

# Appunti delle lezioni di Meccanica Razionale

Giorgio S. Tondo

a.a. 2021-2022  
versione del 18/05/2022

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore; pertanto, essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Calcolo Vettoriale</b>	<b>3</b>
2.1	Richiami di algebra vettoriale . . . . .	3
2.2	Spazio affine euclideo $\mathcal{E}_3$ . . . . .	11
2.2.1	Applicazioni affini in $\mathcal{E}_3$ . . . . .	12
2.3	Riferimento cartesiano in $\mathcal{E}_3$ . . . . .	13
2.4	Riferimento polare in $\mathcal{E}_2$ . . . . .	15
2.5	Riferimento cilindrico in $\mathcal{E}_3$ . . . . .	17
2.6	Riferimento sferico in $\mathcal{E}_3$ . . . . .	19
2.7	Momenti di vettori applicati . . . . .	23
2.8	Soluzione dell'Esercizio 2.2.2 . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Vincoli e gradi di libertà di un sistema meccanico</b>	<b>29</b>
3.1	Spazio delle configurazioni . . . . .	29
3.2	Vincoli e loro classificazione . . . . .	30
3.3	Gradi di libertà di un rigido . . . . .	33
3.4	Grado di un vincolo . . . . .	38
3.5	Sovrapposizione di più vincoli . . . . .	45
3.6	Modelli articolati . . . . .	53
3.7	Soluzione dell'Esercizio 3.5.1 . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Cinematica dei Rigidi</b>	<b>57</b>
4.1	Cenni di Cinematica dei Modelli Continui . . . . .	57
4.2	Moti rigidi . . . . .	59
4.2.1	Esempi di Moto rigido . . . . .	62
4.3	Angoli di Eulero . . . . .	73
4.4	Moto rigido generale . . . . .	78
4.4.1	Teorema di Poisson . . . . .	80
4.5	Applicazioni del teorema di Poisson . . . . .	82
4.5.1	Campo di velocità di un rigido . . . . .	82
4.5.2	Campo delle accelerazioni di un rigido . . . . .	86
4.6	Cinematica Relativa . . . . .	87
4.6.1	Formula di derivazione cinematica . . . . .	87
4.6.2	Composizione delle velocità . . . . .	88

4.6.3	Composizione delle accelerazioni . . . . .	90
4.6.4	Composizione delle velocità angolari . . . . .	92
4.7	Moto di precessione . . . . .	93
4.8	Moto rigido piano . . . . .	97
4.8.1	Accelerazioni del moto piano . . . . .	105
4.8.2	Disco appoggiato su di una guida rettilinea . . . . .	105
4.8.3	Vincolo di puro rotolamento . . . . .	108
4.9	Classificazione dei moti rigidi . . . . .	114
4.10	Approfondimento 1: disco appoggiato su un piano . . . . .	114
4.10.1	Puro rotolamento . . . . .	117
4.11	Approfondimento 2: angoli nautici di Blagoveščenskij . . . . .	119
4.12	Soluzione degli esercizi . . . . .	122
<b>5</b>	<b>Principio dei lavori virtuali</b> . . . . .	<b>127</b>
5.1	Moti possibili e moti virtuali . . . . .	127
5.2	Spostamenti possibili e virtuali . . . . .	128
5.3	Vincoli unilateri e spostamenti virtuali irreversibili . . . . .	130
5.4	Campo degli spostamenti virtuali di un rigido . . . . .	131
5.5	Gradi di mobilità di un modello meccanico . . . . .	131
5.6	Vincoli piani . . . . .	133
5.7	Vincoli nello spazio . . . . .	135
5.8	Lavoro virtuale . . . . .	137
5.8.1	Lavoro virtuale su un rigido . . . . .	139
5.9	Equilibrio dei sistemi materiali . . . . .	139
5.10	Principio dei lavori virtuali . . . . .	140
5.11	PLV per un sistema olonomo . . . . .	147
5.12	Soluzioni degli esercizi . . . . .	155
<b>6</b>	<b>Sollecitazioni conservative</b> . . . . .	<b>159</b>
6.1	Richiami sui campi di forze conservative . . . . .	159
6.2	Sollecitazione conservativa . . . . .	162
6.3	Energia potenziale di una molla . . . . .	166
6.3.1	Molle lineari interne . . . . .	166
6.3.2	Molle lineari esterne . . . . .	166
6.3.3	Molle Angolari . . . . .	168
6.4	Energia potenziale ed equilibri . . . . .	169
6.5	Criterio statico di stabilità . . . . .	170
6.6	Soluzione degli esercizi . . . . .	179
<b>7</b>	<b>Forze applicate su un rigido</b> . . . . .	<b>183</b>
7.1	Insiemi di forze equivalenti su un rigido . . . . .	183
7.2	Insiemi elementari di forze su un rigido . . . . .	184
7.2.1	Singola forza . . . . .	184
7.2.2	Coppia . . . . .	185
7.2.3	Torsore . . . . .	185
7.2.4	Insieme nullo o equilibrato . . . . .	186
7.3	Caso generale . . . . .	186

7.4	Insiemi di forze a risultante equivalente . . . . .	188
7.4.1	Forze complanari. . . . .	188
7.4.2	Forze concorrenti . . . . .	189
7.4.3	Forze parallele . . . . .	190
7.5	Proprietà del centro $G$ delle forze parallele . . . . .	192
<b>8</b>	<b>Equazioni cardinali della statica</b>	<b>201</b>
8.1	Classificazione delle sollecitazioni . . . . .	201
8.2	Sollecitazioni interne . . . . .	203
8.2.1	Sollecitazione interne in un rigido . . . . .	203
8.3	Equazioni cardinali della statica dei sistemi . . . . .	204
8.4	Sollecitazione reattiva su un rigido . . . . .	206
8.4.1	Vincoli piani non dissipativi . . . . .	207
8.4.2	Vincoli spaziali non dissipativi . . . . .	211
8.5	Problemi della statica dei modelli . . . . .	213
<b>9</b>	<b>Sollecitazioni interne in un rigido in equilibrio</b>	<b>221</b>
9.1	Azioni interne in un rigido 3D in equilibrio . . . . .	221
9.2	Azioni interne in un rigido 2D in equilibrio . . . . .	223
9.3	Azioni interne in rigido 1D in equilibrio . . . . .	225
9.4	Azioni interne in archi e aste “scariche” in equilibrio . . . . .	226
9.5	Osservazioni sui fili . . . . .	227
9.6	Calcolo di azioni interne in un rigido monodimensionale . . . . .	228
9.6.1	Approfondimento: diagrammi delle azioni interne . . . . .	230
<b>10</b>	<b>Modelli articolati</b>	<b>233</b>
10.1	Biella-manovella . . . . .	233
10.2	Arco a 3 cerniere . . . . .	237
10.3	Esempio di problema inverso . . . . .	241
10.3.1	Equazioni Cardinali della Statica . . . . .	241
10.3.2	Equazione pura di equilibrio . . . . .	245
10.4	Soluzione del Quiz 10.1 . . . . .	246
<b>11</b>	<b>Equazioni Cardinali della Dinamica</b>	<b>247</b>
11.1	Principio di D’Alembert . . . . .	247
11.1.1	I Equazione Cardinale della Dinamica . . . . .	247
11.1.2	II Equazione Cardinale della Dinamica . . . . .	248
11.2	Equazione dell’energia cinetica . . . . .	249
11.3	Statica e Dinamica relativa del punto materiale . . . . .	250
11.4	Statica e Dinamica relativa dei modelli meccanici . . . . .	254
<b>12</b>	<b>Operatore d’inerzia per un Rigido</b>	<b>265</b>
12.1	Momento angolare per i rigidi . . . . .	265
12.2	Energia cinetica di un rigido . . . . .	267
12.3	Operatore d’inerzia per un rigido . . . . .	267
12.4	Matrice d’inerzia nel caso piano . . . . .	270
12.5	Ellissoide d’inerzia . . . . .	271

12.6	Assi principali d'inerzia . . . . .	275
12.7	Variazione con il polo dell'operatore d'inerzia . . . . .	283
12.8	Assi principali d'inerzia centrali . . . . .	285
<b>13</b>	<b>Statica e Dinamica dei Rigidi</b>	<b>289</b>
13.1	Equazioni Cardinali della Statica per un Rigido . . . . .	289
13.2	Equazioni Cardinali della Dinamica per un Rigido . . . . .	291
13.3	Moto rigido piano . . . . .	293
13.4	Rigido con asse fisso . . . . .	294
13.5	Moti particolari di un rotore . . . . .	300
13.6	Rigido con punto fisso . . . . .	302
13.6.1	Moto per inerzia . . . . .	305
13.6.2	Effetti giroscopici elementari . . . . .	311
13.6.3	Tendenza al parallelismo . . . . .	313
13.6.4	Tenacia dell'asse giroscopico . . . . .	313
13.7	Disco appoggiato su una guida fissa . . . . .	314
<b>14</b>	<b>Equazioni di Lagrange</b>	<b>325</b>
14.1	Equazioni di Lagrange non conservative . . . . .	325
14.2	Equazioni di Lagrange conservative . . . . .	328
14.3	Equazioni di Lagrange in forma mista . . . . .	328
14.4	Struttura dell'energia cinetica di un sistema olonomo . . . . .	332
14.5	Struttura delle equazioni di Lagrange . . . . .	335
14.6	Integrali primi per i sistemi olonomi . . . . .	337
14.7	Macchine semplici . . . . .	339
<b>15</b>	<b>Linearizzazione delle equazioni di Lagrange</b>	<b>341</b>
15.1	Modelli con un grado di libertà . . . . .	341
15.2	Modelli con $l$ gradi di libertà . . . . .	345
15.3	Sistemi di eq. di Lagrange lineari . . . . .	348
15.3.1	Modelli lineari con $l$ gradi di libertà . . . . .	350
15.4	Costruzione delle coordinate normali . . . . .	357
<b>16</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>365</b>