

## Capitolo 14

# Equazioni di Lagrange

In questo capitolo ricaveremo il sistema delle equazioni di Lagrange (EL), un sistema di tante equazioni di moto *pure* (non contenenti le reazioni vincolari) quanti sono i gradi di libertà di un modello olonomo con vincoli non dissipativi e bilateri. Sebbene valgano in un ambito più ristretto di quello in cui valgono le equazioni Cardinali, per il fatto di non contenere le reazioni vincolari (che sono parzialmente incognite) presentano notevoli vantaggi rispetto a queste, soprattutto nello studio dei modelli articolati.

### 14.1 Equazioni di Lagrange non conservative

Nel Cap. 11 abbiamo visto come, utilizzando il principio di D'Alembert e le Equazioni Cardinali della Statica si ottengono le Equazioni Cardinali della Dinamica per un qualunque modello meccanico. Vedremo ora come, utilizzando il principio di D'Alembert e il PLV, si ottengono le equazioni di Lagrange (EL) per i sistemi olonomi con vincoli *non dissipativi* e *bilateri*. Dalla Statica, sappiamo che, se i vincoli sono non dissipativi e indipendenti dal tempo, le configurazioni di equilibrio sono tutte e sole le configurazioni in cui il LV delle forze attive è non positivo

$$\text{PLV:} \quad \sum_{B \in \mathcal{B}} \vec{F}_B^{(att)} \cdot \delta \vec{x}_B \leq 0 \quad \forall \delta \mathcal{P} = (\delta \vec{x}_1, \dots, \delta \vec{x}_B, \dots) .$$

Combinando il PLV con il principio di D'Alembert otteniamo

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} \vec{F}_B^{(att)} \cdot \delta \vec{x}_B \leq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{B \in \mathcal{B}} \left( -\frac{d\vec{p}_B}{dt} \right) \Rightarrow$$

(14.1.1) 
$$\sum_{B \in \mathcal{B}} \left( \vec{F}_B^{(att)} - \frac{d\vec{p}_B}{dt} \right) \cdot \delta \vec{x}_B \leq 0 \quad \forall \delta \mathcal{P}$$

Tale relazione, detta *Relazione simbolica della dinamica* esprime il fatto che, durante i moti del modello, il LV delle forze attive sommato a quello delle forze d'inerzia è non positivo per ogni campo di spostamenti virtuali del sistema. Introduciamo ora l'ipotesi che il sistema materiale sia soggetto a vincoli *olonomi* e abbia  $l$  gradi di libertà. In tal caso, si ha che il vettore posizione di

un qualunque punto  $B$  del sistema si può scrivere come una funzione delle sole coordinate libere  $(q_1, \dots, q_l)$  e del tempo

$$(14.1.2) \quad \vec{x}_B = \vec{x}_B(q_1, \dots, q_l; t) \quad \text{di classe } \mathcal{C}^2 .$$

La dipendenza dal tempo tiene conto della presenza di eventuali vincoli mobili. Comunque, gli spostamenti virtuali del punto  $B$  assumono la forma

$$(14.1.3) \quad \delta \vec{x}_B(q_1, \dots, q_l; t) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \delta q_i ,$$

dove  $\delta q_i$  sono variazioni delle coordinate libere. Tale espressione coincide con quella già calcolata in statica (5.11.1) poiché, anche in dinamica, gli spostamenti virtuali  $\delta \vec{x}_B$  devono essere calcolati a vincoli congelati. Sostituendo l'espressione (14.1.3) nella (14.1.1) otteniamo

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} \left( \vec{F}_B^{(att)} - \frac{d\vec{p}_B}{dt} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^l \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \delta q_i \right) \leq 0 \quad \forall (\delta q_1, \dots, \delta q_l)$$

che, scambiando le sommatorie, diventa

$$(14.1.4) \quad \sum_{i=1}^l \delta q_i \left( \sum_{B \in \mathcal{B}} \left( \vec{F}_B^{(att)} - \frac{d\vec{p}_B}{dt} \right) \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \right) \leq 0$$

Denotato con  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$  il vettore delle coordinate lagrangiane del sistema e ricordando che

$$Q_i^{(att)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \sum_{B \in \mathcal{B}} \left( \vec{F}_B^{(att)} \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \right)$$

sono le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva e chiamando, per analogia, le

$$(14.1.5) \quad \tau_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \sum_{B \in \mathcal{B}} \frac{d\vec{p}_B}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} = \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i}$$

componenti lagrangiane della derivata della quantità di moto, la (14.1.4) diventa *la Relazione Simbolica* della Dinamica per i sistemi olonomi

$$\sum_{i=1}^l \left( Q_i^{(att)} - \tau_i \right) \delta q_i \leq 0 \quad \forall (\delta q_1, \dots, \delta q_l) .$$

Se, in più, supponiamo che i vincoli siano anche *bilateri*, possiamo concludere che durante il moto vale *l'Equazione Simbolica* della Dinamica

$$\sum_{i=1}^l \left( Q_i^{(att)} - \tau_i \right) \delta q_i = 0 \quad \forall (\delta q_1, \dots, \delta q_l) .$$

Infine, osservando che le variazioni delle coordinate libere  $\delta q_i$  risultano completamente arbitrarie, possiamo concludere che l'Equazione Simbolica equivale al sistema di  $l$  equazioni pure di moto

$$(14.1.6) \quad Q_i^{(att)} = \tau_i \quad i = 1, \dots, l .$$

Dimostreremo, ora, che il secondo membro di tali equazioni risulta essere

$$(14.1.7) \quad \tau_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} \quad \text{binomio lagrangiano,}$$

dove  $K$  è l'energia cinetica del sistema materiale.

A questo scopo, utilizzando la regola di Leibniz, riscriviamo la (14.1.5) nella forma binomiale

$$(14.1.8) \quad \tau_i = \frac{d}{dt} \left( \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \vec{v}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \right) - \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \vec{v}_B \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \right)$$

e utilizziamo i seguenti due lemmi. Denotata con  $\vec{v}_B$  la velocità del punto  $B$ , si ha che

$$\textbf{Lemma 14.1.1.} \quad \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial \dot{q}_j} \quad j = 1, \dots, l$$

*Dimostrazione.* Segue immediatamente dal fatto che la velocità di un punto materiale di un modello soggetto a vincoli olonomi si scrive

$$(14.1.9) \quad \vec{v}_B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d\vec{x}_B}{dt} = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t}$$

□

$$\textbf{Lemma 14.1.2.} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial \dot{q}_j}$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j} (q_1, \dots, q_l, t) \right) &= \sum_{i=1}^l \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^l \frac{\partial^2 \vec{x}_B}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{x}_B}{\partial q_j \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{i=1}^l \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t} \right) \\ (14.1.9) \quad &\stackrel{=}{=} \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned}$$

□

Utilizzando i suddetti lemmi la (14.1.8) diventa

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left( \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \vec{v}_B \cdot \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \vec{v}_B \cdot \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial q_i} .$$

Pertanto, ricordando la definizione dell'energia cinetica di un modello

$$K = \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \vec{v}_B \cdot \vec{v}_B ,$$

si ottiene la (14.1.7). Combinando la (14.1.6) con la (14.1.7) possiamo finalmente scrivere le equazioni di Lagrange di prima specie o non conservative

$$(14.1.10) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i^{(att)} \quad i = 1, \dots, l$$

## 14.2 Equazioni di Lagrange conservative

Nel caso in cui la sollecitazione attiva sia conservativa nel senso della Def. 6.2.1, le equazioni di Lagrange si possono derivare da un'unica funzione scalare che contiene tutta la dinamica del sistema. Infatti, sotto la suddetta ipotesi, esista l'energia potenziale del sistema cioè una funzione a valori scalari e di classe  $C^2$

$$V = V(q_1, \dots, q_l)$$

tale che

$$Q_i^{(att)}(q_1, \dots, q_l) = \frac{\partial}{\partial q_i}(-V) \quad i = 1, \dots, l$$

Allora, le eq. (14.1.10) diventano

$$(14.2.1) \quad \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) K = - \frac{\partial}{\partial q_i} (V)$$

Tenuto conto che  $V$  non dipende dalla velocità  $\dot{q}_i$  le (14.2.1) si possono scrivere

$$(14.2.2) \quad \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) K = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) V$$

Allora, se definiamo la funzione di Lagrange (o Lagrangiana) del modello conservativo come

$$(14.2.3) \quad \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := K - V,$$

dalla (14.2.2) ricaviamo le eq. di Lagrange per i sistemi conservativi

$$(14.2.4) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, l$$

Ribadiamo che tali equazioni, dette anche eq. di Lagrange conservative, governano l'evoluzione di un sistema materiale conservativo, soggetto a vincoli olonomi, non dissipativi e bilateri.

**N.B.** È ovvio che le eq. di Lagrange non conservative valgono anche nel caso conservativo, mentre le eq. di Lagrange conservative valgono solo in quest'ultimo caso. Quindi, se si hanno dubbi sulla conservatività della sollecitazione attiva, conviene usare le prime.

## 14.3 Equazioni di Lagrange in forma mista

Nel caso in cui sul modello agisca una sollecitazione in parte conservativa e in parte non conservativa, le eq. di Lagrange si possono utilizzare, sia nella forma (14.1.10), sia nella forma mista seguente,

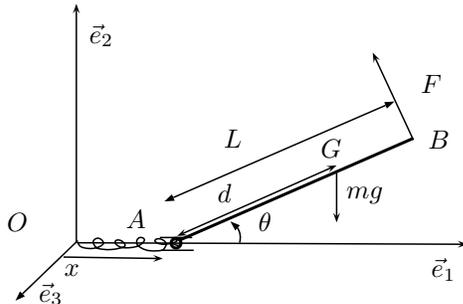
$$(14.3.1) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i^{(nc)} \quad i = 1, \dots, l,$$

dove con  $\mathcal{L}$  abbiamo indicato la Lagrangiana contenente l'energia potenziale della sollecitazione conservativa, mentre con  $Q_i^{(nc)}$  le componenti lagrangiane della sollecitazione non conservativa.

Discutiamo ora un esempio di ricapitolazione per un rigido con 2 gradi di libertà.

### Esempio 14.3.1.

Riprendiamo l'Es. 5.11.1 e scriviamone le eq. di Lagrange



$$x \in \mathbb{R}$$

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

Avevamo già trovato che le forze generalizzate sono:

$$(14.3.2) \quad \begin{aligned} Q_x &= -cx - F \sin \theta = \vec{R}^{att} \cdot \vec{e}_1 \\ Q_\theta &= -mgd \cos \theta + FL = \vec{M}_A^{att} \cdot \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Controlliamo se la sollecitazione è conservativa o meno applicando il test delle derivate in croce:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial \theta} = -F \cos \theta \quad \frac{\partial Q_\theta}{\partial x} = 0$$

È immediato concludere che l'intera sollecitazione non è conservativa. Quindi, durante la dinamica, valgono le eq. di Lagrange non conservative (14.1.10), oppure quelle miste (14.3.1). Utilizziamo le prime. Conosciamo già le forze generalizzate  $Q_x$ ,  $Q_\theta$ , dobbiamo calcolare l'energia cinetica  $K$ .

Poiché il sistema materiale è costituito da un solo rigido unidimensionale che si muove in un piano con velocità angolare  $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_3$ ,  $K$  assume la forma (13.3.4)

$$K = \frac{1}{2} m |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} J_{3G} \dot{\theta}^2,$$

dove  $J_{3G}$  indica il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse per  $G$  e ortogonale al piano. La velocità di  $G$  si può calcolare in 2 modi:

1. derivando il vettore posizione  $\vec{x}_G = G - O$

$$\begin{aligned} \vec{v}_G &= \frac{d}{dt} \vec{x}_G = \frac{d}{dt} [(x + d \cos \theta) \vec{e}_1 + d \sin \theta \vec{e}_2] \\ &= (\dot{x} - d \sin \theta \dot{\theta}) \vec{e}_1 + d \cos \theta \dot{\theta} \vec{e}_2 \end{aligned}$$

2. utilizzando la formula di Poisson (4.5.1)

$$\begin{aligned} \vec{v}_G &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (G - A) \\ &= \dot{x} \vec{e}_1 + \dot{\theta} \vec{e}_3 \times d (\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2) \\ &= \dot{x} \vec{e}_1 + d \dot{\theta} (\cos \theta \vec{e}_2 - \sin \theta \vec{e}_1) \end{aligned}$$

Dunque,

$$|\vec{v}_G|^2 = (\dot{x} - d \sin \theta \dot{\theta})^2 + d^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 = \dot{x}^2 + d^2 \dot{\theta}^2 - 2d \sin \theta \dot{x} \dot{\theta}$$

e l'energia cinetica è data da

$$K = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + d^2 \dot{\theta}^2 - 2d \sin \theta \dot{x} \dot{\theta}) + \frac{1}{2}J_{3G} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (m \dot{x}^2 - 2md \sin \theta \dot{x} \dot{\theta} + (md^2 + J_{3G}) \dot{\theta}^2)$$

Per scrivere le eq. di Lagrange (14.1.10) calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} &= m(\dot{x} - d \sin \theta \dot{\theta}) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right) = m(\ddot{x} - d \cos \theta \dot{\theta}^2 - d \sin \theta \ddot{\theta}) \\ x : \quad \frac{\partial K}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta : \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} &= (md^2 + J_{3G}) \dot{\theta} - md \sin \theta \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \right) = (md^2 + J_{3G}) \ddot{\theta} - md(\sin \theta \ddot{x} + \cos \theta \dot{x} \dot{\theta}) \\ \frac{\partial K}{\partial \theta} &= -md \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} \end{aligned}$$

Dunque, le eq. di Lagrange si scrivono

$$(14.3.3) \quad \begin{aligned} m(\ddot{x} - d \cos \theta \dot{\theta}^2 - d \sin \theta \ddot{\theta}) &= -cx - F \sin \theta \\ (md^2 + J_{3G}) \ddot{\theta} - md \sin \theta \ddot{x} &= -mgd \cos \theta + FL \end{aligned}$$

Se, in particolare l'asta è omogenea, segue che

$$d = \frac{L}{2}, \quad J_{3G} = \frac{1}{12}mL^2$$

e quindi le eq. (14.3.3) diventano

$$\begin{aligned} m\left(\ddot{x} - \frac{L}{2} \cos \theta \dot{\theta}^2 - \frac{L}{2} \sin \theta \ddot{\theta}\right) &= -cx - F \sin \theta \\ m\left(\frac{L^2}{3} \ddot{\theta} - \frac{L}{2} \sin \theta \ddot{x}\right) &= -mgd \cos \theta + FL \end{aligned}$$

**N.B.** Come previsto dalla teoria, le eq. di Lagrange risultano equazioni *pure* di moto, cioè non contengono le reazioni vincolari. Quindi, se si vogliono determinare le reazioni vincolari durante il moto, si devono usare le eq. cardinali della dinamica.

In questo esempio, cerchiamo la reazione vincolare esterna cioè determiniamo l'incognita  $\vec{\phi}_A = \phi'_2 \vec{e}_2$  (in genere, diversa dalla reazione in Statica).

La I ECD, proiettata lungo il versore  $\vec{e}_2$  fornisce

$$\phi'_2 - mg + F \cos \theta = m \vec{a}_G \cdot \vec{e}_2$$

Siccome l'accelerazione di  $G$  è data da

$$\vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G = (\ddot{x} - d \cos \theta \dot{\theta}^2 - d \sin \theta \ddot{\theta}) \vec{e}_1 + d(-\sin \theta \dot{\theta}^2 + \cos \theta \ddot{\theta}) \vec{e}_2,$$

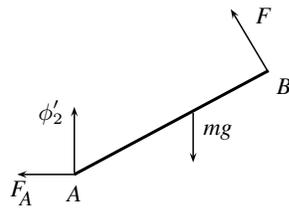


Figura 14.3.1:

la reazione vincolare sarà

$$(14.3.4) \quad \phi_2' = mg - F \cos \theta + md(-\sin \theta \dot{\theta}^2 + \cos \theta \ddot{\theta}) ,$$

quindi una funzione di  $(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$ . Pertanto, sarà determinata in funzione del tempo, una volta che si è integrato il sistema delle EL. Comunque, se si vuole calcolare la reazione vincolare all'istante iniziale  $t_0$ , si può utilizzare la (14.3.4) senza bisogno di integrare le equazioni di moto, previa scelta delle condizioni iniziali del problema di Cauchy associato alle EL. Per esempio, fissando le condizioni iniziali nulle per la coordinata angolare

$$\theta(t_0) = 0 , \quad \dot{\theta}(t_0) = 0$$

si trova

$$(14.3.5) \quad \phi_2'(t_0) = mg - F + m d \ddot{\theta}(t_0) .$$

Poi, ricavando dalla II EL (14.3.3) l'accelerazione angolare all'istante iniziale

$$\ddot{\theta}(t_0) = \frac{FL - mgd}{md^2 + J_{3G}}$$

e sostituendola nella (14.3.5) si arriva a

$$(14.3.6) \quad \phi_2'(t_0) = mg - F + m d \frac{FL - mgd}{md^2 + J_{3G}} .$$

### Confronto con le ECD

Nel problema precedente, confrontiamo le EL con le ECD. Si noti che la componente lungo  $\vec{e}_1$  della I ECD è

$$-cx - F \sin \theta = m \vec{a}_G \cdot \vec{e}_1 ,$$

che coincide con la I EL (14.3.3). Scriviamo ora la II ECD, scegliendo come polo il punto  $A$  mobile, al fine di eliminare l'incognita  $\phi_2'$ . Poiché il modello è rigido e  $A$  appartiene al rigido, possiamo utilizzare direttamente la II delle Eq. (13.2.5) con  $O \equiv A$

$$(14.3.7) \quad \vec{M}_A^{(est)} = \mathbf{I}_A(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_A(\vec{\omega}) + (G - A) \times m \vec{a}_A$$

Allora,

$$\begin{aligned}\vec{M}_A^{(est)} = \vec{M}_A^{(est,att)} &= (G - A) \times (-mg\vec{e}_2) + (B - A) \times \vec{F}_B \\ &= (-mgd \cos \theta + Fl)\vec{e}_3 ,\end{aligned}$$

Inoltre,

$$\mathbf{I}_A(\vec{\omega}) = \mathbf{I}_A(\dot{\theta}\vec{e}_3) = J_{3A} \dot{\theta} \vec{e}_3 , \quad \vec{\omega} \times \mathbf{I}_A(\vec{\omega}) = \dot{\theta}\vec{e}_3 \times \mathbf{I}_A(\dot{\theta}\vec{e}_3) = \dot{\theta}\vec{e}_3 \times \dot{\theta}J_{3A} \vec{e}_3 = \vec{0}$$

e

$$(G - A) \times m \vec{a}_A = md(\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2) \times \ddot{x}\vec{e}_1 = -md \sin \theta \ddot{x}\vec{e}_3 .$$

Dunque la II ECD (14.3.7) proiettata lungo  $\vec{e}_3$  fornisce

$$(14.3.8) \quad -mgd \cos \theta + Fl = J_{3A} \ddot{\theta} - md \sin \theta \ddot{x}$$

Osservando che, per il Teo. di Huygens-Steiner (12.7.1)

$$J_{3A} = J_{3G} + md^2 ,$$

si verifica facilmente che la (14.3.8) coincide con la II delle (14.3.3). Tuttavia, se avessimo scelto come polo per i momenti qualunque punto non appartenente alla retta d'azione della reazione  $\phi'_2$ , la II ECD, contenendo la reazione stessa, sarebbe stata diversa dalla II EL. Nonostante che, in questo esempio, le eq. di Lagrange coincidano con 2 componenti delle eq. cardinali della dinamica, si può apprezzare la maggiore efficienza computazionale delle eq. di Lagrange. Essa dipende principalmente da due motivi:

1. le eq. di Lagrange sono sempre, per *costruzione*, eq. pure di moto mentre le eq. cardinali, in genere, contengono le reazioni vincolari;
2. nel formalismo lagrangiano ogni eq. di Lagrange è un'equazione *scalare* e le informazioni sull'inerzia del modello sono contenute in una funzione *scalare*, l'energia cinetica  $K$ . Al contrario, le eq. cardinali della dinamica sono equazioni *vettoriali*, e le informazioni sull'inerzia del modello sono contenute in un *vettore*, il momento angolare  $\vec{L}_A$ .

In seguito, quando passeremo da un modello rigido a un modello articolato, sarà ancora più evidente l'efficienza delle eq. di Lagrange.

## 14.4 Struttura dell'energia cinetica di un sistema olonomo

La parte dinamica delle equazioni di Lagrange è contenuta nella funzione energia cinetica  $K$ . Studiamo in dettaglio la struttura di tale funzione per un qualsiasi sistema olonomo. Sappiamo che, in generale,

$$(14.4.1) \quad K = \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B |\vec{v}_B|^2$$

Ricordiamo che in un modello olonomo con vincoli eventualmente dipendenti dal tempo, per ogni punto  $B$  si ha

$$(14.4.2) \quad \vec{x}_B = \vec{x}_B(q_1, q_2, \dots, q_l; t)$$

$$(14.4.3) \quad \vec{v}_B = \dot{\vec{x}}_B = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t}$$

Chiameremo il primo termine della velocità della (14.4.3),

$$(14.4.4) \quad \vec{v}_B^{(vir)} := \sum_{i=1}^l \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

velocità *virtuale* di  $B$ , poiché, per ogni  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) \in \mathbb{R}^l$ , rappresenta le velocità di  $B$  lungo un moto virtuale del modello. Invece, il secondo termine di (14.4.3)

$$(14.4.5) \quad \vec{v}_B^{(tr)} := \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t}$$

sarà detto velocità *di trascinamento*, poiché rappresenta la velocità di  $B$  quando esso è solidale ai vincoli e quindi viene trascinato da essi.

Sostituendo in  $K$  l'espressione

$$(14.4.6) \quad \vec{v}_B = \vec{v}_B^{(vir)} + \vec{v}_B^{(tr)}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B (\vec{v}_B^{(vir)} + \vec{v}_B^{(tr)}) \cdot (\vec{v}_B^{(vir)} + \vec{v}_B^{(tr)}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B |\vec{v}_B^{(vir)}|^2 + \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \vec{v}_B^{(vir)} \cdot \vec{v}_B^{(tr)} + \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B |\vec{v}_B^{(tr)}|^2 \\ &= K_2 + K_1 + K_0, \end{aligned}$$

Il termine  $K_2$  è dato da

$$(14.4.7) \quad \begin{aligned} K_2 &:= \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B |\vec{v}_B^{(vir)}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \left( \sum_{i=1}^l \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^l \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \left( \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned}$$

dove si è posto

$$(14.4.8) \quad a_{ij}(\mathbf{q}; t) := \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_j} \quad i, j = 1, \dots, l$$

Si osservi che le  $l^2$  funzioni  $a_{ij}$  sono invarianti per lo scambio di  $i$  con  $j$ . Quindi, se organizziamo i coefficienti  $a_{ij}$  nella matrice simmetrica

$$(14.4.9) \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}; t) := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1l} & a_{2l} & \dots & a_{ll} \end{bmatrix},$$

detta matrice dell'energia cinetica (o tensore metrico), la forma quadratica  $K_2$  si può scrivere come

$$K_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}},$$

dove

$$\dot{\mathbf{q}}^T := [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l]$$

e l'apice  $T$  indica l'operazione di trasposizione sulle matrici. Studiamo ora la struttura del termine lineare  $K_1$

$$(14.4.10) \quad K_1 := \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \vec{v}_B^{(vir)} \cdot \vec{v}_B^{(tr)} = \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \left( \sum_{i=1}^l \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t} = \sum_{i=1}^l \left( \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t} \right) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^l b_i \dot{q}_i ,$$

dove

$$(14.4.11) \quad b_i(\mathbf{q}; t) := \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t} .$$

Dunque,  $K_1$  è una forma lineare nelle  $\dot{q}_i$  che si può scrivere

$$K_1 = \mathbf{b}^T \dot{\mathbf{q}} ,$$

avendo indicato con  $\mathbf{b}^T$  il vettore riga

$$\mathbf{b}^T := [b_1, \dots, b_l] .$$

Infine, il termine  $K_0$  è

$$(14.4.12) \quad K_0 = \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B (\vec{v}_B^{(tr)}) \cdot (\vec{v}_B^{(tr)}) = \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \left( \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t} \right) \cdot \left( \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} c(\mathbf{q}; t) ,$$

dove  $c(\mathbf{q}; t)$  è la funzione scalare definita da

$$(14.4.13) \quad c(\mathbf{q}; t) := \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \left( \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t} \right) \cdot \left( \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t} \right) .$$

Dunque,  $K_0$  non dipende dalle  $\dot{q}_i$ , cioè è di grado zero nelle  $\dot{q}_i$ . Ricapitolando, l'energia cinetica di un qualunque modello olonoma, ha la struttura

$$(14.4.14) \quad K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^l b_i \dot{q}_i + \frac{1}{2} c ,$$

che in forma matriciale si può scrivere

$$(14.4.15) \quad K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}^T \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} c ,$$

Dimostriamo che la parte quadratica  $K_2$  è definita positiva

**Proposizione 14.4.1.** *In un sistema olonoma, la parte dell'energia cinetica  $K_2$ , quadratica nelle velocità lagrangiane, è una forma definita positiva. Quindi, la matrice dell'energia cinetica  $\mathbf{A}$ , i cui elementi si possono calcolare come*

$$(14.4.16) \quad a_{ij} = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} ,$$

è invertibile.

*Dimostrazione.* Dalla definizione (14.4.7) segue che  $K_2 \geq 0$ . Dimostriamo che, se  $K_2 = 0$ , allora deve essere necessariamente  $\dot{q}_i = 0 \quad i = 1, \dots, l$ . È chiaro che  $K_2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_B^{(vir)} = 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}$ , cioè deve essere nulla la velocità virtuale di ogni punto del modello. Tale condizione, per la definizione (14.4.4), implica che tutte le velocità lagrangiane del modello devono essere nulle, dato che i vettori  $\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i}$  sono, per ipotesi, linearmente indipendenti in ogni punto dello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}_v$ .  $\square$

In particolare, se i vincoli sono indipendenti dal tempo,  $\frac{\partial \vec{x}_B}{\partial t} = \vec{0}$ , quindi,  $K_1$  e  $K_0$  sono nulle e l'energia cinetica si riduce al solo termine  $K_2$ . Possiamo allora affermare

**Proposizione 14.4.2.** *In un sistema olonomo a vincoli fissi, l'energia cinetica è una forma quadratica omogenea nelle velocità lagrangiane, con coefficienti dipendenti solo dalle coordinate lagrangiane, cioè*

$$(14.4.17) \quad K = K_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{q}).$$

**Esempio 14.4.1.**

Nell'esempio 14.3.1 l'energia cinetica vale

$$K = \frac{1}{2} \left( m\dot{x}^2 + (md^2 + J_{3G})\dot{\theta}^2 - 2md \sin \theta \dot{x}\dot{\theta} \right)$$

che in forma matriciale si scrive

$$K = \frac{1}{2} [\dot{x}, \dot{\theta}] \begin{bmatrix} m & -md \sin \theta \\ -md \sin \theta & md^2 + J_{3G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Quindi,  $\det \mathbf{A} = m^2 d^2 \cos^2 \theta + m J_{3G} > 0 \quad \forall (x, \theta) \in \mathcal{C}_v$ .

## 14.5 Struttura delle equazioni di Lagrange

Allo scopo di analizzare la struttura delle equazioni di Lagrange per un qualunque modello olonomo a vincoli non dissipativi e bilateri, introduciamo la seguente

**Definizione 14.5.1.** *Si dice momento cinetico  $p_i$ , coniugato alla coordinata libera  $q_i$ , la funzione*

$$(14.5.1) \quad p_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}$$

**Esercizio 14.5.1.** *Verificare che, nel caso dell'esempio 14.4.1, il momento cinetico  $p_x$  coincide con la componente della quantità di moto del sistema lungo il versore  $\vec{e}_1$  e il momento  $p_\theta$  coincide con la componente lungo il versore  $\vec{e}_3$  del momento angolare del sistema rispetto al polo  $A$ .*

Poiché la derivata temporale di  $p_i$  coincide con il primo membro del binomio lagrangiano (14.1.7) le EL (14.1.10) si possono scrivere in forma equivalente come

$$(14.5.2) \quad \dot{p}_i - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i^{(att)} \quad i = 1, \dots, l$$

Dalla (14.5.1), segue che

$$(14.5.3) \quad p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} \sum_B m_B \vec{v}_B \cdot \vec{v}_B \right) = \sum_B m_B \vec{v}_B \cdot \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial \dot{q}_i} \stackrel{\text{Lemma 14.1.1}}{=} \sum_B m_B \vec{v}_B \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i}$$

quindi i momenti cinetici sono le componenti lagrangiane della quantità di moto del sistema. Utilizzando l'equazione di struttura (14.4.14) si trova

$$(14.5.4) \quad \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^l a_{jk} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_j \dot{q}_k) + b_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^l a_{jk} (\delta_{ij} \dot{q}_k + \dot{q}_j \delta_{ik}) + b_i = \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^l a_{ik} \dot{q}_k + \sum_{j=1}^l a_{ji} \dot{q}_j \right) + b_i = \sum_{j=1}^l a_{ij} \dot{q}_j + b_i . \end{aligned}$$

Quindi, i momenti cinetici sono funzioni affini in  $\dot{q}_i$  e in forma matriciale si possono scrivere,

$$\mathbf{p} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b} ,$$

avendo denotato con  $\mathbf{p}^T := [p_1, \dots, p_l]$  la riga dei momenti cinetici. Allora, derivando rispetto al tempo la (14.5.4), si ottiene

$$(14.5.5) \quad \dot{p}_i = \sum_{j=1}^l a_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^l \dot{a}_{ij} \dot{q}_j + \dot{b}_i .$$

Pertanto, le equazioni di Lagrange le (14.5.2) si possono scrivere

$$(14.5.6) \quad \sum_{j=1}^l a_{ij} \ddot{q}_j + \Gamma_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = Q_i^{(att)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) ,$$

dove

$$(14.5.7) \quad \Gamma_i := \sum_{j=1}^l \dot{a}_{ij} \dot{q}_j + \dot{b}_i - \frac{\partial K}{\partial q_i} = \sum_{j,k=1}^l \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^l \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial b_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial q_i} .$$

Il sistema (14.5.6) in forma matriciale si scrive

$$(14.5.8) \quad \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Gamma} = \mathbf{Q}$$

e quindi, poiché la matrice  $\mathbf{A}$  è invertibile per la Prop 14.4.1, si può ridurre a forma *normale*, cioè risolto rispetto alle derivate di ordine massimo

$$(14.5.9) \quad \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1}(-\mathbf{\Gamma} + \mathbf{Q})$$

In conclusione, vale la seguente

**Proposizione 14.5.1.** *Le equazioni di Lagrange di un sistema meccanico olonomo formano un sistema di 1 EDO del II ordine che si può scrivere in forma normale.*

**Corollario 14.5.1.** *Per un sistema meccanico olonomo con vincoli non dissipativi e bilateri e sollecitazione attiva di classe  $C^1$  vale il principio del determinismo meccanico, cioè, una volta fissate le condizioni iniziali in  $C_v \times \mathbb{R}^l$*

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \mathbf{v}_0,$$

esso ammette uno e un solo moto  $\mathbf{q}(t; \mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0)$ .

*Dimostrazione.* Segue dal fatto che il problema di Cauchy associato alle equazioni di Lagrange ammette localmente una e una sola soluzione.  $\square$

**N.B.** Se i vincoli sono indipendenti dal tempo  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  e  $c = 0$ , quindi i termini  $\Gamma_i$  (14.5.7) si riducono a

$$(14.5.10) \quad \Gamma_i = \sum_{j=1}^l \dot{a}_{ij} \dot{q}_j - \frac{\partial K_2}{\partial q_i} = \sum_{j,k=1}^l \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^l \left( \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k.$$

## 14.6 Integrali primi per i sistemi olonomi

Abbiamo già visto nel Teorema 13.6.2 l'utilità degli integrali primi di moto. In questa sezione, daremo delle condizioni sufficienti sotto le quali si conservano, durante il moto, alcune grandezze scalari che dipendono dalle coordinate libere e dalle velocità lagrangiane.

**Proposizione 14.6.1.** *In un sistema olonomo con vincoli non dissipativi e bilateri, un momento cinetico  $p_k$  è un integrale primo di moto se e solo se*

$$(14.6.1) \quad \frac{\partial K}{\partial q_k} + Q_k^{(att)} = 0$$

*Dimostrazione.* Segue immediatamente dalle equazioni di Lagrange scritte nella forma (14.5.2)  $\square$

**Corollario 14.6.1.** *In un sistema olonomo con vincoli non dissipativi e bilateri e sollecitazione conservativa, se la Lagrangiana è indipendente da una coordinata libera  $q_k$  (si dice che la coordinata  $q_k$  è ignorabile) il momento coniugato  $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$  è un integrale primo di moto.*

*Dimostrazione.* Basta osservare che

$$(14.6.2) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \frac{\partial K}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial K}{\partial q_k} + Q_k^{(att)}$$

$\square$

Inoltre, se i vincoli sono anche fissi e la sollecitazione è conservativa, si conserva anche l'energia meccanica, cioè la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale

$$(14.6.3) \quad E = K + V.$$

**Teorema 14.6.1.** *In un sistema olonomo con*

1. *vincoli fissi;*

2. vincoli non dissipativi e bilateri;

3. sollecitazione conservativa;

l'energia meccanica è un integrale primo di moto, cioè si mantiene uguale al valore iniziale durante ciascun moto del sistema.

$$(14.6.4) \quad E(t) = K(t) + V(t) = E|_{t=0}$$

*Dimostrazione.* Già sappiamo dal teorema dell'energia cinetica, che durante il moto di un qualsiasi sistema meccanico vale

$$\frac{dK}{dt} = \Pi$$

dove  $\Pi$  è la potenza di tutte le sollecitazioni agenti sul sistema. Dimostriamo, che sotto le ipotesi suddette, la potenza complessiva (cambiata di segno) uguaglia la derivata rispetto al tempo dell'energia potenziale del sistema. A tale scopo, ricordiamo che per un qualsiasi sistema olonomo vale la (14.4.6), che, per l'ipotesi 1. si riduce a

$$\vec{v}_B \equiv \vec{v}_B^{(vir)} = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Dunque, in questo caso, la potenza complessiva si riduce a quella virtuale

$$\Pi \equiv \pi^{(vir)} = \sum_{B \in \mathcal{B}} \vec{F}_B \cdot \vec{v}_B^{(vir)}.$$

Ciò, insieme con l'ipotesi 2, implica che la potenza della sollecitazione reattiva è nulla per la definizione di vincoli non dissipativi (5.10.1) e bilateri.

$$\pi^{(reatt)} \equiv \pi^{(reatt, vir)} = \sum_{B \in \mathcal{B}} \vec{\phi}_B^{(reatt)} \cdot \vec{v}_B^{(vir)} = 0$$

Rimane, quindi, solo la potenza della sollecitazione attiva, pari a

$$\pi^{(att)} \equiv \pi^{(att, vir)} = \sum_{B \in \mathcal{B}} \vec{F}_B^{(att)} \cdot \vec{v}_B^{(vir)} = \sum_{B \in \mathcal{B}} \vec{F}_B^{(att)} \cdot \left( \sum_{i=1}^l \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^l \left( \sum_{B \in \mathcal{B}} \vec{F}_B^{(att)} \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^l Q_i^{(att)} \dot{q}_i$$

Dall'ipotesi 3, segue che le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva derivano da un funzione energia potenziale, quindi

$$\pi^{(att)} = \sum_{i=1}^l \frac{\partial}{\partial q_i} (-V(\vec{q})) \dot{q}_i = \frac{d}{dt} (-V(\mathbf{q}))$$

Dunque,

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} (-V(\mathbf{q})),$$

da cui segue la tesi. □

## 14.7 Macchine semplici

È il nome assegnato storicamente ai sistemi olonomi con un solo grado di libertà e quindi con un'unica coordinata libera che denoteremo con  $q$  e una forza generalizzata che indicheremo con  $Q$ . Per le macchine semplici vale

**Proposizione 14.7.1.** *Nelle macchine semplici con vincoli fissi, non dissipativi e bilateri, soggette a sollecitazione di tipo posizionale, l'energia meccanica è un integrale primo di moto.*

*Dimostrazione.* Sappiamo, dall'Es. 6.2.2 che la sollecitazione attiva è localmente conservativa, cioè ammette una funzione energia potenziale data da

$$V(q) = - \int Q(q') \delta q' .$$

Quindi, tutte le ipotesi del Teo 14.6.1 sono soddisfatte, da cui segue la tesi.  $\square$

L'esistenza di un integrale primo di moto per le macchine semplici della precedente proposizione, permette di calcolare le reazioni vincolari come funzione della sola coordinata libera e non più del tempo come nell'esempio (14.3.1). Illustriamo qui la procedura.

In conseguenza della Prop. 14.4.2, l'energia cinetica si riduce a

$$K \equiv K_2 = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 , \quad a(q) = \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q} \cdot \frac{\partial \vec{x}_B}{\partial q} .$$

Dunque, la Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - V(q) ,$$

l'equazione di Lagrange da

$$(14.7.1) \quad a(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} a'(q) \dot{q}^2 + V'(q) = 0$$

e l'energia meccanica da

$$(14.7.2) \quad E = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 + V(q) = E|_{t=0} = E_0 .$$

Le reazioni vincolari sui punti  $B$  del modello, si calcolano mediante le ECD e quindi saranno funzioni del tipo

$$(14.7.3) \quad \vec{\phi}_B = \vec{\phi}_B(q, \dot{q}, \ddot{q}) ,$$

come nell'esempio 14.3.1. Tuttavia, grazie all'integrale dell'energia (14.7.2) possiamo esprimere la  $\dot{q}$  come funzione di  $q$

$$(14.7.4) \quad \dot{q}^2 = \frac{2}{a(q)} (E_0 - V(q)) = f^2(q) .$$

L'equazione (14.7.4) è detta equazione di Weierstrass e permette di trovare i moti della macchina semplice per quadrature, cioè integrando le due eq. differenziali del I ordine

$$(14.7.5) \quad \dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2}{a(q)}(E_0 - V(q))}$$

per separazione di variabili ottenendo

$$(14.7.6) \quad t - t_0 = \pm \int_{q(t_0)}^{q(t)} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{a(q)}(E_0 - V(q))}}$$

e invertendo le soluzioni.

Inoltre, sostituendo la  $\dot{q}^2$  nella (14.7.1) e risolvendo rispetto a  $\ddot{q}$  si ottiene

$$(14.7.7) \quad \ddot{q} = \frac{1}{a(q)} \left( -V'(q) - \frac{1}{2}a'(q)f^2(q) \right) = g(q)$$

Pertanto, sostituendo la (14.7.4) e la (14.7.7) nella (14.7.3) si può ricavare

$$\vec{\phi}_B = \vec{\phi}_B(q, f(q), g(q)),$$

cioè la reazione vincolare dinamica in funzione di una generica configurazione del sistema.