Calcolo della massa di atmosfera dalla superficie alla quota h.

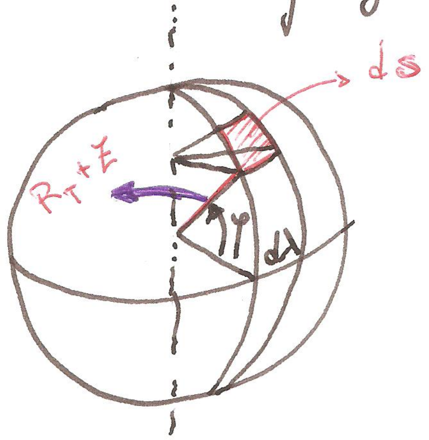
$$dM = ds \cdot dz \cdot \rho$$

ds: elemento superficiale

dz: elemento di quota

$ds \cdot dz$ = elemento di volume

ρ: densità aria; $\rho = \rho(z)$



Si osservi che la superficie ds è:

$$ds = (R_T + z)^2 \cos(\varphi)\, d\lambda\, d\varphi$$

Da cui l'elemento di volume è:

$$ds \cdot dz = (R_T + z)^2 \cos(\varphi)\, d\lambda\, d\varphi\, dz$$

Integrando su tutta la superficie sferica e sino alla quota h, la massa elementare dM si ha

$$\int_{M(z=0)}^{M(z=h)} dM = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^h dz\, (R_T + z)^2 \cos(\varphi)\, \rho(z)$$

Visto che $R_T >> z$ con $z \in [0, h]$ si può assumere $(R_T + z)^2 \simeq R_T^2$

Quindi ricordando che, per definizione, $M(z=0) = 0$

$$M(h) \cong R_T^2 4\pi \int_0^h \rho(z)\, dz \qquad \text{(con ottima approssimazione)}$$

Si tenga presente l'equilibrio idrostatico che permette di esprimere la densità in funzione della pressione $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ da cui $M(h)$ diventa

$$M(h) = 4\pi R_T^2 \int_{p(z=0)}^{p(z=h)} -\frac{1}{g}\,dp = \frac{4\pi R_T^2}{g} \int_{p(z=h)}^{p(z=0)} dp$$

da cui la massa della atmosfera terrestre contenuta entro una quota h dalla superficie terrestre è:

$$\boxed{M(h) = \frac{4\pi R_T^2}{g}\,[\underbrace{p(z=0)}_{\text{pressione alla superficie}} - \underbrace{p(z=h)}_{\text{pressione alla quota } h}]}$$

La massa complessiva dell'atmosfera si ottiene per $M(h_{10\,hPa})$ — $h_{10\,hPa}$ altezza geopotenziale a cui si trova la pressione di 10 hPa

$$M_{TOT} \simeq M(h_{10\,hPa})$$

$$= \frac{4\pi R_T^2}{g}\,[1000\,hPa - 10\,hPa] \simeq \frac{4\pi R_T^2}{g}\,1000\,hPa$$

La massa dell'atmosfera contenuta dal suolo fino alla quota corrispondente a 500 hPa è

$$M(h_{500\,hPa}) = \frac{4\pi R_T^2}{g}\,[1000\,hPa - 500\,hPa]$$

Quindi il rapporto $M(h_{500\,hPa})/M_{TOT}$ sarà

$$\frac{4\pi R_T^2}{g}\,500\,hPa \cdot \frac{g}{4\pi R_T^2}\,\frac{1}{1000\,hPa} = \frac{1}{2}$$

Quindi la superficie isobarica 500 hPa separa la massa dell'atmosfera in due parti uguali