

Cos'è un sistema logico-formale ?

Eugenio G. Omodeo

(01/03/2022 —)



- delimitazione della materia: logica
 - ▷ formale
 - ▷ simbolica
 - ▷ matematica
- aspettative computazionali
- distinzione fra calcolo e teorie
- ● Appendice: Cos'è una logica



Il nostro soggetto è la logica —o, come possiamo dire piú per esteso, per distinguerla da certi argomenti e dottrine che (disgraziatamente) sono stati chiamati con lo stesso nome, è la logica formale.



(Aristotele, 384–322 a.C.)

(Alonzo Church, 1956)



Il nostro soggetto è la logica —o, come possiamo dire piú per esteso, per distinguerla da certi argomenti e dottrine che (disgraziatamente) sono stati chiamati con lo stesso nome, è la logica formale.

Tradizionalmente, la logica (formale) si occupa dell'analisi di enunciati o di proposizioni e di dimostrazione con attenzione alla forma in astrazione dalla materia.

(Alonzo Church, 1956)



(Aristotele, 384–322 a.C.)



FORMALMENTE CORRETTO?

Perfino i corvi gracchiano sui tetti quali implicazioni siano corrette.

(Callimaco, III sec. a.C.)



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

La questione di cui si occupa la logica, potremmo dire, è quella dell'adeguatezza, o valore probativo, di varie specie di evidenza. Tradizionalmente, però, essa si è dedicata soprattutto allo studio di ciò che costituisce dimostrazione, ossia evidenza completa e conclusiva. [...] l'inferenza deduttiva, e quindi l'implicazione che dovrebbe esserle di fondamento, entra in ogni determinazione del peso dell'evidenza.

(M. R. Cohen ed E. Nagel, 1934)



La questione di cui si occupa la logica, potremmo dire, è quella dell'adeguatezza, o valore probativo, di varie specie di evidenza. Tradizionalmente, però, essa si è dedicata soprattutto allo studio di ciò che costituisce dimostrazione, ossia evidenza completa e conclusiva. [...] l'inferenza deduttiva, e quindi l'implicazione che dovrebbe esserle di fondamento, entra in ogni determinazione del peso dell'evidenza.

Si può considerare compito proprio della logica quello di scartare ciò che è assolutamente impossibile, determinando così il campo di tutto ciò che, in assenza di conoscenza empirica, è astrattamente possibile.

(M. R. Cohen ed E. Nagel, 1934)

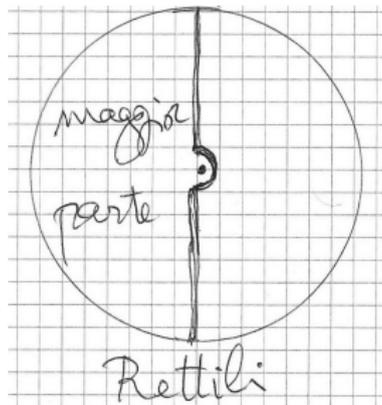


- 1 Se la maggior parte dei rettili sono serpenti, e se inoltre
- 2 la maggior parte dei rettili sono velenosi, allora...



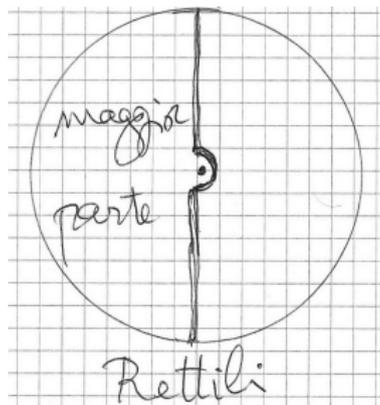
COMPLETARE IN MANIERA FORMALM. INECCEPIBILE:

- 1 Se la maggior parte dei rettili sono serpenti, e se inoltre
- 2 la maggior parte dei rettili sono velenosi, allora...



COMPLETARE IN MANIERA FORMALM. INECCEPIBILE:

- 1 Se la maggior parte dei rettili sono serpenti, e se inoltre
- 2 la maggior parte dei rettili sono velenosi, allora...
- 3 ... esistono serpenti velenosi.



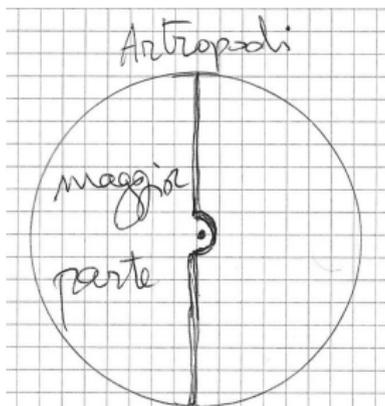
COMPLETARE IN MANIERA FORMALE. INECCEPIBILE:

- 1 Se la maggior parte degli artropodi sono insetti, e se inoltre
- 2 la maggior parte degli artropodi **non** sono velenosi, allora...



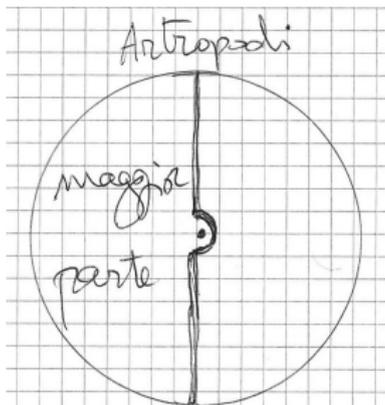
COMPLETARE IN MANIERA FORMALE. INECCEPIBILE:

- 1 Se la maggior parte degli artropodi sono insetti, e se inoltre
- 2 la maggior parte degli artropodi **non** sono velenosi, allora...



COMPLETARE IN MANIERA FORMALM. INECCEPIBILE:

- 1 Se la maggior parte degli artropodi sono insetti, e se inoltre
- 2 la maggior parte degli artropodi **non** sono velenosi, allora...
- 3 ... esistono insetti che **non** sono velenosi.



- 1 Se la maggior parte dei numeri reali sono irrazionali; se inoltre
- 2 la maggior parte dei numeri reali sono trascendenti, allora...
- 3



COMPLETARE IN MANIERA FORMALM. INECCEPIBILE:

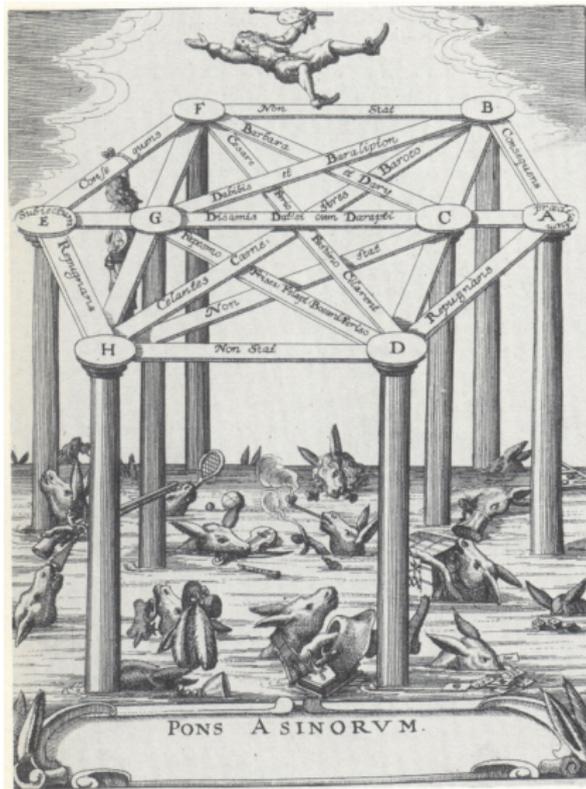
- 1 Se la maggior parte dei numeri reali sono irrazionali; se inoltre
- 2 la maggior parte dei numeri reali sono trascendenti, allora...
- 3 ??? ???



- 1 Se la maggior parte dei numeri reali sono irrazionali; se inoltre
- 2 la maggior parte dei numeri reali sono trascendenti, allora...
- 3 ??? ???

Occorre una messa a punto?





In che senso simbolica?

Terminologia. Intendiamo con

alfabeto, un insieme

$$\Sigma = \{ s_1, \dots, s_{N+1}, s_{N+2} \}$$

costituito da un numero finito—almeno due—di **simboli**;

stringa su Σ , una sequenza finita formata di simboli di Σ ;

(Indichiamo: $\Sigma^* =_{\text{Def}} \{ \text{stringhe} \}$)

linguaggio simbolico su Σ , un insieme (di solito infinito) \mathcal{L} di

stringhe su Σ , dette **frasi** di \mathcal{L} .

(Dunque $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$)

LINGUAGGI SIMBOLICI

A informatici, matematici, logici, servono linguaggi delle cui frasi si possa effettuare un *riconoscimento automatico*

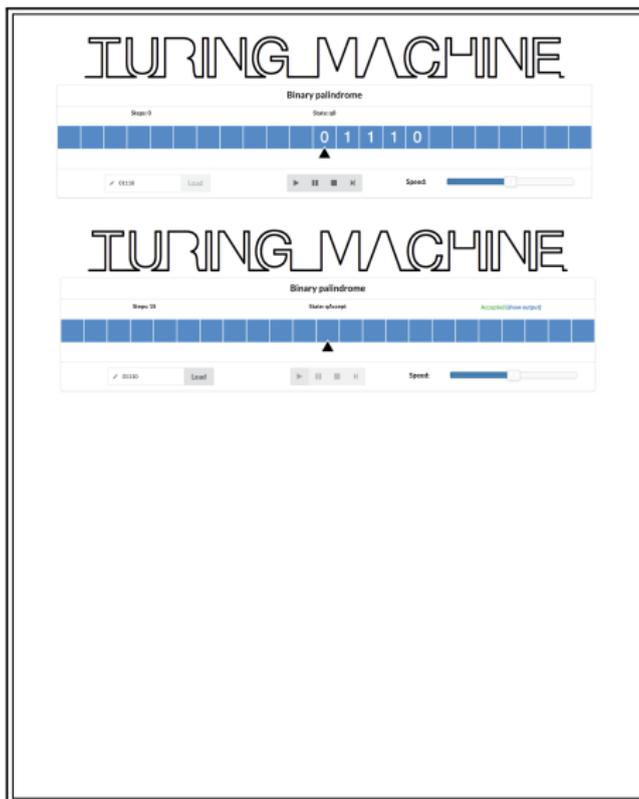


(a costi **non proibitivi**)

RIESTE

IN CHE SENSO SIMBOLICA? - II

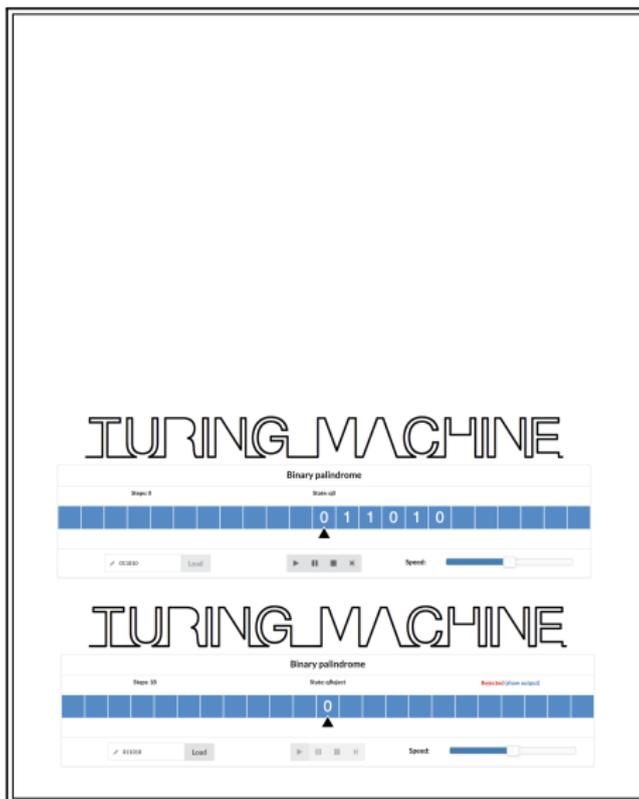
Dal sito <https://turingmachinesimulator.com/>:



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

IN CHE SENSO SIMBOLICA? - II

Dal sito <https://turingmachinesimulator.com/>:



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

FORMALMENTE, UNA \mathcal{M} DI TURING È COMPOSTA DA:

- 1 Un *alfabeto* s_1, \dots, s_{N+2+l} , oltre a s_0 (lo spazio vuoto);
- 2 un insieme q_0, q_1, \dots, q_M di *stati*...
- 3 ...alcuni dei quali hanno il ruolo di stati *accettanti*;



FORMALMENTE, UNA \mathcal{M} DI TURING È COMPOSTA DA:

- 1 Un *alfabeto* s_1, \dots, s_{N+2+l} , oltre a s_0 (lo spazio vuoto);
- 2 un insieme q_0, q_1, \dots, q_M di *stati*...
- 3 ... alcuni dei quali hanno il ruolo di stati *accettanti*;
- 4 un insieme di *cinquine di transizione* delle tre forme:

q_i	s_h	$s_k = q_j$
q_i	s_h	$s_k > q_j$
q_i	s_h	$s_k < q_j$

dove:

- q_i, q_j sono stati (*corrente* / *prossimo*);
- s_h, s_k simboli (*abilitante* la transiz. di stato / *obliterante*) e
- $=, >, <$ pilotano la *testina di scansione*.



FORMALMENTE, UNA \mathcal{M} DI TURING È COMPOSTA DA:

- 1 Un *alfabeto* s_1, \dots, s_{N+2+l} , oltre a s_0 (lo spazio vuoto);
- 2 un insieme q_0, q_1, \dots, q_M di *stati*...
- 3 ... alcuni dei quali hanno il ruolo di stati *accettanti*;
- 4 un insieme di *cinquine di transizione* delle tre forme:

q_i	s_h	$s_k = q_j$
q_i	s_h	$s_k > q_j$
q_i	s_h	$s_k < q_j$

dove:

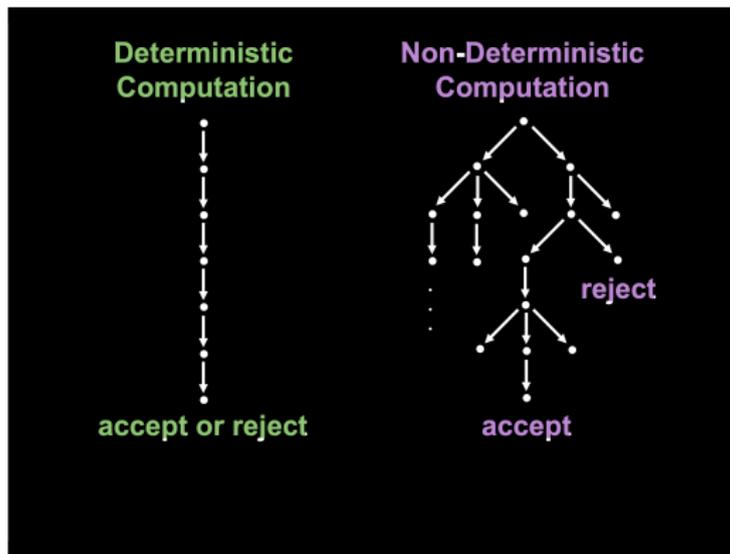
- q_i, q_j sono stati (*corrente* / *prossimo*);
- s_h, s_k simboli (*abilitante* la transiz. di stato / *obliterante*) e
- $=, >, <$ pilotano la *testina di scansione*.

- ▷ **Avvio:** \mathcal{M} viene messa in moto dallo stato q_0 , con la testina sul primo simbolo della *stringa* da analizzare;
- ▷ il suo **arresto** (?) avviene quando nessuna *cinquina* inizia con lo stato corrente abbinato al simbolo sotto scansione.
- ▷ Il **riconoscimento** di una frase si ha allorché l'arresto avviene in uno degli stati *accettanti*.



COMPUTAZIONI DETERMINISTICHE E NON

*Secondo il concetto di **non determinismo**, si ammette che un algoritmo possa reagire a una determinata situazione con piú azioni differenti, tutte ugualmente legali, dirigendo il calcolo contemporaneamente lungo vie diverse.* (Fabrizio Luccio, Linda Pagli 1992)



Si dice che una \mathcal{M} di Turing è

DETERMINISTICA: se non presenta piú cinque di transizione che inizino con una stessa coppia q_i, s_h

Caso deterministico:

Il **linguaggio** di \mathcal{M} è formato da quelle stringhe che **portano** all'arresto di \mathcal{M} in uno stato di **accettazione**.



Si dice che una \mathcal{M} di Turing è

DETERMINISTICA: se non presenta piú cinquine di transizione che inizino con una stessa coppia q_i, s_h ;

NON-DETERMINISTICA: quando l'unicità della transizione non è assicurata (ma potrebbe ben valere).

Caso generale:

Il **linguaggio** di \mathcal{M} è formato dalle stringhe che **possono portare** all'arresto di \mathcal{M} in uno stato di **accettazione**.



Si dice che una \mathcal{M} di Turing è

DETERMINISTICA: se non presenta piú cinquine di transizione che inizino con una stessa coppia q_i, s_h ;

NON-DETERMINISTICA: quando l'unicità della transizione non è assicurata (ma potrebbe ben valere).

Caso generale:

Il **linguaggio** di \mathcal{M} è formato dalle stringhe che **possono portare** all'arresto di \mathcal{M} in uno stato di **accettazione**.

Un linguaggio \mathcal{L} si dice:

- ▶ **semi-decidibile** se una qualche \mathcal{M} ne accetta tutte e sole le frasi.
- ▶ **decidibile** quando si può far sí che \mathcal{M} giunga sempre all'arresto.





... *E questo è dunque il vantaggio del nostro metodo: che immediatamente possiamo stabilire per mezzo dei numeri se le proposizioni che ci vengono presentate sono provate o no; e che con la sola guida dei caratteri e con un metodo sicuro e veramente analitico, portiamo alla luce verità che altri avevano raggiunto a stento con immenso sforzo della mente e per caso. E perciò noi siamo in grado di presentare entro il nostro secolo dei risultati che altrimenti con difficoltà potrebbero fornire molte migliaia di anni.*¹

(Leibniz, 1679)

¹Traduz. Massimo Mugnai



“È ragionevole sperare che il connubio fra computazione e logica matematica sarà, nel prossimo secolo, così fruttuoso quanto lo è stato, nel secolo scorso, quello fra analisi e fisica. Sollecitudine verso questa impresa richiede sollecitudine sia per le applicazioni che per l'eleganza matematica.”

(John McCarthy, 1963)



“È ragionevole sperare che il connubio fra computazione e logica matematica sarà, nel prossimo secolo, così fruttuoso quanto lo è stato, nel secolo scorso, quello fra analisi e fisica. Sollecitudine verso questa impresa richiede sollecitudine sia per le applicazioni che per l'eleganza matematica.”

(John McCarthy, 1963)



(J. McCarthy Boston, 1927 – Palo Alto, 2011)



THE ARCHITECTURES IN THE FIFTH GENERATION COMPUTERS

Tohru MOTO-OKA
The University of Tokyo, Japan

Kazuhiro FUCHI
Institute for New Generation Computer Technology, Japan

Invited Paper

The fifth generation computers are being developed predominantly for use with knowledge information processing systems expected to come into wide spread utilization in the 1990s. Inference machines and relational algebra machines are typical of the core processors which constitute the fifth generation computer systems. A new logic programming language is being designed for use with the fifth generation kernel language to act as the interface between hardware and software in these machines. Several examples of proposed architectures are described. VLSI-oriented architecture and parallel processing control mechanisms are the main research topics.

1. INTRODUCTION

In the context of the Fifth Generation Computer Project, which is a project promoted on a national scale in Japan, a fifth generation computer is defined to be a computer for use in knowledge information processing with the widest range of applicability among the computers which will be produced in the 1990's^{(1) (2)}.

Those types of computers expected to be in wide use in the 1990's include main frame computers whose chief aim will be to perform conventional

able; it is also necessary to develop technology for creating VLSI-oriented architectures which also enable high speed processing through the incorporation of parallel processing. To this end, we need to get away from the sequential control mechanism employed in conventional von Neumann-type computers, and instead employ control mechanisms which can incorporate parallel processing in a natural way -- e.g., data flow machines and reduction machines.

v) It should be possible to perform knowledge information processing at the users' sites as well as at processing centers where a large

nce Times

TUESDAY, DECEMBER 10, 1996

New York Times



Built for 2

A new idea for astronauts, a tandem cycle, mimics gravity and has cams on the shaft to provide jolts to strengthen muscles and bones.

Source: Space Cycle
Illustration by LARRY BATES

With Major Math Proof, Brute Computers Show Flash of Reasoning Power

The achievement would have been called creative if a human had done it.

By GINA KOLATA

COMPUTERS are whizzes when it comes to the grunt work of mathematics. But for creative and elegant solutions to hard mathematical problems, nothing has been able to beat the human mind. That is, perhaps, until now.

A computer program written by researchers at Argonne National Laboratory in Illinois has come up with a major mathematical proof that would have been called creative if a human had thought of it. In doing so, the computer has, for the first time, got a toehold into pure mathematics, a field described by its practitioners as more of an art form than a science. And the implications, some say, are profound, showing just how powerful computers can be at reasoning itself, at mimicking the flashes of logical insight or even genius that have characterized the best human minds.

Computers have found proofs of mathematical conjectures before, of course, but

those conjectures were easy to prove. The difference this time is that the computer has solved a conjecture that stumped some of the best mathematicians for 60 years. And it did so with a program that was designed to reason, not to solve a specific problem. In that sense, the program is very different from chess-playing computer programs, for example, which are intended to solve just one problem: the moves of a chess game.

"It's a sign of power, of reasoning power," said Dr. Larry Wos, the supervisor of the computer reasoning project at Argonne. And with this result, obtained by a colleague, Dr. William McCune, he said, "We've taken a quantum leap forward."

Dr. Wos predicts that the result may mark the beginning of the end for mathematics research as it is now practiced, eventually freeing mathematicians to focus on discovering new conjectures, and leaving the proof to computers.

But the result also may challenge the very notion of creative thinking, raising the possibility that computers could take a parallel path to reach the same conclusions as great human thinkers. Or it may be that since no one has any idea how humans think, the magnificent bursts of creativity that spring apparently full blown from the minds of geniuses are actually a result of hidden, computer-like

Continued on Page C8



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

- Un calcolo ha assiomi logici e regole d'inferenza vuoti di contenuto
 - Le teorie fondate su di un calcolo hanno assiomi propri e modellano qualche aspetto della conoscenza
 - Perfino i *programmi* (scritti in Prolog, ML, CLP, ecc.) vengono talvolta presentati come *teorie*
-



- Un calcolo ha assiomi logici e regole d'inferenza vuoti di contenuto
- Le teorie fondate su di un calcolo hanno assiomi propri e modellano qualche aspetto della conoscenza
- Perfino i *programmi* (scritti in Prolog, ML, CLP, ecc.) vengono talvolta presentati come *teorie*
- È desiderabile che il calcolo, oltre che “**sound**” (=corretto) sia **completo**: deve, cioè consentire di ricavare tutta la conoscenza ‘implicita’ negli assiomi
- Una teoria può essere **contraddittoria**—quando lo è risulta inutile



- Un calcolo ha assiomi logici e regole d'inferenza vuoti di contenuto
- Le teorie fondate su di un calcolo hanno assiomi propri e modellano qualche aspetto della conoscenza
- Perfino i *programmi* (scritti in Prolog, ML, CLP, ecc.) vengono talvolta presentati come *teorie*
- È desiderabile che il calcolo, oltre che “sound” (=corretto) sia *completo*: deve, cioè consentire di ricavare tutta la conoscenza ‘implicita’ negli assiomi
- Una teoria *può* essere contraddittoria—quando lo è risulta inutile

Tutto si svolge entro un *linguaggio formale*. Perciò i detrattori della logica, insinuano che essa, riducendo la semantica alla sintassi, sia del tutto sterile.



Gli **assiomi**, sia logici che propri, possono formare:

- una *collezione finita* di formule

Le regole d'inferenza garantiranno che, di conseguenza, i **teoremi** (=tutto ciò che si può ricavare dagli assiomi) formeranno una collezione ... ???...



Gli **assiomi**, sia logici che propri, possono formare:

- una collezione descrivibile tramite
schemi sintattici in numero finito

Le regole d'inferenza garantiranno che, di conseguenza, i **teoremi** (=tutto ciò che si può ricavare dagli assiomi) formeranno una collezione ... ???...



Gli **assiomi**, sia logici che propri, possono formare:

- una *collezione decidibile*

Le regole d'inferenza garantiranno che, di conseguenza, i **teoremi** (=tutto ciò che si può ricavare dagli assiomi) formeranno una collezione ... ???...



Gli **assiomi**, sia logici che propri, possono formare:

- una *collezione decidibile*

Le regole d'inferenza garantiranno che, di conseguenza, i **teoremi** (=tutto ciò che si può ricavare dagli assiomi) formeranno una collezione *semi-decidibile*



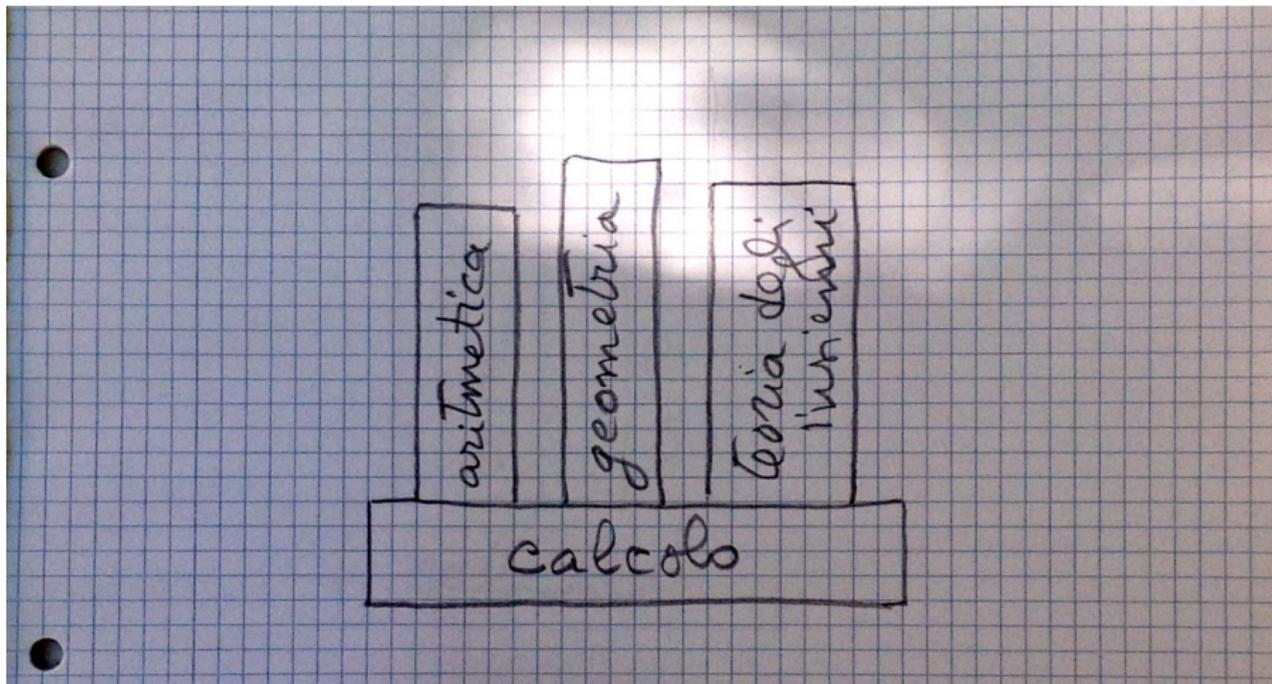
Gli **assiomi**, sia logici che propri, possono formare:

- una *collezione decidibile*

Le regole d'inferenza garantiranno che, di conseguenza, i **teoremi** (=tutto ciò che si può ricavare dagli assiomi) formeranno una collezione *semi-decidibile* (ovvero: "ricorsivamente enumerabile")



TEORIE COME FUNGHI ?



where A_E is the set consisting of the eleven sentences listed below. (As in the preceding section, $x \leq y$ abbreviates $x < y \vee x = y$.)

Set A_E of Axioms

$$\forall x \quad Sx \neq 0 \quad (S1)$$

$$\forall x \forall y \quad (Sx = Sy \rightarrow x = y) \quad (S2)$$

$$\forall x \forall y \quad (x < Sy \leftrightarrow x \leq y) \quad (L1)$$

$$\forall x \quad x \not< 0 \quad (L2)$$

$$\forall x \forall y \quad (x < y \vee x = y \vee y < x) \quad (L3)$$

$$\forall x \quad x + 0 = x \quad (A1)$$

$$\forall x \forall y \quad x + Sy = S(x + y) \quad (A2)$$

$$\forall x \quad x \cdot 0 = 0 \quad (M1)$$

$$\forall x \forall y \quad x \cdot Sy = x \cdot y + x \quad (M2)$$

$$\forall x \quad xE0 = S0 \quad (E1)$$

$$\forall x \forall y \quad xESy = xEy \cdot x \quad (E2)$$

$$\forall^{\exists} = \mathbb{N}$$

$$x \stackrel{IS^{\exists}}{\mapsto} x + 1$$

$$\vdots$$

$$(x, y) \stackrel{IE^{\exists}}{\mapsto} xy$$



(Raphael M. Robinson ,
1911–1995)

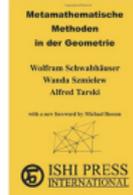


UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Assiomi della geometria tarskiana, semplificati



Wanda Szmielew
(1918–1976)



1 Assiomi, versione 1965 (pubblicata nel 1983)

CE ₂		
1.	$ab \equiv ba$	(RE)
2.	$ab \equiv pq \ \& \ ab \equiv rs \rightarrow pq \equiv rs$	(TE)
3.	$ab \equiv cc \rightarrow a = b$	(IE)
4.	$\exists x (B \bullet ax \ \& \ ax \equiv \bullet \bullet)$	(SC)
5.	$a \neq b \ \& \ B abc \ \& \ B a'b'c' \ \& \ ab \equiv a'b' \ \& \ bc \equiv b'c' \ \& \ ad \equiv a'd' \ \& \ bd \equiv b'd' \rightarrow cd \equiv c'd'$	(FS)
6.	$B aba \rightarrow a = b$	(IB)
7.	$B apc \ \& \ B bqc \rightarrow \exists x (B pxb \ \& \ B qxa)$	(IP)
8.	$\exists a \exists b \exists c (\neg B abc \ \& \ \neg B bca \ \& \ \neg B cab)$	(Lo ₂)
9.	$p \neq q \ \& \ ap \equiv aq \ \& \ bp \equiv bq \ \& \ cp \equiv cq \rightarrow B abc \vee B bca \vee B cab$	(Up ₂)
10.	$B adt \ \& \ B bdc \ \& \ a \neq d \rightarrow \exists x \exists y (B abx \ \& \ B acy \ \& \ B xty)$	(Eu)
11.	$\exists a \forall x \forall y (x \in X \ \& \ y \in Y \rightarrow B axy) \rightarrow \exists b \forall x \forall y (x \in X \ \& \ y \in Y \rightarrow B xby)$	(Co)



Meglio

- sviluppare tante *teorie separate* (e.g.: aritmetica, geometria elementare), o perfino di nicchia (e.g.: teoria dei linguaggi regolari);

oppure

- una singola *teoria onnicomprensiva* (e.g. la teoria degli insiemi di Zermelo–Fraenkel–von Neumann oppure quella delle classi di Gödel–Bernays), alla quale ridurre le varie discipline esatte

?

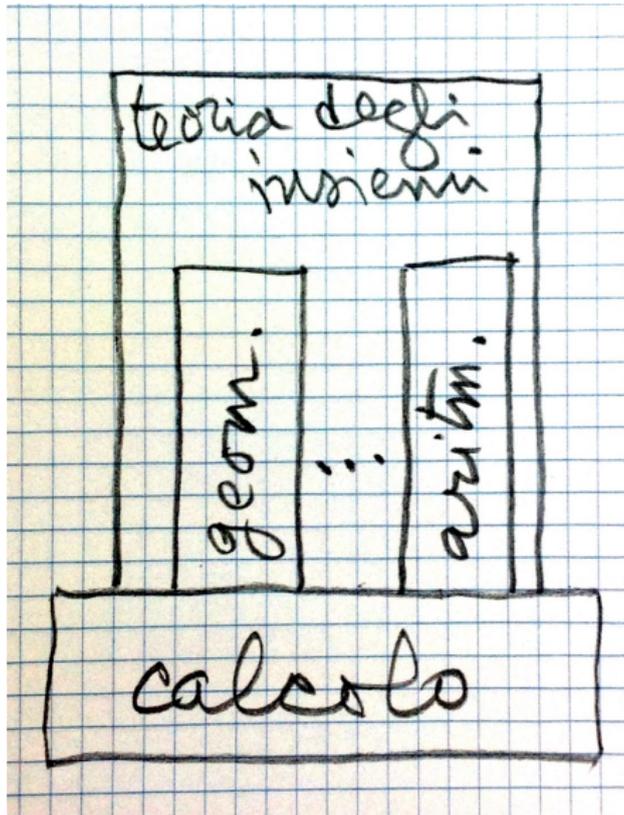


“There might exist axioms so abundant in their verifiable consequences, shedding so much light upon a whole field, and yielding such powerful methods for solving problems (and even solving them constructively, as far as that is possible) that, no matter whether or not they are intrinsically necessary, they would have to be accepted at least in the same sense as any well-established physical theory. ”

(Kurt Gödel, 1947)



UNA TEORIA ONNICOMPRENSIVA ?





J. M. Bocheński.

La logica formale - La logica matematica.

Giulio Einaudi, Torino, 1972.

(Edizione a cura di A. Conte).



Martin Davis.

Lecture Notes in Logic.

Courant Institute of Mathematical Sciences, New York
University, 1993.



A. Tarski and S. Givant.

A formalization of Set Theory without variables, volume 41 of
Colloquium Publications.

American Mathematical Society, 1987.



Sulla scorta di [Davis(1993)], mettiamo in luce il tipo di relazione che sussiste fra un insieme A di *premesse* e una *conclusione* α in una logica \mathbb{L} che ci permetta di ricavare (o 'derivare', o 'inferire') α da A ; in simboli:

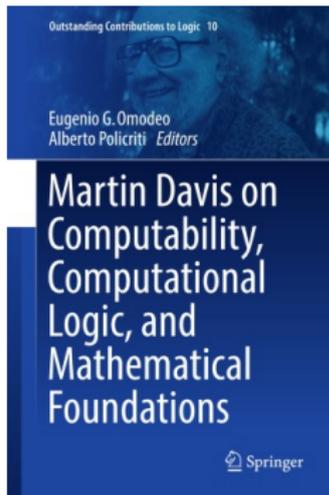
$$A \vdash \alpha$$

(Poi inquadriamo le nozioni di Davis in un piú generale discorso sui formalismi)



“A logic L is determined by a nonempty set E of elements together with a relation \vdash . For a subset A of E and an element α of E “ $A \vdash \alpha$ ” is a statement which may be true or false. (We may think of “ $A \vdash \alpha$ ” as asserting that α is a “logical consequence” of the premises A .)”

[Davis(1993), pag. 1]



DEFINIZIONE

Una *logica* è una struttura

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash)$$

costituita da

- un insieme $\mathcal{E} \neq \emptyset$ i cui elementi si chiamano *enunciati* e da
 - una relazione diadica \vdash , chiamata *derivabilità*, tale che
- $$\mathcal{P}(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \supseteq \vdash$$

soddisfacenti le condizioni:

- Ⓔ1 $\{\alpha\} \vdash \alpha$;
- Ⓔ2 (**Monotonicità**) quando $A \vdash \alpha$, si ha che $B \vdash \alpha$ per *ogni* insieme di enunciati $B \supseteq A$;
- Ⓔ3 (**Compattezza**) quando $A \vdash \alpha$, si ha che $F \vdash \alpha$ per *qualche* insieme finito F tale che $A \supseteq F$;
- Ⓔ4 (**Taglio**) quando $A \vdash \alpha$ e $B \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, allora $A \cup B \vdash \beta$.

- 11 Ogni enunciato segue da se stesso



- 11 Ogni enunciato segue da se stesso
- 12 Dopo l'aggiunta di nuove premesse, non si ricavano meno conclusioni.



- 111 Ogni enunciato segue da se stesso
- 112 Dopo l'aggiunta di nuove premesse, non si ricavano meno conclusioni.
- 113 Se una conclusione segue da certe premesse, ciò deve essere documentabile tramite una '*dimostrazione*' di qualche sorta: dimostrazione esprimibile con un numero finito di simboli e che quindi potrà far riferimento solo a un numero finito di premesse.

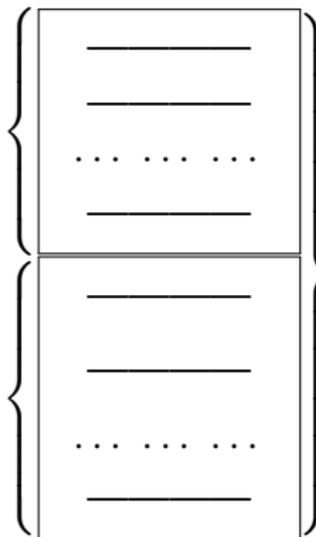


- 111 Ogni enunciato segue da se stesso
- 112 Dopo l'aggiunta di nuove premesse, non si ricavano meno conclusioni.
- 113 Se una conclusione segue da certe premesse, ciò deve essere documentabile tramite una '*dimostrazione*' di qualche sorta: dimostrazione esprimibile con un numero finito di simboli e che quindi potrà far riferimento solo a un numero finito di premesse.
- 114 Da una dimostrazione si può cancellare una premessa α , a patto però di rimpiazzare α con un insieme A di premesse da cui α stessa è deducibile.



SCHEMATIZZAZIONE DELLA REGOLA DEL TAGLIO

Dimostraz. di α da A



Dimostraz. di β da $A \cup B$

Dim. di β da B, α

(da [Davis(1993), pag. 2])





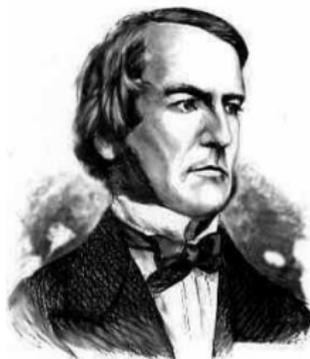
Charles S. Peirce in Berlin in 1875.

(Charles Sanders Peirce, 1839–1914)

... no general method for the solution of questions in the theory of probabilities can be established which does not explicitly recognise ... those universal laws of thought which are the basis of all reasoning ... (George Boole)



... no general method for the solution of questions in the theory of probabilities can be established which does not explicitly recognise ... those universal laws of thought which are the basis of all reasoning ... (George Boole)



George Boole (Lincoln 1815 – Ballintemple 1864)



DEFINIZIONE

Una *logica booleana* è una struttura

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow)$$

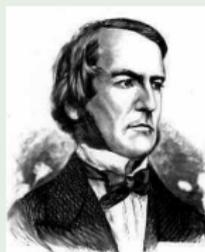
costituita da

- una logica (\mathcal{E}, \vdash) ,
- un elemento f di \mathcal{E} ,
- un'operazione diadica \Rightarrow su \mathcal{E}

soddisfacenti le condizioni:

B1 (Principio di deduzione)

$$A \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ se e solo se } A \cup \{\alpha\} \vdash \beta ;$$



George Boole
1815–1864

DEFINIZIONE

Una *logica booleana* è una struttura

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow)$$

costituita da

- una logica (\mathcal{E}, \vdash) ,
- un elemento f di \mathcal{E} ,
- un'operazione diadica \Rightarrow su \mathcal{E}

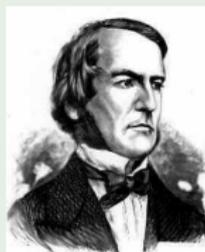
soddisfacenti le condizioni:

ⓑ1 (Principio di deduzione)

$$A \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ se e solo se } A \cup \{\alpha\} \vdash \beta ;$$

ⓑ2 (Principio di doppia negazione)

$$\{ (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \} \vdash \alpha .$$



George Boole

1815–1864

COSA S'INTENDE PER LOGICA *booleana*?

DEFINIZIONE

Una *logica booleana* è una struttura

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow)$$

costituita da

- una logica (\mathcal{E}, \vdash) ,
- un elemento f di \mathcal{E} ,
- un'operazione diadica \Rightarrow su \mathcal{E}

soddisfacenti le condizioni:

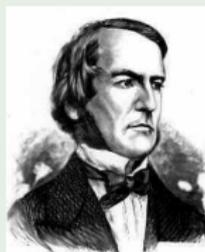
ⓑ1 (Principio di deduzione)

$$A \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ se e solo se } A \cup \{\alpha\} \vdash \beta ;$$

ⓑ2 (Principio di doppia negazione) $\{ (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \} \vdash \alpha .$

L'operazione \Rightarrow , e il suo primo e secondo operando, si chiamano: **implicazione materiale**,

antecedente e conseguente.



George Boole
1815–1864

Secondo [Tarski and Givant(1987)]:

DEFINIZIONE

ALFRED TARSKI

Un *formalismo* è una quaterna

$$(\mathcal{E}, \vdash, RE, MO)$$

di oggetti *metalogici*, dei quali due, e cioè

- \mathcal{E} : la collezione dei cosiddetti **enunciati**, e
- \vdash : la relazione detta di **derivabilità** fra sottocollezioni di \mathcal{E} e membri di \mathcal{E} ,

sono *sintattici*, mentre gli altri due,

- **RE**: la classe delle *interpretazioni* (o 'realizzazioni'), e
- **MO**: la funzione che associa ad ogni enunciato α di \mathcal{E} una sottoclasse di **RE**, detta la classe di tutti i modelli di α ,

sono *semantiche*. Si assume che **RE** sia l'unione di tutte le $MO(\alpha)$ con α in \mathcal{E} .



"Tarski"

TRIESTE

Ci riferiamo per un po' ad un formalismo inteso a questo modo, ed assumiamo che siano

$$P \subseteq \mathcal{E}, \quad \alpha \text{ in } \mathcal{E}, \quad \mathcal{I} \text{ in RE} \quad .$$

Allora

- la locuzione “ \mathcal{I} rende vero α ” esprime che \mathcal{I} sta in $MO(\alpha)$;
- $MO(P)$ denota la classe

$$\bigcap_{\beta \in P} MO(\beta),$$

formata dalle interpretazioni che rendono veri, simultaneamente, tutti gli enunciati β in P ;

- $P \models \alpha$ (leggi: α è *conseguenza logica* di P) significa che $MO(P) \subseteq MO(\alpha)$, ossia che

|| qualunque interpretazione renda veri, simultaneamente, tutti gli enunciati in P , rende del pari vero anche α ;



Ci riferiamo per un po' ad un formalismo inteso a questo modo, ed assumiamo che siano

$$P \subseteq \mathcal{E}, \quad \alpha \text{ in } \mathcal{E}, \quad \mathcal{I} \text{ in RE}, \quad \mathfrak{A} \subseteq \text{RE}.$$

Allora \dots \dots . Inoltre,

- $\text{Th}(\mathfrak{A})$ denota la collezione

$$\{\vartheta \text{ in } \mathcal{E} \mid \mathfrak{A} \subseteq \text{MO}(\vartheta)\},$$

formata dagli enunciati che vengono resi veri da tutte quante le interpretazioni appartenenti ad \mathfrak{A} ; $\text{Th}(\mathcal{I})$ sta per $\text{Th}(\{\mathcal{I}\})$;

- $\text{Cn}(P)$ denota la collezione

$$\{\vartheta \text{ in } \mathcal{E} \mid P \models \vartheta\}$$

formata dagli enunciati che sono conseguenze logiche di P ;

$\text{Cn}(\alpha)$ sta per $\text{Cn}(\{\alpha\})$;

- $\Theta(P)$ denota la collezione

$$\{\vartheta \text{ in } \mathcal{E} \mid P \vdash \vartheta\}$$

formato dagli enunciati che sono derivabili da P .



DEFINIZIONE

Si dice che un formalismo c.s. è:

corretto se soddisfa $\vdash \subseteq \models$

completo se soddisfa $\models \subseteq \vdash$

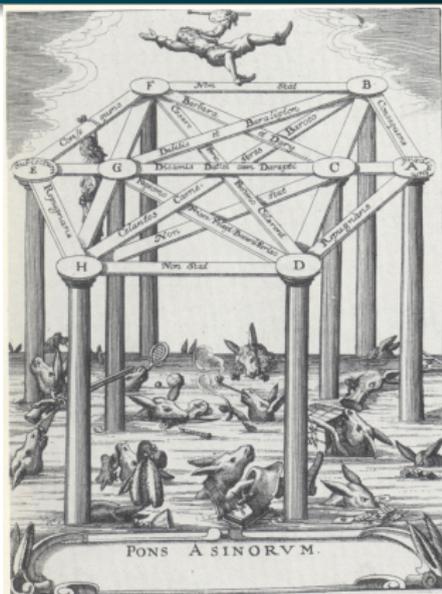
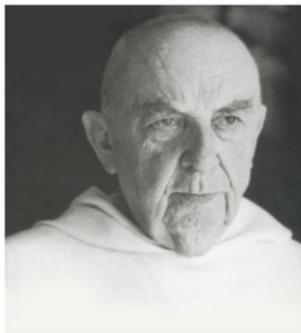


Lo studio di *formalismi sintattici* (o 'non-interpretati', come spesso vengono chiamati) è già di per sé interessante. Tali formalismi hanno solo le due componenti \mathcal{E} ed \vdash , che devono soddisfare le seguenti cinque proprietà (nelle quali Φ , Ψ variano sui sottoinsiemi di \mathcal{E} ed α varia sugli enunciati):

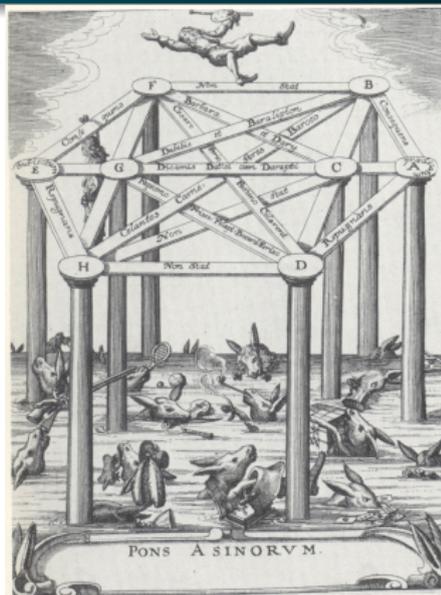
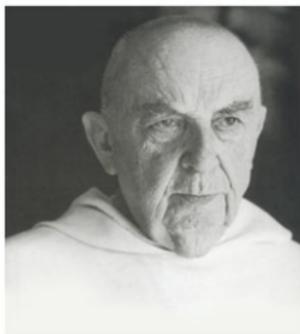
- Ⓡ1 $\Phi \vdash \alpha$ quando α è in Φ ;
- Ⓡ2 quando $\Psi \vdash \alpha$ ed inoltre $\Phi \vdash \beta$ per ciascun β appartenente a Ψ , allora $\Phi \vdash \alpha$;
- Ⓡ3 quando $\Phi \vdash \alpha$, allora c'è almeno una sottocollezione finita Ξ di Φ per la quale $\Xi \vdash \alpha$;
- Ⓡ4 l'intera collezione \mathcal{E} degli enunciati, anche ove sia infinita, è contabile;
- Ⓡ5 c'è una sottocollezione finita Ξ di \mathcal{E} tale che $\Xi \vdash \beta$ per ciascun β in \mathcal{E} (vale a dire: Ξ è contraddittoria).



... TORNANDO AGLI ALBORI... *Pons asinorum*



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE



Un proverbio

medievale dice: '*de modalibus non gustabitur asinus*', ma non è necessario essere un asino per perdersi in questo labirinto di leggi astratte: Teofrasto e quasi tutti i moderni, fino al 1934, fraintesero completamente il sistema.

(Joseph M. Bocheński, 1902–1995)

