

# Metodi Statistici per l'Analisi Socio-Economica

## 5. Medie mobili



# Le medie mobili

La descrizione analitica dei fenomeni funziona solo finché questi sono regolari;

- Non sempre esiste un'opportuna funzione analitica
- Un'alternativa alla modellazione analitica consiste nella stima empirica della componente di fondo, senza necessariamente individuare una legge di variazione

Uno strumento semplice e flessibile: la media mobile

- la media mobile è una trasformazione lineare delle osservazioni

Le procedure basate su medie mobili vengono usate per

- stimare il trend
- destagionalizzare
- ridurre la componente erratica



# Le medie mobili: motivazione

Le medie mobili vengono scelte in modo da eliminare

- il trend
- o la stagionalità
- in ogni caso, si vuole ridurre/eliminare la componente erratica.



## Le medie mobili: motivazione - 2

Consideriamo una serie storica additiva:

$$y_t = T_t + S_t + e_t$$

(consideriamo la componente ciclica come parte del trend)

Un modo semplice per determinare una delle componenti (es.: il trend) consiste nell'applicare alla serie una trasformazione lineare  $g$  che conservi la componente in questione ed annulli le altre

Indichiamo con

$$y_t^*, T_t^*, S_t^*, e_t^*$$

la serie e le componenti trasformate tramite  $g$ : non è facile trovare una trasformazione che faccia esattamente quello che vogliamo.



# Le medie mobili: definizione

Caratteristiche desiderabili:

- calcoli semplici
- aggiornamento facile
- adattabilità a cambiamenti di regime

Media mobile: una somma pesata dei valori della serie storica "intorno" a  $t$  (è una tecnica di carattere locale)

$$y_t^* = \theta_{-m_1} y_{t-m_1} + \dots + \theta_0 y_t + \dots + \theta_{m_2} y_{t+m_2} = \sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i y_{t+i}$$

con  $m_1, m_2 \in N$ ,  $\theta_{-m_1}, \dots, \theta_{m_2} \in R$

Il numero di termini  $m_1 + m_2 + 1$  viene detto ordine della media mobile.

La formula ha senso per  $m + 1 < t < n - m_2$  ovvero non si può usare per calcolare gli estremi della serie  $y_1^*, \dots, y_{m_1}^*$  e  $y_{m_2+1}^*, \dots, y_n^*$ .



## Le medie mobili: definizione - 2

Usando l'operatore ritardo:

$$y_t^* = \left[ \sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i B^{-i} \right] y_t = M y_t$$

Definiamo media mobile l'applicazione

$$M = \sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i B^{-i}$$

combinazione lineare finita con pesi  $\theta_i$  di potenze successive dell'operatore ritardo  $B$ .

# Medie mobili semplici e centrate

Media mobile semplice: i pesi sono tutti uguali e pari a

$$\theta_i = \frac{1}{m_1 + m_2 + 1}, i = -m_1, \dots, m_2$$

Inoltre, se  $m_1 = m_2 = m$ ,

$$y_t^* = \frac{1}{2m + 1} \sum_{i=-m}^m y_{t+i}, t = m + 1, \dots, n - m$$

la media mobile viene detta centrata:  $y_t^*$  viene riferita all'istante centrale dell'intervallo di calcolo.

Si osservi che in questo caso l'indice della media mobile è dispari. Se fosse pari, il valore calcolato si collocherebbe a cavallo di due periodi.



# Medie mobili di ordine pari

Una media mobile di ordine pari si riferirebbe a una coppia di istanti. Per ottenere da una media mobile di ordine pari un valore riferibile a un istante di tempo  $t$ , si calcola la semisomma di due medie mobili consecutive:

$$y_t^{**} = \frac{1}{2} \left( \frac{y_{t-m} + \dots + y_{t+m-1}}{2m} + \frac{y_{t-m+1} + \dots + y_{t+m}}{2m} \right)$$

ovvero si calcola una media di ordine  $2m + 1$  ma si pesano gli estremi per  $\frac{1}{4m}$  e tutti gli altri valori per  $\frac{1}{2m}$ .





# Composizione di medie mobili

La composizione (o prodotto) di due medie mobili  $M_1$ ,  $M_2$  è

$$M : My_t = M_1 M_2 y_t$$

L'applicazione composta è ancora una media mobile

La composizione di medie mobili gode delle proprietà della moltiplicazione, in particolare è commutativa:  $M_1 M_2 = M_2 M_1$

ovvero non importa in che ordine si applichi la media mobile.

Esempio: per centrare la media di ordine pari abbiamo applicato la media di ordine 2 a una media di ordine  $m$ ; si ottiene lo stesso risultato applicando una media di ordine  $m$  a una media di ordine 2.

Inoltre:

- componendo due medie mobili centrate si ottiene ancora una media centrata
- (componendo due medie non centrate si ottiene una media centrata)



# Medie mobili simmetriche

Una media mobile è simmetrica se

- è centrata
- sono uguali i coefficienti con indice simmetrico  $\theta_{-i} = \theta_i \forall i$

Si indica con

$$M = [2m + 1]; [\theta_{-m}, \theta_{-m+1}, \theta_0]$$

Es.:

$$M = [5]; [\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \mathbf{\frac{1}{5}}]; M = [5]; [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \mathbf{\frac{3}{9}}]$$

L'insieme delle medie mobili simmetriche è stabile rispetto all'operazione di composizione: date  $M_1, M_2$  simmetriche,  $M = M_1 M_2$  è

- centrata
- simmetrica

D'ora in poi consideriamo solo medie mobili simmetriche.



# Invarianza rispetto a una media mobile

Una serie  $[y_t]_{t=1}^n$  è detta invariante rispetto alla media mobile  $M$  se

$$My_t = y_t \forall t$$

(si dice anche che  $M$  conserva  $y_t$ )

Particolarmente importante il comportamento della media mobile rispetto a componenti deterministiche di tipo polinomiale (trend):

Trend costante  $a$ : perché una media mobile conservi una costante:

$$Ma = a$$

deve essere

$$\sum_{i=-m}^m \theta_i = 1$$

Si dimostra inoltre che una media mobile che conserva le costanti conserva anche i polinomi di grado 1.



# Conservazione dei polinomi

In generale, per conservare un polinomio di grado  $p$ , una media mobile deve soddisfare le:

$$\sum_{i=-m}^m \theta_i = 1$$

$$\sum_{i=-m}^m i^r \theta_i = 0, r = 1, \dots, p$$

Una media mobile  $M$  esprimibile come composizione di  $M_1$  ed  $M_2$  che conservano i polinomi di grado  $p$  conserva anch'essa tali polinomi. Detto  $P_1$  un polinomio di grado  $p$ , è:

$$MP_t = M_1 M_2 P_t = M_1 P_t = P_t$$



# Trasformazione di un white noise con una MM

Studiamo l'effetto di una trasformazione indotta da una media mobile sulla componente di disturbo  $e_t$ . Consideriamo la media mobile centrata

$$e_t^* = \sum_{i=-m}^m \theta_i e_{t+i}$$

Le  $e_t^*$  hanno media nulla per la linearità dell'operatore E:

$$E(e_t^*) = \sum_{i=-m}^m \theta_i E(e_{t+i}) = 0$$

e hanno tutte la stessa varianza

$$\sigma^{*2} = \text{Var}[e_t^*] = \sigma^2 \sum_{i=-m}^m \theta_i^2$$



# Trasformazione di un white noise con una MM - 2

La variabilità della componente di disturbo viene ridotta dalla trasformazione se

$$\sum_{i=-m}^m \theta_i^2 < 1$$

In questo caso la media mobile svolge un'azione spianante, riducendo le irregolarità casuali. La quantità

$$\frac{\sigma^{*2}}{\sigma^2} = \sum_{i=-m}^m \theta_i^2$$

è detta rapporto di riduzione della varianza residua e misura la capacità della media mobile di ridurre la perturbazione.



# Correlazione indotta dalla trasformazione

Le variabili trasformate sono tra loro correlate:

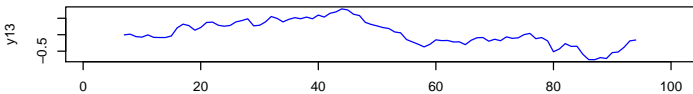
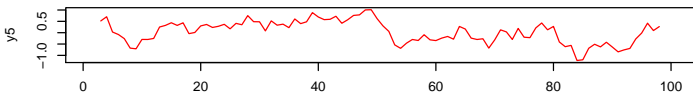
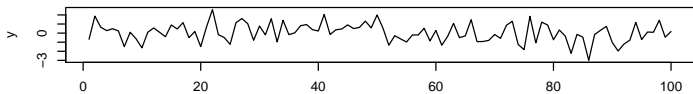
$$\begin{aligned} \text{Cov}(e_t^*, e_{t+h}^*) &= \sum_{i=-m}^m \sum_{j=-m}^m \theta_i \theta_j E[e_{t+i} e_{t+h+j}] \\ &= \sigma^2 \sum_{i=h-m}^m \theta_i \theta_{i-h}, \quad h < 2m; \\ &= 0, \quad h \geq 2m \end{aligned}$$

L'esistenza di correlazioni non nulle induce un effetto spurio detto effetto di Slutsky-Yule.

La serie  $e_t^*$  presenta oscillazioni più o meno regolari che assomigliano a quelle provocate da una componente stagionale e possono disturbare la stima di altre componenti.



# Effetto di Slutsky-Yule: esempio



Time



# Composizioni di medie mobili semplici

Composizioni di medie mobili possono fornire buone approssimazioni di medie mobili più sofisticate.

Per esempio la composizione di due medie mobili di ordine 4

$$M = [7]; \left[ \frac{1}{16}, [1, 2, 3, 4] \right]$$

(si noti che è centrata, simmetrica ed ha coefficienti di somma 1) può

- conservare trend lineari
- annullare stagionalità di periodo 4

Le medie mobili di Spencer, es.:

$$M_{15} = [15]; \left[ \frac{1}{320}, [-3, -6, -5, 3, 21, 46, 67, 74] \right]$$

annullano componenti stagionali di periodo 4 e 5, e con ampiezza variabile linearmente; inoltre conservano trend polinomiali di grado  $p \leq 3$ .



# La stima delle componenti

La stima delle componenti tramite medie mobili si basa su 3 considerazioni:

- Esistono medie mobili che conservano trend polinomiali fino a un certo ordine
- Una media mobile semplice di ordine  $S$  elimina onde di periodo  $S$
- Medie mobili con rapporto di riduzione della varianza minore di 1 riducono la componente accidentale

# La stima della componente trend-ciclo

In generale,

- La componente stagionale per definizione si compensa in  $S$  periodi
- La componente erratica tende a compensarsi in medie mobili "lunghe"

Pertanto una stima del trend-ciclo si può ottenere

- tramite medie mobili centrate di 5 termini nel caso di dati trimestrali
- tramite mm di 13 termini nel caso di dati mensili
- ...

Bisogna sempre tener presente l'effetto di Slutsky-Yule.

# Il trattamento della componente stagionale

Lo studio della stagionalità presenta due problemi:

- stima della componente stagionale (coefficienti)
- sua eliminazione (*destagionalizzazione*)

Il caso della destagionalizzazione è particolarmente importante in pratica:

- variazioni congiunturali "depurate"
- evidenziazione del fenomeno nel lungo termine

La destagionalizzazione non è

- univoca
- neutrale (anche politicamente!)

# Il trattamento della componente stagionale - 2

- 1 Stima dei valori del trend-ciclo  $y^{**}$  con medie mobili centrate
- 2 Stima della componente stagionale secondo
  - ▶ modello additivo:  $y^d = y_t - y_t^{**}$
  - ▶ modello moltiplicativo:  $y^d = \frac{y_t}{y_t^{**}}$
- 3 Destagionalizzazione

# Procedura di destagionalizzazione - 1

Consideriamo un modello di stagionalità moltiplicativa su  $J$  periodi di  $N$  anni, indicati con  $T$ : si calcola

$$\hat{S}e_t = IS_t = \frac{y_t}{y_t^{**}}, t = m + 1, \dots, n - m$$

sono i *rapporti* o *indici di stagionalità*; contengono la componente accidentale;

si verifica l'ipotesi di assenza di stagionalità; se rigettata, si perviene ai *coefficienti grezzi di stagionalità*:

$$\hat{S}_j^* = \frac{1}{N} \sum_{T=1}^N IS_{Tj}, j = 1, \dots, J$$

## Procedura di destagionalizzazione - 2

Si impone la condizione di annullamento dei coefficienti stagionali quando aggregati sull'anno: è infatti in generale

$$\prod_{j=1}^J \hat{S}_j^* \neq 1$$

si calcolano quindi i coefficienti *ideali*

$$\hat{S}_j = \frac{\hat{S}_j^*}{[\prod_{j=1}^J \hat{S}_j^*]^{1/J}}, j = 1, \dots, J$$

ora è  $\prod_{j=1}^J \hat{S}_j = 1$  da cui la serie dei dati destagionalizzati:

$$y_{T,j}^d = \frac{y_{T,j}}{\hat{S}_j}$$

# L'analisi dei residui

La componente accidentale è stata assunta

- “casuale”
- incorrelata

Verifichiamo se la componente residuale è compatibile con un *white noise*:

- test *parametrici* (basati sulla forma della distribuzione di  $e_t$ )
- test non parametrici

Nell'ambito dei test non parametrici,

- test sui *punti di svolta*
- test sul segno delle differenze

Inoltre,

- test sulle autocorrelazioni



# L'analisi dei residui - test sui punti di svolta

Definiamo *punto di svolta superiore* per una serie  $x_t$  il periodo  $t$ :

$$x_{t-1} < x_t, x_t > x_{t+1}$$

e *punto di svolta inferiore* per una serie  $x_t$  il periodo  $t$ :

$$x_{t-1} > x_t, x_t < x_{t+1}$$

Il test verifica se la frequenza osservata  $\hat{p}_n$  dei punti di svolta è compatibile con quella attesa in una serie *white noise*. Si può dimostrare che già per  $n \geq 25$  la quantità

$$tp_n = \frac{\hat{p}_n - 2(n-2)/3}{\sqrt{(16n-29)/90}} \sim N(0, 1)$$



# L'analisi dei residui - test sul segno delle differenze

Confrontiamo il numero  $\hat{d}_n$  di differenze  $x_t - x_{t-1}$  consecutive di segno positivo con quelle attese.

Anche il test

$$td_n = \frac{\hat{d}_n - (n+1)/2}{\sqrt{(n+1)/12}} \sim N(0, 1)$$

(tende cioè a distribuirsi come una Normale standardizzata).

# Il test sulle autocorrelazioni

I coefficienti di autocorrelazione (campionari)  $\hat{\rho}_k$  di un processo *white noise* si distribuiscono, per  $n$  sufficientemente grande, come  $N(0, 1/n)$  e sono tra loro incorrelati.

Pertanto, l'intervallo di confidenza corrispondente a un certo livello  $\alpha$  (es. al 95%) per i  $\hat{\rho}_k$  è

$$[-z_\alpha/\sqrt{n}, +z_\alpha/\sqrt{n}]$$

Si ricordi che

- gli  $z$  sono dipendenti da  $n$  e  $k$
- ma soprattutto che questo è un caso di *test multipli*: non ci sarebbe nulla di strano se alcuni coefficienti, es. 2 su 40, risultassero significativi.