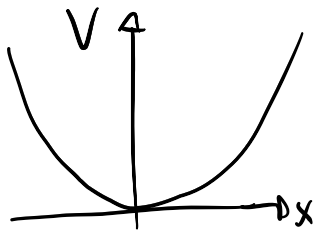
Introduzione

Prendiamo un oscillatore armonico quantistico

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2 = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \qquad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right)$$



autostati $|n\rangle$ con $n = 0, 1, 2, \dots$

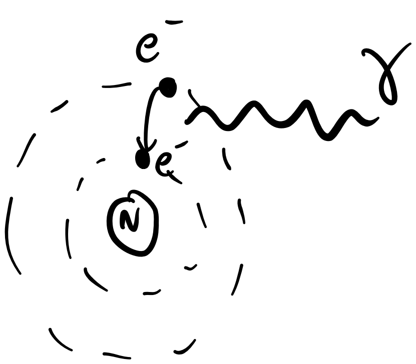
e $\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$

Gli operatori di creazione e distruzione spostano tra livelli energetici:

$$\begin{cases} a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle \\ a |n\rangle = \sqrt{n}\, |n\rangle \end{cases} \rightarrow \text{Spazio di Hilbert}$$

$\Rightarrow$ Il numero di "particelle" però è costante: 1 di massa m.

In alcuni processi quantistici, però, il numero di particelle NON è CONSERVATO:



emissione o assorbimento di un fotone.

Campi come oscillatori armonici

Ref: [S.2.2-2.3]

Prendiamo ora un campo scalare φ in una teoria relativistica.

La più semplice equazione del moto che può soddisfare è

$$\Box \varphi = 0 \quad \rightarrow \quad (\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2)\varphi = 0$$

Per il fotone, nella gauge di Lorentz si ha: $\Box A_\nu = 0$

Soluzione $\varphi(x,t) = a(t)\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$ con

ANALOGIA

$$(\partial_t^2 + \vec{p}\cdot\vec{p})\, a(t) = 0 \qquad \longleftrightarrow \qquad \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

è un oscillatore armonico con $\omega_p^2 = \vec{p}\cdot\vec{p}$

oscillatore armonico, e.g. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

"SECONDA" QUANTIZZAZIONE $\downarrow$ | QUANTIZZAZIONE $\downarrow$

$$H_0 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hbar\omega_p \left(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2} V\right) \qquad H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

Quantizziamo il campo scalare come una serie di oscillatori armonici per ogni numero d'onda $\vec{p}$, con associati operatori di creazione e distruzione $a_p^\dagger, a_p$

Ogni modo d'oscillazione ha energia $E = \hbar\omega_p$

$\uparrow$

SECONDA QUANTIZZAZIONE $\leftarrow$ Studiata in QFT 1

QUANTIZZAZIONE DI UN CAMPO SCALARE LIBERO

[S.2.3, 17.3.1]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

seconda quantizzazione

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \left(a_p\, e^{-ipx} + a_p^\dagger\, e^{+ipx} \right), \qquad \omega_p^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$$

$$p^\mu = (\omega_p, \vec{p})$$

Gli stati sono generati operando con $a_p^\dagger$ sullo stato di vuoto:

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2\omega_p}\; a_p^\dagger |0\rangle$$

Regole di commutazione:

$$[a_k, a_p^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k})$$

$$\hookrightarrow [\varphi(t,\vec{x}), \varphi(t,\vec{y})] = 0$$

$$[\varphi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{y})] = i\,\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\pi(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_t \varphi(x))} = \partial_t \varphi(x)$$

propagatore di Feynman

$$\langle 0 | T\{\varphi(x)\, \varphi(y)\} | 0 \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{ip(x-y)}$$

$\downarrow$ T-prodotto

MATRICE S

[S.5.1]

Le leggi della MECCANICA QUANTISTICA descrivono come un sistema fisico manipola stati in uno SPAZIO DI HILBERT.

Nella teoria quantistica dei campi lo spazio di Hilbert è sostituito dallo spazio di Fock: la somma di spazi di Hilbert per stati con numero arbitrario di particelle:

$$\mathcal{F} = \oplus_n \mathcal{H}_n \leftarrow 2^{nd} \text{ quantization}$$

Le osservabili sono riconducibili a PROBABILITÀ di ottenere un certo stato finale a partire da un certo stato iniziale del sistema.

Sono date dal modulo quadro del prodotto interno fra i due stati:

$$dP \sim |\langle f; T_f | i; T_i \rangle|^2 \leftarrow$$

Rappresentazione di Schrödinger: stati evolvono con il tempo

La TEORIA QUANTISTICA DEI CAMPI si occupa di calcolare tali ampiezze di scattering per sistemi relativistici.

Stati in e out [12.5.1.2, Srednicki .2.1, R.2.1]

Interessandoci principalmente a problemi di scattering, pensiamo di preparare il sistema in uno stato iniziale $|in; T_i\rangle$ (con $T_i \to -\infty$) e di voler studiare la sua evoluzione nello stato finale $\langle out; T_f|$ (con $T_f \to +\infty$).

Gli stati a $t = \pm\infty$ sono STATI ASINTOTICI e si assume che le interazioni modifichino il sistema in un intervallo di tempo finito.

Assunzioni:

- Gli stati dello spazio di Fock sono generati dall'azione di CAMPI LIBERI $\phi_{in}(x)$ sullo stato di vuoto (unico e stabile) $|0\rangle$.
- Osservabili fisiche sono espresse in termini di $\phi_{in}(x)$.

L'idea è che l'interazione venga spenta adiabaticamente per $t \to \pm\infty$. Questo è il caso per processi di scattering fra pacchetti d'onda ben separati spazialmente.

Gli stati in sono generati a partire dal vuoto $|0\rangle_{in}$

$$|\vec{p}\rangle_{in} = \sqrt{2\omega_p}\, a^\dagger(\vec{p})_{in} |0\rangle_{in}$$

Stati out sono un'altra rappresentazione della stessa teoria libera. Esiste perciò un isomorfismo che mappa fra i due:

$$S|i\rangle_{out} = |i\rangle_{in} \leftarrow \text{MATRICE } S$$

$$_{out}\langle f | i\rangle_{in} = {}_{in}\langle f| S | i\rangle_{in} \equiv S_{fi}$$

Proprietà della matrice S

- Stabilità del vuoto: $|0\rangle_{out} = |0\rangle_{in} = |0\rangle$, $\boxed{\langle 0|0\rangle = 1}$
- Stabilità di stati a 1 particella: $\boxed{|\vec{p}\rangle_{out} = |\vec{p}\rangle_{in} \equiv |\vec{p}\rangle}$
- $\phi_{in}(x) = S\,\phi_{out}(x)\,S^{-1}$ Possiamo esprimere tutto in termini di stati in
- S è unitaria:

$$\delta_{ji} = {}_{out}\langle j | i\rangle_{out} = {}_{in}\langle j | S S^\dagger | i\rangle_{in} = {}_{in}\langle j | i\rangle_{in} \rightarrow \boxed{S S^\dagger = \mathbb{1}}$$

- S è invariante di Lorentz:

$$\phi_{in}(x') = U \phi_{in}(x) U^{-1} = U S \phi_{out}(x) S^{-1} U^{-1} = U S U^{-1} \phi_{out}(x') U S^{-1} U^{-1}$$

$$\hookrightarrow = S\,\phi_{out}(x')\,S^{-1} \longrightarrow \boxed{S = U(\Lambda)\, S\, U(\Lambda)^{-1}}$$

In esperimenti di scattering le osservabili principali sono SEZIONI D'URTO differenziali

$$d\sigma = \frac{1}{T}\frac{1}{\Phi}\, dP \qquad [d\sigma] = \ell^2$$

T: durata dell'esperimento

Φ: flusso normalizzato ad una sola particella

dP: probabilità quantistica:

$$dP = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle}\, d\Pi$$

$d\Pi$: spazio delle fasi

numero di eventi

$$dN = L\, d\sigma \qquad [L] = \ell^{-2}$$

L: luminosità integrata

Nella teoria libera $S = \mathbb{1}$, definiamo quindi

$$S = \mathbb{1} + iT$$

S: Unitaria

T: matrice di trasmissione

Fattorizzando la conservazione del momento:

$$\langle f|T|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4\Big(\sum_i p_i^\mu - \sum_f p_f^\mu\Big)\, \mathcal{M}$$

ELEMENTO DI MATRICE $\mathcal{M}$

$$\langle f|S - \mathbb{1}|i\rangle = i\,(2\pi)^4 \delta^4\Big(\sum_i p_i^\mu - \sum_f p_f^\mu\Big)\, \mathcal{M}$$

Nel caso di scattering $2 \to n$ $\quad (p_1 + p_2 \to \{p_i\})$

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}\, |\mathcal{M}|^2\, d\Pi_{LIPS}$$

$$d\Pi_{LIPS} = (2\pi)^4 \delta^4\Big(\sum p\Big) \prod_{\text{final states } j} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_j}$$

$d\Pi_{LIPS}$: Lorentz-invariant phase space

DERIVAZIONE FORMULA SEZIONE D'URTO

$$d\sigma = \frac{1}{T}\frac{1}{\Phi}\,dP \qquad \Phi = \frac{|\Delta \vec{v}|}{V \leftarrow \text{volume}} \qquad dP = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle}\,d\Pi$$

In un intervallo di dimensione L i momenti sono discretizzati:

$p_n = \frac{2\pi}{L}n$ $\rightarrow$ il numero di stati disponibili è $N = \int \frac{V}{(2\pi)^3}\,d^3p$

$\rightarrow \quad d\Pi = \prod_{\substack{\text{stati finali}\\ j}} \frac{V}{(2\pi)^3}\,d^3p_j$ regione dello spazio dei momenti che ci interessa

Dalla normalizzazione $a_k^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}|k\rangle$ per gli operatori di creazione / distruzione

$[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3\,\delta^3(p-q)$

$(2\pi)^3\,\delta^3(p) = \int d^3x\, e^{ipx}$

$\hookrightarrow \quad \langle p|q\rangle = (2\pi)^3(2\omega_p)\,\delta^3(p-q)$

$\delta^3(0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$

$\langle p|p\rangle = 2\omega_p V = 2E_pV$

$\downarrow$

$\left.\begin{array}{l} |i\rangle = |p_1\rangle|p_2\rangle \\ |f\rangle = \prod_j |p_j\rangle \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \langle i|i\rangle = (2E_1V)(2E_2V) \\ \langle f|f\rangle = \prod_j (2E_jV) \end{array}$

$\delta^4(0) = \frac{TV}{(2\pi)^4}$

Per $|f\rangle \neq |i\rangle$

$$|\langle f|S|i\rangle|^2 = \delta^4(0)\,\delta^4(\Sigma p)\,(2\pi)^8\,|\mathcal{M}|^2 = TV\,(2\pi)^4\,\delta^4(\Sigma p)\,|\mathcal{M}|^2$$

$$\Rightarrow dP = \frac{T\cancel{V}(2\pi)^4\,\delta^4(\Sigma p)}{(2E_1V)(2E_2\cancel{V})}\,|\mathcal{M}|^2 \prod_j \frac{\cancel{V}}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_j}{2E_j\cancel{V}} = \frac{T}{V}\frac{1}{(2E_1)(2E_2)}\,|\mathcal{M}|^2\,d\Pi_{LIPS}$$

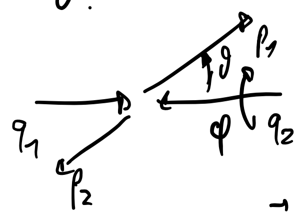
$$d\sigma = \frac{V}{T}\frac{1}{|\vec{v}_1-\vec{v}_2|}\,dP = \frac{1}{2E_1 2E_2\,|\vec{v}_1-\vec{v}_2|}\,|\mathcal{M}|^2\,d\Pi_{LIPS}$$

$\rightarrow$ Verificare che $d\Pi_{LIPS}$ sia invariante di Lorentz

ESERCIZIO SPAZIO DELLE FASI IN DUE PARTICELLE e $\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)$

- Nel sistema del centro di massa l'ampiezza può dipendere solamente da $s=(p_1+p_2)^2=(q_1+q_2)^2=E_{cm}^2$ e l'angolo ϑ.

$\vec q_1+\vec q_2=\vec p_1+\vec p_2=0$



$$\int d\Pi_{LIPS}=\int (2\pi)^4\,\delta^4(q_1+q_2-p_1-p_2)\,\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3\,2E_1}\,\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3\,2E_2}$$

$\vec p_2=-\vec p_1$

$q_1^0+q_2^0=E_{cm}$

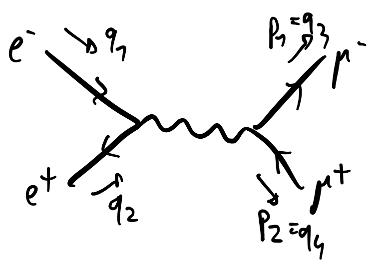
$$=\frac{1}{4(2\pi)^2}\int \delta(E_{cm}-E_1-E_2)\,\frac{p^2\,dp\,d\Omega}{E_1E_2}$$

$$\delta\left(E_{cm}-\sqrt{p^2+m_1^2}-\sqrt{p^2+m_2^2}\right)\to p=\frac{E_{cm}}{2}\bar\beta\ ,\quad \bar\beta\equiv\sqrt{1-\frac{2(m_1^2+m_2^2)}{E_{cm}^2}+\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{E_{cm}^4}}$$

$$\delta=\frac{1}{p/E_1+p/E_2}\,\delta\left(p-\frac{E_{cm}}{2}\bar\beta\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{4(2\pi)^2}\,\frac{p^{\cancel{2}}}{E_1E_2}\,\frac{1}{\cancel{p}/E_1+\cancel{p}/E_2}\,d\Omega=\frac{d\Omega}{4(2\pi)^2}\,\frac{p}{E_1+E_2}=\frac{d\Omega}{4\pi}\,\frac{1}{8\pi}\left(\frac{2p}{E_{cm}}\right)\equiv\frac{d\Omega}{4\pi}\,\frac{1}{8\pi}\,\bar\beta$$

- Calcolare $\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)$ dato $|\mathcal{M}|^2$ (per energie $\sqrt{s}\gg m_\mu$) [S.13.3.2]



$$\frac14\sum_{spin}|\mathcal{M}|^2=\frac{2e^4}{s^2}\left(t^2+u^2\right)$$

$s=(q_1+q_2)^2$ $\quad s+t+u=0$

$t=(q_1-q_3)^2$

$u=(q_1-q_4)^2$

Nel sist del centro di massa $q_1=(E,\vec k)$, $q_2=(E,-\vec k)$, $q_3=(E,\vec p)$, $q_4=(E,-\vec p)$

$s=E_{cm}^2=4E^2$, $\quad t=-2E^2+2\vec k\cdot\vec p=-2E^2(1-\cos\vartheta)$, $\quad u=-2E^2-2\vec k\cdot\vec p=-2E^2(1+\cos\vartheta)$ $\quad |\vec k|=|\vec p|$

$$\frac{2(t^2+u^2)}{s^2}=\frac{1}{8E^4}\left(4E^4-\cancel{8E^2(\vec k\cdot\vec p)}+4(\vec k\cdot\vec p)^2+4E^4+\cancel{8E^2(\vec k\cdot\vec p)}+4(\vec k\cdot\vec p)^2\right)=1+\cos^2\vartheta$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{2E_{cm}^2}\left(e^4(1+\cos^2\vartheta)\right)\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{8\pi}=\frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2}\left(1+\cos^2\vartheta\right)$$

$$\int d\Omega=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}d\cos\vartheta$$

Integrating in the angular variables $\quad \sigma_0=\frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2}$

TEORIA ASINTOTICA [12.5.1.2, Se.2.4]

- Lo spazio di Fock è generato dai campi liberi $\varphi_{in}(x)$
- Tutte le osservabili, incluso il campo quantistico $\varphi(x)$ sono espresse in termini dei $\varphi_{in}(x)$.
- Le interazioni sono spente adiabaticamente per $t \to \pm\infty$.

Il campo libero $\varphi_{in}(x)$ è riconducibile al campo quantistico $\varphi(x)$ nel limite $x^0 \to -\infty$ a meno di una costante:

$$\varphi(x) \xrightarrow{x_0 \to -\infty} Z_{in}^{1/2}\, \varphi_{in}(x)$$

Analogamente $\varphi(x) \xrightarrow{x_0 \to +\infty} Z_{out}^{1/2}\, \varphi_{out}(x)$

Questo è un <u>LIMITE DEBOLE</u>: solo per elementi di matrice.
Infatti per tutti i campi:

$$[\varphi(x), \dot{\varphi}(x)] = [\varphi_{in/out}(x), \dot{\varphi}_{in/out}(x)] = i\,\delta^3(x-y) \qquad \text{ma} \qquad Z_{in/out} \neq 1$$

Cosa sono $Z_{in/out}$ e perché sono $\neq 1$?

Prendiamo la teoria di un campo scalare

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \mathcal{L}_{int}(\varphi) \rightarrow \text{interazioni}$$

E.o.m. classiche:

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} = (\Box + m^2)\varphi - \overbrace{\frac{\delta \mathcal{L}_{int}(\varphi)}{\delta \varphi}}^{\equiv j(x)} = 0$$

I campi asintotici sono liberi $\Rightarrow$ soddisfano Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\varphi_{in/out}(x) = 0$$

Soluzione:

$$\rightarrow \quad \varphi_{in/out}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \left(a(\vec{p})_{in/out}\, e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})_{in/out}\, e^{+ipx} \right) \qquad (1)$$

$px = p^\mu x_\mu = \omega_p x_0 - \vec{p}\cdot\vec{x}$

$\omega_p = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$

$$\left[a(\vec{p})_{in/out} \,,\, a^\dagger(\vec{p})_{in/out} \right] = (2\pi)^3\, \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$$

Per il campo interagente $(\Box+m^2)\varphi(x)\neq 0$,
vediamo il caso dell'ampiezza $\langle 0|\varphi(x)|\vec{p}\rangle$

$$\varphi(x) = e^{i\hat{p}x}\,\varphi(0)\,e^{-i\hat{p}x} \quad \leftarrow \text{invarianza per traslazioni}$$

$$\langle 0|\varphi(x)|\vec{p}\rangle = \underbrace{\langle 0|\varphi(0)|\vec{p}\rangle}_{\text{indipendente da } t} e^{-ipx} \longrightarrow \text{Soddisfa Klein-Gordon}$$

DIM:

$$\rightarrow (\Box_x+m^2)\langle 0|\varphi(x)|\vec{p}\rangle = \langle 0|\varphi(0)|\vec{p}\rangle(-p^2+m^2) = 0$$

Invertendo la (1):
$$a(\vec{p})_{in/out} = i\int_t d^3x \underbrace{\frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\omega_p}}}_{h_p(x)\ \rightarrow\ (\Box+m^2)h_p(x)=0} \overleftrightarrow{\partial_0}\,\varphi_{in/out}(x),$$

dove $\overleftrightarrow{\partial_0} = \overrightarrow{\partial_0} - \overleftarrow{\partial_0}$, è <u>indipendente da t.</u>

Anche $A \equiv \int_t d^3x\; h_p(x)\,\overleftrightarrow{\partial_0}\,\langle 0|\varphi(x)|p\rangle$ <u>è indipendente da t</u>
per ogni $h_p(x)$ tale che $(\Box+m^2)h_p(x)=0$
In quanto $\langle 0|\varphi(x)|\vec{p}\rangle$ soddisfa Klein-Gordon.

$$\boxed{\begin{aligned}
&\text{DIMOSTRAZIONE}\\
&\partial_0 A = \int d^3x \; \partial_0 \left[h_p \partial_0 \langle \varphi(x) \rangle - \langle \varphi(x) \rangle \partial_0 h_p \right] = \\
&= \int d^3x \left(h_p \partial_0^2 \langle \varphi(x) \rangle - \langle \varphi(x) \rangle \partial_0^2 h_p \right) = \qquad (\Box + m^2) = (\partial_0^2 - \nabla^2 + m^2)\\
&\text{Klein Gordon} \hookrightarrow = \int d^3x \left(h_p (\nabla^2 \cancel{- m^2}) \langle \varphi(x) \rangle - \langle \varphi(x) \rangle (\nabla^2 \cancel{- m^2}) h_p \right)\\
&\text{by part} \hookrightarrow = \int d^3x \left(h_p \nabla^2 \langle \varphi(x) \rangle - h_p \nabla^2 \langle \varphi(x) \rangle \right) = 0
\end{aligned}}$$

Per $\langle 0 | \varphi_{in/out}(x) | p \rangle = e^{-ipx}$ $\leftarrow$ Esercizio: verificare

Prendiamo il limite di A per $t \to \pm\infty$, con A indip da t.

$$\lim_{t \to \pm\infty} \int_t d^3x \; h_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \langle 0 | \varphi(x) | p \rangle = \langle 0 | \varphi(0) | p \rangle \lim_{t \to \pm\infty} \underbrace{\int_t d^3x \; h_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \left(e^{-ipx} \right)}_{t\text{-indep.}} =$$

$$\downarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$Z^{1/2}_{out/in} \int_t d^3x \; h_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \langle 0 | \varphi_{out,in}(x) | p \rangle = Z^{1/2}_{out/in} \int_t d^3x \; h_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \left(e^{-ipx} \right)$$

Si ha che necessariamente $\boxed{Z_{in} = Z_{out} \equiv Z = \langle 0 | \varphi(0) | \vec{p} \rangle}$

$$\langle 0 | \varphi(x) | \vec{p} \rangle = Z^{1/2} e^{-ipx} \qquad \left| \langle 0 | \varphi(x) | \vec{p} \rangle \right|^2 = Z$$

A causa delle interazioni $\varphi(x)$ genera anche stati a più particelle quindi ci si aspetta $|Z| \leq 1$.

Z è la probabilità che l'operatore $\varphi(x)$ generi stati a 1 particella.

NOTA: Non è una probabilità fisica perché $\varphi(x)$ non è un termine della matrice S. Infatti, per S sia il vuoto che gli stati a 1 particella sono STABILI, quindi $\langle 0|S|\vec{p}\rangle = 0$.

PROPAGATORE [S.6.2]

Consideriamo $\langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|0\rangle$ per una teoria libera.

$$\langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|0\rangle \equiv \vartheta(x-y)\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle + \vartheta(y-x)\langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle$$

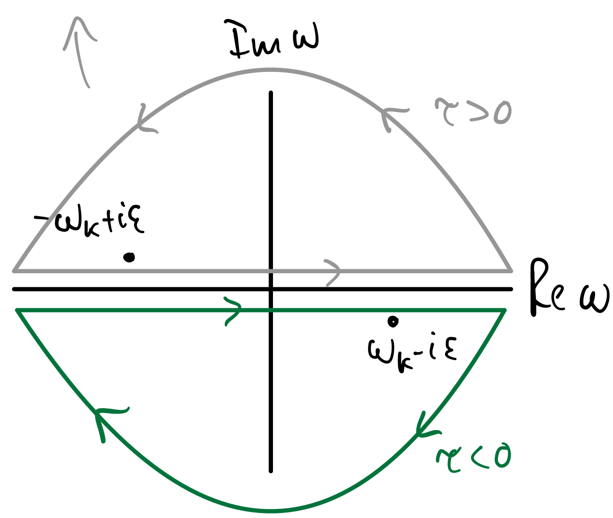
$$= \ldots = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\left[e^{i\omega_k\tau}\vartheta(-\tau) + e^{-i\omega_k\tau}\vartheta(\tau)\right]$$

$\tau = x^0 - y^0$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{-2\omega_k}{2\pi i}\,\frac{1}{\omega^2-\omega_k^2+i\varepsilon}\, e^{i\omega\tau}$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}$$

PROPAGATORE DI FEYNMAN



Rappresentazione spettrale di Källen-Lehmann [S.24.2]

Considera la funzione a due punti $\langle 0|\varphi(x)\,\varphi(y)|0\rangle$ per una teoria INTERAGENTE

Inseriamo un INSIEME COMPLETO DI STATI A ENERGIA POSITIVA

$$\mathbb{1} = \sum_X \int d\Pi_X \, |X\rangle\langle X| \qquad , \qquad d\Pi_X = \prod_{j\in X} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j}$$

$$\langle 0|\varphi(x)\,\varphi(y)|0\rangle = \sum_X \int d\Pi_X \, \langle 0|\varphi(x)|X\rangle\langle X|\varphi(y)|0\rangle =$$

$$= \sum_X \int d\Pi_X \, \langle 0| e^{i\hat{P}x} \varphi(0)\, e^{-i\hat{P}x} |X\rangle\langle X| e^{i\hat{P}y} \varphi(0)\, e^{-i\hat{P}y} |0\rangle =$$

$$= \sum_X \int d\Pi_X \; e^{-ip_X(x-y)} \; |\langle 0|\varphi(0)|X\rangle|^2$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \left\{ \sum_X \int d\Pi_X \, (2\pi)^4 \delta^4(p-p_X)\, |\langle 0|\varphi(0)|X\rangle|^2 \right\}$$

Il termine tra parentesi è scalare: può solo dipendere da p^2 e ha supporto su stati fisici: $p_X^2 \geq 0$, $p_X^0 > 0$ quindi

$$\sum_X \int d\Pi_X \, (2\pi)^4 \delta^4(p-p_X)\, |\langle 0|\varphi(0)|X\rangle|^2 \equiv 2\pi\, \theta(p^0)\, \rho(p^2)$$

FUNZIONE SPETTRALE

$$\Rightarrow \langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)}\,\theta(p^0)\,\rho(p^2)$$

Definiamo

$$D(x,y,m^2) \equiv \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_p}e^{-ip(x-y)} = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^3}e^{-ip(x-y)}\,\theta(p^0)\,\delta(p^2-m^2)$$

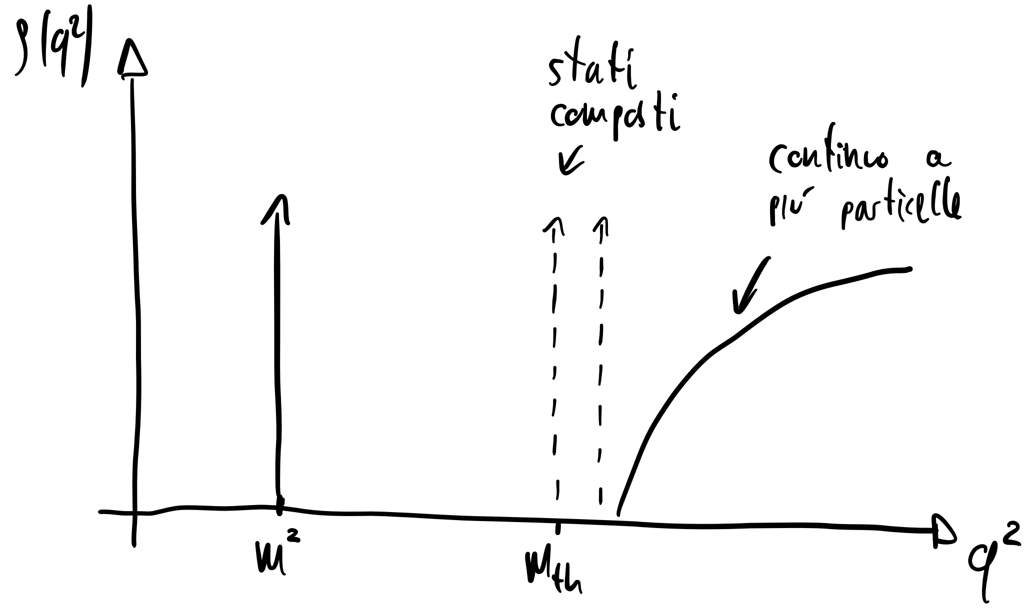
$$\Rightarrow \langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \int_0^\infty dq^2\,\rho(q^2)\,D(x,y,q^2)$$

Possiamo separare il contributo a 1 particella usando
$\langle 0|\varphi_{in}(x)\varphi_{in}(y)|0\rangle = D(x,y,m^2)$

$$\Rightarrow \langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = Z\,D(x,y,m^2) + \int_{m_{th}^2}^\infty dq^2\,\hat\rho(q^2)\,D(x,y,q^2)$$

ovvero $$\rho(q^2) = Z\,\delta(q^2-m^2) + \hat\rho(q^2)\,\theta(q^2-m_{th}^2)$$

dove m_{th}^2 è la soglia in q^2 sopra la quale possiamo produrre stati fisici con più di 1 particella.



Per il T-prodotto:

$$\langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|0\rangle = \int_0^\infty dq^2 \, \overbrace{\left[D(x,y,q^2)\,\theta(x^0-y^0) + D(y,x,q^2)\,\theta(y^0-x^0)\right]}^{\text{Propagatore di Feynman con ``MASSA'' } q^2} \rho(q^2)$$

$$= \int_0^\infty dq^2 \, \rho(q^2) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-q^2+i\varepsilon} e^{ip(x-y)}$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \, i\,\Pi(p^2)$$

$$\Pi(p^2) \equiv \int_0^\infty dq^2 \frac{\rho(q^2)}{p^2-q^2+i\varepsilon} = \frac{Z}{p^2-m^2+i\varepsilon} + \int_{m^2_{th}}^\infty dq^2 \frac{\hat{\rho}(q^2)}{p^2-q^2+i\varepsilon}$$