

# Metodi Statistici per l'Analisi Socio-Economica

## 3. Numeri indici



# Differenze assolute e relative

Evidenziare le differenze nel tempo o nello spazio dell'intensità o frequenza di un fenomeno  $X$ . Detto  $t + 1, \dots, T$  l'indice temporale e  $x_t$  le osservazioni su  $X$ ,

- Variazione (differenza) assoluta:

$$d_a = x_t - x_{(t-1)}$$

- Variazione relativa:

$$d_r = \frac{x_t - x_{(t-1)}}{x_{(t-1)}} = \frac{x_t}{x_{t-1}} - 1$$

La variazione assoluta è espressa in un'unità di misura mentre la variazione relativa è un numero puro.



# Numeri indici

I *numeri indici* sono un rapporto statistico che serve a misurare le variazioni relative nel tempo.

Dato un fenomeno  $X$  e due osservazioni  $x_0$  e  $x_1$  in due istanti successivi:

- 0 è la *situazione base*
- 1 la *situazione corrente*

chiamiamo *numero indice* il rapporto:

$${}_0I_1 = \frac{x_1}{x_0}$$

Il numero indice  ${}_0I_1$  esprime di quanto è variata l'intensità del fenomeno tra 0 e 1. Con riferimento alla variazione relativa, è

$$\frac{x_1 - x_0}{x_0} = {}_0I_1 - 1$$



# Base fissa e base mobile

Consideriamo una sequenza di osservazioni:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$

rapportando tutte ad una di esse, per esempio  $x_0$ , si ottiene la serie dei numeri indici *a base fissa*

$${}_0I_0 = \frac{x_0}{x_0}, {}_0I_1 = \frac{x_1}{x_0}, {}_0I_2 = \frac{x_2}{x_0}, \dots, {}_0I_n = \frac{x_n}{x_0}$$

altrimenti, rapportando ciascuna alla precedente, si ottiene la serie *a base mobile*:

$${}_0I_1 = \frac{x_1}{x_0}, {}_1I_2 = \frac{x_2}{x_1}, \dots, {}_{n-1}I_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

Di solito si pone  ${}_0I_0 = 100$ ; in questo caso  ${}_{t-1}I_t - 100$  può essere letta direttamente come variazione percentuale.



# Proprietà dei numeri indici

Proprietà dei N.I. elementari:

- a) Identità:  ${}_t I_t = 1$
- b) Reversibilità delle basi:  ${}_t I_s = \frac{1}{{}_s I_t}$
- c) Transitività delle basi (circolarità):  ${}_t I_r = {}_t I_q \cdot {}_q I_r$
- d) Commensurabilità: i N.I. sono insensibili all'unità di misura
- e) Scomposizione delle cause: se un fenomeno può essere ottenuto come prodotto di due "cause", il relativo N.I. è anch'esso rappresentabile come il prodotto dei N.I. delle cause. Es.  $v_t = q_t \cdot p_t$  allora:  
 ${}_0 I_t^V = {}_0 I_t^Q \cdot {}_0 I_t^P$

Le proprietà b) e c) permettono il cambio di base (per i N.I. a base fissa) e il passaggio da base fissa a base mobile.

*I tassi di incremento sono invarianti all'anno base del calcolo*



# Cambiamento di base

Il *cambio di base* (per esempio da  $h$  a  $k$ ) per un indice in base fissa avviene dividendo ogni termine  ${}_h I_t$  della serie per l'indice del periodo "nuova base":  ${}_h I_k$ . E' infatti:

$${}_k I_t = \frac{x_t}{x_k} = \frac{x_t}{x_h} \cdot \frac{x_h}{x_k} = {}_h I_t \cdot \frac{1}{{}_h I_k} = {}_k I_h \cdot {}_h I_t$$

Esempio: da base 0 a base 2 per il quarto periodo

$${}_2 I_4 = {}_0 I_4 \cdot \frac{1}{{}_0 I_2} = {}_2 I_0 \cdot {}_0 I_4$$

Tale operazione è valida per tutti i termini della serie, pertanto risulta immediato operare in modo vettoriale dividendo *tutta* la serie originaria per lo scalare  ${}_k I_h$ , che è detto *coefficiente di conversione*.



# Da base fissa a base mobile e viceversa

Il passaggio *da una base fissa* (per esempio  $k$ ) *alla base mobile* avviene dividendo ogni termine (tranne il primo, che non è definito) per l'indice in base fissa relativo al periodo precedente:

$${}_{t-1}I_t = {}_kI_t \cdot \frac{1}{{}_kI_{t-1}} = {}_{t-1}I_k \cdot {}_kI_t$$

Nel caso particolare  $k = 0$  per  $t = 2$ ,  ${}_1I_2 = {}_1I_0 \cdot {}_0I_2$ .

Il passaggio *dalla base mobile a una base fissa*  $k$  per un qualsiasi indice  ${}_{t-1}I_t$  avviene moltiplicando l'indice per tutti i precedenti indici a base mobile da  $k$  a  $t - 1$  (o dividendo, se  $k > t$ ). Più semplicemente, si può calcolare in base 0,

$${}_0I_t = {}_0I_1 \cdot {}_1I_2 \cdots {}_{t-1}I_t$$

e successivamente basta cambiare di base dividendo per  ${}_0I_k$ .



# Tassi medi di variazione - 1

Confrontando le misurazioni di un fenomeno  $x$  nel tempo su più periodi  $0, 1, \dots, t, \dots, T$  può essere interessante e utile misurare:

- la variazione *complessiva* da 0 a  $T$
- la variazione *media*

La *variazione complessiva* da 0 a  $T$  è ovviamente  ${}_0I_T - 1 = \frac{x_T - x_0}{x_0}$ .

La corrispondente *variazione media* può essere definita in vari modi a seconda del modo in cui  $x$  si evolve tra 0 e  $T$ :

Def. “media” secondo Chisini

è il valore  $\bar{x}$  che sostituito a ciascuna osservazione mantiene inalterato il risultato della *funzione di circostanza*  $f$ :

$$f(x_0, x_1, \dots, x_T) = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$$





# Esempio: tassi medi di rendimento - 1

Nel caso – ad esempio – di una operazione finanziaria, la *funzione di circostanza* può assumere forme diverse:

- Tasso medio semplice:

$$x_T = x_0 + rx_0 + rx_0 + \dots + rx_0$$

per esempio, per un'operazione finanziaria con cedole che *non* vengono reinvestite ( $x_T = x_0 + r_1x_0 + r_2x_0 + \dots + r_Tx_0$ )

- Tasso medio composto (CAGR):

$$x_T = x_0(1 + r')^T$$

per esempio per un'operazione finanziaria dove le cedole vengono reinvestite allo stesso tasso ( $x_T = x_0(1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \dots (1 + r_T)$ )



## Esempio: tassi medi di rendimento - 2

- Tasso medio semplice: viene calcolato come differenza relativa tra 0 e  $T$  divisa per il numero dei periodi

$$r = \frac{1}{T} \frac{x_T - x_0}{x_0} = \frac{1}{T} \left( \frac{x_1 - x_0}{x_0} + \frac{x_2 - x_1}{x_0} + \dots + \frac{x_T - x_{T-1}}{x_0} \right)$$

ovvero:  $r = \frac{1}{T} I_T - 1 = \frac{1}{T} \sum_t I_t - 1$  è la media *aritmetica* degli indici in base fissa meno 1

- Tasso medio composto (CAGR):

$$r' = \left( \frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \dots \cdot \frac{x_T}{x_{T-1}} \right)^{\frac{1}{T}} - 1 = \left( \frac{x_T}{x_0} \right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

cosicché  $r' = (I_T)^{\frac{1}{T}} - 1$  è la media *geometrica* degli indici in base mobile meno 1.



# Numeri indici sintetici

Un indice sintetico sintetizza (*sic*) la variazione di un aggregato anziché di un valore elementare.

Nel caso, importante, degli *indici dei prezzi* l'aggregato in questione è un *paniere* di consumo (oppure l'intero Prodotto Interno Lordo, il che formalmente non cambia nulla) di cui vogliamo valutare la variazione di prezzo – non di valore totale – mantenendo fisse le quantità.

Si calcola pertanto il rapporto tra il valore del paniere ai prezzi in  $t$  e quello dello *stesso* paniere ai prezzi in 0:

$$\frac{v_t}{v_0} = \frac{\sum_i p_{it} q_i}{\sum_i p_{i0} q_i}$$

Quali quantità  $q_i$  considerare?  $q_{i0}$  o  $q_{it}$ ?



# Indici dei prezzi di Paasche e di Laspeyres

A seconda della scelta del sistema di pesi (le quantità) si ottengono:

- Indice di Laspeyres:  ${}_0^P I_T^L = \frac{\sum_i p_{it} q_{i0}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}}$   
se le quantità vengono fissate al tempo base
- Indice di Paasche:  ${}_0^P I_T^P = \frac{\sum_i p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{i0} q_{it}}$   
se le quantità vengono fissate al tempo corrente

# Gli indici sintetici come medie pesate

Gli indici di Paasche e Laspeyres possono essere ottenuti come medie degli indici semplici dei prezzi di ogni bene pesati per l'importanza della spesa dedicata al bene nella spesa complessiva:

- Indice di Laspeyres: 
$${}_0I_T^L = \frac{\sum_i \frac{p_{it}}{p_{i0}} p_{i0} q_{i0}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}}$$
la spesa è considerata in 0

- Indice di Paasche: 
$${}_0I_T^P = \frac{\sum_i \frac{p_{it}}{p_{i0}} p_{i0} q_{it}}{\sum_i p_{i0} q_{it}}$$
la spesa è considerata al tempo corrente

Si noti come la costruzione dell'indice tipo Paasche richieda il ricalcolo dei pesi ad ogni periodo, mentre questi sono determinati *una tantum* in 0 per l'indice tipo Laspeyres.

# Proprietà degli indici sintetici

Sono proprietà desiderabili degli indici sintetici:

a)-e) quelle degli indici elementari

f) Proporzionalità: se i prezzi dei  $k$  prodotti variano di un fattore  $a$  anche l'indice deve variare in proporzione

g) Determinatezza: l'indice sintetico non deve annullarsi o divergere se lo fa un termine della formula

Gli indici di Paasche e Laspeyres non soddisfano c) (transitività) ed e) (scomposizione delle cause). L'indice sintetico di Fisher, media geometrica degli indici Paasche e Laspeyres

$${}_0^P I_T^F = \sqrt{{}_0^P I_T^L \cdot {}_0^P I_T^P}$$

soddisfa tali proprietà ed è pertanto detto *numero indice ideale*.



# Numeri indici sintetici - valore

Un indice sintetico mostra la variazione di un aggregato anziché di un valore elementare. Generalizziamo quanto visto riguardo agli indici sintetici dei prezzi:

L'aggregato può rappresentare un *valore*: è quindi un'aggregazione di fenomeni elementari del tipo  $v_i = q_i \cdot p_i$ . Si calcola allora il rapporto tra il valore del paniere in  $t$  e quello in 0:

$${}^v_0I_t = \frac{v_t}{v_0} = \frac{\sum_i p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}}$$

dove prezzi e quantità sono contemporanei.

# Numeri indici sintetici - prezzi o quantità

Altrimenti, se si è interessati alla variazione dei *prezzi*, si calcola il rapporto tra il valore del paniere ai prezzi in  $t$  e quello dello stesso paniere ai prezzi in 0:

$${}_0^p I_T = \frac{\sum_i p_{it} q_{ih}}{\sum_i p_{i0} q_{ih}}$$

ponderando con le quantità fissate a un certo istante  $h$

Nel caso degli indici di *quantità*, analogamente, si utilizza una ponderazione fissata *ai prezzi* di un certo periodo  $h$ :

$${}_0^q I_T = \frac{\sum_i p_{ih} q_{it}}{\sum_i p_{ih} q_{i0}}$$



# Alcuni numeri indici notevoli

L'Istat pubblica numerosi indici:

- Indici di valore
  - ▶ Fatturato e ordinativi dell'industria
  - ▶ Fatturato dei servizi
  - ▶ Valore delle vendite del commercio
- Indici dei prezzi
  - ▶ Prezzi al consumo (NIC, FOI, IPCA)
  - ▶ Prezzi alla produzione
- Indici delle quantità
  - ▶ Produzione industriale
  - ▶ Volume dell'export e dell'import

con cadenza mensile o trimestrale.

# Variazioni tendenziali e congiunturali

Preso un fenomeno misurato a cadenza infra-annuale, tale per cui nell'anno ci sono  $k$  periodi (e.g., per i dati trimestrali  $k = 4$ , mensili  $k = 12$ , giornalieri  $k = 365$ ), si parla di variazione

- *congiunturale* quando si rapporta il dato corrente  $x_t$  al dato precedente  $x_{t-1}$
- *tendenziale* quando si rapporta il dato corrente  $x_t$  al dato corrispondente dell'anno precedente  $x_{t-4}$

Per esempio, presi i dati mensili relativi alla produzione auto di dicembre 2018, la variazione

- *congiunturale* sarà misurata rispetto al novembre 2018
- *tendenziale* rispetto al dicembre 2017

Le variazioni congiunturali, a differenza delle tendenziali, risentono della *stagionalità*.



# Numeri indici sintetici: scomposizione

Può essere utile scomporre gli indici sintetici in *subindici*. L'indice generale può essere ottenuto anche come media ponderata dei subindici.

Formalmente, considerando tre livelli:

- elementare
- gruppo:  $1, \dots, g, \dots, G$
- e totale,

per il generico gruppo  $g$  contenente i prodotti  $1, \dots, i, \dots, S$  è

$${}_0I_t^g = \frac{\sum_{i=1}^S \frac{p_{it}}{p_{i0}} v_{i0}}{\sum_{i=1}^S v_{i0}} = \sum_{i=1}^S \frac{p_{it}}{p_{i0}} w_{i0}$$

con  $w_{i0} = \frac{v_{i0}}{\sum_{i=1}^S v_{i0}}$  e l'indice generale:  ${}_0I_t^G = \sum_{g=1}^G {}_0I_t^g \cdot w_{i0}$  è la somma pesata delle variazioni dovute a ogni singolo gruppo.



# Contributo delle singole componenti

Il calcolo dell'indice per gruppo misura la dinamica dei prezzi per singolo gruppo:

$${}_0I_t^g = \sum_{i=1}^S \frac{p_{it}}{p_{i0}} \frac{v_{i0}}{\sum_{i=1}^S v_{i0}}$$

Il contributo del singolo gruppo  $g$  alla dinamica dell'indice generale (*livello generale dei prezzi*) è dato dall'indice di gruppo volte il suo peso sul totale:

$$C_g = {}_0I_t^g \cdot w_{g0}$$

Esso permette di valutare l'incidenza delle variazioni di prezzo delle singole componenti sulle variazioni dell'indice aggregato.

# Variazioni nominali e reali

Un aggregato monetario (misurato in *valore*) può variare sia per effetto di variazioni nel *volume* di beni e servizi sottostanti, che per effetto di una variazione nei prezzi. Dato un generico aggregato  $A_t = \sum_i q_{it} \cdot p_{it}$ , si indica con *variazione nominale*, o *variazione a prezzi correnti*, la crescita in valore di  $A$  nel tempo:

$$\frac{A_t}{A_0} = \frac{\sum_i q_{it} \cdot p_{it}}{\sum_i q_{i0} \cdot p_{i0}}$$

Si indica invece come *variazione reale* o *in volume* o *a prezzi costanti* la variazione in quantità dell'aggregato:

$$\frac{A_{t(0)}}{A_0} = \frac{\sum_i q_{it} \cdot p_{i0}}{\sum_i q_{i0} \cdot p_{i0}}$$

# Da prezzi correnti a costanti: il deflazionamento

L'aggregato  $A_{t(0)}$  può essere calcolato direttamente moltiplicando le quantità al tempo  $t$  per i prezzi al tempo 0, oppure indirettamente ricorrendo a numeri indici di prezzo e quantità:

$$A_{t(0)} = \sum p_0 q_t = \sum p_t q_t \cdot \frac{\sum p_0 q_t}{\sum p_t q_t} = \frac{A_t}{\frac{P}{0} I_t^P}$$

dividendo l'aggregato a valori correnti per un indice dei prezzi di Paasche. In questo caso si parla di *deflazionamento*. Oppure si può procedere per *estrapolazione*:

$$A_{t(0)} = \sum p_0 q_t = \sum p_0 q_0 \cdot \frac{\sum p_0 q_t}{\sum p_0 q_0} = A_{00}^q I_t^L$$

moltiplicando il valore corrente dell'aggregato in 0 per un indice di quantità di tipo Laspeyres.