

# Statistica per l'impresa

## 7. L'analisi delle serie storiche



# Serie storiche univariate

I c.d. *metodi per serie storiche* affrontano la modellazione, generalmente a fini previsivi, dell'evoluzione di una variabile di interesse nel tempo.

Mentre nel caso della regressione lineare la variazione nella variabile obiettivo,  $Y$ , veniva “spiegata” sulla base della variazione di una o più variabili esplicative  $X_1, \dots, X_k$ , qui  $Y$  viene “spiegata dal suo andamento passato”.

Ci occuperemo di serie storiche relative a una sola variabile (*univariate*). L'analisi delle serie storiche *multivariate* è un parente stretto della regressione lineare, in cui la serie  $Y_t$  dipende da un'altra serie  $X_t$  e dal proprio passato  $Y_{t-1}, \dots, Y_{t-h}$ .



# Scopo dell'analisi di serie storiche

Comprendere l'andamento di una serie storica può essere importante ai fini interpretativi, ma spesso è essenziale ai fini della *previsione*. In azienda sono regolarmente oggetto di previsione (*budgeting*):

- la domanda di prodotti finiti
- il fabbisogno di risorse umane
- il fabbisogno di materie prime
- le scorte
- ...

La pianificazione e il controllo delle attività produttive che consentono di bilanciare i cicli secondo cui si svolge la vita dell'azienda necessitano continuamente di previsioni dei valori futuri di queste grandezze.



# Cos'è una serie storica

Una successione di dati osservati su una variabile  $Y$  nel tempo:

$$y_t, \quad t = 1, \dots, T$$

I dati possono essere misurati

- in un istante (*serie di stato*)
- su un intervallo (*serie di flusso*)

In una serie storica, è comune la presenza di *dipendenza*, che prende il nome di *correlazione seriale*.

Può ben darsi, tuttavia (*al contrario di quel che dice il libro*) che le manifestazioni successive del fenomeno siano tra loro indipendenti!

- estrazioni successive del lotto, o roulette
- errori del modello di regressione lineare sub ipotesi OLS
- *rendimenti finanziari*



# (Possibili) componenti di una serie storica

Le serie storiche presentano (*possono* presentare!) tipicamente le seguenti componenti:

- Trend: movimento tendenziale di fondo dovuto all'evoluzione di lungo periodo del fenomeno
- Ciclo: oscillazione congiunturale di carattere ricorrente, spesso dovuto all'oscillare di un sistema economico attorno alle condizioni di equilibrio
- Stagionalità: regolarità empirica legata ai periodi dell'anno e dovuta a fattori climatici (alternanza delle stagioni) oppure organizzativi (ferie, festività)
- Accidentalità: componente residuale rispetto alle cause strutturali 1)-3), in genere relativa a molte influenze di piccola entità o comunque non chiaramente identificabili né suscettibili di modellazione esplicita (v. *errori* del modello OLS)

Le prime tre, se presenti, costituiscono la c.d. *parte sistematica*.



# I possibili approcci e le fasi dell'analisi

Si distinguono due approcci all'analisi delle serie storiche a fini previsivi:

- Classico: scomposizione della serie nelle componenti sopra descritte (sola parte sistematica) e proiezione di ciascuna separatamente
- Moderno: considera il processo  $Y_t$  come un tutt'uno di carattere stocastico da modellare con tecniche probabilistiche

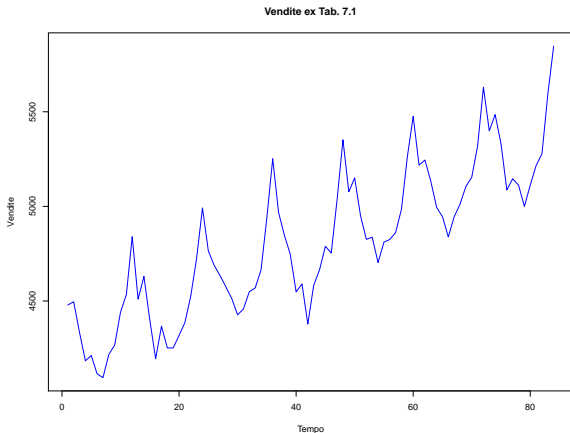
Le fasi di un'analisi volta alla previsione saranno:

- analisi del problema
- raccolta dei dati
- analisi preliminare della struttura della serie storica
- scelta e stima del modello
- valutazione della bontà del modello a fini previsivi
- (utilizzo in pratica!)



# Rappresentazione grafica delle serie storiche

Iniziamo dalla rappresentazione grafica fornendo alcune intuizioni; nella prossima sezione preciseremo meglio i concetti. (*Vedi Cap7\_Tab7.1.R*)



# Stazionarietà

Una serie storica riesce “stazionaria” se nel processo stocastico  $Y_t$  che la genera ricorrono le seguenti tre condizioni:

- il valore atteso di  $Y_t$  è costante (*stazionarietà in media*)

$$E(Y_t) = \mu \quad \forall t$$

- la varianza di  $Y_t$  è costante

$$\text{Var}(Y_t) = \sigma^2 \quad \forall t$$

- la covarianza tra due elementi  $Y_t$  e  $Y_s$  dipende soltanto dalla *distanza*

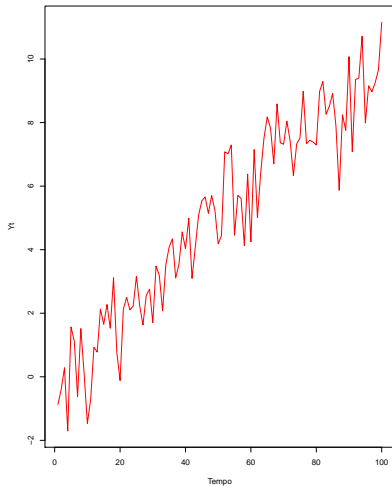
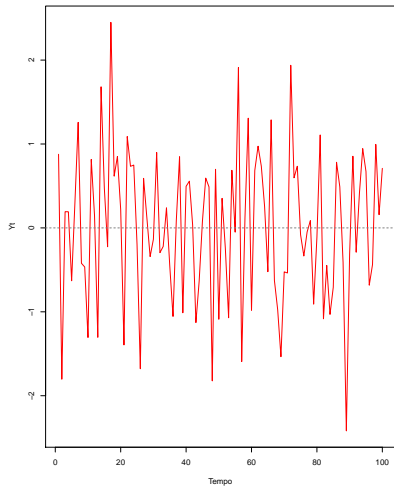
$$\text{Cov}(Y_t, Y_s) = \text{Cov}(Y_{t+m}, Y_{s+m}) = f(t - s) \quad \forall t, s, m$$

Un simile processo si dice *stazionario in covarianza*. Una serie osservata  $y_t$  sarà “stazionaria” se generata da un processo stazionario.





# Serie stazionarie (in media) vs. evolutive



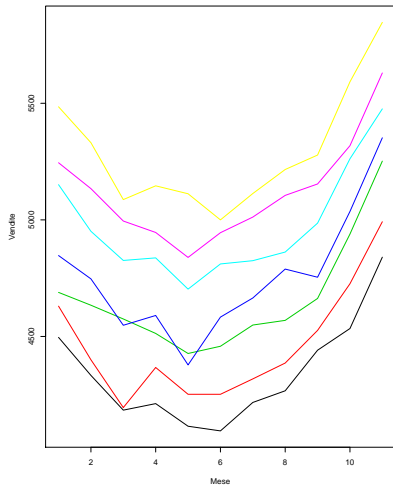
# Stagionalità

Se una serie ha frequenza infra-annuale, possono presentarsi regolarità legate alle stagioni.

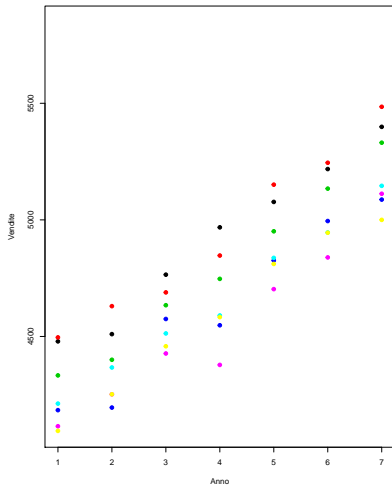
- Per evidenziare a livello descrittivo la *stagionalità* può essere utile visualizzare l'andamento della serie attraverso i periodi dell'anno, p. es. i mesi, anno per anno, con grafici sovrapposti: questo è il c.d. *seasonal plot*
- oppure si possono visualizzare i mesi di ogni anno, mese per mese (*monthplot*)

# Seasonal plot e Month plot

Vendite ex Tab. 7.1, Seasonal plot



Vendite ex Tab. 7.1, Month plot



L'*indice di autocorrelazione* è definito come la covarianza standardizzata (=il coeff. di correlazione) tra la stessa variabile in due istanti diversi:

$$\rho(h) = \text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) / \text{Var}(Y_t)$$

- Al variare di  $h$  tra 0 e  $T - h$  si ottiene la *funzione di autocorrelazione*
- Il *correlogramma* è il diagramma degli indici di autocorrelazione in funzione di  $h$

# Coefficiente di autocorrelazione

Per valutare l'autocorrelazione di  $Y_t$  è utile il concetto di *ritardo* (*lag*): in ogni istante  $t$  il ritardo  $h$ -esimo di  $Y_t$  è  $Y_{t-h}$ .

L'operatore ritardo, per esempio di ordine  $h = 2$ , applicato al processo

$$Y = Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \dots, Y_{T-2}, Y_{T-1}, Y_T$$

dà luogo a un'altro processo stocastico

$$Y_{-2} = NA, NA, Y_1, Y_2, \dots, Y_{T-2}$$

Lo stesso vale per la serie osservata:

$$y = y_1, y_2, \dots, y_T$$

$$y_{-2} = NA, NA, y_1, y_2, \dots, y_{T-2}$$



# Stima della funzione di autocorrelazione

Il coefficiente di autocorrelazione di  $Y_t$  a ogni “ritardo”  $h$  viene stimato come la correlazione campionaria di  $Y_t$  e  $Y_{t-h}$ :

$$\rho_h = \frac{\sum_{t=h+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-h} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}$$

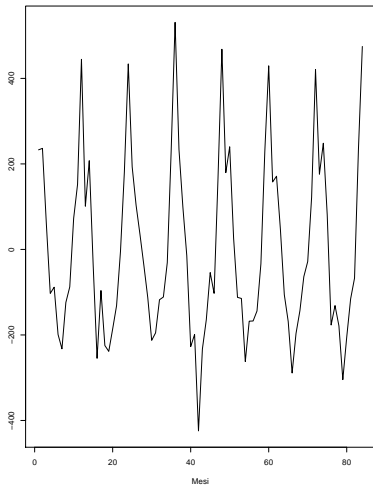
La stima dei vari  $\rho_h$ ,  $h = 1, \dots, T - h$  dà luogo alla funzione di autocorrelazione (ACF) empirica.

NB Il le autocorrelazioni a ogni distanza  $h$  si possono stimare solo se il DGP è stazionario in covarianza. Altrimenti per un dato  $h$  le covarianze  $Cov(Y_1, Y_{1+h})$ ,  $Cov(Y_5, Y_{5+h})$ ,  $Cov(Y_t, Y_{t+h})$  sarebbero tutte diverse e per stimare ciascuna avrei a disposizione una sola coppia di osservazioni.

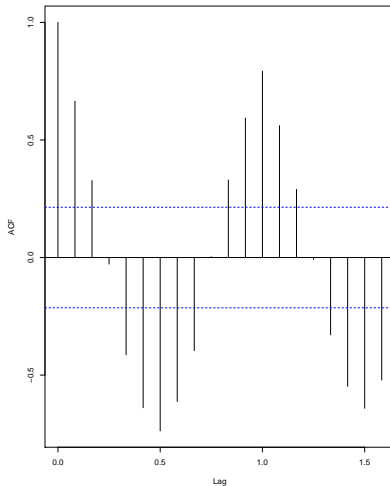


# ACF plot

Vendite ex Tab. 7.1, detrended



ACF delle vendite detrend.



# La valutazione della capacità previsiva

Supponendo di aver stimato un modello univariato

$$Y_t = f(Y_{1..}, \dots, Y_{t-1})$$

l'analisi di bontà di adattamento del modello confronta i valori stimati (previsti)  $\hat{y}_t$  con quelli effettivamente osservati  $y_t$ .

Due aspetti distinti della bontà di adattamento:

- *goodness of fit*: la capacità del modello di riprodurre i dati storici
- *goodness of forecast*: la capacità del modello di prevedere i dati futuri

Sia  $y_1, y_2, \dots, y_t, y_{t+1}, \dots, y_T$  la serie in questione. Poniamo di stimare il modello sulla base del sottoinsieme  $y_1, \dots, y_s$  con  $s < T$ .

- Per valutare la *goodness of fit* si confronteranno le stime  $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_s$  con i dati osservati  $y_1, \dots, y_s$ .
- Per valutare invece la capacità previsiva si confronteranno i valori previsti  $\hat{y}_{s+1}, \dots, \hat{y}_T$  con i dati osservati  $y_{s+1}, \dots, y_T$ .





# Indici sintetici di bontà di adattamento

Per valutare l'adattamento *in-sample*:

- Mean Error (ME):  $ME = \frac{1}{s} \sum_{t=1}^s y_t - \hat{y}_t$
- Mean Square Error (MSE):  $MSE = \frac{1}{s} \sum_{t=1}^s (y_t - \hat{y}_t)^2$
- Mean Absolute Error (MAE):  $MAE = \frac{1}{s} \sum_{t=1}^s |y_t - \hat{y}_t|$
- Mean Absolute Percentage Error (MAPE):  $ME = \frac{1}{s} \sum_{t=1}^s \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{y_t}$

Per valutare la bontà di previsione *out-of-sample*:

- Mean Error (ME):  $ME = \frac{1}{T-s} \sum_{t=s+1}^T y_t - \hat{y}_t$
- Mean Square Error (MSE):  $MSE = \frac{1}{T-s} \sum_{t=s+1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2$
- Mean Absolute Error (MAE):  $MAE = \frac{1}{T-s} \sum_{t=s+1}^T |y_t - \hat{y}_t|$
- Mean Absolute Percentage Error (MAPE):  $ME = \frac{1}{T-s} \sum_{t=s+1}^T \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{y_t}$



# Modelli di (s)composizione delle serie storiche

L'approccio classico ipotizza che la serie storica sia generata come

$$Y_t = f(T_t, C_t, S_t, e_t)$$

dove la parte deterministica può consistere di trend (T), ciclo (C) e stagionalità (S) ed  $e$  è un disturbo aleatorio.

Stimare la componente ciclica in modo separato è fuori moda. Ci si accontenta in genere di considerarla assieme al trend, al che questa componente (T) viene detta *trend-ciclo*.

La componente deterministica  $f$  può assumere diverse forme funzionali:

- additiva:  $Y_t = T_t + S_t + e_t$
- moltiplicativa:  $Y_t = T_t \cdot S_t \cdot e_t$
- mista



# Metodi di stima delle componenti

Un modello moltiplicativo può essere *linearizzato* con una trasformazione logaritmica:

$$\ln(Y_t) = \ln(T_t) + \ln(S_t) + v_t$$

Le componenti  $T$  ed  $S$  possono essere stimate con metodi

- empirici (perequativi): consistono in un *lisciamento* che si adatta ai dati del campione permettendo di isolare una componente *in-sample* ma non permette di estrapolarla/prevederla
- analitici (interpolativi): consistono nella scelta di una *funzione analitica* di cui stimare i parametri, la quale si può poi usare per prevedere le singole componenti

Nell'approccio moderno tali procedure vengono sostituite dalla stima di un vero e proprio modello statistico parametrico.



# Medie mobili

Le *medie mobili* sono un attrezzo (device) statistico utile per “lisciare” le oscillazioni casuali e mettere in evidenza le componenti sistematiche. La media mobile di  $k$  termini è definita, *per  $k$  dispari*, come:

$$MM_k(y_t) = \frac{\sum_{s=t-(k-1)/2}^{t+(k-1)/2} y_s}{k}$$

è insomma una media di  $k$  termini centrati su  $y_t$ . Per esempio, se  $k = 5$ ,

$$MM_5(y_t) = \frac{y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2}}{5}$$

Se  $k$  è pari, per esempio  $k = 4$ , si fa una media di  $k + 1$  termini assegnando agli estremi un peso di 0.5:

$$MM_4(y_t) = \frac{0.5 \cdot y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + 0.5 \cdot y_{t+2}}{4}$$



# Destagionalizzazione usando le MM

Le medie mobili (MM) eliminano o riducono le oscillazioni di periodo pari all'ampiezza della media mobile. Es. una  $MM_{12}$  su dati mensili “filtra” le oscillazioni stagionali. Per ottenere una stima *in-sample* di  $T$  ed  $S$  si può procedere come segue (modello additivo):

- calcolo di  $MM_{12}(y_t) = T_t^{(1)}$  come prima approssimazione a  $T_t$  (si perdono 6+6 termini all'inizio e alla fine)
- la serie detrendizzata  $y_t - T_t^{(1)}$  è una stima di  $S_t + e_t$  (*stagionalità grezza*)
- ipotizzando stagionalità costante (es.  $S_t = S_{t-12} = S_{t+12} \dots$ ),
  - a) si calcola la media delle stagionalità grezze dei vari anni per ogni mese ottenendo 12 coefficienti stagionali  $\hat{S}_j, j = 1, \dots, 12$
  - b) si verifica che la media  $\bar{\hat{S}}$  degli  $\hat{S}_j$  sia zero (principio di conservazione delle aree) altrimenti li si centrano  $\hat{\hat{S}}_t = \hat{S}_j - \bar{\hat{S}}$  ottenendo così i *coefficienti netti di stagionalità*



## (continua:) Stima del trend

Per ottenere la stima “definitiva” del *trend-ciclo*  $\hat{T}_t$

- si deriva la serie destagionalizzata  $D_t = y_t - \hat{S}_t$
- si stima il trend eliminando le oscillazioni casuali con un'ulteriore media mobile di ampiezza “opportuna”

# Destagionalizzazione usando le MM

Le medie mobili

- sono una procedura di adattamento *in-sample*
- fanno perdere  $k/2$  periodi all'inizio e alla fine, dove  $k$  è la frequenza annua dei dati osservati

pertanto questi metodi sono inadatti alla previsione *out-of-sample*. Essi sono invece utili ai fini interpretativi.

Una procedura alternativa è la stima di un trend  $\hat{T}_t$  con metodi analitici, da cui ottenere  $\hat{S}_t = y_t - \hat{T}_t$ . Quindi si possono calcolare i coefficienti di stagionalità come visto sopra.

# Stima analitica del trend

Per estrapolare (prevedere) i valori futuri di una serie storica è necessario innanzitutto stimare analiticamente e proiettare nel futuro la componente di trend (se la componente stagionale è stata assunta costante, la si può aggiungere successivamente). Possibili forme per la componente di trend in funzione *del tempo*):

- Trend lineare (o linearizzabile) nei parametri:

- ▶ costante:  $f(t) = \beta_0$
- ▶ lineare:  $f(t) = \beta_0 + \beta_1 t$
- ▶ polinomiale (es.: quadratica):  $f(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$
- ▶ esponenziale:  $f(t) = \beta_0 \beta_1^t$   
quest'ultima può essere linearizzata usando i logaritmi:  
 $\ln(f(t)) = \ln(\beta_0) + \ln(\beta_1)t$

- Trend non lineare né linearizzabile:

- ▶ esponenziale modificata:  $f(t) = K + \beta_0 \beta_1^t$
- ▶ funzione di Gompertz:  $f(t) = K \beta_0^{\beta_1^t}$



# Metodi di stima dei parametri del trend

Destagionalizzazione mediante medie mobili (o aggregazione) e metodi di lisciamento in generale possono essere combinati con metodi analitici basati su un modello statistico per la stima e previsione del trend:

- I trend lineari o linearizzabili possono essere stimati (*ed estrapolati*) facilmente mediante un modello di regressione OLS.
- (La linearizzazione mediante logaritmi provoca distorsioni in previsione)
- Al modello OLS del trend vanno applicate tutte le considerazioni del Cap. 6 sulla “bontà” della stima:
  - ▶ proprietà degli errori
  - ▶ appropriata forma funzionale
  - ▶ stabilità strutturale
  - ▶ efficacia previsiva

# Livellamento esponenziale

Il *livellamento esponenziale* nasce nel 1957 come metodo pragmatico per la previsione delle serie storiche basato sulle medie mobili. In seguito esso è stato giustificato teoricamente anche nel quadro della teoria “moderna” delle serie storiche come caso particolare dei modelli ARMA/ARIMA.

- Si supponga di disporre, al tempo  $t$ , di una serie di osservazioni

$$y_{t-n}, y_{t-n+1}, \dots, y_{t-3}, y_{t-2}, y_{t-1}, y_t$$

e di voler prevedere  $y_{t+1}$

- Si potrebbe pensare di ricorrere a una media mobile “all’indietro” di alcuni termini
- L’idea alla base del livellamento esponenziale è di modificare l’approccio delle medie mobili attribuendo più importanza alle osservazioni più recenti e in particolare all’ultima  $y_t$



# Livellamento esponenziale semplice

Il *livellamento esponenziale costante* o *semplice* parte dall'ipotesi che la serie sia stazionaria in media

- In prima approssimazione, dato che la serie è stazionaria in media, si potrebbe prendere come previsore in  $t + 1$  la media aritmetica delle osservazioni:

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{\sum_{j=n}^0 y_{t-j}}{n}$$

ma così si darebbe lo stesso peso a ogni osservazione.

- Il livellamento esponenziale semplice generalizza quanto sopra assegnando a ogni osservazione un peso:

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{\sum_{j=n}^0 \omega_j y_{t-j}}{\sum_j \omega_j}$$

(nella media aritmetica è  $\omega_j = \frac{1}{n} \forall j$ )



# Determinazione dei pesi

Nel modello di livellamento esponenziale costante si stabilisce che i pesi  $\omega_j$  decrescono esponenzialmente fino a 0 al crescere della distanza da  $t$ .

- Si impone:

$$\omega_j = \alpha(1 - \alpha)^j$$

con  $0 < \alpha < 1$  e  $\sum^{\infty} \omega_j = 1$

- Sostituendo ricorsivamente ad ogni termine  $y_h$  la previsione fatta in  $h - 1$ :  $\hat{y}_h$ , si ottiene il seguente modello:

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha)\hat{y}_t$$

dove  $\alpha$  è chiamato *parametro di livellamento* (smoothing).



# Il livellamento esponenziale come correzione sequenziale degli errori di previsione

Si vede come il modello si fondi su una logica di *aggiornamento sequenziale*:

- la previsione a un passo  $\hat{y}_{t+1}$  è una media dell'ultimo termine e di tutti i precedenti, sintetizzati nella previsione precedente  $\hat{y}_t$ .
- Inoltre, riscrivendo la formula come

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + \hat{y}_t - \alpha \hat{y}_t = \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t)$$

si nota come la previsione corrente  $\hat{y}_{t+1}$  sia uguale alla precedente  $\hat{y}_t$  modificata per l'errore di previsione  $(y_t - \hat{y}_t)$  commesso al passo precedente, moltiplicato per il parametro di smussamento  $\alpha$ .

Si adotta pertanto una logica di correzione sequenziale degli errori di previsione.



# Come scegliere il parametro $\alpha$ ?

A questo punto, rimane libero il parametro  $\alpha$ :

- il criterio di *ottimalità* per la sua stima dovrà essere basato sull'impiego pratico del modello
- pertanto è naturale cercare  $\hat{\alpha}$  tale da “minimizzare gli errori di previsione”, per esempio sotto forma di somma dei quadrati:

$$\min_{\hat{\alpha}} SS(\hat{\alpha}) = \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2$$

la stima viene ottenuta con metodi numerici (p. es. *grid search*)

- un altro problema (minore) è come *inizializzare* la serie dei valori previsti, ovvero cosa sostituire per  $\hat{y}_1$ : si può usare  $y_1$  o una media dei primi valori.



# Il metodo di Holt e Winters

Consideriamo una serie storica non stazionaria in media, che ammette

- un trend
- una componente stagionale

Se la serie storica ammette una tendenza di fondo *localmente rettilinea*, un modo di adattare il livellamento esponenziale al caso è di scomporre il valore  $y_{t+1}$  in

- un livello medio in  $t$ ,  $m_t$ , e
- un trend  $T_t$  tra il tempo  $t$  e  $t + 1$

In generale, su un intervallo di lunghezza  $\Theta$ , il valore previsto della serie al tempo  $t + \Theta$  sarà esprimibile come

$$\hat{y}_{t+\Theta} = \hat{m}_t + \hat{T}_t\Theta$$



# Il metodo di Holt e Winters: stima - 1

Anziché stimare congiuntamente le due componenti, si scompone il procedimento utilizzando due modelli di livellamento esponenziale:

- uno per il livello medio

$$\hat{m}_t = \delta_1 y_t + (1 - \delta_1)(\hat{m}_{t-1} + \hat{T}_{t-1})$$

- e uno per il trend

$$\hat{T}_t = \delta_2(\hat{m}_t - \hat{m}_{t-1}) + (1 - \delta_2)\hat{T}_{t-1}$$

dove il primo modello ricostruisce, secondo il solito processo ricorsivo/di correzione dell'errore, il livello medio, il secondo il trend (il cui valore osservato  $T_t$  è definito come differenza tra i livelli medi).



## Il metodo di Holt e Winters: stima - 2

Nel caso vi fosse una componente stagionale, ovvero

$$\hat{y}_{t+\Theta} = \hat{m}_t + \hat{T}_t\Theta + \hat{S}_{t+\Theta-s}$$

si aggiungerebbe una terza equazione:

- livello medio:

$$\hat{m}_t = \delta_1(\bar{y}_t - \hat{S}_{t-s}) + (1 - \delta_1)(\hat{m}_{t-1} + \hat{T}_{t-1})$$

- trend:

$$\hat{T}_t = \delta_2(\hat{m}_t - \hat{m}_{t-1}) + (1 - \delta_2)\hat{T}_{t-1}$$

- stagionalità:

$$\hat{S}_t = \delta_3(\tilde{y}_t - \hat{m}_t) + (1 - \delta_3)\hat{S}_{t-s}$$

dove nell'equazione del livello medio  $\bar{y}_t$  è il valore *destagionalizzato* di  $y_t$ , e nell'equazione della stagionalità  $\tilde{y}$  è il valore *detrendizzato* di  $y_t$ .

