Approssimazione di Boussinesq per le equazioni dello strato limite atmosferico.

Osservazione

Nello strato limite atmosferico le variazioni di densità danno un contributo marginale (trascurabile) alla conservazione della massa, la quale è determinata dal termine di divergenza

$$\underbrace{\left|\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right|}\ll\underbrace{\left|\bar{\nabla}\cdot\bar{V}\right|}\qquad \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\bar{\nabla}\cdot\bar{V}=0$$

quindi per garantire la conservazione della massa, la densità può considerarsi costante ed uniforme

Osservazione

La densità riveste un ruolo importante nelle equazioni scalari per la conservazione della quantità di moto solo se si considera la deviazione dall'equilibrio idrostatico.

Infatti dall'equazione per la componente verticale dell'equazione per la conservazione della quantità di moto

$$\frac{dw}{dt}=2\Omega\cos\varphi\, u-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g+\nu\nabla^2 w$$

l'analisi dei contributi di ciascun addendo mette in evidenza che, l'accelerazione verticale è data delle deviazioni dall'equilibrio idrostatico.

Valutiamo gli ordini di grandezza di ciascun addendo.

- $2\Omega\cos\varphi\, w \simeq 10^{-4} s^{-1} \cdot 10\, m s^{-1} \simeq 10^{-3}\, m s^{-2}$
- $\nu \nabla^2 w \simeq \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$; $\nu \simeq 10^{-5} m^2 s^{-1}$

Consideriamo variazioni di w in orizzontale su scale dei movimenti convettivi $\Delta w \sim 1 m s^{-1}$ $\Delta x = \Delta y \simeq 10^2 m$ ed in ~~orizzontale~~ verticale $\Delta w \sim 1 m s^{-1}$ $\Delta z \simeq 10^2 m - 10^3 m$ conseguente ad una maggior estensione in altezza delle celle convettive. Ne consegue che

$$\nu \nabla^2 w \simeq 10^{-5} m^2 s^{-1} \left(10^{-4} + 10^{-4} + 10^{-4} (10^{-6})\right) m s^{-1} m^{-2}$$

$$\simeq 10^{-9}\, m s^{-2}$$

- I due addendi $\boxed{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g}$ conviene analizzarli

ricordando che nel caso di equilibrio idrostatico si ha

$$\boxed{-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} - g = 0}$$

dove si è indicato con ρ_0 la densità che si avrebbe in caso di equilibrio idrostatico.

Pertanto conviene analizzare la deviazione della densità rispetto ad un valore di riferimento ad esempio ρ_0

Consideriamo l'equazione di stato e valutiamo la variazione della pressione nello strato limite atmosferico

$$p = \rho R T$$

$$\Delta p = \Delta\rho R T + \rho R \Delta T$$

Passando alle variazioni relative

$$\boxed{\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta T}{T}}$$

è possibile valutare l'ordine di grandezza delle variazioni relative di densità nello strato limite atmosferico utilizzando le informazioni fenomenologiche sulla pressione e la temperatura.

Valutiamo l'ordine di grandezza di una variazione relativa della pressione in una decina di metri lungo la verticale, essendo le variazioni in orizzontale sicuramente più piccole di quelle verticali

Per uno strato limite confinato entro i 1500 m circa, sappiamo che la pressione al suolo è di circa 10^3 hPa, mentre al top dello strato limite è ~ 850 hPa. Quindi si ha un gradiente medio di circa

$$\boxed{\Delta P/\Delta z \sim \frac{150\ \text{hPa}}{1500\ \text{m}} \sim 10\ \text{Pa}\ \text{m}^{-1}}$$

Quindi in una decina di metri, nello strato limite

$$\boxed{\frac{\Delta p}{p} \sim \frac{10\ \text{Pa}\ \text{m}^{-1} \cdot 10\ \text{m}}{10^5\ \text{Pa}} \sim 10^{-3}}$$

La variazione relativa della temperatura si basa sull'osservazione che, nello strato limite, siamo quasi sempre in condizioni superadiabatiche (giorno) o di inversione (notte) quindi si hanno variazioni di magnitudine $\boxed{\Delta T \sim 1^{\circ}K}$ in dieci metri o anche maggiori

Conseguentemente per una decina di metri nello strato limite atmosferico

$$\boxed{\frac{\Delta T}{T} \sim \frac{1^{\circ}K}{300^{\circ}K} \sim 3 \cdot 10^{-3}}$$

Questi due risultati portano a concludere che

$$\boxed{\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim 3 \cdot 10^{-3}}$$

nello strato limite atmosferico considerando variazioni lungo la verticale per una decina di metri

Ora è possibile valutare il ruolo di tali variazioni di densità nel bilancio

$$\boxed{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g}$$

Consideriamo ρ_0 come pressione di riferimento per una decina di metri in altezza. Tale valore soddisfa l'equilibrio idrostatico, quindi permette di esprimere il gradiente di pressione in funzione dell'accelerazione di gravità

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g}$$

che può essere sostituito nel primo dei due addendi

$$+\frac{1}{\rho}\rho_0 g - g = -g\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

esprimendo $\boxed{\rho \text{ come } \rho_0 + \Delta\rho}$ cioè sviluppando la deviazione della densità nella decina di metri considerati, come possibile ordine di grandezza delle variazioni della densità (principalmente dovute alle variazioni di temperatura) si può riscrivere

$$\boxed{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \simeq} -g\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_0+\Delta\rho}\right) \simeq \boxed{-g\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\left(1-\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)}$$

Considerando solo la variazione $\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$ con contributo al primo ordine, in quanto gli ordini seguenti sono decisamente trascurabili si ha

$$\boxed{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \simeq -g\frac{\Delta\rho}{\rho_0}}$$

Sostituendo il valore di $\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \sim 3\cdot10^{-3}$ per la decina di metri nello strato limite atmosferico si ha che l'accelerazione dovuta a queste differenze di densità è stimabile in $\boxed{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \simeq -10\,m\,s^{-2}\,3\cdot10^{-3} \sim 3\cdot10^{-2}\,m\,s^{-2}}$

Assumendo che tali differenze possano persistere per 1 minuto (60 s) si ottengono variazioni di velocità pari a $60\,s\cdot3\cdot10^{-2}\,m\,s^{-2} \simeq 1.8\,m\,s^{-1}$

Quindi le variazioni di densità non sono trascurabili per gli effetti che determinano sulla velocità w

Concludendo (approssimazione di Boussinesq) le equazioni ~~per la conservazione~~ per la conservazione della massa e della quantità di moto, possono considerare la densità del fluido (atmosferico) costante ed uniforme, salvo quando la densità contribuisce alla descrizione della quantità di moto lungo la verticale, associata all'accelerazione di gravità

Conservazione massa

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Conservazione quantità di moto

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \varepsilon_{ijk} f_j u_k - \frac{1}{\boxed{\rho_0}} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3} \boxed{\frac{\Delta \rho}{\rho_0}} g + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

dove ρ_0 è la densità di riferimento che soddisfa l'equilibrio idrostatico e $\Delta\rho$ è la perturbazione della densità rispetto alle condizioni di equilibrio idrostatico