Principi di Ingegneria Elettrica

Ingegneria Industriale

– TRANSITORI–

Stefano Pastore

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

a.a. 2018-19

Introduzione

- Studieremo il transitorio nel dominio del tempo dei circuiti LDI
- Come transitorio intendiamo l'evoluzione dinamica del circuito da uno stato prefissato, dovuto alle condizioni iniziali dei componenti dinamici, allo stato di regime, dovuto alle sorgenti indipendenti
- L'ordine del circuito è dato dal numero di elementi dinamici indipendenti presenti nel circuito. Come "indipendenti" si intende che non ci sono relazioni lineari che legano tra loro le variabili di stato. In tal caso il circuito è detto degenere
- Ci concentreremo sui circuiti del I ordine, con condensatore o induttore. Accenneremo alla soluzione dei circuiti di II ordine e di ordine superiore

Equazione differenziale del I ordine

- Consideriamo la seguente equazione differenziale del I ordine lineare a coefficienti costanti con condizione iniziale X_0

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{x(t)}{\tau} + \dfrac{x_s(t)}{\tau} \\ x(0) = X_0 \end{cases}$$

- La soluzione generale di questa equazione differenziale è costituita da una famiglia di funzioni $x(t)$. Si può dimostrare che esiste una sola soluzione di questa famiglia che ha come condizione iniziale X_0

Equazione omogenea associata

- Definiamo come "omogenea associata" l'equazione differenziale ottenuta ponendo a zero il termine noto $x_s(t)$ (forzante), ovvero

$$\dot{x}^o(t) = -\frac{x^o(t)}{\tau}$$

- La soluzione dell'omogenea associata è:

$$x^o(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- La differenza di due soluzioni è ancora soluzione della omogenea associata

$$x_1^0(t) = K_1 e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad x_2^0(t) = K_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow x_1^0(t) - x_2^0(t) = \overbrace{(K_1 - K_2)}^{K'} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Differenza di soluzioni

- Supponiamo che $x_1(t)$ e $x_2(t)$ siano due soluzioni generali della famiglia, allora la loro differenza sarà comunque soluzione dell'omogenea associata

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{x_1(t)}{\tau} + \frac{x_s(t)}{\tau}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{x_2(t)}{\tau} + \frac{x_s(t)}{\tau}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_1(t) - x_2(t)\right) = -\frac{\left(x_1(t) - x_2(t)\right)}{\tau}$$

- Quindi

$$x_1(t) - x_2(t) = x^o(t) = K'e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Soluzione generale

- La soluzione generale dell'equazione differenziale sarà data dalla soluzione dell'omogenea associata sommata a una soluzione qualsiasi, detta particolare, della equazione completa

$$x(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + x^p(t)$$

- Infatti si ha

$$x_1(t) - x_2(t) = K_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + x^p(t) -$$
$$-\left(K_2 e^{-\frac{t}{\tau}} + x^p(t)\right) =$$
$$= (K_1 - K_2)e^{-\frac{t}{\tau}} = K'e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Soluzione generale (2)

- La costante K viene determinata imponendo la condizione iniziale, ovvero:

$$x(0) = X_0 = K + x^p(0)$$
$$\Rightarrow K = X_0 - x^p(0)$$

- Da cui la soluzione generale per $t \geq 0$ con condizione iniziale X_0 è

$$x(t) = \left(X_0 - x^p(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + x^p(t)$$
$$t \geq 0$$

Soluzione generale (3)

- Se l'equazione differenziale non contiene termine forzante, la soluzione generale con condizione iniziale X_0 è:

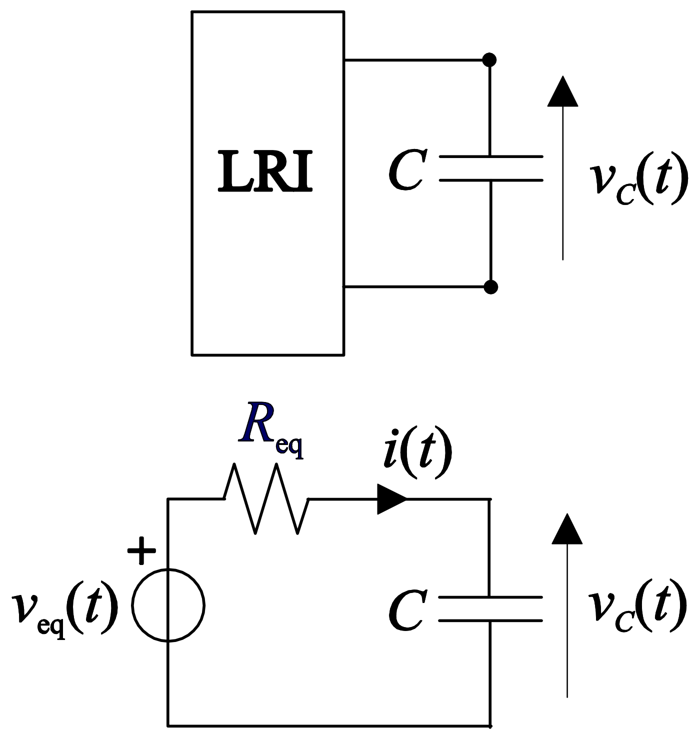
$$x(t) = X_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Questo caso corrisponde, come vedremo, alla scarica di un condensatore o di un induttore su una resistenza
- Altrimenti, in altra forma, la soluzione generale si può trovare con:

$$x(t) = X_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_0^t e^{\frac{u-t}{\tau}} \frac{x_s(u)}{\tau} \mathrm{d}u$$

Circuiti RC del I ordine

- Possiamo applicare alla parte resistiva di un circuito LDI RC del I ordine (ai morsetti del condensatore) il teorema di Thevenin



- Quindi questo semplice circuito RC riassume il comportamento di tutti i circuiti LDI RC del I ordine
- Prima troveremo $v_C(t)$, poi vedremo come determinare le altre variabili del circuito

Equazione differenziale

- Scriviamo l'equazione differenziale del circuito per t ≥ 0 e $v_C(0) = V_0$

$$v_{eq}(t) = R_{eq}i(t) + v_C(t)$$

$$i(t) = C\,\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\rightarrow v_{eq}(t) = R_{eq}C\,\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + v_C(t)$$

- Definendo la "costante di tempo" come

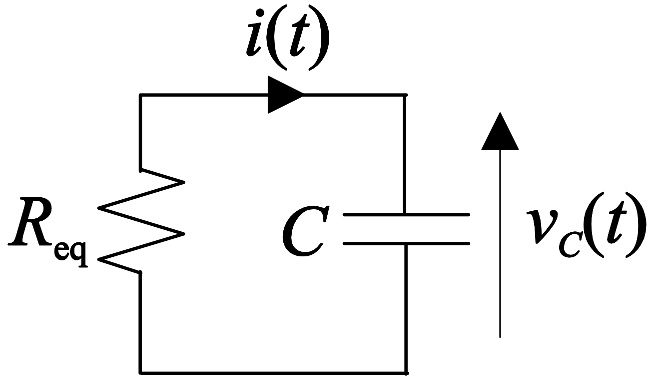
$$\tau_C = R_{eq}C \quad [\mathrm{s}]$$

- Si ottiene per $t \geq 0$

$$\begin{cases} \dot{v}_C(t) = -\dfrac{v_C(t)}{\tau_C} + \dfrac{v_{eq}(t)}{\tau_C} \\ v_C(0) = V_0 \end{cases}$$

Equazione omogenea

- Se il circuito è omogeneo e non ci sono sorgenti indipendenti ($v_{eq}(t) = 0$), allora l'equazione differenziale diventa



$$\dot{v}_C(t) = -\frac{v_C(t)}{\tau_C}$$

- La soluzione rappresenta la scarica di un condensatore su una resistenza con condizione iniziale V_0

$$v_C(t) = V_0\, e^{-\frac{t}{\tau_C}}$$

Soluzione generale

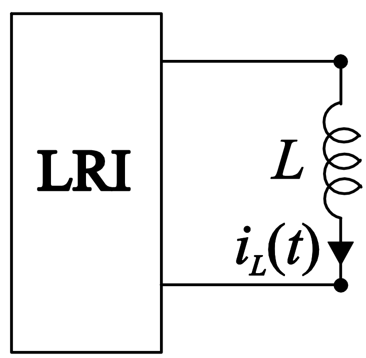
- Nel caso in cui ci siano delle sorgenti indipendenti attive, la soluzione generale con condizione iniziale V_0 è

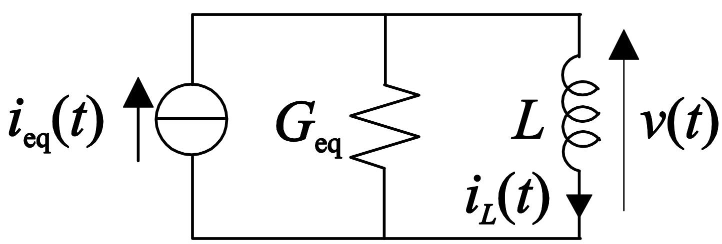
$$v_C(t) = \left(V_0 - v_C^p(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau_C}} + v_C^p(t) \ \mathrm{V}$$
$$t \geq 0$$

- Dove la soluzione particolare $v^p{}_C(t)$ dipende dal tipo di sorgente.

Circuiti RL del I ordine

- Possiamo applicare alla parte resistiva di un circuito LDI RL del I ordine (ai morsetti dell'induttore) il teorema di Norton





- Quindi questo semplice circuito RL riassume il comportamento di tutti i circuiti LDI RL del I ordine
- Prima troveremo $i_L(t)$, poi vedremo come determinare le altre variabili del circuito

Equazione differenziale

- Scriviamo l'equazione differenziale del circuito per t ≥ 0 e $i_\mathrm{L}(0) = I_0$

$$i_{eq}(t) = G_{eq}v(t) + i_L(t)$$

$$v(t) = L\,\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\rightarrow i_{eq}(t) = G_{eq}L\,\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(t)$$

- Definendo la "costante di tempo" come

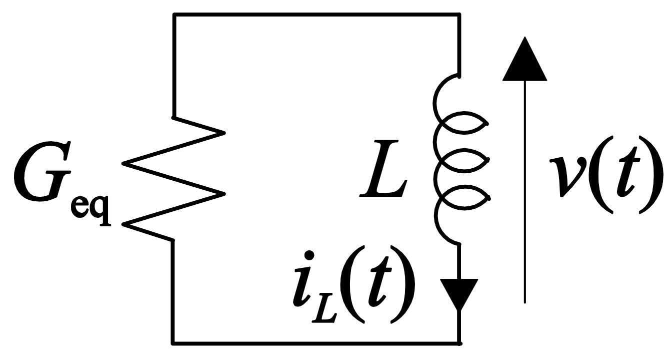
$$\tau_\mathrm{L} = G_\mathrm{eq}L \quad [\mathrm{s}]$$

- Si ottiene per $t \geq 0$

$$\begin{cases} \dot{i}_L(t) = -\dfrac{i_L(t)}{\tau_\mathrm{L}} + \dfrac{i_{eq}(t)}{\tau_\mathrm{L}} \\ i_L(0) = I_0 \end{cases}$$

Equazione omogenea

- Se il circuito è omogeneo e non ci sono sorgenti indipendenti ($i_{eq}(t) = 0$), allora l'equazione differenziale diventa



$$\dot{i}_L(t) = -\frac{i_L(t)}{\tau_L}$$

- La soluzione rappresenta la scarica di un induttore su una resistenza con condizione iniziale I_0

$$i_L(t) = I_0\, e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

Soluzione generale

- Nel caso in cui ci siano delle sorgenti indipendenti attive, la soluzione generale con condizione iniziale I_0 è

$$i_L(t) = \left(I_0 - i_L^p(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}} + i_L^p(t) \ \text{A}$$
$$t \geq 0$$

- Dove la soluzione particolare $i^p{}_L(t)$ dipende dal tipo di sorgente

Concetto di stabilità

- La soluzione dell'omogenea associata è detta anche soluzione libera del circuito, in quanto dipende solo dalle condizioni iniziali
- Un circuito con le sorgenti indipendenti poste a zero è "stabile" se la soluzione libera tende a zero per $t \rightarrow \infty$
- Essendo la soluzione libera uguale a

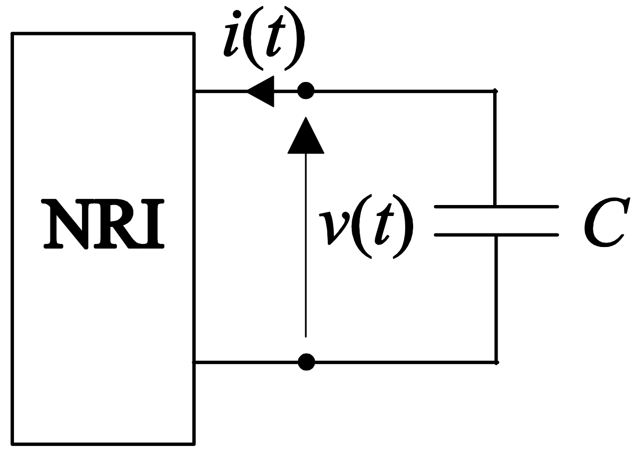
$$x^{oa}(t) = X_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

"stabile" $\rightarrow \tau > 0$

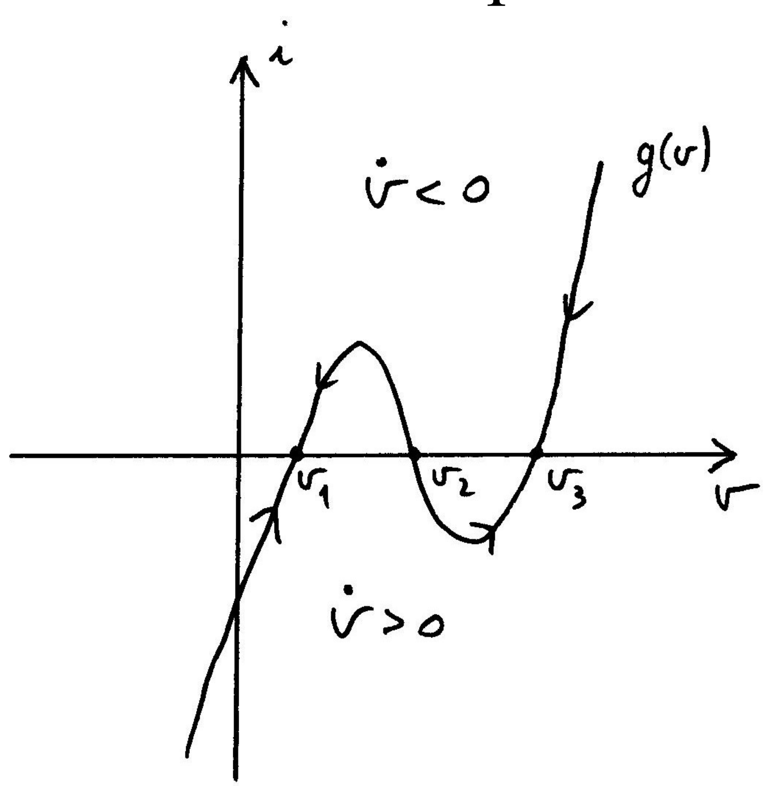
- Un circuito si dice invece instabile se: $\tau < 0$, quindi la soluzione $x^{oa}(t) \rightarrow \infty$
- In un circuito stabile, l'energia immagazzinata nel circuito viene dissipata fino ad annullarsi per $t \rightarrow \infty$
- I circuiti che esamineremo saranno stabili

Stabilità nei circuiti nonlineari

- Considieriamo il seguente circuito



- La caratteristica del bipolo NRI è



Stabilità nei circuiti nonlineari (2)

- L' equazione di stato del circuito è

$$\begin{cases} i = g(v) \\ i = -C\dot{v}(t) \end{cases} \rightarrow \dot{v}(t) = -\frac{1}{C} g(v) = f(v)$$

- La tensione e la corrente del condensatore sono vincolati alla caratteristica del bipolo, detta dynamic route. I tre punti di equilibrio v_1, v_2 e v_3 si ottengono ponendo:

$$\dot{v}(t) = 0 \rightarrow g(v) = 0 \qquad (i = 0)$$

- Corrispondono con le intersezioni della caratteristica $g(v)$ con l'asse delle ascisse

Stabilità nei circuiti nonlineari (3)

- Facendo riferimento all'equazione non-normale del condensatore, si possono distinguere sulla dynamic route due diversi andamenti della soluzione

$$\text{semipiano superiore}: i > 0 \rightarrow \dot{v} < 0$$
$$\text{semipiano inferiore}: i < 0 \rightarrow \dot{v} > 0$$

- Partendo da una qualsiasi condizione iniziale v_0, la soluzione seguirà il verso delle frecce, come disegnato in figura
- Risulta quindi che la soluzione andrà sempre verso uno dei due punti di equilibrio di ascissa v_1 e v_3, mentre si allontanerà dal punto v_2
- Diciamo allora che i punti di equilibrio v_1 e v_3 sono stabili, mentre il punto v_2 è instabile

Stabilità nei circuiti nonlineari (4)

- Per i circuiti nonlineari si può parlare di stabilità globale e di stabilità locale
- Un circuito è globalmente stabile se la soluzione non va mai all'infinito, instabile altrimenti
- La stabilità locale riguarda invece i punti di equilibrio (circuiti del primo ordine)
- Il circuito appena visto è globalmente stabile, mentre due punti di equilibrio sono stabili e uno instabile
- Nei circuiti lineari la caratteristica è una retta e esiste solo un punto di equilibrio, per cui i due concetti di stabilità locale e globale coincidono

Soluzioni particolari

- Esaminiamo ora le soluzioni particolari per una limitata classe di forzanti, ovvero per quelle che hanno la derivata della loro stessa forma funzionale.

- Le forzanti in questione sono:
  1) Costante
  2) Sinusoidale
  3) Esponenziale
  4) Polinomiale

- Per queste forzanti troveremo la soluzione particolare con il metodo di somiglianza.

Condensatore: sorgente costante

- Poniamo: $v_{eq}(t) = V_s \rightarrow v^p{}_C(t) = V_p$

  Ricordando che

$$\dot{v}_C(t) = -\frac{v_C(t)}{\tau_C} + \frac{v_{eq}(t)}{\tau_C}$$

- Si ottiene

$$0 = -\frac{V_p}{\tau_C} + \frac{V_s}{\tau_C} \rightarrow V_p = V_s$$

- La soluzione generale per $t \geq 0$ è

$$v_C(t) = \left(V_0 - V_p\right)e^{-\frac{t}{\tau_C}} + V_p = V_0\, e^{-\frac{t}{\tau_C}} + V_p\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$$

- A regime:

$$v_C(t) \approx v_C^p(t) = V_p$$

$$\rightarrow \dot{v}_C(t) = 0 \rightarrow i(t) = C\dot{v}_C(t) = 0$$

- Il condensatore è equivalente a un circuito aperto

Induttore: sorgente costante

- Poniamo: $i_{eq}(t) = I_{\text{s}} \rightarrow i^{\text{p}}{}_{L}(t) = I_{\text{p}}$
  Ricordando che
$$\dot{i}_L(t) = -\frac{i_L(t)}{\tau_{\text{L}}} + \frac{i_{eq}(t)}{\tau_{\text{L}}}$$
- Si ottiene
$$0 = -\frac{I_p}{\tau_L} + \frac{I_s}{\tau_L} \rightarrow I_p = I_s$$
- La soluzione generale per $t \geq 0$ è
$$i_L(t) = \left(I_0 - I_p\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}} + I_p = I_0\, e^{-\frac{t}{\tau_{\text{L}}}} + I_p\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$
- A regime:
$$i_L(t) \approx i_L^p(t) = I_p$$
$$\rightarrow \dot{i}_L(t) = 0 \rightarrow v(t) = L\dot{i}_L(t) = 0$$
- L’induttore è equivalente a un corto circuito

Condensatore: sorgente sinusoidale

- Poniamo: $v_{eq}(t) = V_s \cos(\omega t + \varphi_s)$

$\rightarrow$ $v^p{}_C(t) = V_p \cos(\omega t + \varphi_p)$

- Trattandosi di una soluzione particolare (o a regime) sinusoidale, possiamo utilizzare i fasori (valore massimo per il modulo) per il suo calcolo

$$\overline{V}_C^{\,p} = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{\dfrac{1}{j\omega C} + R_{eq}} \overline{V}_{eq} = \frac{1}{1 + j\omega R_{eq} C} \overline{V}_{eq}$$

dove : $\overline{V}_{eq} = V_s e^{j\varphi_s}$

Condensatore: sorgente sinusoidale (2)

- Per la antitrasformazione, servono il modulo e la fase di $\mathbf{V}_C^p$

$$\left|\overline{V}_C^{\,p}\right| = \frac{V_s}{\sqrt{1+\omega^2 R_{eq}^2 C^2}}$$

$$\angle \overline{V}_C^{\,p} = \varphi_s - \text{arctg}(\omega\, R_{eq} C) + 2k\pi$$

- Infine si ottiene $v^p{}_C(t)$

$$v_C^p(t) = \left|\overline{V}_C^{\,p}\right| \cos\left(\omega t + \angle \overline{V}_C^{\,p}\right)$$

- La soluzione generale per $t \geq 0$ è

$$v_C(t) = \left(V_0 - \left|\overline{V}_C^{\,p}\right| \cos\left(\angle \overline{V}_C^{\,p}\right)\right) e^{-\frac{t}{\tau_C}} + \\ + \left|\overline{V}_C^{\,p}\right| \cos\left(\omega t + \angle \overline{V}_C^{\,p}\right)$$

Induttore: sorgente sinusoidale

- Poniamo: $i_{eq}(t) = I_s \cos(\omega t + \varphi_s)$

$$\rightarrow \quad i^p{}_L(t) = I_p \cos(\omega t + \varphi_p)$$

- Trattandosi di una soluzione particolare (o a regime) sinusoidale, possiamo utilizzare i fasori (valore massimo per il modulo) per il suo calcolo

$$\bar{I}_L^p = \frac{\dfrac{1}{j\omega L}}{\dfrac{1}{j\omega L} + G_{eq}} \bar{I}_{eq} = \frac{1}{1 + j\omega\, G_{eq} L} \bar{I}_{eq}$$

dove : $\bar{I}_{eq} = I_s e^{j\varphi_s}$

Induttore: sorgente sinusoidale (2)

- Per la antitrasformazione, servono il modulo e la fase di $\mathbf{I}_L{}^p$

$$\left|\bar{I}_L^p\right| = \frac{I_s}{\sqrt{1 + \omega^2 G_{eq}^2 L^2}}$$

$$\angle \bar{I}_L^p = \varphi_s - \mathrm{arctg}(\omega\, G_{eq} L) + 2k\pi$$

- Infine si ottiene $i^p{}_L(t)$

$$i_L^p(t) = \left|\bar{I}_L^p\right| \cos\left(\omega t + \angle \bar{I}_L^p\right)$$

- La soluzione generale per $t \geq 0$ è

$$i_L(t) = \left(I_0 - \left|\bar{I}_L^p\right| \cos\left(\angle \bar{I}_L^p\right)\right) e^{-\frac{t}{\tau_L}} +$$
$$+ \left|\bar{I}_L^p\right| \cos\left(\omega t + \angle \bar{I}_L^p\right)$$

Sorgente esponenziale

- Poniamo per un condensatore:

$$v_{eq}(t) = V_s e^{-\frac{t}{\tau_s}} \rightarrow v_C^p(t) = V_p e^{-\frac{t}{\tau_s}} \quad \tau_s \neq \tau_C$$

- Per trovare V_p, si può soltanto sostituire $v^p_C(t)$ nella equazione differenziale (deve essere: $\tau_C \neq \tau_s$)

$$-\frac{V_p}{\tau_s} e^{-\frac{t}{\tau_s}} = -\frac{V_p}{\tau_C} e^{-\frac{t}{\tau_s}} + \frac{V_s}{\tau_C} e^{-\frac{t}{\tau_s}} \quad \forall t$$

- Semplificando l'esponenziale (sempre $\neq 0$), si ottiene una equazione in V_p

$$V_p = \frac{V_s}{\tau_C \left(\frac{1}{\tau_C} - \frac{1}{\tau_s} \right)}$$

Sorgente esponenziale (2)

- La soluzione generale per $t \geq 0$ è

$$v_C(t) = \left(V_0 - V_p\right)e^{-\frac{t}{\tau_C}} + V_p e^{-\frac{t}{\tau_s}}$$

- Per gli induttori vale un discorso analogo per cui

$$I_{eq}(t) = I_s e^{-\frac{t}{\tau_s}} \rightarrow i_L^p(t) = I_p e^{-\frac{t}{\tau_s}} \quad \tau_s \neq \tau_L$$

$$I_p = \frac{I_s}{\tau_L\left(\frac{1}{\tau_L} - \frac{1}{\tau_s}\right)}$$

$$i_L(t) = \left(I_0 - I_p\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}} + I_p e^{-\frac{t}{\tau_s}}$$

Sorgente polinomiale

- Consideriamo una generica sorgente (per l'esempio di grado 2)

$$x_{eq}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$\rightarrow x^p(t) = k_0 + k_1 t + k_2 t^2$$

- Per l'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{\tau} + \frac{x_{eq}(t)}{\tau}$$

- Sostituendo la soluzione particolare si trova

$$k_1 + 2k_2 t = -\frac{k_0}{\tau} - \frac{k_1 t}{\tau} - \frac{k_2 t^2}{\tau} +$$

$$+ \frac{a_0}{\tau} + \frac{a_1 t}{\tau} + \frac{a_2 t^2}{\tau} \qquad \forall t$$

Sorgente polinomiale (2)

- Dal momento che abbiamo scritto una identità, perché sia valida per ogni t dobbiamo eguagliare i coefficienti dei singoli monomi, il che equivale a scrivere un sistema di 3 equazioni in 3 incognite, ovvero i parametri k_0, k_1 e k_2

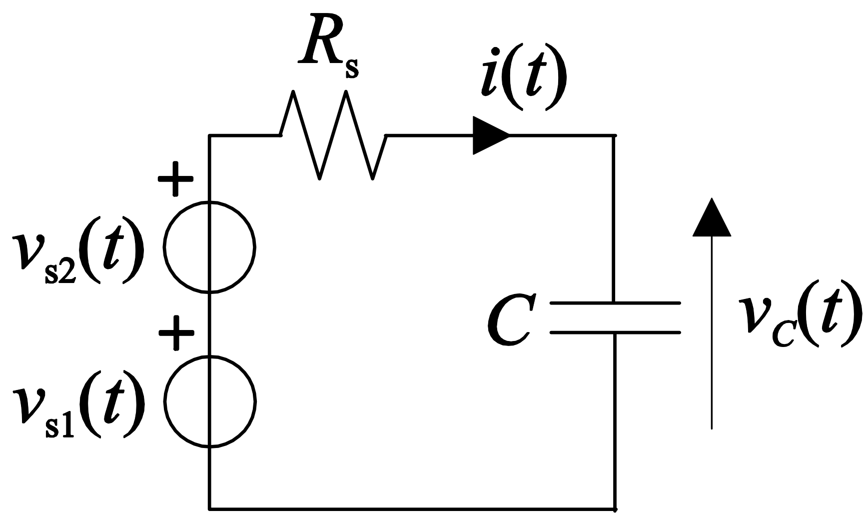
$$\begin{cases} k_1 = -\dfrac{k_0}{\tau} + \dfrac{a_0}{\tau} \\ 2k_2 = -\dfrac{k_1}{\tau} + \dfrac{a_1}{\tau} \\ 0 = -\dfrac{k_2}{\tau} + \dfrac{a_2}{\tau} \end{cases}$$

- La soluzione generale per $t \geq 0$ è

$$x(t) = \left(X_0 - k_0\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + k_0 + k_1 t + k_2 t^2$$

Principio di sovrapposizione delle soluzioni particolari

- Prendiamo ad esempio un circuito RC del I ordine con 2 sorgenti indipendenti



- La soluzione particolare $v^{p}_{C}(t)$ è esprimibile come

$$v_C^p(t) = v_C^{p1}(t) + v_C^{p2}(t)$$

- Dove $v^{p1}_{C}(t)$ è associata a $v_{s1}(t)$ e $v^{p2}_{C}(t)$ è associata a $v_{s2}(t)$

Principio di sovrapposizione delle soluzioni particolari (2)

- Si ha che: $v_s(t) = v_{s1}(t) + v_{s2}(t)$

1) accendiamo la prima sorgente $v_{s1}(t)$ e spegniamo la seconda ($v_{s2}(t) = 0$). La soluzione particolare associata $v^{p1}{}_C(t)$ soddisfa l'equazione differenziale del circuito

$$\dot{v}_C^{p1}(t) = -\frac{v_C^{p1}(t)}{\tau_\mathrm{C}} + \frac{v_{s1}(t)}{\tau_\mathrm{C}}$$

2) accendiamo la seconda sorgente $v_{s2}(t)$ e spegniamo la prima ($v_{s1}(t) = 0$). La soluzione particolare associata $v^{p2}{}_C(t)$ soddisfa anch'essa l'equazione differenziale del circuito

$$\dot{v}_C^{p2}(t) = -\frac{v_C^{p2}(t)}{\tau_\mathrm{C}} + \frac{v_{s2}(t)}{\tau_\mathrm{C}}$$

Principio di sovrapposizione delle soluzioni particolari (3)

- Sommiamo le equazioni appena scritte. Si ottiene

$$\dot{v}_C^{p1}(t) + \dot{v}_C^{p2}(t) = -\frac{v_C^{p1}(t)}{\tau_\mathrm{C}} - \frac{v_C^{p2}(t)}{\tau_\mathrm{C}} + $$

$$+ \frac{v_{s1}(t)}{\tau_\mathrm{C}} + \frac{v_{s2}(t)}{\tau_\mathrm{C}}$$

- E applicando la proprietà della linearità della derivata e la proprietà associativa della somma

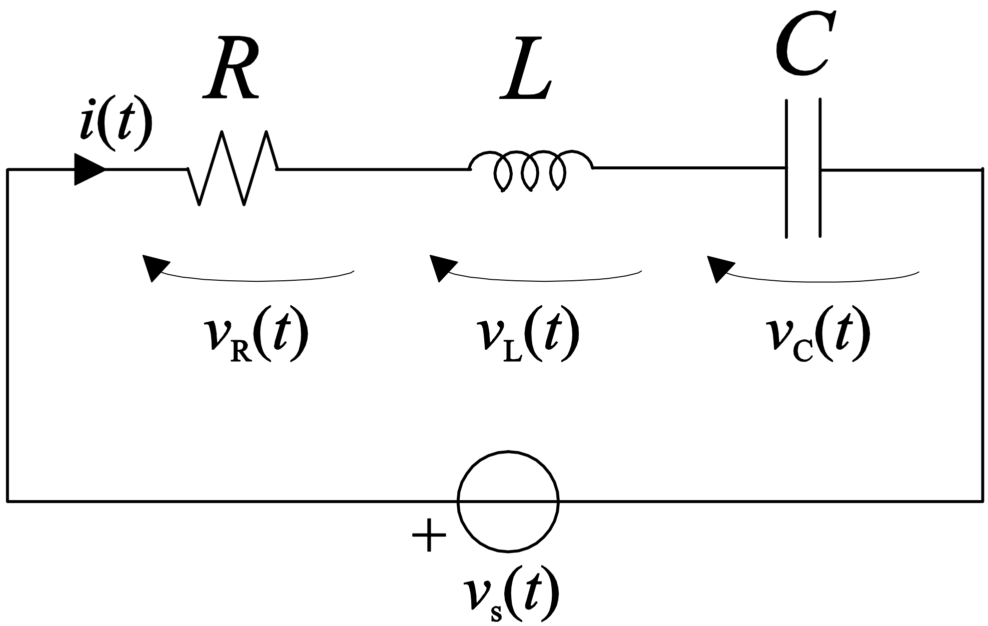
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_C^{p1}(t) + v_C^{p2}(t)\right) = -\frac{\left(v_C^{p1}(t) + v_C^{p2}(t)\right)}{\tau_\mathrm{C}} +$$

$$+ \frac{\left(v_{s1}(t) + v_{s2}(t)\right)}{\tau_\mathrm{C}}$$

- Risulta che la soluzione particolare associata a entrambe le sorgenti è composta dalla somma delle soluzioni particolari associate alle singole sorgenti

Circuito risonante reale serie

- È un circuito RLC del II ordine (R, L, $C > 0$)



- Le variabili di stato sono $v_C(t)$ e $i_L(t)$, a cui sono associate le condizioni iniziali $v_C(0)$ e $i_L(0)$ ($= i(0)$)

$$v_s(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$$

$$v_R(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = C\dot{v}_C(t)$$

$$v_L(t) = L\dot{i}(t)$$

Circuito risonante reale serie (2)

- Ne risulta

$$v_s(t) = RC\dot{v}_C(t) + LC\ddot{v}_C(t) + v_C(t) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{v}_C(t) + \dfrac{R}{L}\dot{v}_C(t) + \dfrac{1}{LC}v_C(t) = \dfrac{1}{LC}v_s(t) \\ v_C(0) = V_0 \\ \dot{v}_C(0) = \dfrac{i(0)}{C} = \dfrac{I_0}{C} \end{cases}$$

- Il polinomio caratteristico associato alla equazione omogenea è

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\text{dove : } {}_1p_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Circuito risonante reale serie (3)

- La soluzione generale per t ≥ 0 è:

$$
\begin{cases}
v_C(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + v_C^p(t) \\
v_C(0) = V_0, \qquad \dot{v}_C(0) = \dfrac{I_0}{C}
\end{cases}
$$

- Dove k_1 e k_1 dipendono dalle condizioni iniziali
- La soluzione particolare viene calcolata come nel caso dei circuiti del I ordine
- Il circuito è stabile se $\Re\{p_1\}$ e $\Re\{p_2\}$ sono negative

Circuito risonante reale serie (4)

- Per $R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ p_1 e p_2 sono reali → soluzione omogenea composta da due esponenziali reali (k_1 e k_2 sono reali)

- p_1 e p_2 sono complessi coniugati se:

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0 \rightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2z_0$$

La resistenza deve dissipare «poca energia» rispetto a quella immagazzinata dagli elementi reattivi (z_0: impedenza caratteristica)

Circuito risonante reale serie (5)

- Se p_1 e p_2 sono complessi coniugati,
  $p_1 = \sigma + j\omega$, $p_2 = \sigma - j\omega$,
  perché la soluzione $v_C(t)$ sia reale →
  $k_1 = k^*_2 = |\, k_1 \,| e^{j\varphi}$

- Si trova quindi

$$v_C(t) = 2e^{\sigma t}\Re\{k_1 e^{j\omega t}\} + v_C^p(t) \rightarrow$$

$$\begin{cases} v_C(t) = 2|k_1|e^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi) + v_C^p(t) \\ v_C(0) = V_0, \qquad \dot{v}_C(0) = I_0 / C \end{cases}$$

Circuiti di ordine n in t

- Per un circuito non degenere LDI di ordine n ($n = n_\mathrm{D}$: numero di componenti dinamici), possiamo scrivere o una equazione differenziale di ordine n oppure un sistema di n equazioni differenziali del I ordine. Di norma si utilizza quest'ultimo metodo. Indicando con x_k la generica variabile di stato, si ottiene la seguente equazione vettoriale di stato

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{X}_0$$

- Nel caso di un circuito risonante serie, si ha

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C(t) \\ \dot{i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} v_s(t)$$

$$v_C(0) = V_0, \quad i(0) = I_0$$

Circuiti di ordine n in t (2)

- Gli autovalori della matrice **A** sono

$$\det(p\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & p+\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} = p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$$

$$_1p_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

- p_1 e p_2 sono le frequenze naturali del circuito
- Coincidono con le radici del polinomio caratteristico

Circuiti di ordine n in t (3)

- In generale, la soluzione generale può essere scritta come:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\,\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

- L'esponenziale di matrice viene calcolato sulla base degli autovalori e autovettori della matrice **A**

- Oppure, si può scrivere:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left(\mathbf{X}_0 - \mathbf{x}^p(0)\right) + \mathbf{x}^p(t)$$

- Quando la soluzione particolare può essere calcolata per opportune forzanti come per i circuiti del primo ordine, con il metodo della somiglianza.

Circuiti di ordine n in t (4)

- Esplicitando l'esponenziale di matrice si ottiene:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}_1 e^{p_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}_2 e^{p_2 t} + \mathbf{x}^p(t)$$

- Dove ξ_1 e ξ_2 sono gli autovettori di **A** e c_1 e c_2 dipendono dalle condizioni iniziali e dalla particolare (Se p_1 e p_2 sono complessi coniugati, lo saranno pure ξ_1, ξ_2 e c_1, c_2)

- $e^{p_1 t}$ e $e^{p_2 t}$ sono i modi naturali del circuito

Sovrapposizione delle condizioni iniziali

- Consideriamo un circuito LDI di ordine *n* senza sorgenti indipendenti

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

- La soluzione è

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}_0$$

- Dove

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix}$$

Sovrapposizione delle condizioni iniziali (2)

- Vale il principio della sovrapposizione delle condizioni iniziali per cui

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 =$$

$$= e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} x_{01} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 0 \\ x_{02} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix}$$

Stabilità (circuiti lineari)

- Un circuito lineare è stabile se le parti reali delle frequenze naturali (autovalori) p_1, p_2 …, p_n sono negative

- Un circuito lineare stabile senza sorgenti indipendenti, lasciato evolvere da una certa condizione iniziale, tenderà a dissipare tutta l'energia contenuta nei componenti reattivi, per cui le variabili di stato tenderanno a zero come il tempo tende all'infinito

Stabilità (locale) alla Liapunov

- Una soluzione $x(t)$ $[n\text{x}1]$ di un circuito nonlineare, definita nell'intervallo $[t_0,\infty)$, è asintoticamente stabile se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che ogni soluzione $x_1(t)$ per cui vale

$$\left\| x_1(t_0) - x(t_0) \right\| < \delta$$

- soddisfa

$$\lim_{t \to \infty} \left\| x_1(t) - x(t) \right\| < \varepsilon$$

- Nei circuiti nonlineari la stabilità locale è limitata alla singola soluzione, non si può estendere al circuito
- Nei circuiti lineari si dimostra che la stabilità di una soluzione si può estendere alla stabilità di tutte le soluzioni (nonché dei punti di equilibrio) e quindi alla stabilità del circuito stesso

Altre variabili del circuito

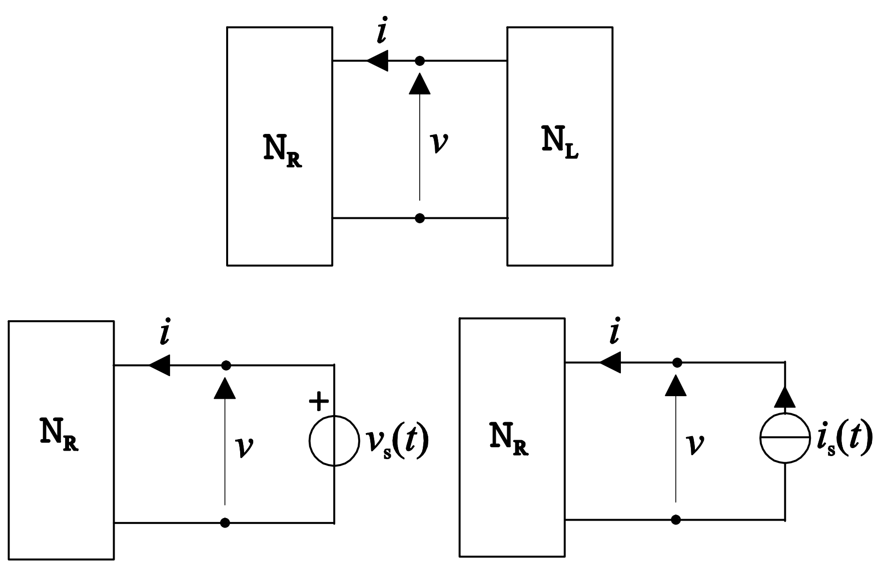
- Ricordiamo le equazioni di uscita della teoria dei sistemi

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

- Le variabili del circuito (tensioni, correnti, potenziali), espresse come $\mathbf{y}(t)$, sono una combinazione lineare dello stato e degli ingressi.
- Nei circuiti si ricorre al teorema di sostituzione per ricavare un circuito resistivo associato al circuito dinamico originale, la cui soluzione dia le variabili cercate

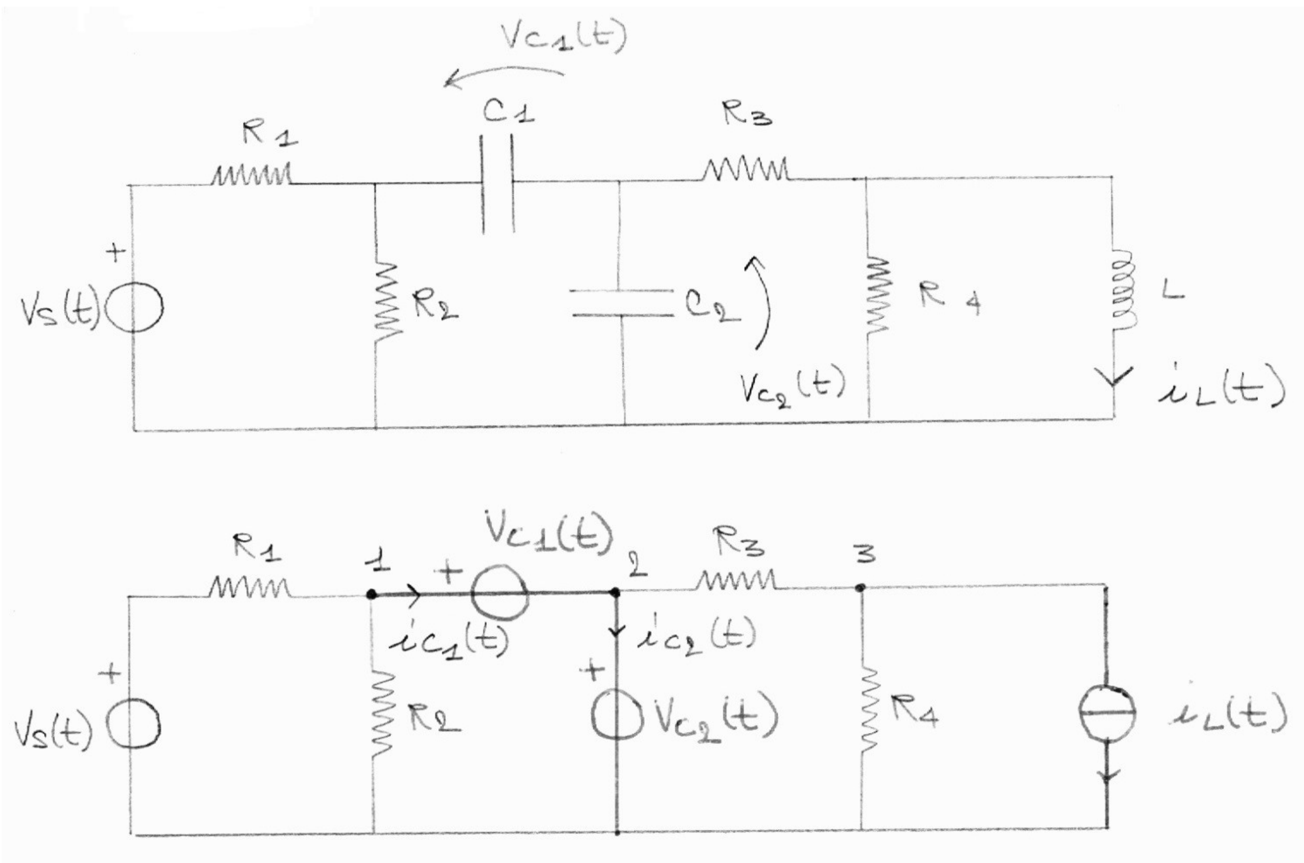
Teorema di sostituzione

- Se $\mathcal{N}$ (circuito completo in alto) ha un'unica soluzione $v = v_s(t)$ ($i = i_s(t)$) per ogni t, allora $\mathcal{N}_L$ può essere sostituita da una sorgente di tensione $v_s(t)$ (corrente $i_s(t)$) senza influenzare le tensioni e le correnti dentro $\mathcal{N}_R$, ammesso che $\mathcal{N}_v$ ($\mathcal{N}_i$) abbia un'unica soluzione per ogni t



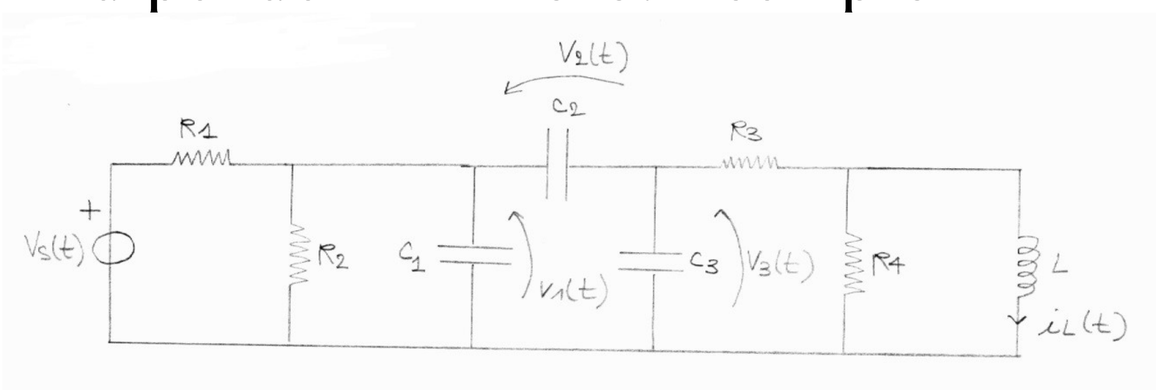
Circuito resistivo associato

- Applicando il teorema di sostituzione, i condensatori sono sostituiti con dei generatori di tensione di valore $v_C(t)$ e gli induttori con dei generatori di corrente di valore $i_L(t)$.
- Risolvere questo circuito resistivo equivale a scrivere le equazioni di uscita



Circuiti degeneri

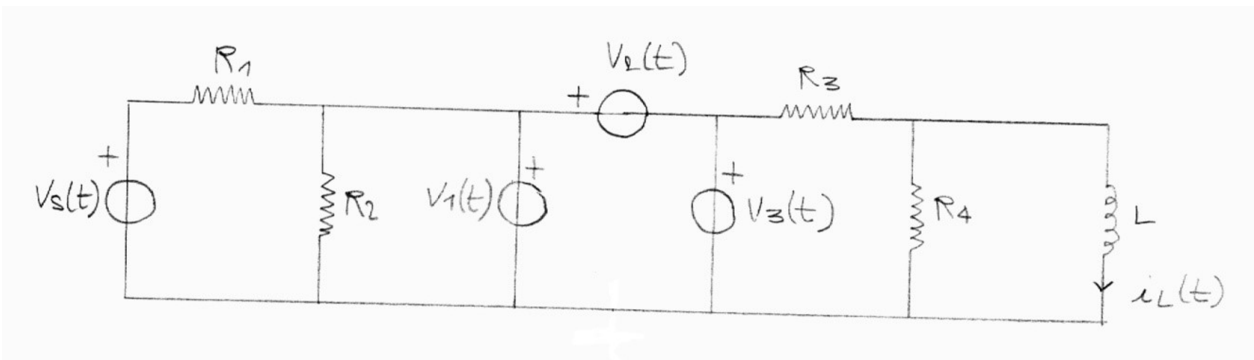
- Prendiamo in considerazione un circuito in cui le variabili di stato siano soggette a una o più relazioni lineari, non siano quindi linearmente indipendenti tra loro. Esempio



- $v_1(t) - v_2(t) - v_3(t) = 0$
- In questo circuito: $n_D = 4$, $n_{\text{Lin}} = 1$
- In virtù della relazione lineare, l'ordine del circuito è: $n = n_D - n_{\text{Lin}} = 3$
- La matrice **A** ha dimensioni [3x3]

Circuiti degeneri (2)

- Risolta l'equazione di stato, le variabili di uscita vengono calcolate come nel caso non-degenere con una avvertenza:



- Questo circuito ha infinite soluzioni, in quanto non è determinata la corrente nella maglia dei condensatori
- Sostituisco allora uno dei generatori di tensione con un generatore di corrente che sostenga la corrente del condensatore, ovvero $i_k = C_k \dot{v}_k$

Parallelo e serie di C e L

- Un circuito con due condensatori in serie è molto diverso da un circuito con due condensatori in parallelo. Lo stesso dicasi per gli induttori
- Due condensatori in serie (induttori in parallelo) hanno le tensioni (correnti) indipendenti, quindi corrispondono a due variabili di stato
- Due condensatori in parallelo (induttori in serie) hanno le tensioni (correnti) dipendenti linearmente, quindi corrispondono a una variabile di stato

Parallelo e serie di C e L (2)

- Parallelo di due condensatori:

$$C_\mathrm{p} = C_1 + C_2$$

- Serie di due condensatori:

$$C_\mathrm{s} = (C_1\ C_2)/(C_1 + C_2)$$

- Serie di due induttori:

$$L_\mathrm{s} = L_1 + L_2$$

- Parallelo di due induttori

$$L_\mathrm{p} = (L_1\ L_2)/(L_1 + L_2)$$

Partitori di C e L

- Un partitore di tensione realizzato con due condensatori o due induttori permette di avere un rapporto di riduzione indipendente dalla frequenza

- Elemento importante: non dissipano potenza attiva come le resistenze

- N.B. A causa del fatto che il condensatore sta al denominatore dell'impedenza, si ha che

$$\frac{\overline{V}_1}{\overline{V}_s} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

Presenza di un interruttore

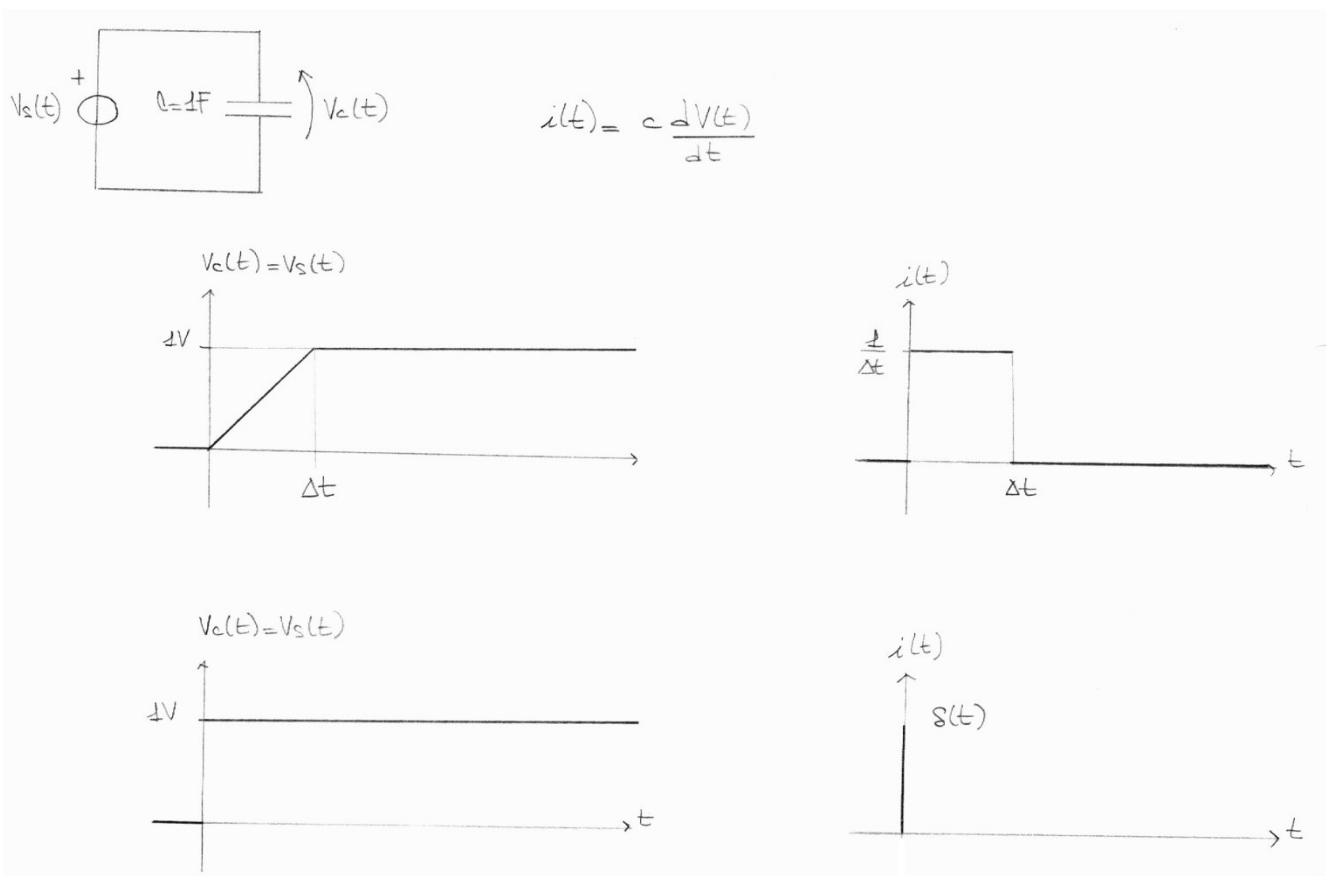
- L'interruttore è un componente resistivo tempo-variante.
- Consideriamo un interruttore ideale, il cui stato aperto corrisponde a un circuito aperto e lo stato chiuso a un corto circuito
- Divideremo lo studio del circuito in due parti, per $t \leq t_0$ e $t \geq t_0$, dove t_0 è l'istante in cui l'interruttore commuta
- Per collegare le due evoluzioni temporali, utilizzeremo il principio di continuità delle variabili di stato

Principio di continuità delle variabili di stato

- Consideriamo la tensione su un condensatore (idem per un induttore)

$$v_C(t+\Delta t) - v_C(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{C} \int_t^{t+\Delta t} i(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$$

se : $|i(\tau)| < M$



Transitori con Laplace

- Trasformando l'equazione matriciale di stato con Laplace

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0^-) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\left[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\right]\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0^-) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

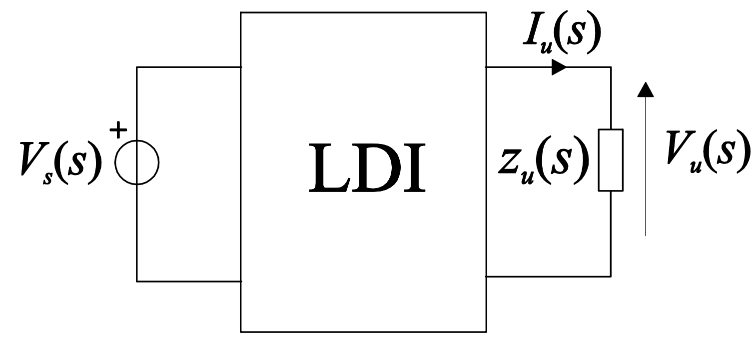
$$\mathbf{X}(s) = \underbrace{\left[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{x}(0^-)}_{\text{soluzione libera}} + \underbrace{\left[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)}_{\text{soluzione forzata}}$$

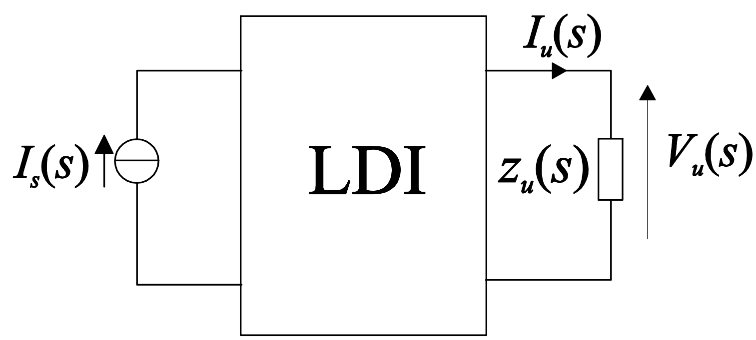
- Il denominatore della $\mathbf{X}(s)$ è dato da $\det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]$ → circuito stabile se tutti i poli (coincidenti con gli autovalori di $\mathbf{A}$) sono a parte reale negativa
- Nel dominio del tempo si ottiene

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\left(\mathbf{X}_0 - \mathbf{x}^p(0)\right)}_{\text{soluzione transitoria}} + \underbrace{\mathbf{x}^p(t)}_{\text{soluzione a regime}}$$

Circuiti con un ingresso e una uscita

- Rappresentiamo un circuito LDI stabile e non-degenere di ordine *n* con gli schemi di figura





- Le funzioni di rete (in Laplace) esprimono la relazione esistente tra la (unica) sorgente indipendente (l'ingresso) e la tensione o corrente su una impedenza (l'uscita)

Dallo stato alle funzioni di rete

- Indicata genericamente con $u(t)$ la variabile in ingresso e con $y(t)$ la variabile di uscita, le equazioni di stato e di uscita in t sono

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t) \\ \mathbf{x}(0) = 0 \end{cases}$$

- Dove $\mathbf{x}(t)$ è un vettore [n x 1], $y(t)$ e $u(t)$ sono scalari
- Le condizioni iniziali sono poste a zero per il fatto che ci interessa solamente il rapporto tra l'ingresso e l'uscita; $y(t)$ rappresenta solamente la soluzione forzata (e non quella libera)
- Le funzioni di rete possono essere un rapporto di tensioni o di correnti, quindi numeri puri, o avere le dimensioni di una trans-impedenza o trans-ammettenza

Dallo stato alle funzioni di rete (2)

- Trasformando con Laplace si ottiene la funzione di rete $H(s)$

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$\left[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\right]\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = \left[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\left[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{B}U(s) + DU(s)$$

$$Y(s) = \left(\mathbf{C}\left[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{B} + D\right)U(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}\left[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{B} + D$$

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_{n'} s^{n'}}$$

- $H(s)$ è una funzione razionale fratta a coefficienti reali in s, dove grad$(D(s)) = n' \le n$
- $N(s)$ e $D(s)$ non contengono fattori comuni che devono essere cancellati nel calcolo

Funzioni di rete

- Le radici di $D(s)$ sono chiamate "poli", quelle di $N(s)$ "zeri". Sono reali o complesse coniugate
- I poli derivano da: $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0$, espressione che ci dà gli autovalori di $\mathbf{A}$ (coincidenti con le radici della equazione caratteristica)
- I poli in genere coincidono con gli autovalori di $\mathbf{A}$ ($n = n'$), a meno che qualche radice al denominatore non si elida con una corrispondente al numeratore, ovvero se qualche polo e zero coincidono. Questi corrispondono ai modi non-controllabili e non-osservabili. In questo caso $n' < n$
- Gli zeri di $N(s)$ possono essere positivi o a parte reale positiva, non influendo sulla stabilità

Funzioni di rete (3)

- $H(s)$ può essere sviluppata in somma di frazioni parziali, da cui si può ottenere la $h(t)$

$$H(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{c_{n'}}{s - p_{n'}}$$

$$\Rightarrow h(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \cdots + c_{n'} e^{p_{n'} t}$$

per $t \geq 0$

- $h(t)$ (risposta alla $\delta(t)$) consiste in una somma di esponenziali reali e complesse; se tutte le radici, ovvero i poli, sono a parte reale negativa, $h(t)$ va a zero per t → ∞, ovvero il circuito è stabile
- Se $U(s) = 1$ [$u(t) = \delta(t)$], allora: $H(s) = Y(s)$

  La funzione di rete coincide con l'uscita del circuito alimentato da una sorgente impulsiva unitaria
- La stabilità del circuito si vede anche dall'analisi delle funzioni di rete

Funzioni di rete sull'asse $j\omega$

- Esaminiamo $H(s)$ per un circuito stabile sull'asse immaginario, cioè poniamo $s = j\omega$
- $H(j\omega)$ rappresenta il rapporto tra l'uscita e l'ingresso quando la sorgente è una sinusoide a frequenza ω.

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

- Il modulo esprime il rapporto tra i moduli delle sinusoidi in uscita e in ingresso, la fase la differenza delle fasi, ovvero il ritardo tra le due sinusoidi