Università di Trieste

Lauree in ingegneria elettronica e informatica e in ingegneria industriale (energia elettrica e dei sistemi)

Corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (030IN)
Anno Accademico 2021/2022

Prof. Franco Obersnel

Motivazioni. Cenni alla trasmissione di un segnale: codifica e digitalizzazione. Il metodo di campionamento. Il metodo di decomposizione in blocchi base. La necessità di rappresentare un segnale come serie di armoniche. L'equazione del calore. Il metodo di separazione delle variabili. Autovalori del problema di Dirichlet associato all'equazione del calore. Tre problemi: funzioni che ammettono la rappresentazione in serie, definizione di convergenza, regolarità della serie. Funzioni periodiche di periodo T, frequenza, frequenza angolare. Una funzione $T-$periodica è sempre $kT-$periodica per ogni $k \in \mathbb{N}^+$. Funzioni periodiche prive di periodo minimo. Polinomi trigonometrici. Armoniche elementari, ampiezza, fase. Rappresentazioni equivalenti.

L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Motivazioni e premesse storiche. Forma cartesiana di un numero complesso. Parte reale e parte immaginaria. Somma e prodotto di numeri complessi. Reciproco di un numero complesso. Proprietà algebriche. Il campo dei numeri complessi. $\mathbb{C}$ non è un campo-ordinato. Numeri reali come particolari numeri complessi. Coniugato di un numero complesso. Modulo di un numero complesso. Proprietà del modulo. Piano di Gauss - Argand. Metrica e topologia in $\mathbb{C}$: palla aperta $B(z_0, r)$, intorno di un punto, punti interni, punti di frontiera, punti di accumulazione di un insieme, insieme aperto, insieme chiuso, chiusura di un insieme, insiemi limitati. Successioni di numeri complessi. Limite di una successione. Insiemi compatti (per successioni). Caratterizzazione dei compatti come chiusi e limitati. Piano complesso esteso e cenni alla sfera di Riemann. Intorno di ∞. Limite infinito di una successione. Limite finito per $z \to z_0$ di una funzione. Funzioni continue. Insiemi connessi (per archi). Serie di numeri complessi. Somma di una serie. Relazione tra convergenza di una successione/serie e delle rispettive successioni/serie delle parti reali e immaginarie. Serie assolutamente convergenti. La serie geometrica. Funzione esponenziale e funzioni circolari definite come serie. La formula di Eulero. Forma polare di un numero complesso. Modulo, argomento e argomento principale di un numero complesso. Notazione esponenziale. Prodotto e potenze di numeri complessi in forma polare: formula di De Moivre. Interpretazione del prodotto come rotazione nel piano di Gauss. Forma matriciale di un numero complesso. Soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^n = w$: radici $n-$esime di un numero complesso.

Funzioni complesse di variabile complessa. Parte reale e parte immaginaria di una funzione f. Interpretazione di una $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ come mappa di $\mathbb{R}^2$. Esempi: traslazioni, rotazioni, riflessioni. Teoremi di continuità delle funzioni somma, prodotto, quoziente, composta. Curve parametriche in $\mathbb{C}$. Insiemi connessi (per archi). Teorema di connessione. Teorema di Weierstrass. Teorema di Heine. Continuità delle funzioni razionali. La funzione argomento principale. La funzione radice $n-$esima (determinazione principale). Funzione derivabile in un punto. Teoremi di derivabilità delle funzioni somma, prodotto, quoziente, composta. Teorema di continuità di una funzione derivabile. Teorema sulle funzioni con derivata nulla. Condizioni di monogeneità di Cauchy-Riemann. Derivata e condizioni di Cauchy-Riemann in forma polare. Le condizioni di Cauchy-Riemann non sono sufficienti per la derivabilità. Teorema di caratterizzazione delle funzioni derivabili (solo enunciato). Funzioni olomorfe. Funzioni intere. Un esempio di una funzione derivabile in un punto non olomorfa. Serie di potenze. Insieme, disco e raggio di convergenza. Derivazione e integrazione a termine a termine. Funzione esponenziale, funzioni circolari e funzioni iperboliche definite come serie. Proprietà principali della funzione esponenziale. Proprietà principali delle funzioni circolari e delle funzioni iperboliche, formule di addizione, parti reale e immaginaria delle funzioni circolari. Equazioni del tipo $\operatorname{sen} z = c$. La funzione logaritmo (determinazione principale) e le sue proprietà.

Introduzione all'integrale di Lebesgue. Alcune motivazioni: la misura di Peano - Jordan non è numerabilmente additiva, esistono insiemi compatti o aperti non PJ-misurabili, limiti di funzioni integrabili uniformemente limitate possono non essere integrabili, il problema del passaggio del limite sotto il segno integrale. L'esempio della funzione di Dirichlet. Insiemi di misura nulla secondo Peano - Jordan e secondo Lebesgue. L'esempio dell'insieme di Dirichlet. Ogni insieme numerabile è di misura nulla secondo Lebesgue. Proprietà verificate quasi ovunque. Insiemi quasi ovunque disgiunti. Funzioni a scala. Integrale di una funzione a scala. Combinazioni lineari e modulo di funzioni a scala sono funzioni a scala. Successioni di Cauchy in uno spazio metrico. Spazi metrici completi. Lo spazio delle funzioni a scala con la norma $\|\cdot\|_1$. Funzioni integrabili e misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$. Integrale di Lebesgue. Indipendenza dalla scelta della successione approssimante (solo enunciato). Insiemi misurabili secondo Lebesgue. Misura di Lebesgue. Funzioni integrabili e misurabili secondo Lebesgue su un insieme misurabile. Funzioni limitate integrabili secondo Riemann su un insieme limitato sono integrabili secondo Lebesgue e gli integrali coincidono (solo enunciato). Il teorema di convergenza dominata di Lebesgue (solo enunciato). Funzioni misurabili limitate da una funzione integrabile sono integrabili. Integrabilità di f e $|f|$. Integrabilità di funzioni quasi ovunque uguali. Problemi riguardanti i teoremi di riduzione per l'integrale di Riemann. Il teorema di Fubini per l'integrale di Lebesgue (solo enunciato). Il teorema di Tonelli (solo enunciato). Integrali dipendenti da un parametro: il teorema di continuità e il teorema di derivabilità della funzione integrale (solo enunciati). L'esempio della trasformata di Fourier. Lo spazio $L^1(E)$. $L^1(E)$ è uno spazio di Banach (solo enunciato). Convergenza nella metrica di L^1 ed esistenza di sottosuccesioni q.o. convergenti (solo enunciato). Lo spazio $L^2(E)$. Prodotto scalare (hermitiano) in $L^2(E)$; $L^2(E)$ è uno spazio di Hilbert (solo enunciato). Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Cenni agli spazi $L^p(E)$, con $p \geq 1$. Funzioni essenzialmente limitate. Estremo superiore essenziale. Lo spazio $L^\infty(E)$. Relazione di inclusione tra gli spazi L^p (dimostrazione per i casi $1, 2, \infty$).

Serie di Fourier. Lo spazio $L^2([-\pi,\pi])$. Ortogonalità. Teorema di Pitagora. Famiglie ortogonali e famiglie ortonormali. Famiglie ortonormali canoniche complesse e reali in $L^2([-\pi,\pi])$. Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Il teorema di migliore approssimazione e la proiezione ortogonale su un sottospazio di H di dimensione finita. Coefficienti di Fourier complessi e reali. Polinomio di Fourier di una funzione in $L^1([-\pi,\pi])$, reale e complesso. Il caso delle funzioni dispari e delle funzioni pari. Linearità dei coefficienti. Esempi di calcolo dei coefficienti di Fourier. Il caso di funzioni $T-$periodiche con $T \neq 2\pi$. Energia di una funzione di $L^2([-\pi,\pi])$. Serie di Fourier di una funzione $f \in L^1([-\pi,\pi])$. Disuguaglianza di Bessel e identità di Parseval (in generale e nel caso specifico delle serie di Fourier). Il teorema di convergenza in media quadratica (solo enunciato). Lo spazio ℓ^2. Isomorfismo tra $L^2([-\pi,\pi])$ e ℓ^2. Il lemma di Riemann Lebesgue (dimostrazione solo nel caso L^2). Il problema della convergenza puntuale. Cenni storici (teoremi di Du Bois Reymond, di Katznelson e Kahane, di Carleson e Hunt, di Kolmogorov, solo enunciati). Pseudoderivate. Nucleo di Dirichlet e sue rappresentazioni. Rappresentazione integrale della ridotta della serie di Fourier con nucleo di Dirichlet. Il teorema di Dirichlet-Weierstrass (dimostrazione nel caso continuo). Funzioni continue a tratti e funzioni C^1 a tratti. Il teorema di convergenza uniforme. Serie di Fourier della funzione derivata e della funzione integrale. Regolarità e ordine di infinitesimo dei coefficienti di Fourier. Esempio di applicazione: la soluzione del problema di Dirichlet associato all'equazione del calore.

Integrazione complessa e funzioni analitiche. Curve regolari e regolari a tratti in $\mathbb{C}$. Integrale su una curva derivabile di una funzione complessa. Somma (concatenazione) di curve. Curve semplici, curve chiuse. Circuiti (lacci). Teorema della curva chiusa di Jordan (solo enunciato). Interno e esterno di una curva semplice chiusa. Curve equivalenti, orientazione di una curva. Curva $-\gamma$. Proprietà dell'integrale: linearità, additività, integrale sulla curva $-\gamma$, indipendenza dalla parametrizzazione equiversa, formula di stima del modulo dell'integrale. Passaggio del limite nell'integrale in caso di convergenza dominata o convergenza uniforme. Primitive e funzioni primitivabili. Funzioni localmente primitivabili. Formula di Torricelli-Barrow in $\mathbb{C}$. Circuitazione (integrale su una curva chiusa) di una funzione primitivabile. La funzione $\frac{1}{z}$ non è primitivabile sul suo dominio ma è localmente primitivabile. Teorema di Cauchy (dimostrazione per funzioni C^1 e curve regolari a tratti). Il teorema dei due circuiti. Formula integrale di Cauchy per una funzione e teorema della media. Funzioni analitiche in $\mathbb{C}$. Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe. Formule integrali di Cauchy per le derivate. Teorema di Morera. Il teorema di caratterizzazione delle funzioni primitivabili (cenni di dimostrazione). Aperti semplicemente connessi. Disuguaglianze di Cauchy. Teorema di Liouville. Il Teorema Fondamentale dell'Algebra. Il principio di massimo per le funzioni olomorfe (dimostrazione del principio debole). Molteplicità di uno zero di una funzione analitica. Il teorema sugli zeri di molteplicità infinita. Proprietà degli insiemi degli zeri di una funzione analitica. Il principio di identità per le funzioni analitiche. Prolungamento analitico. Unicità del prolungamento analitico.

Punti singolari di una funzione e teoria dei residui. Punti singolari isolati di una funzione. Classificazione delle singolarità isolate: singolarità eliminabile (definizione, esistenza del limite e del prolungamento analitico), polo di ordine n (definizione, esistenza del limite, caratterizzazione dell'ordine), singolarità essenziale (definizione, non esistenza del limite). Esempio di singolarità essenziale. Teorema di Picard (solo enunciato). Residuo di una funzione in un punto singolare isolato. Formula per il calcolo del residuo per un polo di ordine n. Formula per il calcolo del residuo di funzioni razionali nei poli semplici con utilizzo della derivata del denominatore. Osservazione sui residui nei poli coniugati delle funzioni razionali a coefficienti reali. Serie bilatera. Corona circolare $C(z_0; r_1, r_2)$. Insieme di convergenza di una serie bilatera. Teorema di Laurent. Parte caratteristica (singolare, principale) di una serie bilatera. Classificazione delle singolarità e serie di Laurent. Residuo di una serie di Laurent. Il "metodo dei residui" per il calcolo della parte caratteristica di una serie di Laurent in un intorno forato di un polo di ordine k. Il metodo dei coefficienti indeterminati per il calcolo dei termini di una serie di Laurent. Funzioni razionali: metodo dei residui per la decomposizione in frazioni semplici. Il teorema dei residui. Integrali del tipo $\int_\gamma f(z)\,dz$. Valor principale (di Cauchy) $PV\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Logaritmo integrale. Lemma del grande cerchio, lemma del piccolo cerchio e loro applicazioni. Lemma di Jordan. Applicazioni al calcolo di integrali del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx$ e delle trasformate di Fourier (in particolare delle funzioni $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ e $f(x) = e^{-x^2}$). Integrali del tipo $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$ con f funzione di $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$. Le funzioni seno cardinale e integral-seno. Calcolo dell'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$. Calcolo degli integrali $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$.

Trasformate di Fourier. Introduzione euristica alla trasformata di Fourier come estensione della serie di Fourier per $T \to +\infty$. Definizione. Funzioni pari e dispari. Esempi: la funzione porta, la funzione $e^{-a|x|}$, la funzione $\frac{1}{a^2+x^2}$, la Gaussiana e^{-ax^2}. Continuità e limitatezza della trasformata. Linearità e continuità dell'operatore di Fourier. Il Lemma di Riemann-Lebesgue per la trasformata di Fourier. Traslazioni, riscalamento, coniugio. La trasformata della derivata. La derivata della trasformata. Il prodotto di convoluzione. Esistenza del prodotto di convoluzione. Esempio: la funzione tenda. Nuclei di convoluzione (il nucleo di Dirichlet, i nuclei di Gauss, Poisson, mollificatori). Il teorema di approssimazione mediante mollificatori (solo enunciato). La densità di $C_0^\infty(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R})$ (solo enunciato). La trasformata della convoluzione. Antitrasformata. Il teorema di inversione di Fourier. La formula di dualità. La trasformata del prodotto. La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$. Il Teorema di Plancherel. Esempio: la trasformata della funzione seno cardinale. La trasformata di Fourier nella teoria dei campionamenti. Funzioni a banda limitata. Il Teorema di Shannon. Esempi di applicazione della trasformata di Fourier alla risoluzione di equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali.

Trasformate di Laplace. Funzione di Heaviside. Segnali. Funzioni trasformabili e trasformata di Laplace di un segnale. Funzioni di ordine esponenziale. " Linearità" della trasformazione. Teorema sul dominio della trasformata. Ascissa, retta, semipiano di convergenza. Relazione tra le trasformate di Laplace e Fourier. Trasformabilità della funzione $t \cdot f(t)$. Analiticità della trasformata e derivata $k-$esima della trasformata. Comportamento asintotico della trasformata. Smorzamento, cambiamento di scala e traslazione. Trasformata delle funzioni $\operatorname{sen}(at)$, $\cos(at)$, $\operatorname{senh}(at)$, $\cosh(at)$. Esempio di trasformata di una funzione definita a tratti. Trasformata di un segnale periodico. Trasformata della derivata. La formula per funzioni con discontinuità isolate di tipo salto. La funzione Gamma di Eulero e le sue principali proprietà. Singolarità e residui della funzione Γ. Trasformata delle funzioni t^α, (in particolare $f(t) = \sqrt{t}$ e $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$). Prodotto di convoluzione di due segnali. Trasformata del prodotto di convoluzione. Trasformata di una primitiva. Il problema della trasformata inversa. Iniettività dell'operatore $\mathcal{L}$ sulle funzioni continue a tratti. La formula di Bromwich-Mellin / Riemann-Fourier. Scorciatoie per il calcolo dell'antitrasformata. Antitrasformata delle funzioni razionali. I teoremi del valore finale e del valore iniziale. Trasformate del seno cardinale e del seno integrale. Funzioni impulso di durata h e altezza $1/h$, cenni alla distribuzione delta di Dirac δ_0 e alla sua trasformata. Applicazione delle trasformate alle equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti, ai sistemi lineari, alle equazioni integrali e integro-differenziali, ai circuiti elettrici, alle equazioni alle derivate parziali.

Testi consigliati Appunti sul corso (scaricabile dal sito moodle). G. Tironi, Corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (scaricabile dal sito). G.C. Barozzi, *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione*, Zanichelli, Bologna, 2007.

Alla pagina http://www.dmi.units.it/˜obersnel e alla pagina moodle del corso potete trovare ulteriori informazioni sul corso, gli esercizi assegnati a lezione, esempi di compiti d'esame, appunti.