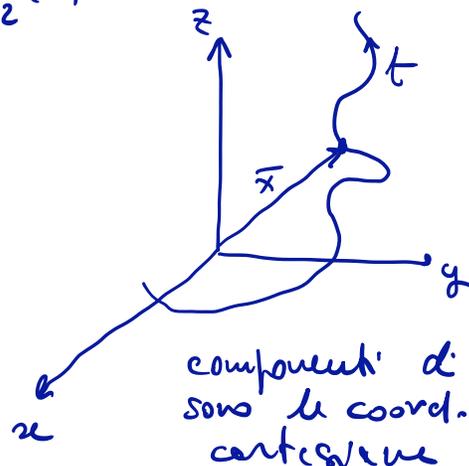


EQ. DIFFERENZIALI ORDINARIE

Eq. di Newton $\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$

$\vec{x}(t) : \vec{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $t \mapsto \vec{x}(t)$

$= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$



L'eq. di Newton è un'eq. differenziale

$$m \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{x}(t), \frac{d\vec{x}}{dt}, t)$$

→ è un'eq. la cui incognita è una FUNZIONE $(\vec{x}(t))$

Ci mettiamo nel caso 1 dimensionale



il pto materiale si muove su una RETTA

Il moto lungo la retta è descritto da una funz.

$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$t \mapsto x(t)$

Eq. di Newton:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, \frac{dx}{dt}, t)$$

eq. la cui incognita è la funz. $x(t)$

funzioni: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \dots$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F}{m}(x, \frac{dx}{dt}, t) \equiv f(x, \frac{dx}{dt}, t)$$

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

è un'uguaglianza tra due funt. in t

questa funzione è una funzione a tre variabili

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, v, t) \mapsto f(x, v, t)$$

è una funzione

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(x(t), \dot{x}(t), t)$$

2^a legge di Newton in svst. 1d:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

se f è INDIPEND da t ,
l'eq. si dice AUTONOMA

"forma normale"

(Forma generale sarebbe $g(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0$)

Se f è LINEARE in x e \dot{x} ,

$$f(x, \dot{x}, t) = ax + bx + c$$

l'eq. si dice LINEARE

ES 1) PARTICELLA LIBERA

$$\ddot{x} = 0$$

$$\rightarrow x(t) = at + b$$

← "SOLUZIONE GENERALE"

a, b parametri liberi

⇒ per ogni scelta di (a, b) abbiamo una diversa

soluzione PARTICOLARE

ES. $(a, b) = (1, 0) \Rightarrow x(t) = t$

ES 2] OSCILLATORE ARMONICO

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\rightarrow x(t) = \underline{a} \cos(\omega t) + \underline{b} \sin(\omega t)$$

$$= \underline{A} \cos(\omega t + \underline{\varphi})$$

$$= \underline{C} e^{i\omega t} + \underline{C}^* e^{-i\omega t}$$

$$\underline{C} = \text{Re} C + i \text{Im} C$$

2 parametri
(reali) liberi

ES 3] REPULSORE ARMONICO

$$\ddot{x} = \omega^2 x$$

$$\rightarrow x(t) = \underline{a} \cosh \omega t + \underline{b} \sinh \omega t$$

$$= \underline{A} e^{\omega t} + \underline{B} e^{-\omega t}$$

ES 1,2,3 hanno caratteristica in comune:

$$f = 0, -\omega^2 x, \omega^2 x \rightarrow f \text{ è una funz.}$$

lineare in x, \dot{x}

OMOGENEE*

Per le eq. diff. lineari^r vale il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZ.

che dice che la SOLUZ. GEN. è combinazione lineare di 2 (o eq. è del 2° ord.) soluz. particolari indep.

$$\begin{aligned} * f(x, \dot{x}, t) &= \\ &= a \dot{x} + b x \quad (c=0) \end{aligned}$$

Se a f lin. omogenea, si aggiunge un termine non-omogeneo, allora la soluz. GENERALE è la somma di una soluz. particolare e della soluz. gen. dell'eq. omogenea associata.

ES 4

$f = -g$ è lineare, ma non è omogenea.

$\ddot{x} = -g \rightsquigarrow$ eq. omogenea associata è $\ddot{x} = 0$

↓
Solut. particolare:
 $-\frac{1}{2}gt^2$

↓
Solut. gen. dell'omogenea
 $x_{om.}(t) = at + b$

Solut. gen. dell'eq. di partenza è

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$$

ES 5

PENDOLO

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x$$

← non-lineare

(solut. richiede funzioni ellittiche)

ES 6

CADUTA FRENATA

$$\ddot{x} = -\beta \dot{x} - g$$

\rightsquigarrow eq. omogenea associata

$$\ddot{x} = -\beta \dot{x}$$

$$v(t) \equiv \dot{x}(t)$$

$$v' = -\beta v$$

$$v(t) = \alpha e^{-\beta t}$$

$$x_{om.}(t) = b - \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t}$$

$$= \underline{b} + \underline{a} e^{-\beta t}$$

↓
solut. part.

$$x(t) = -\frac{g}{\beta} t \equiv v_{\infty} t$$

↓

↓

$$x(t) = v_{\infty} t + a e^{-\beta t} + b$$

$$(v(t) = v_{\infty} - a\beta e^{-\beta t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} v_{\infty})$$

ES 7] OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO

$$\mu, \omega > 0$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\mu \dot{x} \quad (*) \quad \text{eq. lin. omogenea}$$

che dip. da due parametri μ, ω

Cerchiamo soluz. particolari della forma $x(t) = e^{\lambda t}$;
 qte sono soluz. se soddisfano l'eq. (*):

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega^2 e^{\lambda t} - 2\mu \lambda e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -(\omega^2 + 2\mu \lambda) e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + 2\mu \lambda + \omega^2 = 0 \quad \text{eq. di 2° grado in } \lambda$$

$$\frac{\Delta}{4} = \mu^2 - \omega^2$$

$\mu > \omega$: $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2} < 0 \Rightarrow$ 2 soluz. partic. della forma $e^{\lambda t}$

GRANDE
SMORZAMENTO

$$x(t) = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t}$$

$\mu < \omega$
PICCOLO
SMORZAMENTO

$$x(t) = e^{-\mu t} (a \cos \sigma t + b \sin \sigma t)$$

dove $\sigma \equiv \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$

$\mu = \omega$
SMORZAMENTO
CRITICO

$$x(t) = (a + bt) e^{-\mu t}$$

ES 8] CICLO LIMITE

Eq. di Van der Pol

$$\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad \beta > 0$$

- attinto positivo per $|x| > 1$
- " negativo per $|x| < 1$

- per moti di grande ampiezza prevale attrito positivo
⇒ ampiezza tende a ridursi
- per moti di piccola ampiezza prevale attrito negativo
⇒ ampiezza tende ad aumentare
- per un solo moto CRITICO i due effetti si
compensano ($|x|=1$) ⇒ moto periodico
- ↳ CICLO LIMITI .