SISTEMI DINAMICI

Sistema dinamico

$$\frac{d}{dt} x(t) = \boxed{f(x(t))} \qquad x \in M, \mathbb{R}^n$$

$$f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

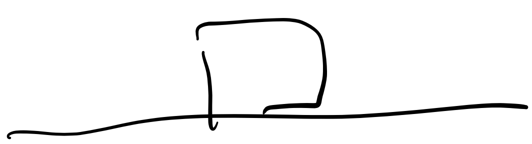
$$x(t) \longrightarrow x(t; x_0)$$

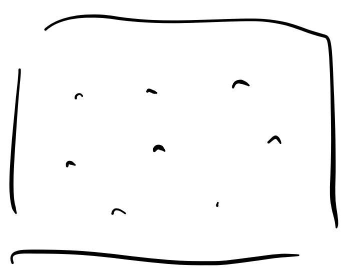
$$\varphi_t : M \longrightarrow M$$
$$x_0 \qquad\quad x(t; x_0)$$

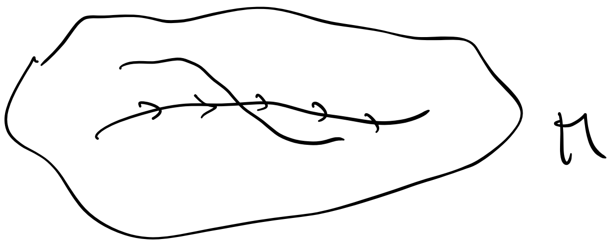
$$\varphi_t : S \longrightarrow S$$

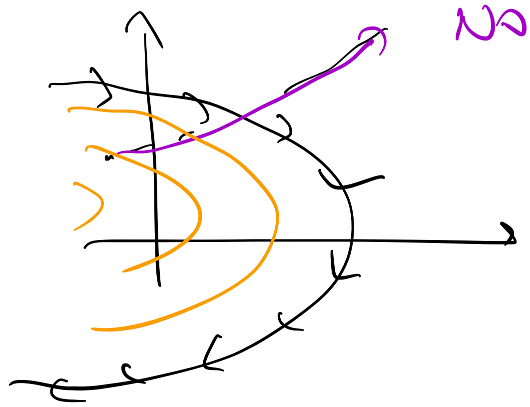
discreto

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T - T^{ext}) \Longleftrightarrow \frac{d}{dt} N(t) = (\beta - \mu) N(t)$$









Esempio

$$\frac{d}{d\tau} N(\tau) = (\overbrace{\beta - \mu}^{r})\, N(\tau)$$

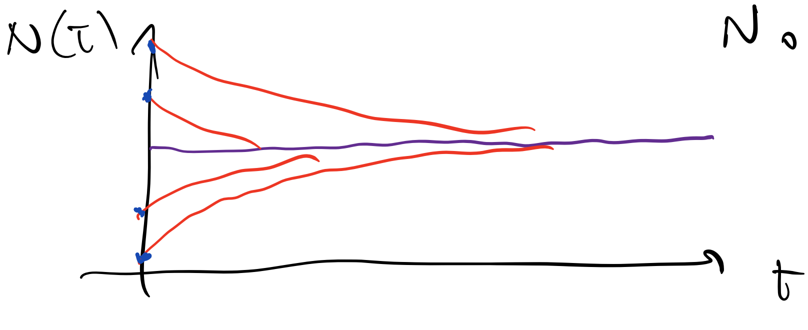
$$\frac{d}{d\tau} N(\tau) = \underbrace{r(N(\tau))} \cdot N(\tau)$$

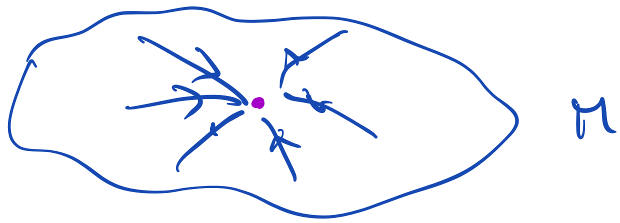
VERHOLST (1838)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau} N(\tau) = r\left(1 - \dfrac{N(\tau)}{K}\right) N(\tau) \\[2ex] N(\tau = 0) = N_0 \end{cases}$$

capacità portante

$$\left[\; N(\tau) = K \frac{N_0}{N_0 + (K - N_0)\, e^{-rt}} \;\right]$$





Orbita o traiettoria

$$\Gamma_x \doteq \{ \varphi_t(x), \ \forall t \in \mathbb{R} \}$$

x_0 $\qquad$ x_0

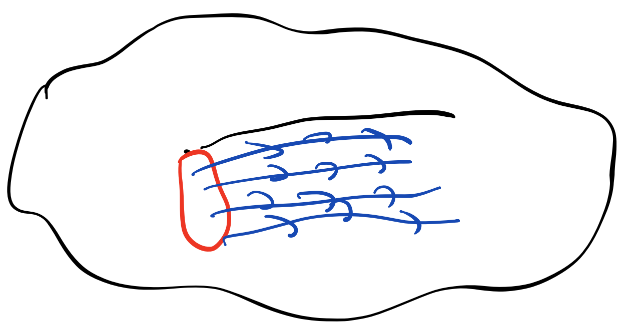
$\Gamma_x = \{x\}$ punto di equilibrio
punto critico

Orbita periodica - curva chiusa

$\exists$ periodo T $\quad \varphi_T(x) = x$

Γ immersione $\quad \gamma : S^1 \longrightarrow M$

$\varphi_t : M \longrightarrow M$



$\Lambda \subset M$

$\varphi_t(\Lambda)$

$\varphi_t(\Lambda) = \Lambda$ insieme invariante

$\varphi_t(\Lambda) \subset \Lambda$ insieme invariante in avanti

per $t > 0$

Esempio Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) = r\, u(t) - a\, u(t)\, v(t) \\ \frac{d}{dt} v(t) = -\mu\, v(t) + \gamma\, a\, u(t)\, v(t) \end{cases}$$

Sistemi discreti

$t \in \mathbb{Z}$

$$\underline{\underline{\varphi}}(x_t) = x_{t+1}$$

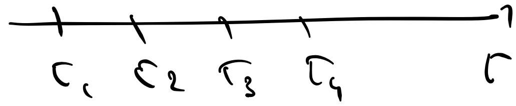
lo stato al tempo t è determinato

dallo stato al tempo $t = 0$

$$x_t = \varphi^t(x_0)$$

$$\underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{t}$$

Sistema continuo



Modello logistico discreto : $\boxed{x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)}$

$\lambda > 0$

Richiamo di ODE

$\mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eq. differenziale autonoma

$$\frac{d}{dt} x = \dot{x} = f(x)$$

$$f = (f_1, \dots, f_n) : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

esempio di campo vettoriale

Abbiamo $f(x(t))$, $f(x(t), t)$

<u>Def</u> f si dice localmente lipschitziana se $\exists \lambda > 0$ tale che $\forall x, y \in D$

$$\| f(x) - f(y) \| \leq \lambda \| x - y \|$$

<u>es</u> $f(x) = \sqrt{x}$

<u>Teorema di Cauchy</u> f è localmente Lipschitziana in D, allora $\forall\, x_0 \in D$ $\exists$ un intervallo (τ_0, τ_1) e un'unica soluzione $x(t)$ dell'eq.

$$\dot{x} = f(x)$$

def per $t \in (\tau_0, \tau_1)$ e t.c. $x(0) = x_0$

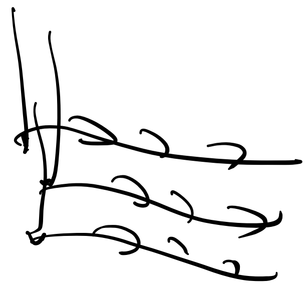
$$(\tau_0 < 0 < \tau_1)$$

$$\boxed{y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds}$$

Dati iniziali "etichettano" le soluzioni: $x(t; x_0)$

$$x(t; x_0) = \varphi^t(x_0)$$

$\varphi_t : D \longrightarrow D$ flusso



Le traiettorie di un sistema autonomo non possono mai intersecarsi

$\varphi_t(x_0) = x(t\,;\,x_0)$

- $\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = x$

- $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_s(\varphi_t(x))$

φ definisce un gruppo commutativo ad un parametro

Teorema $\dot{x} = f(x)$ allora per ogni t fissato, $\varphi^t(x)$ è una funzione regolare di x. Se f è almeno C^1

$\exists$ costanti C, λ

$$\| \varphi^T(y) - \varphi^T(x) \| < C \, e^{\lambda |t|} \| y - x \|$$

Vale per i dati iniziali: ma vale anche per i parametri:

$$\dot{x} = f(x ; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$\varphi^T(x ; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ regolare come f

<u>Dim</u>: all'eq. $\dot{\alpha}_i = 0$

$$\| \varphi^T(y) - \varphi^T(x) \| < C \, e^{\lambda |t|} \| y - x \|$$

l'andamento asintotico per $T \to \infty$ non mantiene la dipendenza continua dai dati iniziali & parametri

Esempio oscillatore armonico smorzato

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

- $\mu > \omega$ $\qquad x(t) = a\, e^{-\mu_1 t} + b\, e^{-\mu_2 t}$

$$\mu_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2} > 0$$

- $\mu < \omega$ $\qquad x(t) = e^{-\mu t}\left(a \cos \sigma t + b \sin \sigma t\right)$

$$\sigma = \sqrt{\omega^2 - \mu^2} > 0$$

- $\mu = \omega$ $\qquad x(t) = (a + b\underline{t})\, e^{-\mu t}$

$$\left[\quad \alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma x = 0 \qquad x = \underline{\underline{e^{rt}}} \quad\right]$$

$$e^{rt}\underbrace{\left(\qquad\right)} = 0 \qquad r = \ldots$$

Commenti

- ODE ordine $n \Longleftrightarrow n$ ODE del primo ordine.

- $\dot{x} = f(x,t) \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(x,s) \\ \dot{s} = 1 \end{cases}$

$s_0 = 0 \qquad s(t) = t$

Stesse proprietà dei sistemi autonomi, ma il $D_{est} = D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$