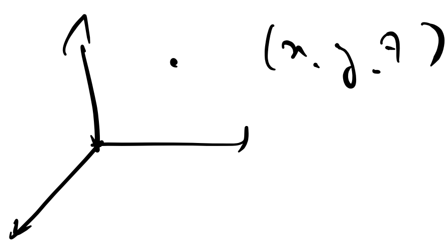
MECCANICA RAZIONALE

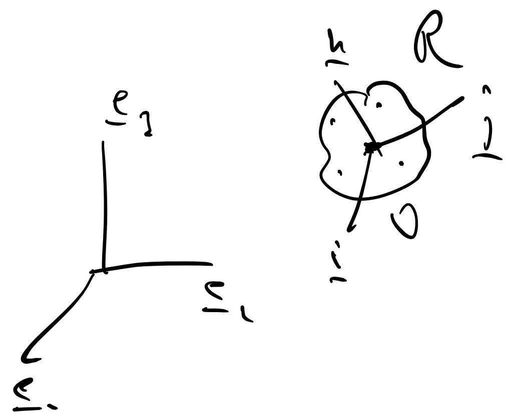
Punto materiale → Corpo Rigido

distanza fra due punti qualsiasi non dipende dalla configurazione

↓

3 coordinate

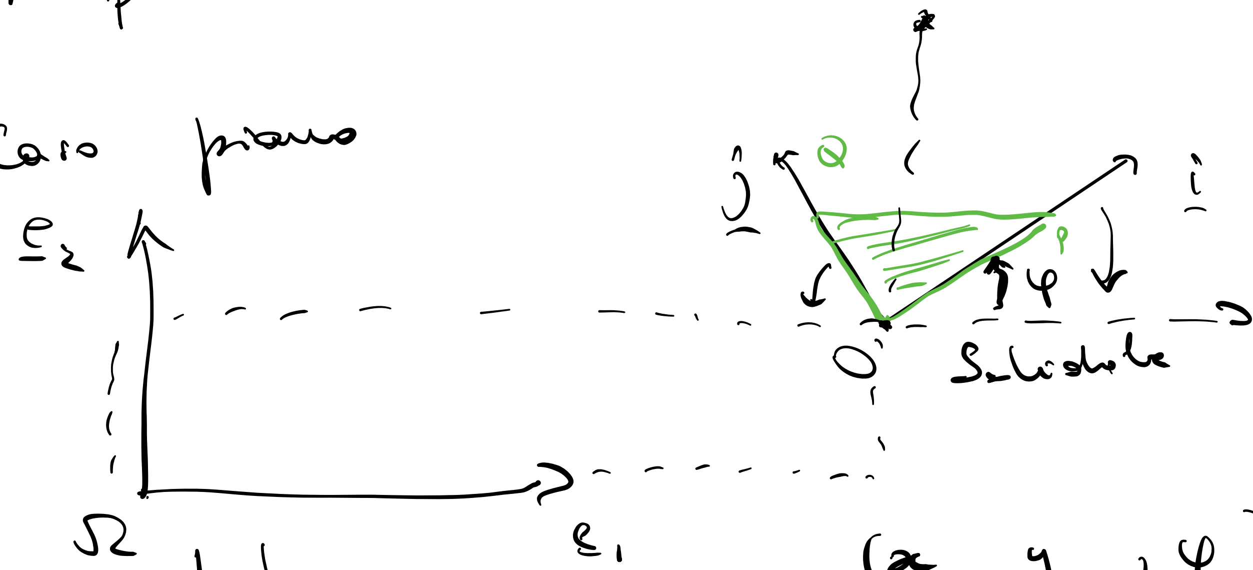




↓

N punti materiali

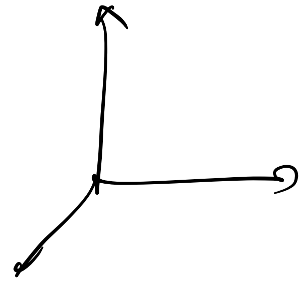
Caso piano



(x_0, y_0, φ)

$$x_P = x_0 + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{1} \cdot \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$

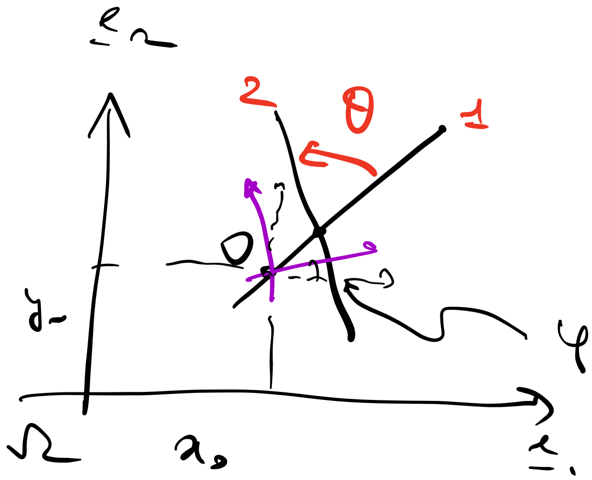


R

Corpi deformabili

Esempi

Fortini

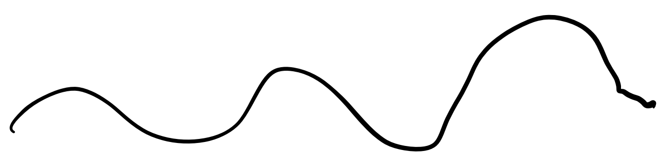


$(x_0, y_0, \varphi, \theta)$

Corda

Configurazione di riferimento Γ^*

Configurazione generica Γ



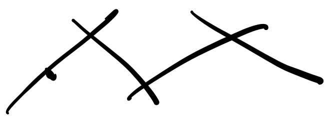
Γ curva (piana)

i punti di Γ sono in corrispondenza biunivoca con i punti di Γ^*

Configurazioni $\rightarrow$ spazio di funzioni

$\rightarrow$ dimensione infinita.

Numero finito di gradi di libertà $\xrightarrow{vs}$ Numero ∞ di gradi di libertà



VINCOLI

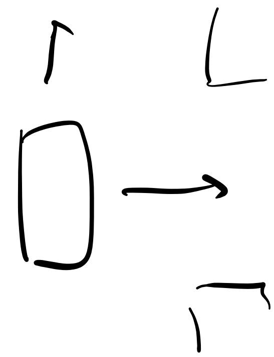
Si possono distinguere in:

- Vincoli OLONOMI (o di posizione)

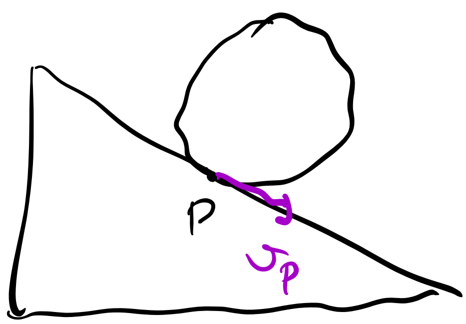
  Limitare le configurazioni di un sistema, attraverso

una relazione funzionale
tra le coordinate

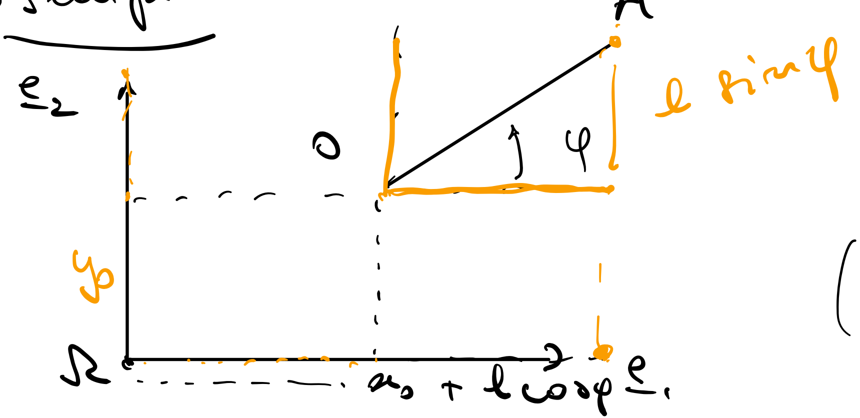
- Vincoli ANOLONOMI



- la relazione funzionale
ora può dipendere dalle
velocità

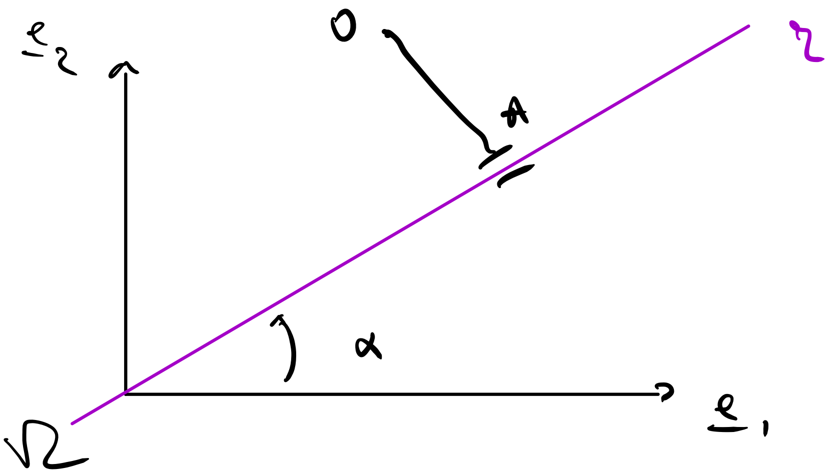


Esempio



$\overline{OA} = l$

(x_0, y_0, φ)



il punto A è vincolato a stare su r

" cerniera con carrello "

$$\underline{x}_A \longrightarrow x_A \sin\alpha - y_A \cos\alpha = 0$$

Sappiamo $\begin{cases} x_A = x_0 + l\cos\varphi \\ y_A = y_0 + l\sin\varphi \end{cases}$

$$\underbrace{(x_0 + l\cos\varphi)}_{x_A}\sin\alpha - \underbrace{(y_0 + l\sin\varphi)}_{y_A}\cos\alpha = 0$$

Assumiamo $\cos\alpha \neq 0$

$$y_0 = (x_0 + l\cos\varphi)\tan\alpha - l\sin\varphi$$

(x_0, y_0, φ) non sono più libere

(x_0, φ) sono libere ma y_0 è dato per ogni (x_0, φ)

Il vincolo ha tolto un grado di libertà.

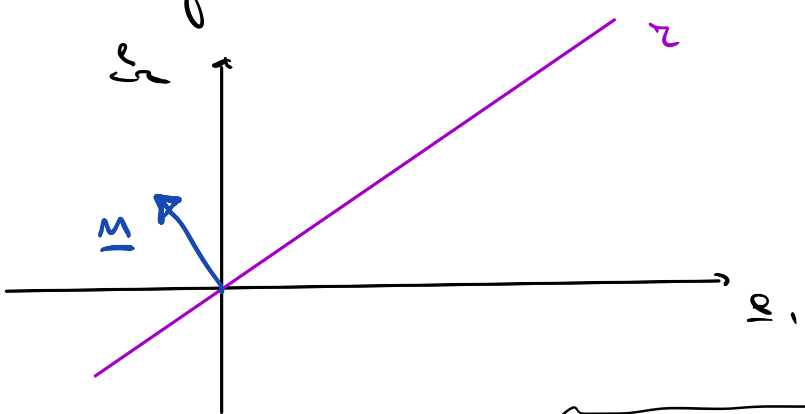
Esempio vincolo **mobile**

→ la retta ruota $\alpha(t) = \omega t$

Caso precedente: vincolo fisso.

Esempio: Vincolo unilatero

Vogliamo che A sia **sopra** la retta



$$\underline{n} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$$

$$\underline{x}_A \cdot \underline{n} \geq 0$$

$$\underline{x}_A \cdot \underline{n} = (x_A \underline{e}_1 + y_A \underline{e}_2) \cdot (-\sin\alpha\, \underline{e}_1 + \cos\alpha\, \underline{e}_2)$$

$$= -x_A \sin\alpha + y_A \cos\alpha$$

$\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = 0$

$\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1 = 1$

$\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2 = 1$

$$= -(x_0 + l\cos\varphi)\sin\alpha + (y_0 + l\sin\varphi)\cos\alpha \geq 0$$

Il vincolo visto prima è BILATERO

Vincoli più comuni sono

olonomi, fissi, bilateri,

semplici.

Vincolo semplice = Toglie un solo grado di libertà

Consideriamo S con N gradi di libertà. Siano $\underline{q} = (q_1, \dots, q_N)$

(prima (x_0, y_0, φ))

Un vincolo semplice è un'equazione

$$f(\underline{q}) = f(q_1, \dots, q_N) = 0$$

Condizioni

- esistenza $\quad \mathcal{C} = \{ \underline{q} : f(\underline{q}) = 0 \}$

sia non vuoto,

$$f(x_0, y_0, \varphi) = x_0^2 + y_0^2 + 1$$

$$f \neq 0$$

- <u>semplice</u> $\quad f(x_0, y_0, \varphi) = x_0^2 + y_0^2$

$$f = 0 \iff x_0 = y_0 = 0$$

$\rightarrow$ Tolgo 2 gradi di libertà

Voglio una condizione per ridurre $f(q) = 0$ rispetto ad una coordinata

$$\|\nabla f\|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial q_N}\right)^2 \neq 0$$

in $\mathcal{C} = \{ q : f(q) = 0 \}$

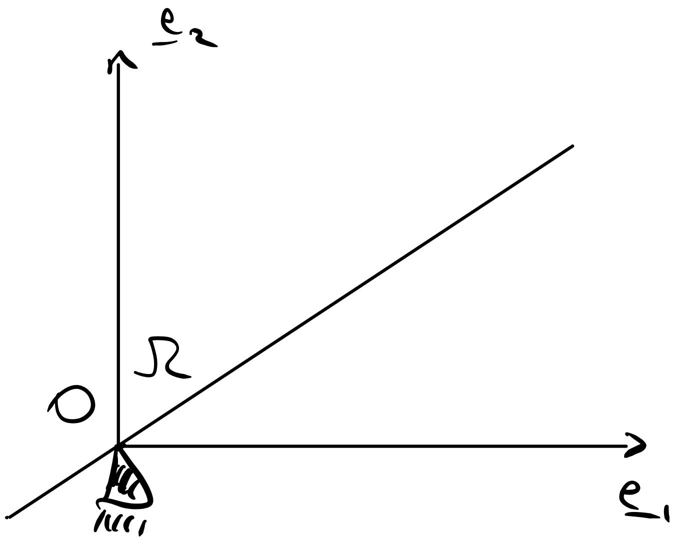
Se $f(x_0, y_0, \varphi) = x_0^2 + y_0^2$

$$\mathcal{C} = \{ x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ \varphi \text{ generico} \}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 = (2x_0)^2 + (2y_0)^2 \underset{\text{in } \mathcal{C}}{=} 0$$

Sovrapposizione dei vincoli

Esempio

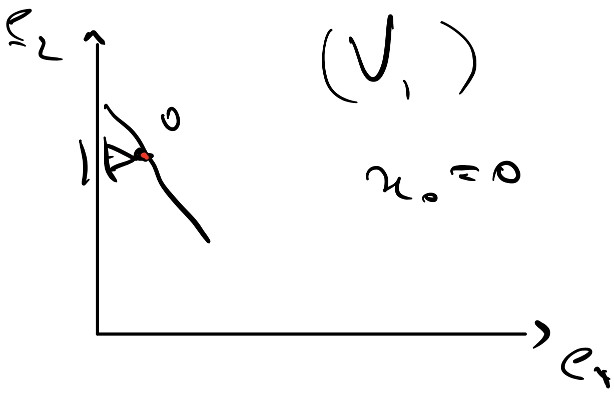


Asta vincolata con una cerniera fissa

(V₁) $x_0 = 0$

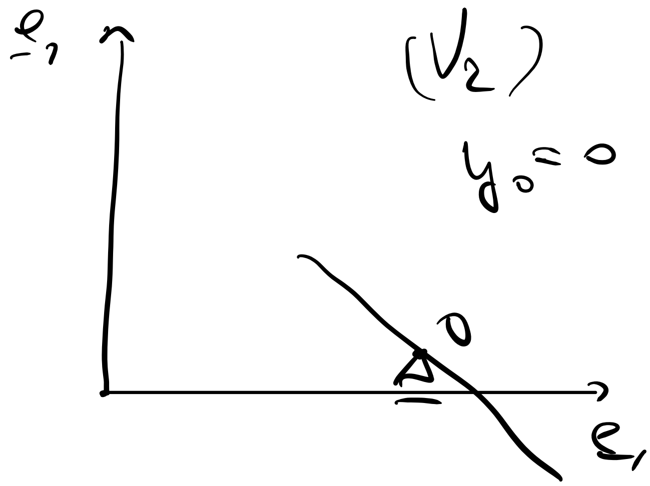
(V₂) $y_0 = 0$

Tolgo due gradi di libertà.



(V_1)

$x_0 = 0$



(V_2)

$y_0 = 0$

Il vincolo di sopra è la sovrapposizione di (V_1) e (V_2), entrambi vincoli semplici.

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{è} \quad (V_1) + (V_2)$$

Esempio prendiamo due vincoli semplici

(V_1) : $O \in r$ due rette sul piano r, r'

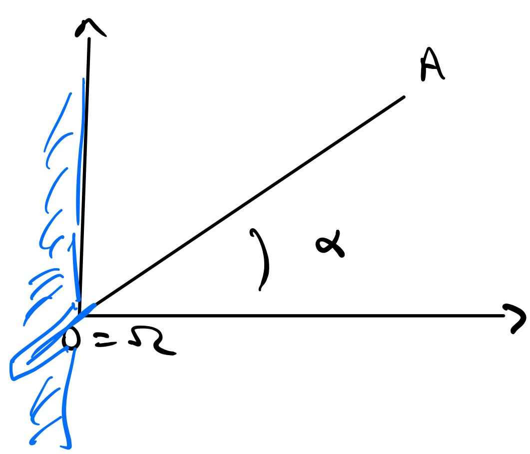
(V_2) : $O \in r'$

Per togliere due gradi di libertà

- compatibilità r e r' non sono parallele.
- indipendenti: r e r' non devono essere coincidenti

Date queste due condizioni: O è all'intersezione di r e r'.

Esempio Incastro



è la sovrapposizione di
$$\begin{cases} V_1 & x_0 = 0 \\ V_2 & y_0 = 0 \\ V_3 & \varphi = \alpha \end{cases}$$