la temperatura potenziale assume la forma

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(c_pT+\Phi) = c_p\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

Esprimendo la temperatura in funzione della temperatura potenziale per mezzo dell'equazione di Poisson

$$T = \theta\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/c_p} \quad \text{si ha} \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/c_p} + \frac{1}{c_p\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

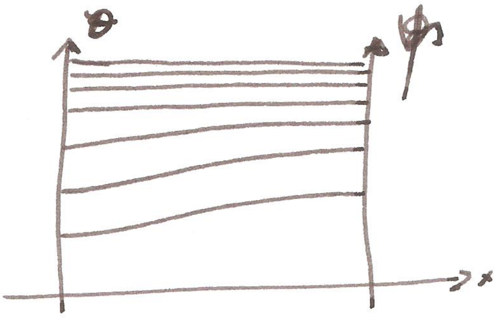
ma $\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\rho\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ da cui

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = c_p\left(\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/c_p} + \frac{1}{c_p\rho}\left(-\rho\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = c_p\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/c_p}$$

Quindi la terza equazione per la conservazione della quantità di moto completa l'insieme delle tre equazioni scalari

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\bar{V}_H}{dt} &= -f\bar{k}\times\bar{V}_H - \bar{\nabla}_{\theta_H}\psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= c_p\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/c_p} \end{aligned}}$$

Si noti che $\boxed{\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} > 0 \quad \forall\ p > 0}$ quindi la Montgomery stream function è una funzione monotona di θ. Inoltre si nota che l'aumento di ψ con θ si riduce quando ci si sposta a quote sempre maggiori, visto che la pressione si riduce e θ aumenta con la quota, nella condizione in cui è stata supposta la relazione tra θ e z.



La soluzione delle equazioni per il modello geostrofico danno dei risultati formalmente identici a quelli ottenuti in coordinate isobariche

$$\boxed{\bar{V}_g = \frac{1}{f}\bar{k} \times \bar{\nabla}_\theta \psi}$$

Il calcolo della divergenza per il vento geostrofico in coordinate isoentropiche produce una funzione della v_g e di f oltre che di $\frac{\partial f}{\partial y}$ che è la stessa ottenuta per il vento geostrofico in coordinate isobariche.

Il vantaggio delle coordinate isoentropiche è quello di definire delle superfici ove il fluido si muove, supposto adiabatica ogni sua interazione con l'ambiente che lo circonda. Inoltre usando la coordinata verticale θ è possibile risolvere con maggior dettaglio le regioni frontali rispetto all'uso delle coordinate z o p.