Equazioni per la conservazione della quantità di moto per lo strato limite atmosferico in notazione con la convenzione della somma sugli indici ripetuti

La conservazione della quantità di moto in forma vettoriale, per lo strato limite atmosferico

$$\boxed{\underbrace{\frac{d\bar{V}}{dt}}_{\text{accelerazione lagrangiana}} = \underbrace{-2\vec{\Omega}\times\bar{V}}_{\text{accelerazione di Coriolis}} \underbrace{-\frac{1}{\rho}\bar{\nabla}p}_{\text{gradiente di pressione}} + \underbrace{\bar{g}}_{\text{accelerazione di gravità + centrifuga rotaz. terrestre}} + \underbrace{\nu\nabla^2\vec{V}}_{\text{stress superficiali}}}$$

$\bar{V} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}$ con $\bar{k}$ versore verticale tale che $\vec{g} = -g\vec{k}$

Notazione con indici

$$\boxed{\bar{V} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3}$$

$$\begin{cases} u_1 = u \; ; \; \bar{e}_1 = \bar{i} \\ u_2 = v \; ; \; \bar{e}_2 = \bar{j} \\ u_3 = w \; ; \; \bar{e}_3 = \bar{k} \end{cases}$$

L'accelerazione lagrangiana si riscrive come segue

$$\boxed{\frac{d\bar{V}}{dt}} = \frac{\partial\bar{V}}{\partial t} + (\bar{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \boxed{\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \forall\, i,j \in \{1,2,3\}}$$

$$u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_1\frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_i}{\partial x_3}$$

indici ripetuti
quindi sommare tutti gli addendi $\forall\, j \in \{1,2,3\}$

L'accelerazione di Coriolis richiede di esprimere un prodotto vettoriale con la notazione a indici ripetuti

$$\boxed{-2\bar{\Omega}\times\bar{V}} = -2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ u & v & w \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1(-2\Omega_2 u_3 + 2\Omega_3 u_2) + \vec{e}_2(-2\Omega_3 u_1 + 2\Omega_1 u_3) + \vec{e}_3(-2\Omega_1 u_2 + 2\Omega_2 u_1)$$

Utilizzando la funzione (Pseudo tensore) a 3 indici

$$\boxed{\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } i,j,k \text{ sono una permutazione ciclica di } 1,2,3 \\ -1 & \text{se } i,j,k \text{ sono una permutazione ciclica di } 2,1,3 \\ 0 & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases}}$$

ovvero

a) $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$

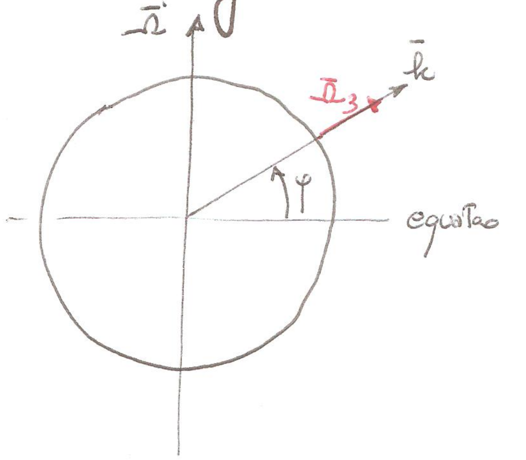
b) $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$

c) tutti gli altri sono zero

Si può esprimere il prodotto vettoriale $\bar{a}\times\bar{b}$ come $(\bar{a}\times\bar{b})_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$ da cui

$$\boxed{-2\bar{\Omega}\times\bar{V} = -2\,\varepsilon_{ijk}\,\Omega_j u_k}$$

Ricordando che il versore $\bar{k} = \vec{e}_3$ è sempre diretto lungo la verticale ed opposto alla gravità



$\boxed{\Omega_3 = \Omega \sin\varphi}$ con φ latitudine

Ω_1 e Ω_2 dipendono dalla scelta degli assi x ed y che sono ortogonali a $\bar{k}$

Spesso è possibile definire il vettore $\boxed{\bar{f} = (f_1, f_2, f_3)}$ dove f_1 e f_2 sono il valore assunto da $2\Omega_1$ e $2\Omega_2$ rispettivamente, mentre $\boxed{f_3 = 2\Omega \sin\varphi}$

Nel caso dell'orientazione degli assi x e y secondo la convenzione delle scienze atmosferiche e oceaniche ovvero x tangente ai paralleli e orientato verso est e y tangente ai meridiani e orientato verso nord, si ha:

$$f_1 = 0 \; ; \; f_2 = 2\Omega \cos\varphi \; ; \; f_3 = 2\Omega \sin\varphi$$

Quindi si usa anche la notazione

$$\boxed{-2\bar{\Omega} \times \bar{v} = -\varepsilon_{ijk} f_j u_k}$$

Il gradiente di pressione nella notazione ad indici assume la forma:

$$\boxed{-\frac{1}{\rho}\nabla p = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad i \in \{1,2,3\}}$$

L'accelerazione di gravità nella notazione ad indici assume la forma:

fissato a 3 cioè $\bar{e}_3 = \bar{k}$

$$\boxed{\bar{g} = -\delta_{i3}\, g}$$

dove g è il modulo del vettore accelerazione di gravità mentre la funzione δ_{ij} è definita come segue.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \quad i,j \in \{1,2,3\} \\ 0 & \text{se } i \neq j \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases}$$

Il termine degli stress è dato, per ciascuna componente della velocità dal laplaciano della velocità moltiplicato per la viscosità. Quindi nella notazione ad indici ripetuti

$$\boxed{\nu \nabla^2 \vec{V} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \qquad i,j \in \{1,2,3\}}$$

$$\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \nu \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \right]$$

indici ripetuti

quindi sommare tutti gli addendi $\forall j \in \{1,2,3\}$

Equazione per la conservazione della quantità di moto, per lo strato limite atmosferico con la convenzione della somma sugli indici ripetuti

$$\boxed{\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\varepsilon_{ijk} 2\Omega_j u_k - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}}$$

Variazione locale — avvezione (trasporto) — Coriolis — gradiente di pressione — gravità — sforzi

Equazione per la conservazione della massa in convenzione somma su indici ripetuti

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \bar{\nabla}\cdot\bar{V} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

indici ripetuti quindi addendi da sommare. ATTENZIONE sono due somme distinte

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

Nel caso di ipotesi di fluido incomprimibile

$$\boxed{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0}$$