

# Capitolo 13

## Statica e Dinamica dei Rigidi

In questo capitolo applicheremo le equazioni cardinali della statica e della dinamica dei sistemi meccanici ai modelli rigidi, per studiarne gli eventuali equilibri e i moti.

### 13.1 Equazioni Cardinali della Statica per un Rigido

Per un generico corpo rigido  $\mathcal{R}$ , le ECS coincidono con quelle che valgono per un modello qualsiasi

$$(13.1.1) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(est)} = \vec{0} \\ \vec{M}_O^{(est)} = \vec{0} \end{cases},$$

e sono necessarie all'equilibrio. Inoltre, a differenza di quanto succede per i modelli articolati, sono anche sufficienti all'equilibrio, cioè ogni loro soluzione è una configurazione di equilibrio del corpo rigido in esame. Come applicazione delle ECS studiamo il seguente

**Esempio 13.1.1.** *Consideriamo un corpo rigido di massa  $m$  appoggiato su di un piano orizzontale liscio in 3 o più punti non allineati  $P_i$  e soggetto al solo peso proprio. Studiamo gli equilibri e le reazioni vincolari agli equilibri. Consideriamo l'insieme delle reazioni vincolari nei punti di appoggio  $P_i$*

$$\mathcal{S}^{reatt,est} = \left\{ \left( P_i, \vec{\phi}_i = \phi_i \vec{e}_z \right) \right\} \quad \phi_i \geq 0 .$$

Esso è un insieme di forze parallele e concordi al versore  $\vec{e}_z$ . Quindi, possiede un centro  $C$  dato da

$$C - O = \frac{\sum \phi_i (P_i - O)}{\sum \phi_i} ,$$

che appartiene all'involuppo (o involucro) convesso dei punti di applicazione delle forze (vedi Sez. 7.5), quindi al piano d'appoggio. Allora, possiamo concludere che l'insieme delle reazioni vincolari equivale al risultante applicato in  $C$

$$\mathcal{S}^{reatt,est} \sim \left\{ \left( C, \vec{\phi} = \sum \phi_i \vec{e}_z \right) \right\} .$$

Ora, scrivendo le ECS con la scelta del polo  $C$

$$(13.1.2) \quad \begin{cases} m\vec{g} + \vec{\phi} = \vec{0} \\ (G - C) \times m\vec{g} + \vec{M}_C^{(est, reatt)} = \vec{0}, \end{cases}$$

si trovano le soluzioni

$$(13.1.3) \quad \begin{cases} \vec{\phi} = -m\vec{g} \\ (G - C) \parallel \vec{g} \end{cases} .$$

Dunque, vale la seguente

**Proposizione 13.1.1.** *Condizione necessaria e sufficiente di equilibrio per un corpo rigido pesante appoggiato su di un piano orizzontale liscio è che la proiezione ortogonale del suo baricentro sul piano d'appoggio, denotata  $G_{\perp}$ , coincida con il centro delle reazioni vincolari*

$$(13.1.4) \quad G_{\perp} = C .$$

Tuttavia, la posizione sul piano del centro  $C$  è incognita a priori e si può determinare solo dopo aver calcolato le singole reazioni vincolari, oppure dopo aver trovato le configurazioni di equilibrio. Quindi, cerchiamo condizioni di equilibrio esprimibili in termini del punto  $G_{\perp}$ , la cui posizione dipende solo dalla configurazione del rigido. Vale la seguente

**Proposizione 13.1.2** (Levi-Civita & Amaldi). *Condizione necessaria e sufficiente di equilibrio per un corpo rigido pesante appoggiato su di un piano orizzontale liscio è che il punto  $G_{\perp}$  appartenga all'involuppo convesso dei punti di appoggio. Tale condizione si può esprimere dicendo che il baricentro sia sostenuto.*

*Dimostrazione.* La necessità segue immediatamente dalla (13.1.4) e dalla proprietà già richiamata secondo la quale  $C$  appartiene all'involuppo (o involucro) convesso dei punti di applicazione delle forze.

Per dimostrare la sufficienza, iniziamo a considerare il caso di soli 3 punti di appoggio  $P_1, P_2, P_3$  non allineati (treppiede) e dimostriamo che ogni configurazione del rigido nelle quali il baricentro è sostenuto, è una configurazione di equilibrio. A tale scopo basta verificare che tali configurazioni soddisfano le ECS che, allo stesso tempo, forniscono le reazioni vincolari in quelle configurazioni. Vedremo che, in questo caso, le reazioni vincolari risultano uniche in ogni configurazione d'equilibrio. Con riferimento alla Fig. 13.1.1, calcoliamo il momento assiale di tutte le forze esterne rispetto ai tre lati del triangolo d'appoggio  $P_1P_2P_3$ . Considerando, ad esempio, il lato  $P_2P_3$ , osserviamo che al momento assiale rispetto a tale lato concorrono solo il peso, che si può pensare applicato in  $G_{\perp}$  (perché?), e la sola reazione  $\vec{\phi}_1$ , poichè  $\vec{\phi}_2$  e  $\vec{\phi}_3$  sono applicate in due punti appartenenti al lato stesso. Allora, scelto  $O \in r_1$  e il versore  $\vec{e}_1$  parallelo a  $r_1$ , si ha

$$M_{r_1} = ((P_1 - O) \times \vec{\phi}_1 + (G_{\perp} - O) \times m\vec{g}) \cdot \vec{e}_1 = \phi_1 h_1 - mgk_1 .$$

Se indichiamo con  $\Delta$  l'area del triangolo  $P_1P_2P_3$  e con  $\Delta_1$  l'area del triangolo  $G_{\perp}P_2P_3$ , allora vale

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{k_1}{h_1}$$

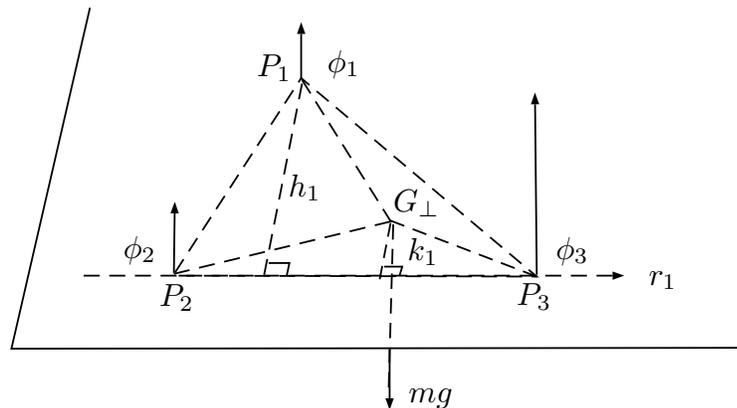


Figura 13.1.1: Treppiede

Quindi,  $M_{r_1}$  si annulla se e solo se

$$\phi_1 = mg \frac{k_1}{h_1} = mg \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

Analogamente, risulta

$$\phi_2 = mg \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \phi_3 = mg \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

È evidente che queste tre reazioni trovate equilibrano, il peso del corpo poiché

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = mg \left( \frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_2}{\Delta} + \frac{\Delta_3}{\Delta} \right) = mg,$$

quindi soddisfano la I ECS. D'altra parte, soddisfano anche la II ECS poiché, se si prende come polo un punto d'appoggio, ad esempio  $P_1$ , si annullano tre componenti non complanari del momento risultante rispetto a  $P_1$ : quelle rispetto ai lati  $P_1P_2$  e  $P_1P_3$  e quella verticale.

Se poi gli appoggi sono più di tre, l'ipotesi che il baricentro sia sostenuto garantisce pur sempre l'equilibrio. Infatti, basta supporre le reazioni tutte nulle tranne quelle in tre appoggi e riportarsi al caso precedente, a patto che  $G_{\perp}$  appartenga al triangolo avente come vertici i tre appoggi scelti. Comunque, in questo caso le reazioni, in ogni configurazione di equilibrio, sono indeterminate (ammettono infinite soluzioni) e l'indeterminazione è tanto maggiore quanto più grande è il numero dei punti d'appoggio. Per eliminare tale indeterminazione occorre rinunciare al modello rigido per il piano d'appoggio e ammettere, invece, la sua deformabilità. Ma questo esula dai contenuti di questo corso.  $\square$

## 13.2 Equazioni Cardinali della Dinamica per un Rigido

Per un generico corpo rigido  $\mathcal{R}$ , le ECD

$$(13.2.1) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(est)} = \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \vec{M}_O^{(est)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} + \vec{v}_O \times \vec{p} \\ \Pi = \frac{dK}{dt} \end{cases},$$

assumono una forma particolare, grazie al ruolo del centro di massa e dell'operatore d'inerzia. In particolare, nel calcolare la derivata rispetto al tempo della quantità di moto e del momento della quantità di moto, che intervengono nel secondo membro delle ECD, dobbiamo considerare due casi.

1. Se il polo  $O \in \mathcal{R}$ , possiamo utilizzare la rappresentazione (4.5.11) per l'accelerazione del centro di massa e la (12.1.6) per il momento angolare. Infatti, si ottengono rispettivamente,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \left( \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (G - O) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (G - O)) \right),$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \Big|_{spazio} = \frac{d}{dt} \Big|_{spazio} \left( \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) + (G - O) \times m\vec{v}_O \right) \stackrel{(4.6.2)}{=} \mathbf{I}_O(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) + (\vec{v}_G - \vec{v}_O) \times m\vec{v}_O + (G - O) \times m\vec{a}_O,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \Big|_{corpo} = \mathbf{I}_O(\dot{\vec{\omega}}).$$

Dunque, la I ECD diventa

$$(13.2.2) \quad \vec{R}^{(est)} = m \left( \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (G - O) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (G - O)) \right),$$

mentre la seconda

$$(13.2.3) \quad \vec{M}_O^{(est)} = \mathbf{I}_O(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) + \vec{v}_G \times m\vec{v}_O + (G - O) \times m\vec{a}_O + \vec{v}_O \times \vec{p}.$$

2. Se il polo  $O$  è un punto qualsiasi, anche mobile, possiamo utilizzare la rappresentazione (12.1.8), con  $A \equiv O$  and  $D \equiv G$ . Derivando rispetto al tempo, si ottiene

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \Big|_{spazio} = \frac{d}{dt} \Big|_{spazio} \left( \mathbf{I}_G(\vec{\omega}) + (G - O) \times m\vec{v}_G \right) = \mathbf{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_G(\vec{\omega}) + (\vec{v}_G - \vec{v}_O) \times m\vec{v}_G + (G - O) \times m\vec{a}_G.$$

Allora, la seconda ECD diventa

$$(13.2.4) \quad \vec{M}_O^{(est)} = \mathbf{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_G(\vec{\omega}) - \vec{v}_O \times m\vec{v}_G + (G - O) \times m\vec{a}_G + \vec{v}_O \times \vec{p}.$$

Ricapitolando, le ECD per un corpo rigido si possono scrivere

$$(13.2.5) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(est)} = m \left( \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (G - O) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (G - O)) \right) \\ \vec{M}_O^{(est)} = \mathbf{I}_O(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) + (G - O) \times m\vec{a}_O, \end{cases} \quad O \in \mathcal{R}$$

oppure

$$(13.2.6) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(est)} = m \vec{a}_G \\ \vec{M}_O^{(est)} = \mathbf{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_G(\vec{\omega}) + (G - O) \times m \vec{a}_G . \end{cases} \quad O \in \mathcal{E}_3$$

Ovviamente, la rappresentazione (13.2.6) può essere usata anche se  $O$  appartiene al rigido. Per quanto riguarda l'equazione dell'energia cinetica, osserviamo, innanzitutto, che il primo membro della (11.2.6) si riduce alla potenza della sola sollecitazione esterna agente sul rigido, poichè quella della sollecitazione interna si annulla per la Proposizione 8.2.2

$$(13.2.7) \quad \Pi^{(est)} = \frac{dK}{dt} .$$

Inoltre, dimostriamo che per un corpo rigido, la (13.2.7) è una conseguenza delle prime due ECD. Infatti, la potenza delle forze esterne su un rigido risulta, tenuto conto delle (13.2.5) con  $O \equiv G$ ,

$$(13.2.8) \quad \Pi^{(est)} = \vec{R}^{(est)} \cdot \vec{v}_G + \vec{M}_G^{(est)} \cdot \vec{\omega} = m \vec{a}_G \cdot \vec{v}_G + \frac{d\vec{L}_G}{dt} \cdot \vec{\omega}$$

Analizziamo il secondo membro e dimostriamo che coincide con  $\frac{dK}{dt}$ . Il primo termine risulta

$$m \vec{a}_G \cdot \vec{v}_G = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m |\vec{v}_G|^2 \right) ,$$

mentre il secondo termine risulta pari alla derivata del termine polare

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} \cdot \vec{\omega} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{I}_G(\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega} \right)$$

Infatti,

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} \cdot \vec{\omega} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{I}_G(\vec{\omega}) \right) \cdot \vec{\omega} = \left( \mathbf{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_G(\vec{\omega}) \right) \cdot \vec{\omega} = \mathbf{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) \cdot \vec{\omega} + \underbrace{\vec{\omega} \times \mathbf{I}_G(\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega}}_{=0} ,$$

mentre

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{I}_G(\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega} \right) = \frac{1}{2} \left( \left( \mathbf{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_G(\vec{\omega}) \right) \cdot \vec{\omega} + \mathbf{I}_G(\vec{\omega}) \cdot \dot{\vec{\omega}} \right) \stackrel{(12.3.3)}{=} \mathbf{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) \cdot \vec{\omega} .$$

Dunque, se le ECD (13.2.5) sono soddisfatte, il secondo membro della (13.2.8) coincide con il secondo della (13.2.7).

### 13.3 Moto rigido piano

Nel caso di un moto rigido piano non traslatorio, abbiamo visto che la velocità angolare è ortogonale al piano direttore e si può scrivere

$$(13.3.1) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k} ,$$

dove  $\varphi$  è un angolo misurato fra due assi nel piano (il primo fisso e il secondo solidale a  $\mathcal{R}$ ) e  $\vec{k}$  è un versore ortogonale al piano. Quindi, scelto  $O \equiv G$ , il trasformato del vettore  $\vec{\omega}$  tramite  $\mathbf{I}_G$  risulta

$$(13.3.2) \quad \mathbf{I}_G(\vec{\omega}) = \mathbf{I}_G(\dot{\varphi} \vec{k}) = \dot{\varphi} \mathbf{I}_G(\vec{k}) .$$

Dunque, il momento angolare di  $\mathcal{R}$  rispetto a  $G$  è, per la (12.1.6),

$$(13.3.3) \quad \vec{L}_G = \dot{\varphi} \mathbf{I}_G(\vec{k}) .$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica (12.2.2), grazie alla (13.3.2), essa diventa

$$(13.3.4) \quad \begin{aligned} K &= \frac{1}{2} M |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I}_G(\vec{\omega}) \\ &= \frac{1}{2} M |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \vec{k} \cdot \mathbf{I}_G(\vec{k}) \\ &= \frac{1}{2} M |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 I_{r(G)} , \end{aligned}$$

dove  $r(G)$  denota l'asse passante per  $G$  e ortogonale al piano direttore. Se poi il rigido ha un punto fisso  $O$ , dalla (12.1.6) e (12.2.1) si ottiene

$$(13.3.5) \quad \vec{L}_O = \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) = \dot{\varphi} \mathbf{I}_O(\vec{k}) \quad \text{e} \quad K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} I_{r(O)} \dot{\varphi}^2 .$$

### Lamine che si muovono nel loro piano

In particolare, se il rigido è piano (lamina), per le proprietà di simmetria materiale tutti gli assi paralleli a  $\vec{k}$  sono assi principali d'inerzia. Pertanto, scelta una qualunque terna ortonormale  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , con  $\vec{e}_3 \equiv \vec{k}$ , la matrice d'inerzia  $[\mathbf{I}_O]$  assume la forma (12.4.1). Dunque,

$$\vec{L}_G = J_{3G} \dot{\varphi} \vec{k} ,$$

dove  $J_{3G} = I_{11} + I_{22}$  denota il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse  $(G, \vec{k})$ , mentre  $K$  si calcola sempre mediante la (13.3.4). Se poi la lamina ha un punto fisso  $O$ , le (13.3.5) si riducono a

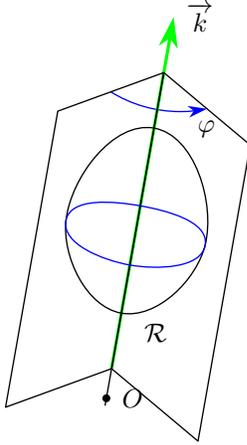
$$\vec{L}_O = \dot{\varphi} J_{3O} \vec{k} \quad \text{e} \quad K = \frac{1}{2} J_{3O} \dot{\varphi}^2 ,$$

nel caso di una lamina che si muove di moto piano.

## 13.4 Rigido con asse fisso

Consideriamo un modello rigido  $\mathcal{R}$  vincolato ad avere un asse solidale  $r$  fisso nello spazio. Sia  $\vec{k}$  il versore parallelo all'asse. Abbiamo già studiato la cinematica di tale modello, detto anche *rotore* poichè si può muovere di solo moto rotatorio, che è un esempio di moto rigido piano. Dunque, introdotta come coordinata libera l'angolo (diedro)  $\varphi$  tra un piano fisso passante per l'asse e un altro piano per l'asse e solidale a  $\mathcal{R}$ , la sua velocità angolare assume la forma

$$(13.4.1) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi}(t) \vec{k} .$$



Per le ECD possiamo usare la rappresentazione (13.2.5) la quale, scelto il polo  $O$  sull'asse fisso, si riduce a

$$(13.4.2) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{R}^{(est,reatt)} = m \left( \vec{g}_O + \dot{\varphi} \vec{k} \times (G - O) + \dot{\varphi}^2 \vec{k} \times (\vec{k} \times (G - O)) \right) \\ \vec{M}_O^{(est,att)} + \vec{M}_O^{(est,reatt)} = \ddot{\varphi} \mathbf{I}_O(\vec{k}) + \dot{\varphi}^2 \vec{k} \times \mathbf{I}_O(\vec{k}) + (G - O) \times m \vec{g}_O. \end{cases} \quad O \in r$$

e l'equazione dell'energia cinetica, che si può scrivere come

$$(13.4.3) \quad \Pi^{(est,att)} + \Pi^{(est,reatt)} = \frac{dK}{dt} .$$

In genere, tali equazioni contengono la sollecitazione reattiva, in altre parole le 6 incognite scalari  $(\vec{R}^{(est,reatt)}, \vec{M}_O^{(est,reatt)})$ , oltre alla coordinata libera  $\varphi$ ; tuttavia, come abbiamo dimostrato nella sezione precedente, sono dipendenti fra loro. Quindi, costituiscono un sistema di equazioni sotto-determinato, finchè non introduciamo qualche ipotesi sui vincoli. D'ora in poi supporremo che i vincoli siano *non dissipativi* e bilateri in modo che valga la seguente

**Proposizione 13.4.1.** *Sia  $\mathcal{R}$  un rigido vincolato ad avere un asse fisso  $r$ . I vincoli che realizzano tale condizione sono non dissipativi e bilateri se e solo se il momento assiale lungo  $r$  delle reazioni vincolari è nullo*

$$(13.4.4) \quad M_r^{(est,reatt)} = \vec{M}_O^{(est,reatt)} \cdot \vec{k} = 0 \quad O \in r .$$

*Dimostrazione.* Valutiamo il lavoro virtuale delle reazioni vincolari

$$LV^{(reatt)} = \vec{R}^{(est,reatt)} \cdot \delta \vec{x}_O + \vec{M}_O^{(est,reatt)} \cdot \vec{\epsilon} = \vec{M}_O^{(est,reatt)} \cdot \vec{k} \delta \varphi \quad O \in r ,$$

essendo  $\vec{\epsilon} = \vec{\omega} \delta \tau \stackrel{(13.4.1)}{=} \dot{\varphi} \delta \varphi \vec{k}$ . Dalla definizione di vincoli non dissipativi (5.10.1) segue la tesi.  $\square$

**N.B.** Le condizioni della proposizione precedente si realizzano, ad esempio, con una cerniera cilindrica in  $O$ , oppure con una cerniera sferica in  $O$  più un collare sottile fissato in un altro punto dell'asse, tutti vincoli supposti lisci.

### Statica

Vogliamo scrivere un'equazione pura di equilibrio. A tale scopo, calcoliamo il lavoro virtuale delle forze attive

$$LV^{(att)} = Q_\varphi \delta\varphi = \vec{R}^{(est,att)} \cdot \delta\vec{x}_O + \vec{M}_O^{(est,att)} \cdot \vec{\epsilon} = \vec{M}_O^{(est,att)} \cdot \vec{k} \delta\varphi \quad O \in r,$$

da cui segue che il momento assiale lungo  $r$  coincide con la componente lagrangiana della sollecitazione attiva relativa alla coordinata libera  $\varphi$

$$(13.4.5) \quad Q_\varphi = \vec{M}_O^{(est,att)} \cdot \vec{k}.$$

Quindi, l'equazione pura di equilibrio  $Q_\varphi = 0$  è data da

$$(13.4.6) \quad M_r^{(est,att)}(\varphi) = 0.$$

**Esercizio 13.4.1.** Ricavare l'equazione pura di equilibrio (13.4.6) a partire dalle ECD (13.4.2).

Studiamo, alcuni casi particolari della (13.4.6). Se la sollecitazione attiva esterna è un insieme di forze a risultante equivalente  $\mathcal{S}^{(est)} \sim \{(P, \vec{F}_P)\}$ , allora

$$\vec{M}_O^{(est,att)} = (P - O) \times \vec{F}_P \quad O \in r$$

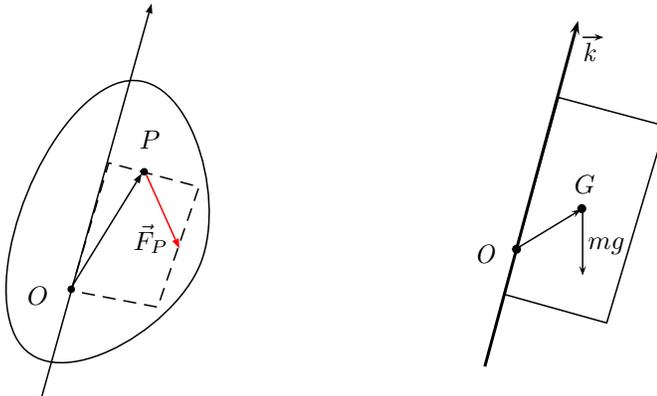
e l'equazione pura d'equilibrio (13.4.6) diventa

$$(13.4.7) \quad (P - O) \times \vec{F}_P \cdot \vec{k} = 0 \quad O \in r.$$

In questo caso la condizione di equilibrio si può esprimere nella seguente

**Proposizione 13.4.2.** Sia  $\mathcal{R}$  un rigido con asse fisso, vincolato con vincoli non dissipativi e soggetto a un insieme di forze attive a risultante equivalente. Le configurazioni di equilibrio sono tutte e sole quelle in cui l'asse fisso e la retta di applicazione del risultante delle forze attive giacciono sullo stesso piano, quello per  $r$  e passante per  $P$ .

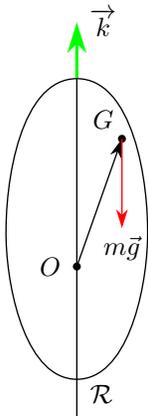
*Dimostrazione.* La (13.4.7) equivale alla condizione che il vettore applicato  $(P, \vec{F}_P)$  appartenga al piano passante per l'asse e il punto  $P$ .  $\square$



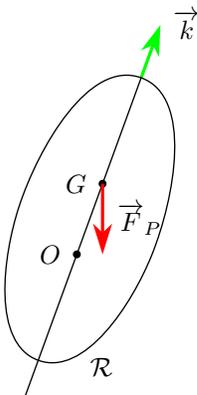
**Esempio 13.4.1.** Consideriamo un rigido con asse fisso, soggetto soltanto al proprio peso. In tal caso,  $P \equiv G$  e la retta di applicazione di  $\vec{F}_P \equiv m\vec{g}$  è la verticale passante per  $G$ . Dunque, il rigido è in equilibrio in tutte e sole le configurazioni in cui il suo baricentro  $G$  appartiene al piano verticale passante per l'asse fisso (piano per l'asse e la verticale di un punto dell'asse).

Nella tecnica, spesso si richiede che un rotore sia in equilibrio in qualunque configurazione, cioè per qualunque valore della coordinata libera  $\varphi$ . Illustriamo due situazioni in cui questo si verifica.

**Esempio 13.4.2.** Un rotore, soggetto solo al proprio peso, è in equilibrio in ogni sua configurazione se l'asse di rotazione è verticale. Infatti, in tal caso, tutti i piani del fascio per  $r$  sono verticali. In modo equivalente, si può osservare che, in questo esempio, la (13.4.7) è soddisfatta per ogni  $\varphi$  poichè  $\vec{F}_P \equiv m\vec{g}$  e  $\vec{k}$  sono sempre paralleli.



**Definizione 13.4.1.** Un rotore si dice bilanciato staticamente se il suo centro di massa  $G$  (e quindi il suo baricentro) appartiene all'asse di rotazione.



**Esempio 13.4.3.** Un rotore soggetto solo al proprio peso, è in equilibrio in ogni sua configurazione se è bilanciato staticamente. Infatti, la (13.4.7) è soddisfatta per ogni  $\varphi$  poichè i vettori  $P - O \equiv G - O$  e  $\vec{k}$  sono sempre paralleli.

### Dinamica

Una conseguenza della (13.4.4) è che la proiezione della seconda equazione cardinale lungo l'asse  $r$  risulta un'equazione *pura* di moto, così come l'equazione dell'energia. Scriviamo quest'ultima.

L'energia cinetica del rotore è data dalla (13.3.5) che qui riscriviamo

$$(13.4.8) \quad K = \frac{1}{2} I_r \dot{\varphi}^2 ,$$

ricordiamo che  $I_r = \vec{k} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{k})$  denota il momento d'inerzia del rigido rispetto all'asse  $r$ . Tale momento d'inerzia non dipende dalla configurazione del rigido e quindi dal tempo, poichè l'asse  $r$  è solidale al rigido. La potenza delle forze esterne attive agenti sul rotore è data da

$$(13.4.9) \quad \pi^{(est,att)} = \vec{R}^{(est,att)} \cdot \vec{v}_O + \vec{M}_O^{(est,att)} \cdot \vec{\omega} = \vec{M}_O^{(est,att)} \cdot \dot{\varphi} \vec{k} = M_r^{(est,att)} \dot{\varphi} ,$$

mentre quella delle forze esterne reattive è nulla, poichè

$$(13.4.10) \quad \pi^{(est,reatt)} = \vec{R}^{(est,reatt)} \cdot \vec{v}_O + \vec{M}_O^{(est,reatt)} \cdot \vec{\omega} = \vec{M}_O^{(est,reatt)} \cdot \dot{\varphi} \vec{k} \stackrel{(13.4.4)}{=} 0$$

Dunque, l'equazione dell'energia (13.4.3) diventa

$$(13.4.11) \quad \dot{\varphi} \ddot{\varphi} I_r = M_r^{(est,att)} \dot{\varphi} .$$

Possiamo allora considerare il problema di Cauchy

$$(13.4.12) \quad \begin{cases} \ddot{\varphi} &= \frac{M_r^{(est,att)}}{I_r} \\ \varphi(t_0) &= \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(t_0) &= \omega_0 \end{cases} \quad M_r^{(est,att)} = M_r(\varphi, \dot{\varphi}, t)$$

la cui soluzione è anche soluzione della (13.4.11). Integrando il sistema (13.4.12) si trova l'equazione finita di moto

$$(13.4.13) \quad \varphi(t) = f(t; \varphi_0, \omega_0)$$

relativa alle condizioni iniziali  $\varphi(t_0) = \varphi_0$ ,  $\omega(t_0) = \omega_0$ . Una volta trovata la (13.4.13), possiamo determinare le reazioni vincolari sul rotore, risolvendo le ECD rispetto alle reazioni stesse. La I ECD (13.4.2) fornisce

$$(13.4.14) \quad \vec{R}^{(est,reatt)} = -\vec{R}^{(est,att)} + m\vec{a}_G = -\vec{R}^{(est,att)} + m\vec{k} \times \left( \ddot{\varphi}(G - O) + \dot{\varphi}^2 \vec{k} \times (G - O) \right) .$$

Osserviamo che, alla reazione  $\vec{R}^{(est,reatt)}$  concorrono, sia le forze esterne attive con il vettore  $\vec{R}^{(est,att)}$ , sia le forze d'inerzia, cioè quelle dovute allo stato cinetico del rigido. Tuttavia è possibile rendere nullo tale contributo come è dimostrato dalla seguente

**Proposizione 13.4.3.** *Il vettore risultante delle reazioni vincolari su un rotore non dipende dallo stato cinetico del rigido se e solo se esso è bilanciato staticamente.*

*Dimostrazione.* Se  $G$  appartiene all'asse fisso,  $\vec{a}_G = \vec{0}$ , quindi la sufficienza.

Per la necessità, si osservi che il vettore  $\vec{k} \times \ddot{\varphi}(G - O) + \vec{k} \times \left( \dot{\varphi}^2 \vec{k} \times (G - O) \right)$  è la somma di 2 vettori ortogonali tra loro. Quindi è nullo solo se i due vettori si annullano separatamente e in particolare solo se  $\vec{k} \times (G - O) = \vec{0}$ , da cui segue la tesi.  $\square$

Occupiamoci, ora, della II ECD (13.4.2). Tenendo conto del fatto che la componente del momento delle reazioni vincolari lungo l'asse di rotazione è nulla (13.4.4), essa implica

$$(13.4.15) \quad \vec{M}_O^{(est, reatt)} = \left( -\vec{M}_O^{(est, att)} + \ddot{\varphi} \mathbf{I}_O(\vec{k}) + \dot{\varphi}^2 \vec{k} \times \mathbf{I}_O(\vec{k}) \right)_{\perp},$$

dove il simbolo  $\perp$  denota l'operatore di proiezione di un vettore qualsiasi su di un piano ortogonale a  $\vec{k}$ . Utilizzando la scomposizione (2.1.14) per il vettore  $\ddot{\varphi} \mathbf{I}_O(\vec{k})$  si ottiene

$$(13.4.16) \quad \vec{M}_O^{(est, reatt)} = (-\vec{M}_O^{(est, att)})_{\perp} + \vec{k} \times \left( \ddot{\varphi} \mathbf{I}_O(\vec{k}) \times \vec{k} \right) + \dot{\varphi}^2 \vec{k} \times \mathbf{I}_O(\vec{k}),$$

poiché l'ultimo vettore appartiene già ad un piano ortogonale a  $\vec{k}$ . Anche in questo caso al momento risultante concorrono sia le forze esterne attive, sia le forze dovute allo stato cinetico del corpo. Tuttavia, questo ultimo contributo si annulla se l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia rispetto al punto  $O$ . Questa osservazione, motiva la seguente

**Definizione 13.4.2.** *Un rotore si dice bilanciato dinamicamente se l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia rispetto a qualche suo punto.*

Dunque, possiamo concludere che

**Proposizione 13.4.4.** *Il momento risultante delle reazioni vincolari su un rotore non dipende dallo stato cinetico del rigido se e solo se esso è bilanciato dinamicamente.*

*Dimostrazione.* Il contributo delle forze d'inerzia al momento risultante è dato da

$$\ddot{\varphi} \vec{k} \times (\mathbf{I}_O(\vec{k}) \times \vec{k}) + \dot{\varphi}^2 \vec{k} \times \mathbf{I}_O(\vec{k}),$$

che è somma di due vettori ortogonali tra loro. Pertanto, tale contributo si annulla se e solo se si annullano separatamente i due vettori, cioè se e solo se

$$\vec{k} \times \mathbf{I}_O(\vec{k}) = \vec{0},$$

da cui segue la tesi.  $\square$

**Definizione 13.4.3.** *Un rotore si dice bilanciato sia staticamente sia dinamicamente se l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia centrale.*

**N.B.** Per l'osservatore  $\Sigma'$  solidale al rigido, osservatore che è in moto rotatorio con velocità angolare  $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k}$ , ovviamente il rigido è in quiete. Quindi sono soddisfatte le ECS, nelle quali vanno computate anche le forze d'inerzia di trascinamento. Allora, la condizione di bilanciamento statico e dinamico è interpretata da  $\Sigma'$  come l'annullarsi del risultante e del momento risultante delle forze d'inerzia, in particolare delle forze centrifughe e di quelle dovute alla sua accelerazione angolare rispetto a  $\Sigma$ .

## 13.5 Moti particolari di un rotore

Studiamo alcuni moti di uso comune nelle applicazioni.

### Moto per inerzia

È caratterizzato dalla condizione che la sollecitazione attiva abbia momento assiale nullo

$$(13.5.1) \quad M_r^{(est,att)} = 0 \quad \forall t \in I ,$$

equivalente alla condizione

$$(13.5.2) \quad \vec{M}_O^{(est,att)} = (\vec{M}_O^{(est,att)})_{\perp} \quad \forall t \in I .$$

In tal caso, fissati i valori iniziali

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

dall'equazione (13.4.12) si ottiene subito un moto rotatorio uniforme

$$(13.5.3) \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t , \quad \vec{\omega} = \omega_0 \vec{k}$$

e dalle (13.4.2) la sollecitazione reattiva

$$(13.5.4) \quad \vec{R}^{(est,reatt)} = -\vec{R}^{(est,att)} + m\omega_0^2 \vec{k} \times (\vec{k} \times (G - O)) = -\vec{R}^{(est,att)} - m\omega_0^2 (G - O)_{\perp}$$

$$(13.5.5) \quad \vec{M}_O^{(est,reatt)} = -\vec{M}_O^{(est,att)} + \omega_0^2 \vec{k} \times \mathbf{I}_O(\vec{k})$$

**N.B.** Persino quando la sollecitazione esterna attiva è equilibrata, la sollecitazione reattiva dei vincoli sull'asse del rotore può assumere valori molto grandi, proporzionali al quadrato della velocità angolare  $\omega_0^2$ , se il rotore non è bilanciato staticamente e dinamicamente. Questo è il motivo per il quale si aggiungono o si tolgono delle masse in punti opportuni del rigido, come ad esempio si fa nella equilibratura dei cerchioni delle gomme di un'auto da parte del gommista.

**N.B.** Se l'asse di rotazione non è bilanciato dinamicamente, perfino se  $\vec{M}_O^{(est,att)}$  è nullo, il momento delle reazioni vincolari, scomposto su una qualsiasi terna solidale  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  è pari a

$$\vec{M}_O^{(est,reatt)} = \omega_0^2 \vec{k} \times \mathbf{I}_O(\vec{k}) = \omega_0^2 \vec{k} \times (I_{13}\vec{i} + I_{23}\vec{j} + I_{33}\vec{k}) = \omega_0^2 (I_{13}\vec{j} - I_{23}\vec{i}) .$$

Pertanto, ha due componenti ortogonali all'asse, proporzionali ai momenti deviatori. I componenti opposti, cioè i momenti che il rotore esercita sui vincoli, detti *cimenti vincolari*, tendono a deviare i vincoli stessi dall'asse fisso. Questo spiega il nome momenti *deviatori* per gli elementi fuori diagonale della matrice d'inerzia. Invece, il termine momenti *centrifughi* è dovuto alla descrizione dell'osservatore  $\Sigma'$  solidale al rigido, il quale interpreta l'opposto dell'ultimo termine della (13.5.5) come il momento risultante delle forze centrifughe.

### Volano

È un rotore caratterizzato dal fatto che il momento assiale della sollecitazione attiva sia una funzione periodica del tempo

$$(13.5.6) \quad M_r^{(est,att)} = A \cos \gamma t$$

In tal caso, fissati i valori iniziali

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0 ,$$

sostituendo la (13.5.6) nell'equazione (13.4.12) e integrando successivamente rispetto al tempo, si ottiene

$$\dot{\varphi} = \frac{A}{\gamma I_r} \sin \gamma t + \omega_0$$

e

$$(13.5.7) \quad \varphi(t) = \frac{A}{\gamma^2 I_r} (1 - \cos \gamma t) + \omega_0 t + \varphi_0 .$$

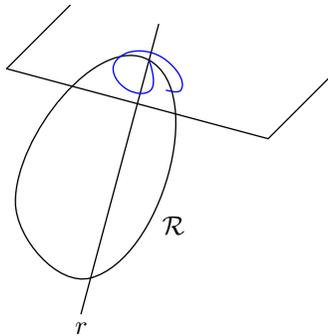
Si osservi che la velocità angolare scalare non è costante ma è pari alla somma di una costante più un termine sinusodale di periodo  $T = \frac{2\pi}{\gamma}$ , con una *irregolarità* di funzionamento espressa dal rapporto

$$(13.5.8) \quad \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{medio}} = \frac{2A}{\gamma I_r \omega_0} .$$

Una volta che si è fissata l'ampiezza  $A$  e la pulsazione  $\gamma$  del momento assiale, si può ridurre il grado di irregolarità aumentando il prodotto  $I_r \omega_0$ . Se non si può aumentare la velocità angolare iniziale  $\omega_0$ , è necessario avere grandi momenti d'inerzia  $I_r$  come, appunto, nei volani costituiti da massicce ruote la cui massa è quanto più possibile, lontana dall'asse di rotazione.

### Bilanciere

È un rotore soggetto all'azione di una molla a spirale che tende a riportarlo nella posizione di



equilibrio.

Se  $\varphi$  è la coordinata libera misurata a partire dalla posizione di equilibrio, il momento assiale della molla è dato da

$$(13.5.9) \quad M_r^{(est,att)} = -c\varphi ,$$

dove  $c$  è la rigidezza della molla. Dall'eq. (13.4.12) si deduce

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{I_r} \varphi = 0 ,$$

che ammette l'integrale generale

$$\varphi(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{c}{I_r}} t + \alpha\right) .$$

Quindi, il moto rotatorio è armonico con ampiezza, fase e periodo rispettivamente, pari

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\omega_0^2}{\nu^2}} , \quad \tan \alpha = -\frac{\omega_0}{\varphi_0 \nu} , \quad T = \frac{2\pi}{\nu} , \quad \nu = \sqrt{\frac{c}{I_r}} .$$

Si osservi che le oscillazioni sono isocrone poiché il loro periodo  $T$  non dipende dall'ampiezza  $A$ . Questa proprietà giustifica l'impiego dei bilancieri nella costruzione degli orologi meccanici: essi sono piccoli anelli rigidi montati su un perno fisso e sollecitati come in (13.5.9).

## 13.6 Rigido con punto fisso

In questa sezione studieremo alcuni moti di un corpo rigido vincolato ad avere un suo punto  $O$  fisso nello spazio  $\mathcal{E}_3$ . Ricordiamo che tale vincolo, realizzato ad esempio con una cerniera sferica fissa o con una sospensione cardanica, impedisce al rigido 3 spostamenti virtuali indipendenti (gli spostamenti di  $O$ ); quindi è un vincolo triplo. Pertanto, il modello ha 3 gradi di libertà e, quindi, 3 coordinate libere, ad esempio i tre angoli di Eulero di una terna solidale al rigido. Quindi, il moto sarà descritto dalla terna di funzioni  $(\varphi(t), \theta(t), \psi(t))$ .

Inoltre, poiché  $O$  è fisso, l'invariante scalare cinematico è nullo,  $I = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} = 0$ , quindi il campo delle velocità è di tipo rotatorio. Dunque, l'asse di Mozzi diventa asse d'istantanea rotazione per  $O$ . Scegliendo  $O$  come centro di riduzione, le ECD si scrivono

$$(13.6.1) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{R}^{(est,reatt)} = m \left( \dot{\vec{\omega}} \times (G - O) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (G - O)) \right) \\ \vec{M}_O^{(est,att)} + \vec{M}_O^{(est,reatt)} = \mathbf{I}_O(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) \end{cases}$$

mentre l'equazione dell'energia cinetica si scrive

$$(13.6.2) \quad \Pi^{(est,att)} + \Pi^{(est,reatt)} = \frac{dK}{dt} .$$

Tali equazioni contengono, come incognite, 3 coordinate libere del rigido (ad esempio i 3 angoli di Eulero) e le 6 componenti della sollecitazione reattiva  $(\vec{\phi}, \vec{\mu}_0)$ . Quindi il sistema è sotto-determinato in mancanza di ulteriori ipotesi sui vincoli. Allora, analizziamo il caso in cui il vincolo sia non dissipativo.

**Proposizione 13.6.1.** *Il vincolo di punto fisso su un rigido è non dissipativo e bilatero se e solo se il momento risultante delle reazioni vincolari rispetto al punto fisso è nullo*

$$(13.6.3) \quad \vec{M}_O^{(est,reatt)} = \vec{0} .$$

*Dimostrazione.* Il lavoro virtuale delle reazioni vincolari risulta

$$LV^{(reatt)} = \vec{R}^{(est, reatt)} \cdot \cancel{\delta \vec{x}_O} + \vec{M}_O^{(est, reatt)} \cdot \vec{\epsilon} \quad \forall \vec{\epsilon} \in E_3 .$$

Poichè, in questo caso,  $\vec{\epsilon} = \vec{\omega} \delta \tau$  è un arbitrario vettore di  $E_3$ , dalla definizione di vincoli non dissipativi e bilateri (5.10.1) segue la tesi.  $\square$

Da ora in poi supporremo che il vincolo sia non dissipativo e bilatero. La conseguenza è che la seconda delle (13.6.1) si riduce ad un'equazione *pura* di moto,

$$(13.6.4) \quad \vec{M}_O^{(est, att)} = \mathbf{I}_O(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) ,$$

mentre la prima, una volta determinato il moto del rigido, fornisce il risultante delle reazioni vincolari  $\vec{R}^{(est, reatt)}$

$$\vec{R}^{(est, reatt)} = -\vec{R}^{(est, att)} + m \left( \dot{\vec{\omega}} \times (G - O) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (G - O)) \right) .$$

Inoltre, anche l'equazione (13.6.2) dell'energia cinetica, che si calcola come

$$(13.6.5) \quad K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) ,$$

si riduce ad un'equazione pura di moto poichè il suo primo termine risulta

$$(13.6.6) \quad \Pi^{(est, att)} = \vec{R}^{(est, att)} \cdot \cancel{\vec{v}_O} + \vec{M}_O^{(est, att)} \cdot \vec{\omega} = \vec{M}_O^{(est, att)} \cdot \vec{\omega}$$

$$(13.6.7) \quad \Pi^{(est, reatt)} = \vec{R}^{(est, reatt)} \cdot \cancel{\vec{v}_O} + \vec{M}_O^{(est, reatt)} \cdot \vec{\omega} = 0 .$$

Per rappresentare le componenti della II ECD (13.6.4), conviene scegliere una terna *solidale* al rigido (base mobile), in modo che gli elementi della corrispondente matrice d'inerzia non dipendano dal tempo. Tale terna, sarà individuata ad ogni istante dagli angoli di Eulero ( $\varphi(t), \theta(t), \psi(t)$ ) misurati rispetto alla terna fissa. In particolare, conviene scegliere una TPI(O), in modo che la matrice d'inerzia sia diagonale. Allora, detta  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la TPI(O) fissata, siano

$$(13.6.8) \quad \vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$$

e

$$(13.6.9) \quad [\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix}$$

la velocità angolare e la matrice d'inerzia rispettivamente. Dunque, il momento angolare risulta

$$(13.6.10) \quad \vec{L}_O = \mathcal{A}p\vec{i} + \mathcal{B}q\vec{j} + \mathcal{C}r\vec{k} .$$

Allora, proiettando la (13.6.4) sulla TPI(O), si ottengono le equazioni di Eulero del corpo rigido con punto fisso

$$(13.6.11) \quad \begin{cases} \mathcal{A}\dot{p} - (\mathcal{B} - \mathcal{C})qr = \vec{M}_O \cdot \vec{i} \\ \mathcal{B}\dot{q} - (\mathcal{C} - \mathcal{A})rp = \vec{M}_O \cdot \vec{j} \\ \mathcal{C}\dot{r} - (\mathcal{A} - \mathcal{B})pq = \vec{M}_O \cdot \vec{k} \end{cases}$$

Tale sistema è un sistema di EDO del I ordine nelle incognite  $(p(t), q(t), r(t))$ , cioè le componenti della velocità angolare sulla TPI(O). Comunque, i secondi termini delle (13.6.11) dipendono anche dagli angoli di Eulero della TPI(O) (che sono incogniti), poichè il momento della sollecitazione attiva, in generale, è una funzione delle coordinate libere, delle sue derivate rispetto al tempo e del tempo

$$(13.6.12) \quad \vec{M}_O^{(est,att)} = \vec{M}_O(\varphi, \theta, \psi; \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}; t) .$$

Pertanto, il sistema delle equazioni di Eulero (13.6.11) deve essere completato con le equazioni (4.5.4)

$$(13.6.13) \quad \begin{cases} p = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta \\ q = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ r = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{cases} ,$$

che definiscono le componenti (4.5.4) di  $\vec{\omega}$  rispetto alla TPI(O) e che sono lineari nelle derivate degli angoli di Eulero. Tale sistema si può risolvere rispetto a  $(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$  e fornisce

$$(13.6.14) \quad \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = [B]^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} ,$$

dove la matrice  $[B]$ , data da

$$[B] = \begin{bmatrix} \sin \psi \sin \theta & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad \det([B]) = -\sin \theta ,$$

è invertibile per  $\theta \neq 0, \pi$ . Allora, sostituite le (13.6.14) nella (13.6.12), le equazioni (13.6.11) insieme con le (13.6.14) forniscono un sistema di 6 EDO del primo ordine in forma *normale* nelle 6 incognite  $(\varphi(t), \theta(t), \psi(t); p(t), q(t), r(t))$ .

$$(13.6.15) \quad \begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\sin \psi}{\sin \theta} p + \frac{\cos \psi}{\sin \theta} q \\ \dot{\theta} = \cos \psi p - \sin \psi q \\ \dot{\psi} = -\cot \theta (\sin \psi p + \cos \psi q) + r \\ \dot{p} = \frac{B-C}{A} q r + \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{i}}{A} \\ \dot{q} = \frac{C-A}{B} r p + \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{j}}{B} \\ \dot{r} = \frac{A-B}{C} p q + \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{k}}{C} \end{cases}$$

Pertanto, fissate le condizioni iniziali, sotto ipotesi di regolarità della sollecitazione esterna, il problema di Cauchy relativo ammette una e una sola soluzione. In alcuni casi, le 6 equazioni precedenti si disaccoppiano, cioè il sistema delle equazioni di Eulero (13.6.11) si può risolvere prima di risolvere le (13.6.14). Per esempio, questo succede se il momento della sollecitazione attiva è uniforme, come vedremo più avanti per gli effetti giroscopici, oppure quando dipende solo dalle componenti della velocità angolare

$$(13.6.16) \quad \vec{M}_O^{(est,att)} = \vec{M}_O(p, q, r; t) ,$$

come accade per una resistenza viscosa del mezzo:

$$\vec{M}_O^{(est,att)} = -c\vec{\omega} \quad c > 0 .$$

### 13.6.1 Moto per inerzia

Un altro caso rilevante in cui i sistemi (13.6.11) e (13.6.14) si disaccoppiano è quello in cui il momento della sollecitazione attiva rispetto al punto  $O$  si annulla.

**Definizione 13.6.1.** Diremo moto per inerzia quello di un corpo rigido con punto fisso  $O$  in cui

$$(13.6.17) \quad \vec{M}_O^{(est,att)} = \vec{0}$$

In tal caso, le equazioni (13.6.11) si dicono equazioni di Eulero-Poinsot. Scritte in forma normale rispetto alle incognite  $(p(t), q(t), r(t))$  si riducono a

$$(13.6.18) \quad \begin{cases} \dot{p} = \frac{B-C}{A} q r \\ \dot{q} = \frac{C-A}{B} r p \\ \dot{r} = \frac{A-B}{C} p q \end{cases}$$

Il caso del moto per inerzia si realizza, ad esempio, in due casi di grande rilevanza.

1. Nel moto di un corpo rigido soggetto solo al peso proprio e fissato nel baricentro  $G$ .
2. Nel moto di un rigido in caduta libera. In tal caso, il moto del rigido si disaccoppia nel moto del baricentro e nel moto attorno al baricentro. Infatti, la I ECD fornisce  $\vec{a}_G = \vec{g}$ , quindi il baricentro si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione  $\vec{g}$ . Allora, rimane da studiare il moto del rigido (o di una terna ad esso solidale) rispetto all'osservatore baricentrale dell'esempio (11.4.1), cioè l'osservatore traslante con origine in  $G$ . Per tale osservatore, il rigido ha  $G$  come punto fisso e vale la II ECD nella forma (11.4.12). Inoltre,  $\vec{M}_G^{(est,eff)} = \vec{0}$ , dato che le forze peso sono equivalenti al loro risultante applicato in  $G$ . Dunque, il moto del rigido attorno al baricentro è un moto con punto fisso per inerzia, quindi è governato dalle equazioni di Eulero-Poinsot (13.6.18)

Introduciamo, ora un concetto che ha molta importanza in questo caso e negli sviluppi ulteriori della Meccanica e si basa sul concetto di invariante dinamico.

**Definizione 13.6.2.** Diremo integrale primo del moto una grandezza scalare o vettoriale che, pur dipendendo dalla configurazione e dal campo delle velocità del modello, rimane invariato durante un moto del modello.

Nel caso del moto per inerzia, possiamo facilmente dimostrare la seguente

**Proposizione 13.6.2.** Un corpo rigido con punto fisso che si muove per inerzia possiede gli integrali di moto del momento angolare e dell'energia cinetica.

$$(13.6.19) \quad \vec{L}_O(t) = \vec{L}_O(t_0) \quad K(t) = K(t_0) \quad \forall t \in I$$

*Dimostrazione.* L'integrale del momento angolare è una immediata conseguenza della II ECD (13.6.1). L'integrale dell'energia cinetica segue dalla (13.6.2) tenendo conto che, nel moto per inerzia, la potenza della sollecitazione attiva è nulla per la (13.6.6).  $\square$

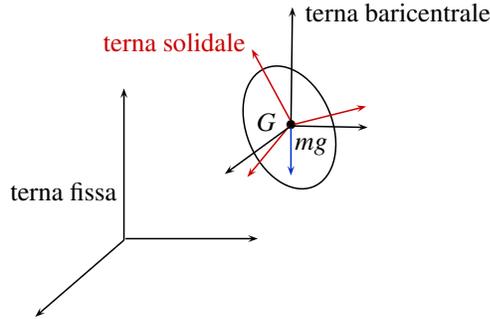


Figura 13.6.1: Rigido in caduta libera

### Rotazioni Permanenti

Si potrebbe ingenuamente pensare che, qualunque moto per inerzia di un rigido con punto fisso sia, come nel caso del corpo rigido con asse fisso, una rotazione uniforme. Invece, il seguente teorema mostra che ciò accade solamente sotto particolari condizioni iniziali.

**Teorema 13.6.1** (delle rotazioni permanenti). *Il moto per inerzia di un corpo rigido con punto fisso è un moto rotatorio uniforme (o permanente) se e solo se avviene intorno a un asse principale d'inerzia per  $O$ .*

*Dimostrazione.* Mostriamo prima la sufficienza. Supponiamo che, inizialmente, il rigido abbia la velocità angolare diretta come un API( $O$ ). Se chiamiamo tale asse  $(O, \vec{k}(t))$ , la velocità angolare iniziale sarà  $\vec{\omega}(t_0) = r_0 \vec{k}(t_0)$  e la velocità angolare durante il moto sarà sempre  $\vec{\omega}(t) = r_0 \vec{k}(t)$  in quanto unica soluzione del problema di Cauchy relativo al sistema (13.6.18) con condizioni iniziali

$$p(t_0) = 0, \quad q(t_0) = 0, \quad r(t_0) = r_0$$

Inoltre, il vettore  $\vec{k}(t)$ , che è fisso nel corpo, sarà fisso anche nello spazio poichè

$$\dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k} = r_0 \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \quad \forall t \in I$$

Pertanto, il moto è una rotazione permanente.

Viceversa, supponiamo che il moto sia rotatorio intorno ad un asse  $(O, \vec{u})$  fisso nello spazio e dimostriamo che esso è un API( $O$ ). Se  $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{u}$ , dalla conservazione del momento angolare segue che

$$\vec{0} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \mathbf{I}_O(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) = \dot{\omega} \mathbf{I}_O(\vec{u}) + \omega^2 \vec{u} \times \mathbf{I}_O(\vec{u}).$$

Osservando che i due vettori  $\dot{\omega} \mathbf{I}_O(\vec{u})$  e  $\omega^2 \vec{u} \times \mathbf{I}_O(\vec{u})$  sono ortogonali tra loro, otteniamo immediatamente che si annullano entrambi, quindi  $\dot{\omega} = 0$  (uniformità della precessione) e  $\vec{u} \times \mathbf{I}_O(\vec{u}) = 0$ , quindi  $\vec{u}$  è parallelo ad un API( $O$ ). □

Dal teorema precedente segue immediatamente che se tutti gli assi passanti per il punto fisso sono API( $O$ ), allora tutti i moti sono rotazioni permanenti.

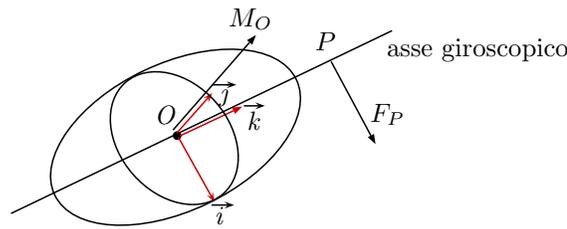


Figura 13.6.2: Giroscopio

**Corollario 13.6.1.** *Se l'ellissoide d'inerzia del rigido rispetto al punto fisso  $O$  è una sfera, allora il moto per inerzia è una rotazione uniforme per qualunque condizione iniziale.*

**Esempio 13.6.1.** *Cubo omogeneo pesante fissato nel baricentro.*

### Precessioni uniformi

Vediamo cosa succede se la struttura materiale del rigido è più generale di quella sferica, cioè se è *giroscopica*, come nella figura 13.6.2.

**Definizione 13.6.3.** *Si dice che un rigido ha struttura giroscopica rispetto a un punto  $O$  se l' $EI(O)$  è di rotazione rispetto a un asse solidale passante per  $O$ . Tale asse si dice asse giroscopico o asse di figura; il piano per  $O$  e ortogonale all'asse giroscopico si dice piano equatoriale.*

*Si dice giroscopio un rigido che ha struttura giroscopica intorno al suo centro di massa.*

**Proposizione 13.6.3.** *Tutti i moti per inerzia di un rigido con punto fisso  $O$  e avente struttura giroscopica rispetto a  $O$ , sono precessioni uniformi (se la velocità angolare giroscopica è diversa da zero) intorno alla direzione del momento angolare  $\vec{L}_O$ , con asse di rotazione propria coincidente con l'asse giroscopico.*

*Dimostrazione.* Detto  $(O, \vec{k}(t))$  l'asse giroscopico, dalla III equazione di Eulero-Poinsot segue che la componente della velocità angolare lungo l'asse giroscopico si mantiene costante durante un moto generico

$$(13.6.20) \quad r(t) = r(t_0) = r_0 \quad \forall t \in I .$$

Inoltre, il momento angolare  $\vec{L}_O$  si può scrivere

$$(13.6.21) \quad \vec{L}_O = \mathcal{A}p\vec{i} + \mathcal{B}q\vec{j} + Cr\vec{k} = \mathcal{A}(p\vec{i} + q\vec{j}) + Cr_0\vec{k} = \mathcal{A}\vec{\omega} + (\mathcal{C} - \mathcal{A})r_0\vec{k}$$

e quindi la velocità angolare come

$$(13.6.22) \quad \vec{\omega} = \frac{\vec{L}_O}{\mathcal{A}} + \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{C})}{\mathcal{A}}r_0\vec{k}$$

Osserviamo che il termine

$$\vec{\omega}_{pr} := \frac{\vec{L}_O}{\mathcal{A}}$$

è costante nello spazio poichè  $\vec{L}_O$  è integrale primo di moto, mentre il termine

$$\vec{\omega}_{rot} := \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{C})}{\mathcal{A}} r_0 \vec{k}(t)$$

è costante nel corpo. Allora,  $\vec{\omega}_{pr}$  è la velocità di precessione e  $\vec{\omega}_{rot}$  la velocità di rotazione propria. Quindi, dalla equazione (4.7.6) segue la tesi.  $\square$

Torniamo, ora, alle equazioni di Eulero-Poinsot

$$(13.6.23) \quad \begin{cases} \dot{p} = \frac{\mathcal{A}-\mathcal{C}}{\mathcal{A}} r_0 q \\ \dot{q} = \frac{\mathcal{C}-\mathcal{A}}{\mathcal{A}} r_0 p \\ r(t) = r_0 \end{cases}$$

Introducendo la costante  $\gamma = \frac{\mathcal{A}-\mathcal{C}}{\mathcal{A}} r_0$ , le prime due equazioni si possono scrivere come un sistema lineare del I ordine a coefficienti costanti.

$$(13.6.24) \quad \begin{cases} \dot{p} = \gamma q \\ \dot{q} = -\gamma p \end{cases}$$

L'integrale generale del sistema (13.6.24) si può ricavare, ad esempio, disaccoppiando le due equazioni differenziali. Infatti, derivando la prima rispetto al tempo ed eliminando  $\dot{q}$  per mezzo della seconda, si ottiene la conseguenza differenziale

$$\ddot{p} + \gamma^2 p = 0 ,$$

cioè l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico. Dunque, la soluzione generale  $p(t)$  si può scrivere

$$(13.6.25) \quad p(t) = a \cos(|\gamma|t + \delta) , \quad a, \delta \in \mathbb{R} .$$

Sostituendo la derivata rispetto al tempo della (13.6.25) nella prima delle (13.6.24) si ottiene l'integrale generale per  $q(t)$

$$(13.6.26) \quad q(t) = -a \frac{\gamma}{|\gamma|} \sin(|\gamma|t + \delta) .$$

In conclusione, il componente equatoriale della velocità angolare, cioè  $\vec{\omega}_{eq} = p\vec{i} + q\vec{j}$ , risulta

$$(13.6.27) \quad \vec{\omega}_{eq}(t) = \left( a \cos(|\gamma|t + \delta) \right) \vec{i}(t) - a \frac{\gamma}{|\gamma|} \sin(|\gamma|t + \delta) \vec{j}(t) .$$

Dunque, il vettore  $\vec{\omega}_{eq}$  ruota nel piano equatoriale e la sua punta descrive la circonferenza di centro  $O$  della Fig 13.6.3, con un periodo  $\frac{2\pi}{|\gamma|}$ . L'ampiezza e la fase del moto periodico dipendono dalle condizioni iniziali all'istante  $t_0 = 0$  tramite

$$(13.6.28) \quad a = \sqrt{p_0^2 + q_0^2} , \quad \tan \delta = -\frac{\gamma}{|\gamma|} \frac{q_0}{p_0} .$$

Nella figura 13.6.4 è evidenziato il cono mobile di Poinsot.

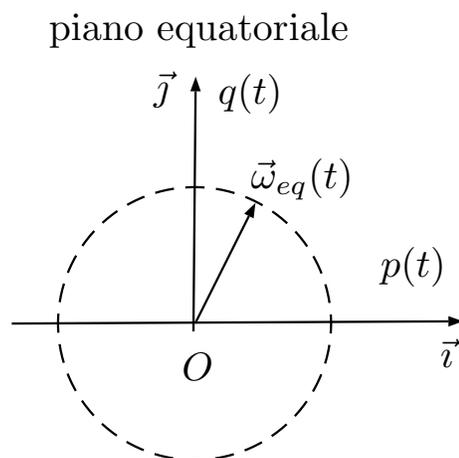


Figura 13.6.3: Componente equatoriale della velocità angolare

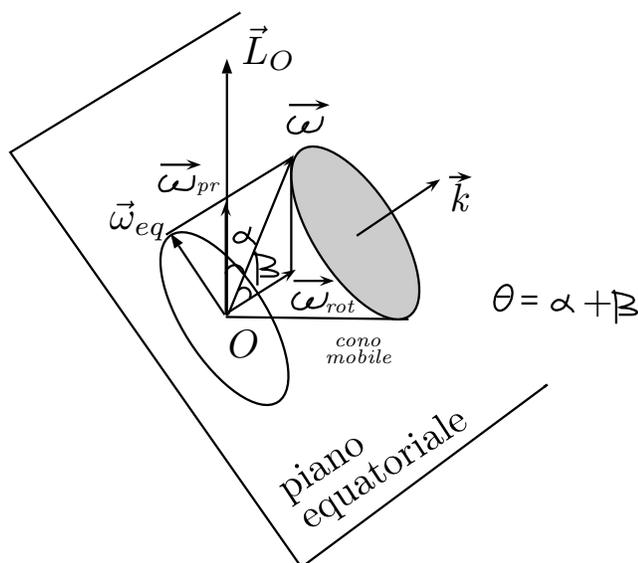


Figura 13.6.4: Cono mobile di Poinsot

### Moto generale

Studiamo ora il caso più generale di un rigido con una struttura materiale generica.

**Teorema 13.6.2** (di Poincot). *I moti per inerzia di un rigido con punto fisso  $O$  e con l' $EI(O)$  triassiale, avvengono in modo tale che l' $EI(O)$  rotola senza strisciare su di un piano fisso nello spazio, detto piano direttore, ortogonale alla direzione del momento angolare. Il luogo geometrico dei punti di contatto sul piano direttore (ris. sull' $EI(O)$ ) è una curva che si dice poloide fissa (ris. mobile). Vedi la Fig. 13.6.5.*

*Dimostrazione.* È di tipo geometrico e si basa su un elegante utilizzo dei due integrali di moto  $\vec{L}_O$  e  $K$ . Procediamo in tre passi. Prima dimostriamo che: (i) il piano direttore ha giacitura costante; (ii) che anche la sua distanza dal punto fisso  $O$  è costante; (iii) che il moto dell' $EI(O)$  è di puro rotolamento sul piano direttore.

- (i) Il piano direttore è il piano  $\pi(t)$  tangente all' $EI(O)$  nel punto d'intersezione  $P$  dell' $AIR(O)$ , con l' $EI(O)$  stesso. Per la costruzione del Teo. di Poincot 12.5.1, tale piano è sempre ortogonale alla direzione di  $\vec{L}_O = \mathbf{I}_O(\vec{\omega})$ , cioè alla direzione coniugata a quella di  $\vec{\omega}(t)$ , che è parallelo all' $AIR(O)$ . Poiché in questo caso  $\vec{L}_O$  è fisso nello spazio,  $\pi(t)$  ha giacitura costante. Inoltre, per l'equazione dei semi-diametri (12.5.2), la distanza di  $P$  dal punto fisso  $O$  è data da

$$(13.6.29) \quad \overline{OP} = \frac{1}{\sqrt{I_r(P)}} = \frac{|\vec{\omega}|}{\sqrt{|\vec{\omega}|^2 I_r(P)}} \stackrel{(13.6.5)}{=} \frac{|\vec{\omega}|}{\sqrt{2K}},$$

da cui segue

$$(13.6.30) \quad \vec{\omega} = \sqrt{2K}(P - O)$$

- (ii) Per il punto 3 nella costruzione di Poincot della Teo. 12.5.1, la distanza del piano  $\pi(t)$  dal punto fisso  $O$  è pari a

$$d(O, \pi(t)) = \overline{OH} = \frac{|\vec{\omega}|}{\overline{OP} |\mathbf{I}_O(\vec{\omega})|} \stackrel{(13.6.29)}{=} \frac{\sqrt{2K}}{|\mathbf{I}_O(\vec{\omega})|} = \frac{\sqrt{2K}}{|\vec{L}_O|} = \textit{indipendente dal tempo}$$

- (iii) Il punto di contatto  $P$  fra l' $EI(O)$  e il piano direttore appartiene all' $AIR(O)$ , quindi è un punto del solido con velocità istantanea nulla, cioè soddisfa il vincolo di puro rotolamento.  $\square$

Possiamo riguardare le rotazioni e le precessioni uniformi come casi particolari dei moti alla Poincot.

**Corollario 13.6.2.** *Un moto alla Poincot è una rotazione permanente se solo se l' $EI(O)$  ruota intorno a un suo asse di simmetria. In questo caso, la poloide fissa e quella mobile degenerano in un punto, uno dei vertici dell' $EI(O)$ .*

*Dimostrazione.* Se il moto è rotatorio, l' $AIR(O)$  diventa asse di rotazione e i suoi punti rimangono fissi nello spazio. Pertanto il punto di contatto  $P$  con il piano direttore è fisso, quindi deve essere un vertice dell' $EI(O)$  (che deve rimanere tangente al piano senza “spaccarlo”) e la direzione coniugata coincide con quella dell'asse stesso. Inoltre, la rotazione è uniforme poiché  $|\vec{\omega}| = \sqrt{2K}|P - O|$  per la (13.6.30) e  $|P - O|$  è la lunghezza di uno dei semi-assi di simmetria dell' $EI(O)$ .

Il viceversa è ovvio.  $\square$

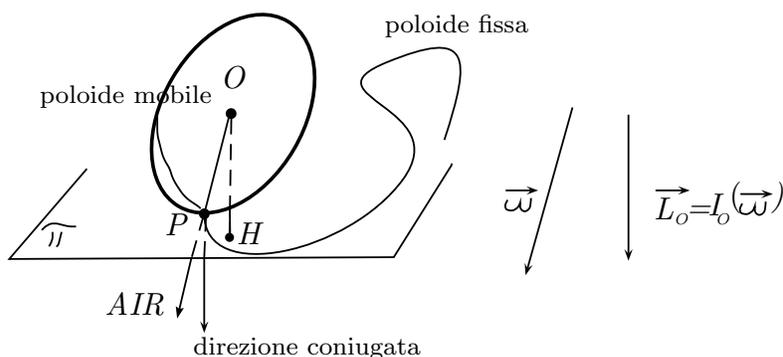


Figura 13.6.5: Moto alla Poincot

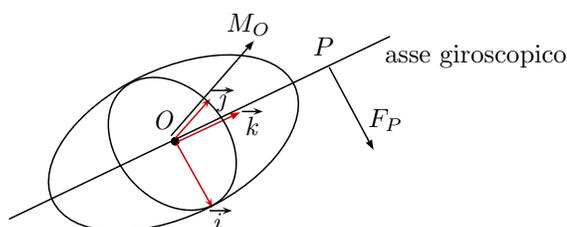


Figura 13.6.6: Effetti giroscopici

**Corollario 13.6.3.** *Se l' $EI(O)$  è rotondo intorno ad un asse, le due poloidi sono circonferenze.*

*Dimostrazione.* Nell' ipotesi suddetta, il rigido ha struttura giroscopica e quindi, per la Prop. 13.6.3, il moto è una precessione uniforme. Allora, basta osservare che la lunghezza del semidiametro  $OP$ , cioè la distanza tra il punto di contatto  $P$  con il piano direttore e il punto fisso  $O$ , è costante per la (13.6.29) e per il fatto che nel moto di precessione uniforme  $|\vec{\omega}|$  è costante. Quindi  $P$  descrive una circonferenza sull' $EI(O)$ . Inoltre, è costante anche  $\overline{HP} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2}$ , cioè la distanza dei punti della poloide fissa dal punto  $H$ . Quindi, anche la poloide fissa è una circonferenza con centro in  $H$ .  $\square$

### 13.6.2 Effetti giroscopici elementari

In questa sezione studieremo il moto di un corpo a struttura giroscopica, che si muove non più per inerzia, come nella Prop. 13.6.3, bensì sotto l'azione a una forza perturbatrice  $(P, \vec{F})$  applicata ad un punto  $P$  dell'asse giroscopico  $(O, \vec{k}(t))$ . In tal caso si ha

$$(13.6.31) \quad \vec{M}_O^{(est,att)} \cdot \vec{k} = (P - O) \times \vec{F}_P \cdot \vec{k} = 0$$

Supponiamo, senza perdita di generalità, che la forza  $\vec{F}_P$  sia ortogonale all'asse giroscopico e

chiamiamo  $\vec{i}$  il suo versore e sia  $\vec{j} = \vec{k} \times \vec{i}$ . Grazie alla struttura giroscopica, la terna  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  è una TPI(O). Su tale terna, il momento rispetto ad  $O$  della sollecitazione attiva risulta

$$(13.6.32) \quad \vec{M}_O^{(est,att)} = (P - O) \times F\vec{i} = ((P - O) \cdot \vec{k}) \vec{k} \times F\vec{i} = ((P - O) \cdot \vec{k}) F\vec{j} = M_O \vec{j}(t)$$

Pertanto, tenendo conto che grazie alla struttura giroscopica  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ , le equazioni di Eulero (13.6.11) si scrivono

$$(13.6.33) \quad \begin{cases} \mathcal{A}\dot{p} - (\mathcal{A} - \mathcal{C})qr = 0 \\ \mathcal{A}\dot{q} - (\mathcal{C} - \mathcal{A})rp = M_O \\ \mathcal{C}\dot{r} = 0 \end{cases}$$

e il moto dell'asse giroscopico è governato dall'equazione di Poisson

$$(13.6.34) \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = (\vec{\omega}_{eq} + r\vec{k}) \times \vec{k} = \vec{\omega}_{eq} \times \vec{k} = q\vec{i} - p\vec{j}.$$

La III delle (13.6.33) ha come soluzione  $r(t) = r(t_0) = r_0$ , mentre le prime due si riducono, posto  $\gamma := \frac{\mathcal{A}-\mathcal{C}}{\mathcal{A}}r_0$ , a

$$(13.6.35) \quad \begin{cases} \dot{p} = \gamma q \\ \dot{q} = -\gamma p + \frac{M_O}{\mathcal{A}} \end{cases}$$

Discutiamo i due casi  $r_0 = 0$  e  $r_0 \neq 0$ .

- Se  $r_0 = 0$ , allora  $\gamma = 0$  e l'integrale generale di (13.6.35) è

$$(13.6.36) \quad \vec{\omega}_{eq}(t) = p_0\vec{i}(t) + \left(q_0 + \frac{M_0}{\mathcal{A}}t\right)\vec{j}(t).$$

In particolare, se la velocità angolare iniziale è nulla, cioè  $p_0 = q_0 = 0$ , l'equazione per l'asse giroscopico (13.6.34) diventa

$$(13.6.37) \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{M_0}{\mathcal{A}}t \vec{i}(t);$$

ciò implica che la deviazione dell'asse avviene nella stessa direzione della forza e la sua intensità è non limitata nel tempo.

- Se  $r_0 \neq 0$ , allora  $\gamma \neq 0$  e si può immediatamente verificare che una soluzione particolare è data da

$$(13.6.38) \quad p(t) = \frac{M_0}{\gamma\mathcal{A}}, \quad q(t) = 0.$$

L'integrale generale del sistema omogeneo associato a (13.6.35) coincide con le (13.6.25), (13.6.26). Aggiungendovi la soluzione particolare (13.6.38) si ottiene

$$(13.6.39) \quad p(t) = a \cos(|\gamma|t + \delta) + \frac{M_0}{\gamma\mathcal{A}}$$

$$(13.6.40) \quad q(t) = -a \frac{\gamma}{|\gamma|} \sin(|\gamma|t + \delta)$$

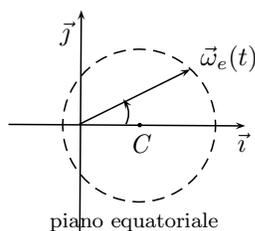


Figura 13.6.7: Componente equatoriale della velocità angolare

In conclusione, la componente equatoriale della velocità angolare sarà

$$(13.6.41) \quad \vec{\omega}_{eq}(t) = \left( a \cos(|\gamma|t + \delta) + \frac{M_0}{\gamma \mathcal{A}} \right) \vec{i}(t) - a \frac{\gamma}{|\gamma|} \sin(|\gamma|t + \delta) \vec{j}(t) .$$

Dunque, il vettore  $\vec{\omega}_{eq}$  ruota nel piano equatoriale con periodo  $\frac{2\pi}{|\gamma|}$  e la sua punta descrive sempre una circonferenza come nel caso per inerzia, ma, questa volta, con il centro spostato lungo l'asse  $\vec{i}$  nel punto  $C = (\frac{M_0}{\gamma \mathcal{A}}, 0)$ . Si veda la figura 13.6.7. Inoltre, questa volta, l'ampiezza e la fase del moto periodico dipendono dalle condizioni iniziali all'istante  $t_0 = 0$  tramite

$$(13.6.42) \quad a = \sqrt{\left(p_0 - \frac{M_0}{\gamma \mathcal{A}}\right)^2 + q_0^2}, \quad \tan \delta = -\frac{\gamma}{|\gamma|} \frac{q_0}{\left(p_0 - \frac{M_0}{\gamma \mathcal{A}}\right)} .$$

### 13.6.3 Tendenza al parallelismo

Calcoliamo il valor medio su un periodo del derivato di  $\vec{k}(t)$ . Dalle (13.6.34) e (13.6.41) segue che

$$(13.6.43) \quad \overline{\frac{d\vec{k}}{dt}} = \overline{q(t)\vec{i}(t) - p(t)\vec{j}(t)} = \overline{q(t)}\vec{i}(t) - \overline{p(t)}\vec{j}(t) = -\frac{M_0}{\gamma \mathcal{A}}\vec{j}(t) .$$

Pertanto, questa volta, la deviazione media dell'asse giroscopico avviene nella direzione del *momento* della forza. Questo fenomeno è detto *tendenza al parallelismo*.

### 13.6.4 Tenacia dell'asse giroscopico

Valutiamo, ora, l'intensità della deviazione. Dalla (13.6.43) è immediato concludere che

$$(13.6.44) \quad \left| \overline{\frac{d\vec{k}}{dt}} \right| = \left| \frac{M_0}{\gamma \mathcal{A}} \right| = \left| \frac{M_0}{(\mathcal{A} - \mathcal{C})r_0} \right| ,$$

cioè il modulo della deviazione media è inversamente proporzionale alla velocità angolare giroscopica. Verifichiamo che una legge analoga vale anche per il massimo di

$$(13.6.45) \quad \left| \frac{d\vec{k}}{dt} \right| \stackrel{(13.6.34)}{=} |\vec{\omega}_{eq}(t)| .$$

Per semplicità, supponiamo che la velocità angolare iniziale sia soltanto giroscopica, cioè  $p_0 = q_0 = 0$ . Allora, tenendo conto delle (13.6.41) e (13.6.42), si ottiene la soluzione particolare

$$(13.6.46) \quad \vec{\omega}_{eq}(t) = \frac{M_0}{\gamma \mathcal{A}} \left( (\cos(|\gamma|t) \pm 1) \vec{i}(t) - \frac{\gamma}{|\gamma|} \sin(|\gamma|t) \vec{j}(t) \right),$$

il cui modulo quadro è

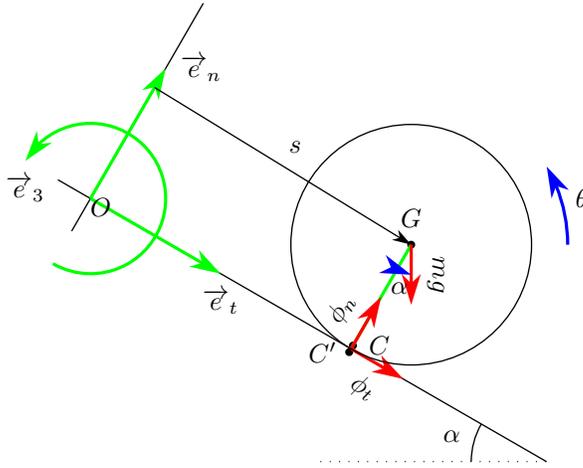
$$(13.6.47) \quad |\vec{\omega}_{eq}(t)|^2 = \left( \frac{M_0}{\gamma \mathcal{A}} \right)^2 \left( (\cos(|\gamma|t) \pm 1)^2 + \left( \frac{\gamma}{|\gamma|} \right)^2 \sin^2(|\gamma|t) \right) = 2 \left( \frac{M_0}{\gamma \mathcal{A}} \right)^2 (1 \pm \cos(|\gamma|t))$$

Allora,

$$\max_{t \in [0, T]} \left| \frac{d\vec{k}}{dt} \right| = 2 \frac{|M_0|}{|\gamma| \mathcal{A}} = 2 \frac{|M_0|}{|(\mathcal{A} - \mathcal{C})r_0|}.$$

Pertanto, possiamo concludere che anche il massimo di  $\left| \frac{d\vec{k}}{dt} \right|$  è limitato ed è inversamente proporzionale alla velocità angolare giroscopica iniziale. Questo fenomeno si dice *tenacia dell'asse giroscopico* e spiega l'uso dei giroscopi come stabilizzatori.

### 13.7 Disco appoggiato su una guida fissa



Nella Sez. 4.8.2 abbiamo discusso la cinematica di un disco di raggio  $R$  appoggiato su una guida rettilinea e abbiamo ricavato che la velocità e l'accelerazione del punto di contatto  $C$  sono

$$(13.7.1) \quad \vec{v}_C = (\dot{s} + R\dot{\theta})\vec{e}_t$$

$$(13.7.2) \quad \vec{a}_C = (\ddot{s} + R\ddot{\theta})\vec{e}_t + R\dot{\theta}^2\vec{e}_n.$$

Ora studiamo la dinamica dello stesso disco, supposto omogeneo e soggetto solo al peso proprio. Inoltre, supponiamo che la guida sia scabra e che le reazioni vincolari del vincolo di appoggio siano

equivalenti a un'unica forza applicata nel punto di contatto  $C$

$$(13.7.3) \quad \mathcal{S}^{(est, reatt)} \sim \{(C, \vec{\phi}^{(reatt)})\}.$$

Tenuto conto che il problema è piano, possiamo affermare che la reazione esterna  $\vec{\phi}_C^{(reatt)}$  avrà in generale due componenti:

$$\vec{\phi}_C^{(reatt)} = \phi_t \vec{e}_t + \phi_n \vec{e}_n,$$

la componente normale  $\phi_n$  è la reazione d'appoggio, mentre la componente tangente  $\phi_t$  è detta *attrito radente* e si annulla se la guida è liscia. Denotiamo con

$$(13.7.4) \quad \begin{cases} f_s & \text{coefficiente di attrito radente statico,} \\ f_d & \text{coefficiente di attrito radente dinamico} \end{cases}$$

e ricordiamo che valgono le relazioni di Coulomb

$$(13.7.5) \quad |\phi_t| \leq f_s |\phi_n| \quad \text{se } \vec{v}_C = \vec{0}$$

$$(13.7.6) \quad \vec{\phi}_t = -f_d |\phi_n| \text{vers}(\vec{v}_C) \quad \text{se } \vec{v}_C \neq \vec{0}.$$

Per studiare il moto di rotolamento generico dobbiamo usare le ECD

$$(13.7.7) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(att)} + \vec{R}^{(reatt)} & = m\vec{a}_G \\ \vec{M}_G^{(att)} + \vec{M}_G^{(reatt)} & = \frac{d\vec{L}_G}{dt} \end{cases}$$

Poichè

$$\begin{aligned} \vec{R}^{(att)} &= m\vec{g} = mg(\sin \alpha \vec{e}_t - \cos \alpha \vec{e}_n) \\ \vec{R}^{(reatt)} &= \vec{\Phi}_C^{(reatt)} = \phi_t \vec{e}_t + \phi_n \vec{e}_n \\ \vec{M}_G^{(att)} &= \vec{0} \\ \vec{M}_G^{(reatt)} &= (C - G) \times \vec{\phi}_C = (-R\vec{e}_n) \times (\phi_t \vec{e}_t + \phi_n \vec{e}_n) = R\phi_t \vec{e}_3 \end{aligned}$$

e

$$\vec{a}_G = \ddot{s} \vec{e}_t, \quad \vec{L}_G = \mathbf{I}_G(\vec{\omega}) = \mathbf{I}_G(\dot{\theta} \vec{e}_3) = \dot{\theta} \mathbf{I}_G(\vec{e}_3) = J_{3G} \dot{\theta} \vec{e}_3 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta} \vec{e}_3,$$

le ECD, proiettate sui versori  $(\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_3)$  diventano

$$(13.7.8) \quad \begin{cases} mg \sin \alpha + \phi_t & = m\ddot{s} \\ -mg \cos \alpha + \phi_n & = 0 \\ R\phi_t = \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta}. \end{cases}$$

Ognuna di tali equazioni contiene le reazioni vincolari tuttavia, sostituendo la terza nella prima otteniamo il sistema equivalente

$$(13.7.9) \quad \begin{cases} \ddot{s} - \frac{R}{2} \ddot{\theta} & = g \sin \alpha \\ \phi_n & = mg \cos \alpha \\ \phi_t & = \frac{1}{2} m R \ddot{\theta}, \end{cases}$$

nel quale, la prima equazione è un'equazione pura di moto. Si osservi che il sistema suddetto è un sistema di 3 equazioni nelle 4 incognite  $(s, \theta, \phi_t, \phi_n)$ , quindi è sotto-determinato. Dunque, se la guida è scabra, ad esso bisogna aggiungere una delle relazioni di Coulomb (13.7.5) o (13.7.6).

### Guida liscia

Prima di esaminare il sistema completo, analizziamo, come caso particolare, la situazione in cui la guida è liscia. Sotto questa ipotesi, sopravvive solo la componente di reazione vincolare ortogonale alla guida, pertanto

$$\begin{aligned} \phi_t &= 0 & \theta(t) &= \omega_0 t + \theta_0 \\ \ddot{\theta} &= 0 & s(t) &= \frac{1}{2}(g \sin \alpha)t^2 + v_0 t + s_0 \\ \ddot{s} &= g \sin \alpha & \Leftrightarrow \phi_n &= mg \cos \alpha \\ \phi_n &= mg \cos \alpha & \phi_t &= 0 . \end{aligned}$$

Il moto del disco è composto da un moto rotatorio (se  $\omega_0 \neq 0$ ) *uniforme*  $\theta(t)$  e un moto traslatorio  $s(t)$ , uniformemente accelerato se  $\alpha \neq 0$ , uniforme se  $\alpha = 0$ .

### Guida scabra

Torniamo al caso della guida scabra e analizziamo prima il caso del *puro* rotolamento.

#### Rotolamento puro

In questo caso, il disco ha 1 grado di libertà poiché

$$s = -R\theta + s_0 .$$

Pertanto, le (13.7.9) unite alla precedente equazione di vincolo equivalgono a

$$(13.7.10) \quad \begin{cases} s = & -R\theta + s_0 \\ \frac{3}{2}R\ddot{\theta} = & -g \sin \alpha \\ \phi_n = & mg \cos \alpha \\ \phi_t = & \frac{1}{2}mR\ddot{\theta} , \end{cases}$$

ed ammettono, come integrale generale,

$$(13.7.11) \quad \begin{aligned} \theta(t) &= -\frac{1}{3}\left(\frac{g}{R} \sin \alpha\right)t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ s(t) &= \frac{1}{3}(g \sin \alpha)t^2 - R(\omega_0 t + \theta_0) \quad (s_0 = 0) \\ \phi_n &= mg \cos \alpha \\ \phi_t &= -\frac{1}{3}mg \sin \alpha . \end{aligned}$$

Tali soluzioni devono essere compatibili con la relazione di Coulomb statica e quindi richiedono che sia soddisfatta la condizione necessaria (ma non sufficiente) alla realizzazione del vincolo di puro rotolamento, contenuta nella seguente

**Proposizione 13.7.1.** *Il moto di puro rotolamento del disco è possibile solo se*

$$(13.7.12) \quad \tan \alpha \leq 3f_s .$$

*Tale condizione sulla guida è detta di piccola inclinazione.*

*Dimostrazione.* Se il disco rotola senza strisciare valgono le (13.7.11). Inoltre, deve essere soddisfatta la relazione di Coulomb statica (13.7.5). Quindi, deve risultare

$$\left| -\frac{1}{3}mg \sin \alpha \right| \leq f_s |mg \cos \alpha| ,$$

che, per  $0 \leq \alpha < \pi/2$ , equivale alla (13.7.12).  $\square$

### Rotolamento non puro

In tal caso  $\vec{v}_C \neq \vec{0}$ , quindi vale la relazione di Coulomb dinamica (13.7.6) che si può scrivere scalarmente come

$$(13.7.13) \quad \phi_t = -f_d |\phi_n| \text{vers}(\vec{v}_C) \cdot \vec{e}_t = -f_d |\phi_n| \text{signum}(v_C) ,$$

dove  $v_C := \vec{v}_C \cdot \vec{e}_t$  e la funzione *signum* è la funzione costante a tratti definita da

$$(13.7.14) \quad \text{signum}(v_C) = \begin{cases} +1 & \text{se } v_C > 0, \\ 0 & \text{se } v_C = 0, \\ -1 & \text{se } v_C < 0. \end{cases}$$

Aggiungendo la (13.7.13) al sistema (13.7.9), si ottiene

$$(13.7.15) \quad \begin{cases} \ddot{s} - \frac{R}{2}\ddot{\theta} = g \sin \alpha \\ \phi_t = \frac{1}{2}mR\ddot{\theta} \\ \phi_n = mg \cos \alpha \\ \phi_t = -f_d |\phi_n| \text{signum}(v_C). \end{cases}$$

Mediante successive sostituzioni, le equazioni di tale sistema si possono disaccoppiare, in modo da ottenere il sistema equivalente

$$(13.7.16) \quad \begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{2}{R}f_d g \cos \alpha \text{signum}(v_C) \\ \ddot{s} = g(\sin \alpha - f_d \cos \alpha \text{signum}(v_C)) \\ \phi_n = mg \cos \alpha \\ \phi_t = -f_d mg \cos \alpha \text{signum}(v_C) , \end{cases}$$

che fornisce le reazioni vincolari e, dopo un'integrazione diretta, le equazioni finite di moto

$$(13.7.17) \quad \begin{aligned} \theta(t) &= -\frac{f_d}{R}(g \cos \alpha \text{signum}(v_C))t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ s(t) &= \frac{1}{2}g(\sin \alpha - f_d \cos \alpha \text{signum}(v_C))t^2 + v_0 t + s_0 . \end{aligned}$$

Derivando rispetto al tempo le due equazioni precedenti e tenendo conto della (13.7.1), si ottiene la velocità del punto di contatto

$$(13.7.18) \quad \vec{v}_C(t) = \left( g(\sin \alpha - 3f_d \cos \alpha \text{signum}(v_C))t + v_0 + R\omega_0 \right) \vec{e}_t .$$

### Grande inclinazione

Se la condizione di piccola inclinazione (13.7.12) è violata non si può avere puro rotolamento e valgono sempre le (13.7.17). Supponiamo, ad esempio, di fissare le condizioni iniziali  $(v_0, \omega_0)$  in modo che il disco parta con  $v_C(0) = v_0 + R\omega_0 > 0$ . In tal caso, finché  $v_C > 0$  si ha

$$(13.7.19) \quad \dot{\theta}(t) = -\frac{2}{R}(f_d g \cos \alpha)t + \omega_0$$

$$(13.7.20) \quad \dot{s}(t) = g(\sin \alpha - f_d \cos \alpha)t + v_0$$

$$(13.7.21) \quad v_C(t) = g(\sin \alpha - 3f_d \cos \alpha)t + v_0 + R\omega_0$$

$$(13.7.22) \quad \vec{a}_C(t) \cdot \vec{e}_t = g(\sin \alpha - 3f_d \cos \alpha) .$$

È immediato verificare che, grazie alla condizione di grande inclinazione, la componente tangenziale dell'accelerazione di  $C$  (13.7.22) è positiva. Ciò implica che  $v_C(t) > 0 \forall t > 0$ . Pertanto, con le condizioni iniziali suddette, se il disco parte lanciato con una velocità di strisciamento  $v_C$  diretta verso il basso, tale velocità cresce linearmente nel tempo, come nella Fig. 13.7.1

### Guida orizzontale

Se la guida è orizzontale, la condizione di piccola inclinazione è banalmente soddisfatta, pertanto è possibile la fase di puro rotolamento ma anche quella di rotolamento non puro, cioè un moto multi-fase nell'intervallo d'osservazione  $[t_0, +\infty[$ . Le equazioni di moto (13.7.17) della fase di rotolamento non puro, si riducono a

$$(13.7.23) \quad \theta(t) = -f_d \frac{g}{R} \text{signum}(v_C)t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

$$(13.7.24) \quad s(t) = -\frac{1}{2}f_d g \text{signum}(v_C)t^2 + v_0 t + s_0 ,$$

con

$$(13.7.25) \quad v_C(t) = -3gf_d \text{signum}(v_C)t + v_0 + R\omega_0$$

$$(13.7.26) \quad \vec{a}_C(t) \cdot \vec{e}_t = -3gf_d \text{signum}(v_C) .$$

È ovvio che, se il disco è inizialmente in quiete, ivi rimane. Invece, se le condizioni iniziali sono tali che  $v_C(0) > 0$ , nell'intervallo  $[0, t_1[$  in cui

$$\text{signum}(v_C) = \text{signum}(v_C(0)) = 1$$

la velocità di strisciamento è data da

$$(13.7.27) \quad v_C(t) = -3gf_d t + v_0 + R\omega_0$$

con il seguente grafico

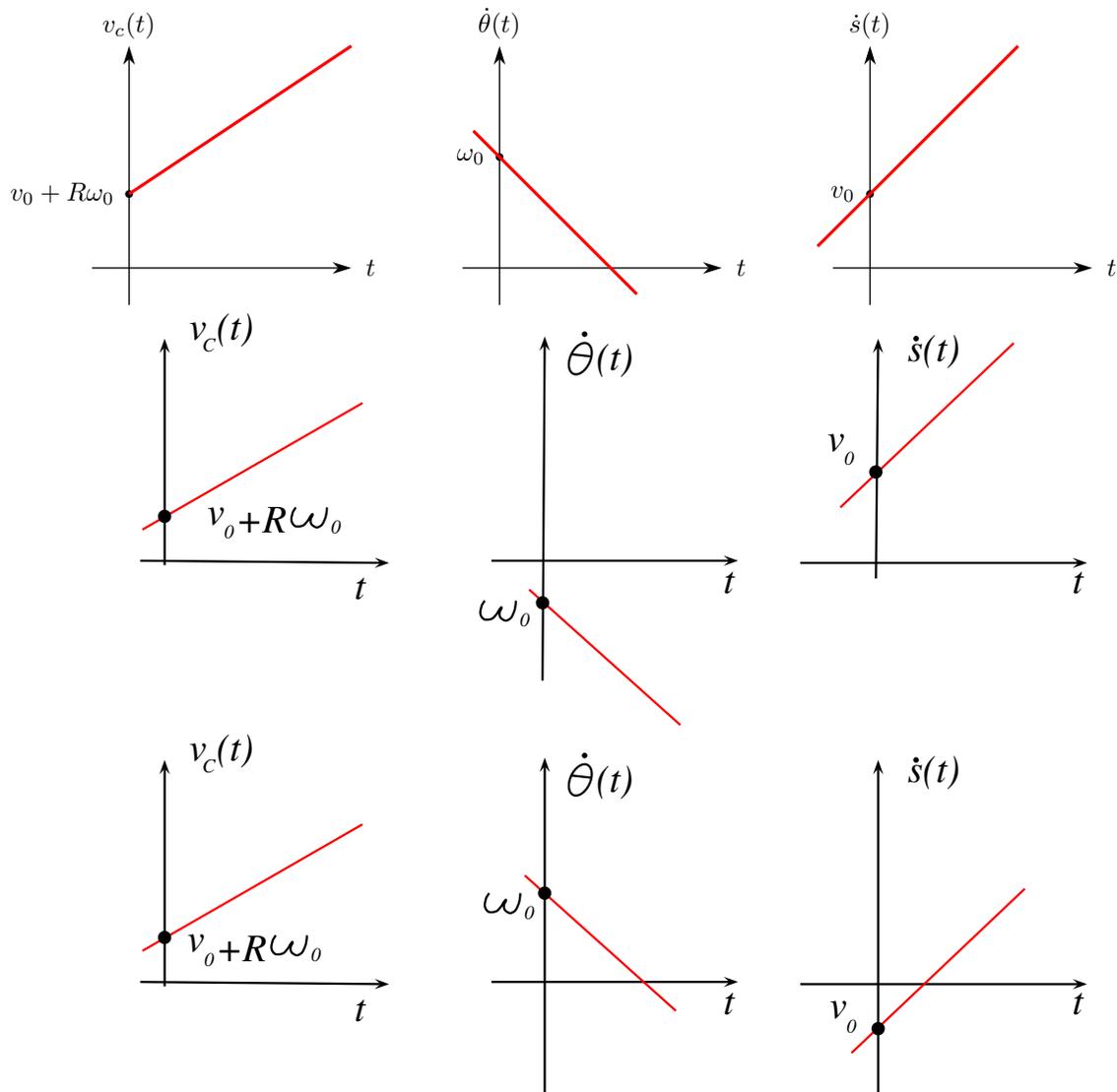
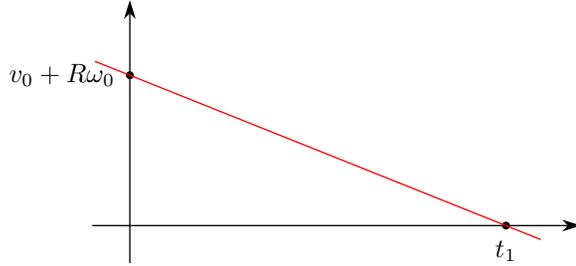


Figura 13.7.1: Disco su guida di grande inclinazione, con velocità iniziale di strisciamento positiva.



Quindi, all'istante

$$t_1 = \frac{v_0 + R\omega_0}{3gf_d}$$

la velocità di strisciamento si annulla, mentre

$$(13.7.28) \quad \dot{\theta}(t_1) = \frac{1}{3} \left( -2\frac{v_0}{R} + \omega_0 \right)$$

$$(13.7.29) \quad \dot{s}(t_1) = \frac{1}{3} (2v_0 - R\omega_0) .$$

Allora, possono verificarsi due casi:

a) se  $v_0 = \frac{1}{2}R\omega_0$ , allora

$$\dot{\theta}(t_1) = 0 , \quad \dot{s}(t_1) = 0 .$$

Il disco, dopo la prima fase di rotolamento con slittamento o strisciamento, si arresta definitivamente all'istante  $t = t_1$ .

b) se  $v_0 \neq \frac{1}{2}R\omega_0$ , allora

$$\dot{\theta}(t_1) \neq 0 , \quad \dot{s}(t_1) \neq 0 .$$

Il disco, dopo la prima fase di rotolamento non puro, inizia all'istante  $t_1$  una fase di puro rotolamento, durante la quale le equazioni differenziali di moto (13.7.10) forniscono

$$(13.7.30) \quad \begin{aligned} \theta(t) &= \omega_1(t - t_1) + \theta_1 & \omega_1 &:= \dot{\theta}(t_1) , & \theta_1 &= \theta(t_1) \\ s(t) &= -R\omega_1(t - t_1) + s_1 & s_1 &:= s(t_1) \\ \phi_n &= mg \\ \phi_t &= 0 \quad , \end{aligned}$$

cioè quelle di un moto roto-traslatorio uniforme. Tale fase prosegue  $\forall t \in [t_1, +\infty[$ . Infatti, se per assurdo ricominciasse il rotolamento non puro ad un istante  $t_2 \in ]t_1, +\infty[$ , negli istanti immediatamente successivi a  $t_1$  la velocità di strisciamento sarebbe non nulla, quindi la componente tangenziale dell'accelerazione del punto di contatto  $C$  all'istante  $t_1$  dovrebbe essere concorde a tale velocità

$$(13.7.31) \quad \text{signum}(\vec{a}_C(t_1) \cdot \vec{e}_t) = \text{signum}(v_C)$$

Tuttavia, la (13.7.26), implica che  $\vec{a}_C(t) \cdot \vec{e}_t$ , durante la fase di rotolamento non puro, deve essere di segno opposto alla velocità di strisciamento, da cui la contraddizione.

Pertanto, nell'ipotesi b), il disco, pur in presenza dell'attrito che è necessario per rendere possibile il puro rotolamento, continuerebbe il suo moto roto-traslatorio uniforme per tutti i tempi, contrariamente all'evidenza sperimentale!

L'apparente paradosso del punto b) si elimina considerando, al posto della (13.7.3), la riduzione più generale delle reazioni vincolari

$$\mathcal{S}^{(est, reatt)} \sim \{(C, \vec{\phi}^{(est, reatt)}), \vec{\Gamma}\},$$

dove  $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_3$  è una coppia reattiva detta *attrito di rotolamento*, che soddisfa le relazioni di Coulomb seguenti

$$(13.7.32) \quad |\Gamma| \leq h_s |\phi_n| \quad \text{se } \vec{\omega} = \vec{0}$$

$$(13.7.33) \quad \vec{\Gamma} = -h_d |\phi_n| \text{vers}(\vec{\omega}) \quad \text{se } \vec{\omega} \neq \vec{0}.$$

I parametri  $h_s$  e  $h_d$  sono, rispettivamente, i coefficienti d'attrito di rotolamento, statico e dinamico, e hanno le dimensioni di una lunghezza.

In questo caso, le ECD per il disco assumono la forma

$$(13.7.34) \quad \begin{cases} \phi_t & = m\ddot{s} \\ -mg + \phi_n & = 0 \\ R\phi_t + \Gamma & = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta}. \end{cases}$$

Supponiamo, ora, che il disco all'istante  $t_1$  sia in moto di puro rotolamento, come al suddetto punto b). Allora, le (13.7.34) si scrivono

$$(13.7.35) \quad \begin{cases} \phi_t & = -mR\ddot{\theta} \\ \phi_n & = mg \\ \Gamma & = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}, \end{cases}$$

e, tenendo conto della (13.7.33), diventano

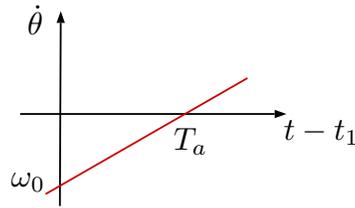
$$(13.7.36) \quad \begin{cases} \ddot{\theta} & = -\frac{2}{3}\frac{h_d}{R}\frac{g}{R} \text{signum}(\dot{\theta}) \\ \phi_t & = \frac{2}{3}\frac{h_d}{R}mg \text{signum}(\dot{\theta}) \\ \phi_n & = mg \end{cases}$$

Integrando la prima delle (13.7.36), troviamo che, dall'istante  $t_1$ , il moto del disco è un moto roto-traslatorio uniformemente decelerato

$$\begin{aligned} \theta(t) &= -\frac{1}{3}\frac{h_d}{R}\frac{g}{R} \text{signum}(\dot{\theta})(t-t_1)^2 + \omega_1(t-t_1) + \theta_1 \\ s(t) &= \frac{1}{3}\frac{h_d}{R}g \text{signum}(\dot{\theta})(t-t_1)^2 - \omega_1 R(t-t_1) + s_1 \end{aligned}$$

con un intervallo d'arresto pari a

$$(13.7.37) \quad T_a = t_a - t_1 = \frac{3}{2}\frac{R^2}{h_d g} |\omega_1| = \frac{3}{2}\frac{R}{h_d g} |v_1|, \quad v_1 = v_G(t_1) = -\omega_1 R,$$



Se  $\text{signum}(\dot{\theta}) = -1$

$$\dot{\theta} = \frac{2}{3} \frac{h_d}{R} \frac{g}{R} (t - t_1) + \omega_1 .$$

### La frenata perfetta

Studiamo ora il moto di un disco su una guida orizzontale, il quale, partendo da un moto di puro rotolamento all'istante  $t_1$ , venga frenato da una coppia di momento  $\bar{M} = M\bar{e}_3$ . In tal caso, le ECD (13.7.35) diventano

$$(13.7.38) \quad \begin{cases} \phi_t & = -mR\ddot{\theta} \\ \phi_n & = mg \\ M + \Gamma & = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} , \end{cases}$$

e, tenendo conto della (13.7.33),

$$(13.7.39) \quad \begin{cases} \ddot{\theta} & = \frac{2}{3mR^2} (M - h_d mg \text{signum}(\dot{\theta})) \\ \phi_t & = -\frac{2}{3R} (M - h_d mg \text{signum}(\dot{\theta})) \\ \phi_n & = mg \end{cases}$$

Durante il puro rotolamento, la reazione vincolare deve soddisfare la relazione di Coulomb (13.7.5), quindi

$$(13.7.40) \quad \frac{2}{3R} |M - h_d mg \text{signum}(\dot{\theta})| \leq f_s mg .$$

Per fissare le idee, supponiamo che  $\dot{\theta} < 0$ , quindi il momento frenante deve essere  $M > 0$ . Allora, la (13.7.40) equivale a

$$(13.7.41) \quad M \leq \left( \frac{3}{2} f_s - \frac{h_d}{R} \right) mgR ,$$

cioè il momento frenante non deve superare il valore  $M_{max} = \left( \frac{3}{2} f_s - \frac{h_d}{R} \right) mgR$ , se non si vuole che il disco incominci a strisciare. Per tale valore *massimo*, le (13.7.39) risultano

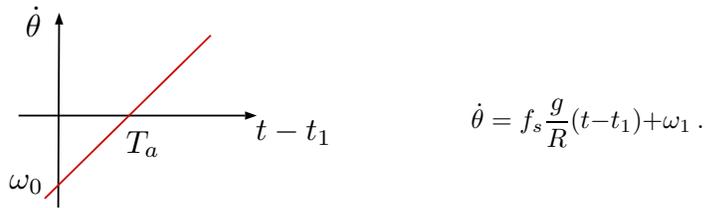
$$(13.7.42) \quad \begin{cases} \ddot{\theta} & = f_s \frac{g}{R} \\ \phi_t & = -f_s mg \\ \phi_n & = mg , \end{cases}$$

quindi, il disco si muove di moto uniformemente ritardato

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{1}{2} f_s \frac{g}{R} (t - t_1)^2 + \omega_1 (t - t_1) + \theta_1 & \omega_1 < 0 \\ s(t) &= - \left( \frac{1}{2} f_s g (t - t_1)^2 + \omega_1 R (t - t_1) \right) + s_1 , \end{aligned}$$

In questo caso, l'intervallo di arresto risulta

$$(13.7.43) \quad T_a = t_a - t_1 = \frac{|\omega_1|R}{f_s g} = \frac{|v_1|}{f_s g} \quad v_1 = v_G(t_1) = -\omega_1 R .$$



Si potrebbe pensare che un ulteriore aumento del momento frenante, eventualmente non limitato, pur provocando lo strisciamento del disco, potrebbe ridurre l'intervallo d'arresto. Ma non è così. Infatti, in caso di strisciamento (con velocità  $v_C > 0$ ), bisogna sostituire la (13.7.5) con la (13.7.6) e tenere conto della (13.7.33). Allora, si ottiene il sistema

$$(13.7.44) \quad \begin{cases} \phi_t & = m\ddot{s} \\ \phi_n & = mg \\ R\phi_t + M + \Gamma & = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} \\ \phi_t & = -f_d |\phi_n| \\ \Gamma & = -h_d |\phi_n| \text{signum}(\dot{\theta}) . \end{cases}$$

dal quale possiamo ricavare le due equazioni pure di moto

$$(13.7.45) \quad \begin{cases} \ddot{s} = -f_d g \\ \ddot{\theta} = \frac{2}{mR^2} (M + mg(h_d - f_d R)) . \end{cases}$$

Quindi, entrambe le coordinate libere ( $s, \theta$ ) evolvono in modo uniformemente ritardato

$$\begin{aligned} s(t) &= -\frac{1}{2}f_d g(t - t_1)^2 + v_1(t - t_1) + s_1 \\ \theta(t) &= \frac{1}{mR^2} (M + mg(h_d - f_d R))(t - t_1)^2 + \omega_1(t - t_1) + \theta_1 \quad \omega_1 < 0 . \end{aligned}$$

Allora, con ragionamento analogo al caso precedente, si calcola che l'intervallo d'arresto diventa

$$T_a = t_a - t_1 = \frac{|v_1|}{f_d g} ,$$

che supera l'intervallo (13.7.43), poichè  $f_d < f_s$ .

**Esercizio 13.7.1.** *Determinare nei due casi precedenti le distanze d'arresto e confrontarle.*