

Capitolo 15

Linearizzazione delle equazioni di Lagrange

Le equazioni di Lagrange per un modello olonomo sono, genericamente, equazioni differenziali *non lineari*. Pertanto, al contrario di quello che succede per i sistemi di equazioni differenziali lineari, non esiste un metodo generale per risolverle. Allora, si ricorre a metodi approssimati che diano informazioni qualitative sulle soluzioni esatte. Uno di questi metodi è la *linearizzazione*, che consiste nel sostituire le eq. di Lagrange non lineari con una loro approssimazione lineare. In tutto il capitolo, studieremo modelli meccanici olonomi, con vincoli non dissipativi e bilateri, in modo che ammettano le eq. di Lagrange. Inoltre, aggiungeremo l'ipotesi che i vincoli e la sollecitazione attiva siano *indipendenti* dal tempo.

15.1 Modelli con un grado di libertà

Prima, illustriamo il metodo nel caso più semplice di un modello con 1 grado di libertà, cioè di una macchina semplice. Denotiamo con q l'unica coordinata libera e con $Q(q, \dot{q})$ l'unica componente lagrangiana della sollecitazione attiva. Ricordando l'equazione (14.7.1), possiamo scrivere l'eq. di Lagrange come

$$(15.1.1) \quad a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2 = Q(q, \dot{q}) ;$$

sottolineiamo che i coefficienti $a(q)$ e $a'(q)$ non dipendono esplicitamente dal tempo grazie all'ipotesi di vincoli fissi. Ora, consideriamo una soluzione *stazionaria* della (15.1.1)

$$(15.1.2) \quad 0 = Q(q_e, 0) ,$$

cioè una configurazione di equilibrio q_e e indichiamo con

- ε , un parametro reale "piccolo";
- $x(t)$, lo scarto o deviazione dalla soluzione stazionaria;
- $q(t) := q_e + \varepsilon x(t)$, una funzione perturbata della soluzione stazionaria;

- $\dot{q}(t) = \varepsilon \dot{x}(t)$, la sua derivata prima rispetto al tempo;
- $\ddot{q}(t) = \varepsilon \ddot{x}(t)$, la sua derivata seconda rispetto al tempo.

Richiedendo che la funzione $q(t) := q_e + \varepsilon x(t)$ sia una soluzione (esatta) della (15.1.1), possiamo scrivere

$$(15.1.3) \quad a(q_e + \varepsilon x)\varepsilon \ddot{x} + \frac{1}{2}a'(q_e + \varepsilon x)\varepsilon^2 \dot{x}^2 = Q(q_e + \varepsilon x, \varepsilon \dot{x})$$

Poichè la (15.1.3) può essere non lineare, consideriamo la sua approssimazione lineare nel parametro ε . A tale scopo, sviluppiamo tutti i suoi termini in serie di Taylor rispetto ad ε , nell'intorno di $\varepsilon = 0$

$$(15.1.4) \quad a(q_e + \varepsilon x)\varepsilon \ddot{x} = \left(a(q_e) + a'(q_e)x\varepsilon + o(\varepsilon) \right) \varepsilon \ddot{x}$$

$$(15.1.5) \quad a'(q_e + \varepsilon x)\varepsilon^2 \dot{x}^2 = \left(a'(q_e) + O(\varepsilon) \right) \varepsilon^2 \dot{x}^2$$

$$(15.1.6) \quad Q(q_e + \varepsilon x, \varepsilon \dot{x}) \stackrel{(15.1.2)}{=} \cancel{Q(q_e, 0)} + \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \Big|_{\varepsilon=0} x + \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}} \Big|_{\varepsilon=0} \dot{x} \right) \varepsilon + o(\varepsilon),$$

dove con $o(\cdot)$ (rispettivamente $O(\cdot)$) di Landau abbiamo indicato il resto dello sviluppo di grado superiore (rispettivamente uguale) a quello dell'argomento. Limitandoci a prendere i termini di primo grado in ε , otteniamo la seguente equazione differenziale nello scarto $x(t)$, lineare, omogenea ed a coefficienti *costanti*,

$$(15.1.7) \quad a(q_e)\ddot{x} = \frac{\partial Q}{\partial q} \Big|_{(q_e, 0)} x + \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}} \Big|_{(q_e, 0)} \dot{x},$$

dove abbiamo tenuto conto che $\varepsilon = 0 \Rightarrow (q = q_e, \dot{q} = 0)$.

Sollecitazione conservativa

In particolare, se la sollecitazione attiva è posizionale, essa è conservativa poiché la macchina è semplice, quindi ammette energia potenziale $V(q)$, quindi

$$(15.1.8) \quad \frac{\partial Q}{\partial q} \Big|_{(q_e, 0)} = \frac{\partial}{\partial q} \Big|_{q_e} (-V'(q)) = -V''(q_e)$$

$$(15.1.9) \quad \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}} \Big|_{(q_e, 0)} = 0$$

Pertanto, la (15.1.7) si riduce a

$$(15.1.10) \quad a(q_e)\ddot{x} + V''(q_e)x = 0$$

Tenuto conto che $a(q) > 0$, tale equazione ammette l'integrale generale seguente

$$(15.1.11) \quad \text{se } V''(q_e) > 0 \quad x(t) = x_0 \cos \nu t + \frac{x_0}{\nu} \sin \nu t \quad \text{moto oscillatorio}$$

$$(15.1.12) \quad \text{se } V''(q_e) = 0 \quad x(t) = x_0 + v_0 t \quad \text{moto uniforme}$$

$$(15.1.13) \quad \text{se } V''(q_e) < 0 \quad x(t) = x_0 \cosh \nu t + \frac{x_0}{\nu} \sinh \nu t \quad \text{moto iperbolico},$$

dove $\nu := \sqrt{\frac{|V''(q_e)|}{a(q_e)}}$, e $x_0 := x(t_0)$, $v_0 = \dot{x}(t_0)$. Nel caso oscillatorio, cioè quando $V''(q_e) > 0$, ν si dice frequenza angolare o pulsazione delle piccole oscillazioni. È facile verificare che l'equazione linearizzata (15.1.10) si può interpretare nella maniera seguente

Proposizione 15.1.1. *In un modello olonomo con 1 grado di libertà, vincoli non dissipativi, bilateri, indipendenti dal tempo e sollecitazione posizionale, l'equazione di Lagrange linearizzata deriva dalla Lagrangiana approssimata ai termini quadratici*

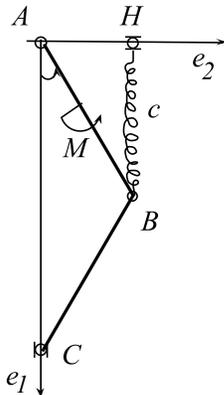
$$(15.1.14) \quad \tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}a(q_e)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}V''(q_e)x^2 .$$

Dimostrazione. Basta scrivere l'eq. di Lagrange per la (15.1.14) e confrontarla con la (15.1.10) \square

Esempio 15.1.1. *Dal tema d'esame del 15/02/2011.*

Si consideri il sistema articolato di figura costituito dalle aste omogenee AB e BC , di lunghezza L e massa m , incernierate in B e vincolate in A e in C su un piano **verticale** (vincoli lisci e bilateri). Il sistema è soggetto al peso proprio delle aste, alla forza elastica della molla (mantenuta verticale dal carrello in H) e alla coppia uniforme di momento M applicata sulla manovella.

Linearizziamo l'equazione di Lagrange intorno alla configurazione di equilibrio $\theta_e = \pi/3$, che si ottiene se $M = \sqrt{3}L(mg - \frac{cL}{4})$.



Ricordiamo che l'energia cinetica e quella potenziale sono date da

$$K = mL^2\left(\frac{1}{3} + \sin^2 \theta\right)\dot{\theta}^2, \quad V = -M\theta + \frac{1}{2}cL^2 \cos^2 \theta - 2mgL \cos \theta .$$

Visto che la sollecitazione è conservativa, possiamo utilizzare la (14.7.1) per scrivere l'eq. di Lagrange che risulta

$$(15.1.15) \quad 2mL^2\left(\frac{1}{3} + \sin^2 \theta\right)\ddot{\theta} + mL^2 \sin(2\theta)\dot{\theta}^2 - M + 2mgL \sin \theta - \frac{1}{2}cL^2 \sin(2\theta) = 0$$

Linearizziamo tale equazione nell'intorno di $\theta_e = \pi/3$. Dato che la sollecitazione è conservativa, possiamo utilizzare la (15.1.10). Quindi, poichè

$$a(\theta) = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\theta}^2} = 2mL^2\left(\frac{1}{3} + \sin^2 \theta\right) \Rightarrow a\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{13}{6}mL^2$$

e

$$V''(\theta) = 2mgL \cos \theta - cL^2 \cos(2\theta) \Rightarrow V''\left(\frac{\pi}{3}\right) = L\left(mg + \frac{cL}{2}\right)$$

la linearizzazione della (15.1.15) è

$$(15.1.16) \quad \frac{13}{6}mL \ddot{x} + \left(mg + \frac{cL}{2}\right)x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{3}{13} \left(\frac{2g}{L} + \frac{c}{m}\right)x = 0$$

Il moto dello scarto è oscillatorio

$$x(t) = x_0 \cos \nu t + \frac{v_0}{\nu} \sin \nu t$$

con frequenza data da

$$\nu = \sqrt{\frac{3}{13} \left(\frac{2g}{L} + \frac{c}{2m}\right)}.$$

Dunque, se $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = \omega_0$, le piccole oscillazioni intorno alla configurazione di equilibrio stabile $\theta_e = \frac{\pi}{3}$ sono

$$\theta(t) = \frac{\pi}{3} + \left((\theta_0 - \frac{\pi}{3}) \cos(\nu t) + \frac{\omega_0}{\nu} \sin(\nu t)\right)$$

Ora, supponiamo che alla sollecitazione conservativa si aggiunga una sollecitazione dipendente dalla velocità, per esempio una resistenza viscosa

$$\vec{F}_C = -\mu \vec{v}_C \quad \mu \in \mathbb{R}^+$$

che, ovviamente, non influisce sugli equilibri del modello. Per scrivere la nuova equazione di Lagrange (esatta) possiamo usare la forma mista (14.3.1). Pertanto, basta aggiungere al lato destro della (15.1.15) la componente lagrangiana della sollecitazione non conservativa

$$Q^{(nc)} = \vec{F}_C \cdot \frac{\partial \vec{x}_C}{\partial \theta} = -\mu(-2L \sin \theta \dot{\theta} \vec{e}_1) \cdot (-2L \sin \theta \vec{e}_1) = -4\mu L^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}$$

Dunque, l'eq. di Lagrange diventa

$$(15.1.17) \quad 2mL^2 \left(\frac{1}{3} + \sin^2 \theta\right) \ddot{\theta} + mL^2 \sin(2\theta) \dot{\theta}^2 = M - 2mgL \sin \theta + \frac{1}{2}cL^2 \sin(2\theta) - 4\mu L^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}$$

Per linearizzare tale equazione intorno alla configurazione di equilibrio $\theta_e = \frac{\pi}{3}$ dobbiamo ricorrere alla (15.1.7) e quindi aggiungere al lato destro della (15.1.16) il termine

$$\begin{aligned} (Q^{(nc)})^{(lin)}\left(\frac{\pi}{3} + \varepsilon x, \varepsilon \dot{x}\right) &= Q^{(nc)}\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) + \frac{\partial Q^{(nc)}}{\partial \theta}\Big|_{(\frac{\pi}{3}, 0)} \varepsilon x + \frac{\partial Q^{(nc)}}{\partial \dot{\theta}}\Big|_{(\frac{\pi}{3}, 0)} \varepsilon \dot{x} = \\ &= 0 - \left((8L^2 \mu \sin \theta \cos \theta \dot{\theta})\Big|_{(\frac{\pi}{3}, 0)} x + (4\mu L^2 \sin^2 \theta)\Big|_{(\frac{\pi}{3}, 0)} \dot{x} \right) \varepsilon = \\ &= -3\mu L^2 \varepsilon \dot{x}. \end{aligned}$$

Pertanto, la linearizzazione della (15.1.17) è l'equazione di un oscillatore smorzato

$$(15.1.18) \quad \ddot{x} + \frac{18\mu}{13m} \dot{x} + \frac{3}{13} \left(\frac{2g}{L} + \frac{c}{m}\right)x = 0.$$

Posto $h := \frac{9\mu}{13m}$ e $k^2 := \frac{3}{13} \left(\frac{2g}{L} + \frac{c}{m}\right)$, l'integrale generale è:

- se $h < k$, smorzamento debole, $x(t) = e^{-ht}(x_0 \cos \nu t + \frac{v_0 + hx_0}{\nu} \sin \nu t)$, dove $\nu := \sqrt{k^2 - h^2}$;
- se $h = k$, smorzamento critico, $x(t) = e^{-ht}(x_0 + (v_0 + hx_0)t)$;
- se $h > k$, smorzamento forte, $x(t) = \frac{v_0 + \gamma_2 x_0}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_1 t} - \frac{v_0 + \gamma_1 x_0}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_2 t}$, dove $\gamma_1 := h - \sqrt{h^2 - k^2}$, $\gamma_2 := h + \sqrt{h^2 - k^2}$.

15.2 Modelli con l gradi di libertà

La procedura di linearizzazione è analoga a quella della sezione precedente. Introduciamo le seguenti definizioni.

- ε , un parametro reale "piccolo";
- $\mathbf{x}(t)$, il vettore (a l componenti) degli scarti dalla soluzione stazionaria;
- $\mathbf{q}(t) := \mathbf{q}_e + \varepsilon \mathbf{x}(t)$, una funzione vettoriale (a l componenti) perturbata della soluzione stazionaria;
- $\dot{\mathbf{q}}(t) = \varepsilon \dot{\mathbf{x}}(t)$, il suo derivato primo rispetto al tempo;
- $\ddot{\mathbf{q}}(t) = \varepsilon \ddot{\mathbf{x}}(t)$, il suo derivato secondo rispetto al tempo.

Proposizione 15.2.1. *Consideriamo un modello oloonomo a vincoli non dissipativi, bilateri, fissi e sollecitazione indipendente dal tempo. Le equazioni di Lagrange linearizzate intorno a una configurazione di equilibrio sono date da*

$$(15.2.1) \quad A\ddot{\mathbf{x}} + B\dot{\mathbf{x}} + C\mathbf{x} = 0$$

dove

$$A_{jk} = a_{jk}(\mathbf{q}_e) \quad B_{jk} = -\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_k} \Big|_{(\mathbf{q}_e, \mathbf{0})} \quad C_{jk} = -\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \Big|_{(\mathbf{q}_e, \mathbf{0})} .$$

La matrice A ha elementi costanti ed è detta matrice di massa.

Dimostrazione. Per un modello con le ipotesi suddette, le EL (14.5.6) si scrivono

$$(15.2.2) \quad \sum_{j=1}^l a_{ij} \ddot{q}_j + \Gamma_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = Q_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) ,$$

dove, i termini Γ_i sono dati dalla (14.5.10). Sostituendo il vettore perturbato $\mathbf{q}_e + \varepsilon \mathbf{x}(t)$ in (15.2.2), il sistema delle eq. di Lagrange, in forma matriciale, si scrive

$$(15.2.3) \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}_e + \varepsilon \mathbf{x}) \varepsilon \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{q}_e + \varepsilon \mathbf{x}, \varepsilon \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}_e + \varepsilon \mathbf{x}, \varepsilon \dot{\mathbf{x}}) .$$

Se sviluppiamo i suoi termini in serie di Taylor intorno ad $\varepsilon = 0$ e ci limitiamo a prendere i termini dominanti, cioè quelli lineari in ε , otteniamo

$$(15.2.4) \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}_e) \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^{(lin)} ,$$

dove il simbolo $\mathbf{Q}^{(lin)}$ denota il vettore linearizzato delle forze generalizzate dato da

$$\mathbf{Q}^{(lin)} = \sum_{k=1}^l \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial q_k} \Big|_{(\mathbf{q}_e, \mathbf{0})} x_k + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{q}_k} \Big|_{(\mathbf{q}_e, \mathbf{0})} \dot{x}_k \right) .$$

Infatti, la (14.5.10) implica che i termini di grado minimo in ε , contenuti in $\Gamma(\mathbf{q}_e + \varepsilon \mathbf{x}, \varepsilon \dot{\mathbf{x}})$, sono almeno quadratici, quindi sono tutti trascurabili. \square

Modelli conservativi con l gradi di libertà

In particolare, se il modello meccanico è conservativo, cioè ammette energia potenziale $V(\mathbf{q})$, segue che

$$(15.2.5) \quad C_{jk} = -\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \Big|_{(\mathbf{q}_e, \mathbf{0})} = -\frac{\partial}{\partial q_k} \Big|_{\mathbf{q}_e} \left(-\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right) = \mathcal{H}_V(\mathbf{q}_e)$$

$$(15.2.6) \quad B_{jk} = -\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_k} = 0 ,$$

dove con $\mathcal{H}_V(\mathbf{q}_e)$ abbiamo denotato la matrice Hessiana dell'energia potenziale valutata nella configurazione di equilibrio \mathbf{q}_e . Pertanto, la (15.2.4) si riduce a

$$(15.2.7) \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}_e) \ddot{\mathbf{x}} + \mathcal{H}_V(\mathbf{q}_e) \mathbf{x} = \mathbf{0} .$$

La matrice $\mathcal{H}_V(\mathbf{q}_e)$ ha elementi costanti ed è detta matrice di *rigidezza*. Anche tale sistema linearizzato si può interpretare come proveniente da una Lagrangiana approssimata ai termini quadratici. Infatti sussiste la seguente

Proposizione 15.2.2. *In un modello olonomo con l gradi di libertà, vincoli non dissipativi, bilateri, indipendenti dal tempo e sollecitazione conservativa, le equazioni di Lagrange linearizzate derivano dalla Lagrangiana*

$$(15.2.8) \quad \tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}_e) \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathcal{H}_V(\mathbf{q}_e) \mathbf{x} .$$

N.B. Il metodo di linearizzazione che abbiamo applicato alle equazioni di Lagrange si può estendere a un qualunque sistema di equazioni differenziali, linearizzando intorno a soluzioni eventualmente non stazionarie.

Qui sotto, linearizzeremo le equazioni di Eulero-Poinsot, che sono del primo ordine, intorno ad una soluzione stazionaria, cioè a un moto di rotazione permanente.

Esempio 15.2.1. Equazioni di Eulero-Poinsot

$$(15.2.9) \quad \begin{cases} \dot{p} = \frac{B-C}{A} qr \\ \dot{q} = \frac{C-A}{B} rp \\ \dot{r} = \frac{A-B}{C} pq \end{cases}$$

Consideriamo la rotazione permanente intorno a un asse principale d'inerzia che chiameremo $(O; \vec{k})$. Tale soluzione è una soluzione stazionaria delle (15.2.9)

$$p_e = 0 , \quad q_e = 0 , \quad r_e = r_0 .$$

Quindi, le soluzioni perturbate si scrivono

$$p(t) = \varepsilon x_1(t), \quad q(t) = \varepsilon x_2(t), \quad r(t) = r_0 + \varepsilon x_3(t) \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

e, sostituite nel sistema (15.2.9), forniscono

$$(15.2.10) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x}_1 = \frac{\mathcal{B}-\mathcal{C}}{\mathcal{A}} \varepsilon x_2 (r_0 + \varepsilon x_3) \\ \varepsilon \dot{x}_2 = \frac{\mathcal{C}-\mathcal{A}}{\mathcal{B}} (r_0 + \varepsilon x_3) \varepsilon x_1 \\ \varepsilon \dot{x}_3 = \frac{\mathcal{A}-\mathcal{B}}{\mathcal{C}} \varepsilon x_1 \varepsilon x_2 \end{cases}$$

Trascurando i termini di grado 2 in ε , il sistema si riduce ad uno lineare

$$(15.2.11) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\mathcal{B}-\mathcal{C}}{\mathcal{A}} r_0 x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{\mathcal{C}-\mathcal{A}}{\mathcal{B}} r_0 x_1 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases} .$$

La terza equazione ha come soluzioni quelle stazionarie

$$x_3(t) = x_{30}$$

mentre, per risolvere le prime due equazioni, si può, come nel caso degli effetti giroscopici, considerare il sistema del secondo ordine

$$(15.2.12) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\mathcal{B}-\mathcal{C}}{\mathcal{A}} r_0 x_2 \\ \ddot{x}_1 + \frac{\mathcal{C}-\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \frac{\mathcal{C}-\mathcal{A}}{\mathcal{B}} r_0^2 x_1 = 0 \end{cases} .$$

che conduce alla seguente classificazione in base al coefficiente della seconda equazione.

- Se \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} sono tutti differenti (ellissoide d'inerzia triassiale), possiamo distinguere 2 casi:
 - i) se $\mathcal{C} = \max\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$ oppure $\mathcal{C} = \min\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$, allora $(\mathcal{C} - \mathcal{B})(\mathcal{C} - \mathcal{A}) > 0$, dunque il moto di x_1 è armonico, con pulsazione $\nu = \sqrt{\frac{(\mathcal{C}-\mathcal{B})(\mathcal{C}-\mathcal{A})}{\mathcal{A}\mathcal{B}}} r_0^2$. Per la prima equazione, anche il moto di x_2 è armonico, con la stessa pulsazione di x_1 ;
 - ii) altrimenti $(\mathcal{C} - \mathcal{B})(\mathcal{C} - \mathcal{A}) < 0$, quindi i moti di x_1 e di x_2 sono iperbolici (esponenziali reali).
- Invece, se due momenti d'inerzia coincidono e il terzo è diverso (ellissoide d'inerzia rotondo) abbiamo di nuovo 2 casi:
 - iii) se $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $(O; \vec{k})$ è l'asse giroscopico e il moto di x_1 e di x_2 è armonico con pulsazione $\nu = |r_0(1 - \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}})|$;
 - iv) se $\mathcal{A} = \mathcal{C}$ (rs. $\mathcal{B} = \mathcal{C}$), $(O; \vec{k})$ non è l'asse giroscopico, il moto di x_1 (rs. x_2) è uniforme e x_2 (rs. x_1) è stazionario.
 - v) Infine, se i tre momenti d'inerzia coincidono (ellissoide d'inerzia sferico), entrambi i moti di x_1 e x_2 sono stazionari. In tal caso, comunque, il sistema originale (15.2.9) è già lineare.

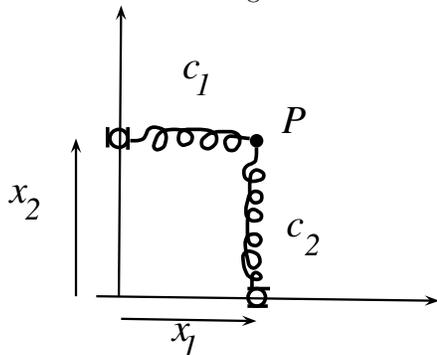
Dunque, nei casi i), iii) e v) si dice che la rotazione permanente è *stabile linearmente*, mentre nel ii) e iv) che è *instabile linearmente*.

15.3 Sistemi di eq. di Lagrange lineari

Veniamo ora alla procedura di soluzione dei sistemi di equazioni differenziali del tipo (15.2.7). Ricordiamo che essi possono provenire, non solo dalla linearizzazione di un modello *conservativo* con l gradi di libertà intorno a una configurazione di equilibrio, ma possono anche essere le eq. di Lagrange di modelli *lineari* conservativi come il seguente

Esempio 15.3.1.

Consideriamo un punto materiale (P, m) vincolato a stare in un piano orizzontale e soggetto all'azione delle molle di figura.



È un modello con 2 gradi di libertà, detto oscillatore *anisotropo*. Scegliamo come coordinate libere le coordinate cartesiane (x_1, x_2) . L'energia potenziale del modello è

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}c_1x_1^2 + \frac{1}{2}c_2x_2^2,$$

quindi, le 2 eq. di Lagrange sono date da

$$(15.3.1) \quad \begin{cases} m\ddot{x}_1 + c_1x_1 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + c_2x_2 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema è costituito da due eq. differenziali del tipo (15.1.10) che coinvolgono, ciascuna, una sola coordinata libera, o, come si suol dire, sono *disaccoppiate*. L'integrale generale è dato da un moto oscillatorio in entrambe le coordinate (x_1, x_2)

$$(15.3.2) \quad \begin{aligned} x_1(t) &= x_{01} \cos \nu_1 t + \frac{v_{01}}{\nu_1} \sin \nu_1 t, & \nu_1 &= \sqrt{\frac{c_1}{m}}, \\ x_2(t) &= x_{02} \cos \nu_2 t + \frac{v_{02}}{\nu_2} \sin \nu_2 t, & \nu_2 &= \sqrt{\frac{c_2}{m}}, \end{aligned}$$

dove

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{bmatrix} v_{01} \\ v_{02} \end{bmatrix},$$

sono le condizioni iniziali. Ogni singola componente di $\vec{x}(t)$ è periodica con periodo, rispettivamente, pari a

$$T_1 = \frac{2\pi}{\nu_1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\nu_2}.$$

Ci chiediamo se il moto complessivo è anch'esso periodico e qual è l'eventuale periodo. A tale proposito, ricordiamo che

Definizione 15.3.1. Un moto $\vec{x}(t)$, definito in \mathbb{R} , si dice *periodico*, di periodo $T \in \mathbb{R}^+$, se vale

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t + T) \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

È facile dimostrare che se T è un periodo per $\vec{x}(t)$, ogni multiplo *intero* nT è anch'esso un periodo. Il minimo fra tutti i periodi, si dice *periodo fondamentale* o semplicemente *il periodo*.

Proposizione 15.3.1. Un moto $\vec{x}(t)$ con 2 gradi di libertà e 2 componenti periodiche, rispettivamente di periodo T_1 e T_2 , è *periodico* se e solo se vale

$$(15.3.3) \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q} \quad p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

In tal caso, T_1 e T_2 si dicono *razionalmente dipendenti*. Se, invece, la condizione (15.3.3) non è soddisfatta, il moto $\vec{x}(t)$ si dice *quasi-periodico*.

Dimostrazione. Se vale la (15.3.3), l'intervallo $T = qT_1 = pT_2$ è un periodo comune alle 2 componenti e, quindi, il periodo del moto complessivo. Il viceversa è ovvio. \square

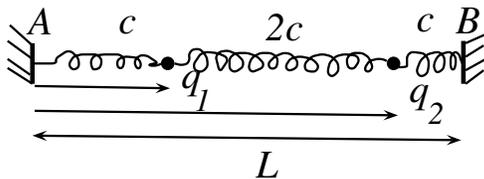
Dunque, il moto (15.3.2) è periodico se e solo se il rapporto tra i periodi

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1}},$$

è un numero razionale.

È evidente che la possibilità di risolvere immediatamente le eq. (15.3.1) dipende dal fatto che sono disaccoppiate. Ma più spesso le eq. di Lagrange di un modello lineare con più gradi di libertà si presentano accoppiate, come vedremo nel seguente

Esempio 15.3.2.



Si considerino due particelle di massa m vincolate a muoversi soltanto lungo il segmento AB e soggette alla sollecitazione delle tre molle di figura. Poiché le particelle sono vincolate a muoversi lungo l'asse AB , il modello ha 2 gradi di libertà. Come coordinate libere possiamo scegliere le ascisse q_1 e q_2 delle due particelle. La sollecitazione delle due molle esterne (che hanno un estremo fisso) e di quella interna, è conservativa. La energia potenziale di tale modello, il più semplice che simuli il comportamento di una *molecola biatomica*, è

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}cq_1^2 + \frac{1}{2}c(L - q_2)^2 + \frac{1}{2}(2c)(q_1 - q_2)^2 = \frac{3}{2}cq_1^2 + \frac{3}{2}cq_2^2 - 2cq_1q_2 - cLq_2 + \frac{1}{2}cL^2$$

Le eq. di Lagrange sono

$$(15.3.4) \quad \begin{cases} m\ddot{q}_1 + 3cq_1 - 2cq_2 = 0 \\ m\ddot{q}_2 + 3cq_2 - 2cq_1 = cL \end{cases},$$

che si possono scrivere nella forma matriciale

$$(15.3.5) \quad A\ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{V}\mathbf{q} = \mathcal{F}$$

dove $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$, le matrici A , \mathcal{V} e il vettore dei termini noti \mathcal{F} sono dati da

$$A = m \mathbb{1}_2, \quad \mathcal{V} = c \left[\begin{array}{c|c} 3 & -2 \\ \hline -2 & 3 \end{array} \right], \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ cL \end{bmatrix}$$

Si osservi che il sistema (15.3.5), a differenza di (15.2.7), è non omogeneo a causa della presenza di \mathcal{F} . Comunque, con una traslazione delle coordinate, si può sempre ridurlo a un sistema omogeneo. Basta considerare come nuove coordinate le deviazioni (o scarti) dalla configurazione di equilibrio

$$(15.3.6) \quad \mathbf{x}(t) := \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_e$$

Infatti, le configurazioni di equilibrio sono soluzioni stazionarie ($\dot{\mathbf{q}}(t) = 0$, $\ddot{\mathbf{q}}(t) = 0$) dell'equazione di Lagrange, quindi soddisfano l'equazione algebrica

$$(15.3.7) \quad \mathcal{V}\mathbf{q}_e = \mathcal{F}.$$

Allora, se la (15.3.7) ammette soluzioni, si può verificare, sostituendo la (15.3.6) nel sistema (15.3.5) e tenendo conto della (15.3.7), che tale sistema si riduce a

$$(15.3.8) \quad A\ddot{\mathbf{x}} + \mathcal{V}\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

In questo esempio, la matrice \mathcal{V} è invertibile, quindi esiste un'unica configurazione di equilibrio

$$(15.3.9) \quad \mathbf{q}_e = \mathcal{V}^{-1}\mathcal{F} = \frac{L}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{quindi} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} q_1 - \frac{2}{5}L \\ q_2 - \frac{3}{5}L \end{bmatrix}.$$

Invece, nell'Esempio 15.3.1, le equazioni di moto (15.3.1) sono già omogenee nelle coordinate lagrangiane originali e le matrici A e \mathcal{V} sono date da

$$(15.3.10) \quad A = m \mathbb{1}_2, \quad \mathcal{V} = \text{diag}(c_1, c_2),$$

cioè sono entrambi *diagonali* e, inoltre, A è un *multiplo* della matrice $\mathbb{1}_2$. Nella prossima sezione presenteremo un metodo generale per la soluzione dei sistemi lineari del tipo (15.2.7), che si basa sulla scelta di opportune coordinate, dette coordinate *normali*, in cui le matrici A e \mathcal{V} si diagonalizzano, proprio come nella (15.3.10).

15.3.1 Modelli lineari con 1 gradi di libertà

Consideriamo un modello meccanico con vincoli olonomi, non dissipativi, bilateri e fissi, sollecitazione conservativa e Lagrangiana quadratica data da

$$(15.3.11) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}})^T A \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}(\mathbf{x})^T \mathcal{V} \mathbf{x}.$$

con

1. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, funzione regolare del tempo a valori in \mathbb{R}^l ;

2. $A \in \text{Mat}(l \times l, \mathbb{R})$, matrice simmetrica e definita positiva, detta matrice di *massa*;
3. $\mathcal{V} \in \text{Mat}(l \times l, \mathbb{R})$, matrice simmetrica, detta matrice di *rigidezza*.

Con un ragionamento analogo a quello della Prop. 15.2.2 è facile verificare che le corrispondenti eq. di Lagrange costituiscono un sistema di equazioni differenziali del II ordine, omogenee, del tipo

$$(15.3.12) \quad A\ddot{\mathbf{x}} + \mathcal{V}\mathbf{x} = \mathbf{0} ,$$

che ammettono sicuramente la soluzione stazionaria $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$. Poiché il sistema è lineare con coefficienti costanti, cerchiamo soluzioni del tipo

$$(15.3.13) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{u}e^{\lambda t} , \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

dove \mathbf{u} è un vettore indipendente dal tempo, da determinare insieme con il numero complesso λ . Sostituendo in (15.3.12) il vettore (15.3.13) e il suo derivato secondo rispetto al tempo, si ottiene

$$(\lambda^2 A + \mathcal{V})\mathbf{u}e^{\lambda t} = \mathbf{0} ,$$

equivalente all'equazione

$$(15.3.14) \quad (\mathcal{V} + \lambda^2 A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

che si può interpretare come un problema agli autovalori e autovettori generalizzato di \mathcal{V} rispetto ad A . Infatti, quando $A = \mathbf{1}_l$ la (15.3.14) si riduce alla usuale eq. agli autovettori per la matrice \mathcal{V} , con autovalori

$$(15.3.15) \quad \gamma = -\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\gamma} .$$

Dunque, riscrivendo la (15.3.14) come

$$(15.3.16) \quad (\mathcal{V} - \gamma A)\mathbf{u} = \mathbf{0} ,$$

possiamo affermare che essa ammette soluzioni non banali se e solo se γ è soluzione dell'eq. caratteristica generalizzata

$$(15.3.17) \quad \det(\mathcal{V} - \gamma A) = 0 .$$

Dimostreremo nella Sez. 15.4 che la (15.3.17) possiede l soluzioni *reali* (eventualmente coincidenti), cioè gli autovalori

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_l\} ,$$

che, inoltre, la (15.3.14) ammette l soluzioni *reali* linearmente indipendenti, cioè gli autovettori

$$\{\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(l)}\} ,$$

che, infine, la (15.3.12) ammette $2l$ soluzioni anch'esse reali, ottenute come combinazioni lineari delle soluzioni fondamentali

$$(15.3.18) \quad \mathbf{x}^{(k)}(t) = \mathbf{u}^{(k)} e^{\pm\sqrt{-\gamma_k} t} \quad k = 1, \dots, l .$$

In particolare, a seconda del valore degli autovalori γ_k si possono avere i seguenti casi:

1. se $\gamma_k > 0$, la soluzione reale corrispondente è un moto oscillatorio, detto *modo normale di vibrazione*, che si può scrivere come combinazione lineare di

$$(15.3.19) \quad \mathbf{u}^{(k)} e^{i\nu_k t}, \quad \mathbf{u}^{(k)} e^{-i\nu_k t}, \quad i^2 = -1,$$

dove $\nu_k = \sqrt{\gamma_k} \in \mathbb{R}^+$ è detta *frequenza* (o *pulsazione*) *normale* di vibrazione;

2. se $\gamma_k = 0$, la soluzione reale corrispondente è la sovrapposizione di un moto stazionario e uno lineare

$$(15.3.20) \quad \mathbf{u}^{(k)}, \quad \mathbf{u}^{(k)} t \quad ;$$

3. se $\gamma_k < 0$, la soluzione reale corrispondente è un moto iperbolico (esponenziale reale) che si può scrivere come sovrapposizione di

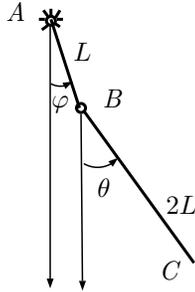
$$(15.3.21) \quad \mathbf{u}^{(k)} e^{\nu_k t}, \quad \mathbf{u}^{(k)} e^{-\nu_k t},$$

dove $\nu_k = \sqrt{-\gamma_k} \in \mathbb{R}^+$.

N.B. Se anche la matrice \mathcal{V} è definita positiva (come in tutti gli esempi di questo Capitolo), gli autovalori $\{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$ sono strettamente positivi, quindi le soluzioni fondamentali sono tutte del tipo (15.3.19), cioè sono modi normali di vibrazione. Si osservi che la positività di \mathcal{V} implica che $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ è una configurazione di equilibrio stabile.

Esempio 15.3.3.

Consideriamo il bi-pendolo omogeneo, contenuto a pag. 118 di [Ughi, Dispense di Fisica Matematica].



Le equazioni di Lagrange linearizzate intorno alla configurazione di equilibrio $\mathbf{q}_e = (0, 0)$, sono

$$(15.3.22) \quad \begin{cases} mL^2(\frac{7}{3}\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2) + \frac{5}{2}mgLx_1 = 0 \\ mL^2(2\ddot{x}_1 + \frac{8}{3}\ddot{x}_2) + 2mgLx_2 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{x}(t) = \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_e)$$

L'eq. caratteristica del sistema (15.3.22) è data da

$$(15.3.23) \quad \det \left(g \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \gamma L \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 2 \\ 2 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \right) = 0,$$

cioè

$$(15.3.24) \quad \gamma^2 - \frac{51}{10} \frac{g}{L} \gamma + \frac{45}{20} \frac{g^2}{L^2} = 0,$$

che ammette le due soluzioni positive

$$(15.3.25) \quad \gamma_1 = \frac{3}{20} \frac{g}{L} (17 - 3\sqrt{21}), \quad \gamma_2 = \frac{3}{20} \frac{g}{L} (17 + 3\sqrt{21}).$$

I corrispondenti valori di λ sono $\lambda_1 = \pm i\sqrt{\gamma_1}$, $\lambda_2 = \pm i\sqrt{\gamma_2}$. Gli autovettori corrispondenti sono tutte e sole le soluzioni del sistema

$$(15.3.26) \quad \begin{cases} (\frac{5}{2}g - \frac{7}{3}L\gamma_k)u_1 - 2L\gamma_k u_2 = 0 \\ -2L\gamma_k u_1 + (2g - \frac{8}{3}L\gamma_k)u_2 = 0 \end{cases} \quad k = 1, 2.$$

Tale sistema lineare e omogeneo ha, per ogni γ_k , ∞^1 soluzioni (un autospazio V_k di $\dim = 1$) poichè, per la (15.3.23) le due equazioni (15.3.26) sono linearmente *dependenti*. Quindi, risolvendo, ad esempio la prima di esse, otteniamo

$$u_2 = \left(\frac{5}{4} \frac{g}{L\gamma_k} - \frac{7}{6} \right) u_1.$$

Pertanto, sostituendo a γ i 2 valori (15.3.25) si ottengono gli autovettori

$$(15.3.27) \quad \mathbf{u}^{(1)} = \beta_1 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \frac{25}{3(17-3\sqrt{21})} - \frac{7}{6} \end{array} \right] \quad \beta_1 \in \mathbb{R},$$

$$(15.3.28) \quad \mathbf{u}^{(2)} = \beta_2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \frac{25}{3(17+3\sqrt{21})} - \frac{7}{6} \end{array} \right] \quad \beta_2 \in \mathbb{R}.$$

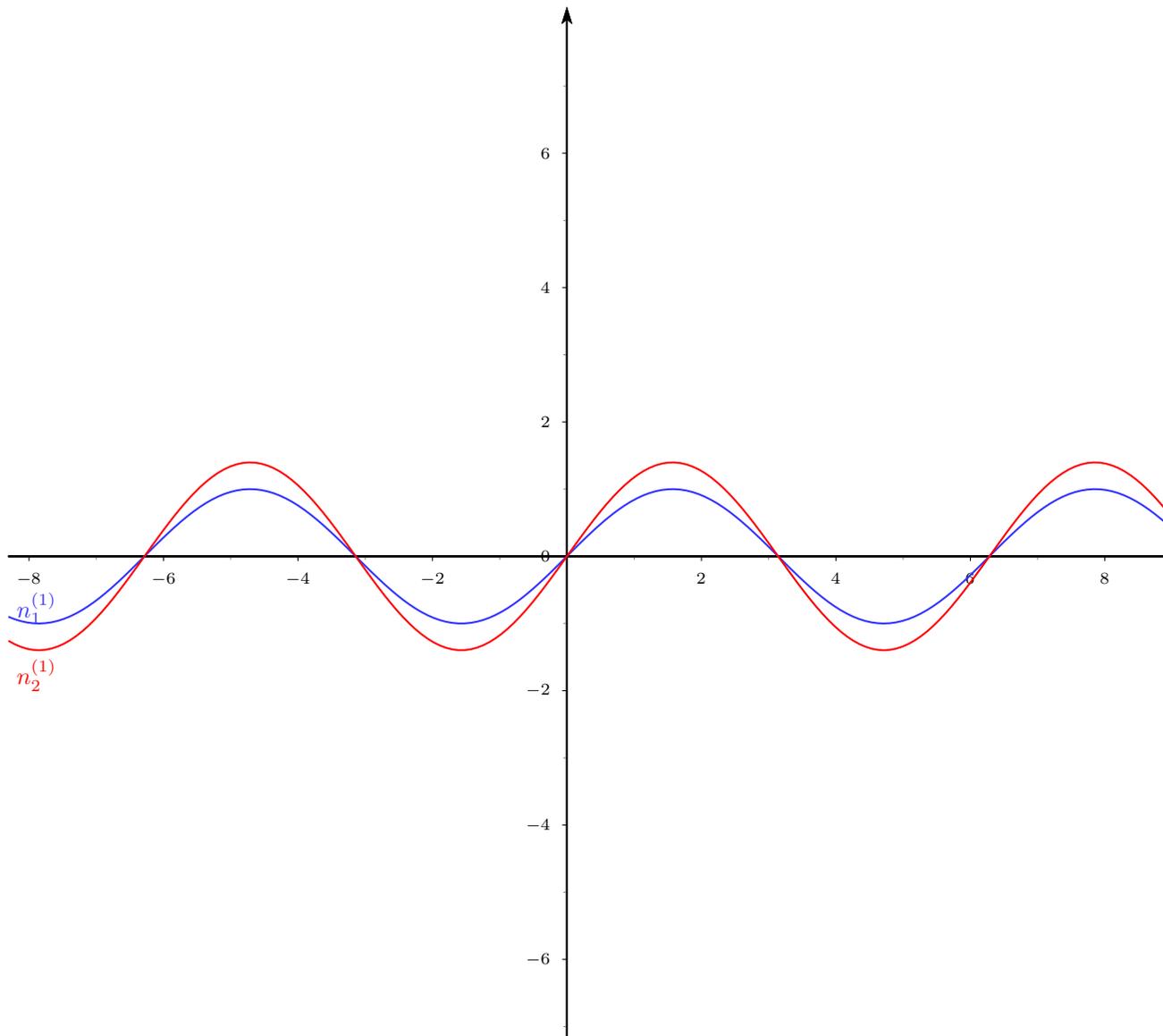
Dunque, le soluzioni fondamentali reali di (15.3.22), dette *modi normali* di vibrazione, sono

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{(1)}(t) &= \left[\begin{array}{c} 1 \\ \frac{25}{3(17-3\sqrt{21})} - \frac{7}{6} \end{array} \right] (a_{11} \cos(\nu_1 t) + a_{12} \sin(\nu_1 t)), \quad \nu_1 = \sqrt{\gamma_1} = \sqrt{\frac{3}{20} \frac{g}{L} (17 - 3\sqrt{21})} \\ \mathbf{n}^{(2)}(t) &= \left[\begin{array}{c} 1 \\ \frac{25}{3(17+3\sqrt{21})} - \frac{7}{6} \end{array} \right] (a_{21} \cos(\nu_2 t) + a_{22} \sin(\nu_2 t)), \quad \nu_2 = \sqrt{\gamma_2} = \sqrt{\frac{3}{20} \frac{g}{L} (17 + 3\sqrt{21})}, \end{aligned}$$

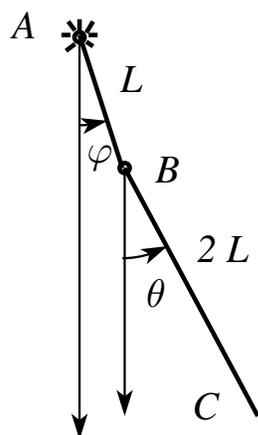
cioè due moti periodici di pulsazione, rispettivamente, ν_1 e ν_2 . Analizziamo in dettaglio i due modi normali di vibrazione, ponendo, per semplicità, nel primo modo $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1/\varepsilon$ e, nel secondo modo, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1/\varepsilon$. Il primo modo normale si riduce a

$$\left[\begin{array}{c} \varphi(t) \\ \theta(t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \frac{25}{3(17-3\sqrt{21})} - \frac{7}{6} \end{array} \right] \sin(\nu_1 t)$$

il cui grafico è



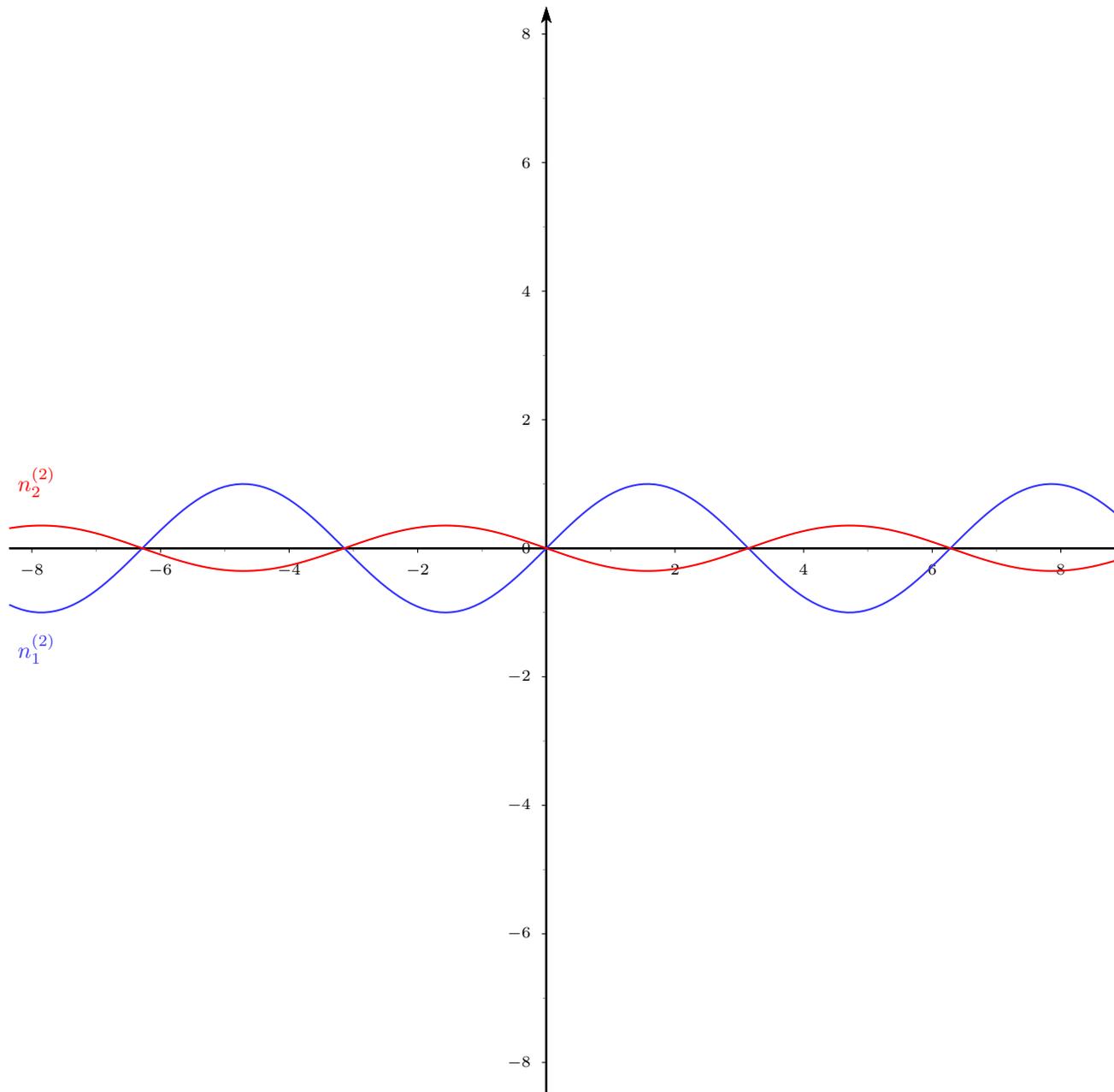
Si vede che le due componenti (la prima disegnata in blu e la seconda in rosso) oscillano in concordanza di fase. Tale modo corrisponde a un moto del pendolo doppio in cui le 2 aste formano angoli concordi con la verticale



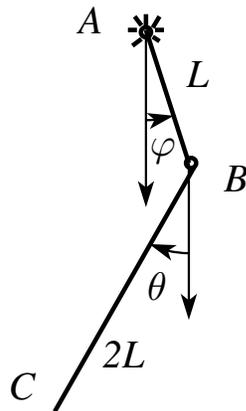
Il secondo modo normale di vibrazione assume la forma

$$\begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{25}{3(17+3\sqrt{21})} - \frac{7}{6} \end{bmatrix} \sin(\nu_2 t)$$

il cui grafico è



Si vede che le due componenti (la prima disegnata in blu e la seconda in rosso) oscillano in opposizione di fase. Tale modo corrisponde a un moto del pendolo doppio in cui le 2 aste formano angoli discordi con la verticale



L'integrale generale del pendolo doppio linearizzato intorno alla configurazione di equilibrio $\mathbf{q}_e = (0, 0)$ sarà

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_e + \varepsilon \mathbf{x}(t) = \varepsilon (b_1 \mathbf{n}^{(1)}(t) + b_2 \mathbf{n}^{(2)}(t)) \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R},$$

cioè

$$\begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \varepsilon \left(\mathbf{u}^{(1)} (a_{11} \cos(\nu_1 t) + a_{12} \sin(\nu_1 t)) + \mathbf{u}^{(2)} (a_{21} \cos(\nu_2 t) + a_{22} \sin(\nu_2 t)) \right)$$

Le quattro costanti d'integrazione $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, che assorbono le costanti b_1 e b_2 , dipendono dalle condizioni iniziali.

15.4 Costruzione delle coordinate normali

In questa sezione, dimostreremo che la procedura di soluzione dei sistemi differenziali

$$(15.4.1) \quad A\ddot{\mathbf{x}} + \mathcal{V}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

vista nella sezione precedente, equivale alla scelta di opportune coordinate, diverse da quelle fisiche originali, in cui le equazioni di moto si disaccoppiano. Tali coordinate sono dette *normali*. Premettiamo due proposizioni e un teorema di algebra lineare.

Proposizione 15.4.1. *Sia A una matrice quadrata simmetrica reale e definita positiva, cioè*

$$(15.4.2) \quad A^T = A$$

$$(15.4.3) \quad \sum_{j,k=1}^l A_{jk} x_j x_k \geq 0 \quad \forall x_j \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j,k=1}^l A_{jk} x_j x_k = 0 \Rightarrow x_j = 0 \quad j = 1, \dots, l$$

Allora, A definisce un prodotto scalare in \mathbb{R}^l che denotiamo con \langle, \rangle (diverso da quello canonico) tramite

$$(15.4.4) \quad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{j,k=1}^l A_{jk} v_j w_k = ([\vec{v}]^B)^T A [\vec{w}]^B,$$

dove $v_j, j = 1, \dots, l$, sono le componenti di \vec{v} rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_l\}$ di \mathbb{R}^l e analogamente per le w_k . La matrice A , i cui elementi godono della proprietà

$$(15.4.5) \quad A_{jk} = \langle \vec{e}_j, \vec{e}_k \rangle,$$

è detta la matrice rappresentativa del prodotto scalare \langle, \rangle rispetto alla base \mathcal{B} .

Dimostrazione. È immediato verificare che la (15.4.2) garantisce che la (15.4.4) è una forma bilineare simmetrica, cioè invariante rispetto allo scambio dei suoi argomenti, mentre la (15.4.3) garantisce la positività di tale forma. Infine, la (15.4.5) è assicurata dal fatto che

$$\langle \vec{e}_j, \vec{e}_k \rangle = \sum_{r,s=1}^l A_{rs} [\vec{e}_j]_r^{\mathcal{B}} [\vec{e}_k]_s^{\mathcal{B}} = \sum_{r,s=1}^l A_{rs} \delta_{jr} \delta_{ks} = A_{jk}$$

□

N.B. Se $A = \mathbb{1}_l$, dalla (15.4.5) segue che $\langle \vec{e}_j, \vec{e}_k \rangle = \delta_{jk}$, quindi il prodotto scalare \langle, \rangle coincide con quello canonico.

Esempio 15.4.1. Vedi [Abate, Cap. 12, Sez. 12.1].

Vediamo come si trasforma la matrice A , rappresentativa di una forma bilineare simmetrica, sotto un cambio di base.

Proposizione 15.4.2. Scelta una nuova base $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_l\}$ in \mathbb{R}^l e detta S la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B}' a \mathcal{B} ,

$$(15.4.6) \quad [\vec{v}]^{\mathcal{B}} = [\mathbb{1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} [\vec{v}]^{\mathcal{B}'} = S [\vec{v}]^{\mathcal{B}'},$$

costituita dalle colonne delle componenti dei vettori di \mathcal{B}' rispetto a \mathcal{B}

$$(15.4.7) \quad S = [\mathbb{1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = [[\vec{e}'_1]^{\mathcal{B}}, \dots, [\vec{e}'_l]^{\mathcal{B}}],$$

la matrice rappresentativa del prodotto scalare \langle, \rangle rispetto alla base \mathcal{B}' è definita da

$$A'_{jk} := \langle \vec{e}'_j, \vec{e}'_k \rangle$$

e soddisfa la legge di trasformazione

$$(15.4.8) \quad A' = S^T A S$$

Tale trasformazione si dice congruenza.

Dimostrazione. La legge di trasformazione della matrice rappresentativa del prodotto scalare, si ricava osservando che

$$(15.4.9) \quad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \stackrel{(15.4.4)}{=} ([\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T A [\vec{w}]^{\mathcal{B}} \stackrel{(15.4.6)}{=} (S [\vec{v}]^{\mathcal{B}'})^T A S [\vec{w}]^{\mathcal{B}'} = ([\vec{v}]^{\mathcal{B}'})^T (S^T A S) [\vec{w}]^{\mathcal{B}'},$$

da cui segue la (15.4.8). □

N.B. La proposizione precedente vale anche se sostituiamo alla nozione di prodotto scalare, positivo per definizione, il concetto più generale di *forma bilineare simmetrica*, rinunciando alla positività. In particolare, vale la legge di trasformazione per congruenza (15.4.8) sotto un cambiamento di base.

N.B. La trasformazione di congruenza è, in genere, diversa dalla legge di trasformazione di un operatore $\mathbf{C} : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ che, invece, si trasforma per similitudine (o coniugio)

$$(15.4.10) \quad [\mathbf{C}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = [\mathbb{1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} [\mathbf{C}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [\mathbb{1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = S^{-1} [\mathbf{C}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} S .$$

Le due leggi coincidono se e solo se S è una matrice *ortogonale*.

Definizione 15.4.1. Una base \mathcal{B}' si dice *ortonormale* rispetto al prodotto scalare \langle, \rangle se la sua matrice rappresentativa su tale base è uguale alla matrice identità

$$(15.4.11) \quad \S A'_{jk} = \langle \vec{e}'_j, \vec{e}'_k \rangle = \delta_{jk} .$$

Nel teorema successivo utilizzeremo il fatto che, data l'invertibilità della matrice A , il sistema differenziale (15.4.1) si può scrivere in forma normale

$$(15.4.12) \quad \ddot{\mathbf{x}} + A^{-1}\mathcal{V}\mathbf{x} = \mathbf{0} ,$$

introducendo la nuova matrice definita da

$$(15.4.13) \quad C := A^{-1}\mathcal{V} .$$

La dimostrazione è costruttiva, quindi fornirà anche una procedura di calcolo delle coordinate normali.

Teorema 15.4.1 (diagonalizzazione simultanea di due matrici simmetriche, delle quali una definita positiva). *Sia A una matrice $l \times l$ simmetrica e definita positiva e \mathcal{V} una matrice $l \times l$ simmetrica. Esiste una matrice invertibile*

$$S : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$$

che, per congruenza, trasforma A nella matrice identità e, simultaneamente, diagonalizza \mathcal{V}

$$(15.4.14) \quad S^T A S = \mathbb{1}_l \quad S^T \mathcal{V} S = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_l)$$

Dimostrazione. Si basa su due fatti:

1. per la Prop. 15.4.1, la matrice A definisce un prodotto scalare in \mathbb{R}^l (che denoteremo con \langle, \rangle) e la matrice \mathcal{V} una forma bilineare simmetrica, se vengono interpretate come le matrici rappresentative di tali forme sulla base canonica \mathcal{B} ;
2. la matrice $C = A^{-1}\mathcal{V}$ definisce un operatore $\mathbf{C} : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$, simmetrico *rispetto al prodotto scalare definito da A* , cioè tale che $\langle \vec{v}, \mathbf{C}\vec{w} \rangle = \langle \mathbf{C}\vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Infatti, dalla definizione di \mathbf{C} e dalla simmetria di \mathcal{V} , segue che

$$\langle \vec{v}, \mathbf{C}\vec{w} \rangle = ([\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T A [\mathbf{C}\vec{w}]^{\mathcal{B}} = ([\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T A C [\vec{w}]^{\mathcal{B}} = ([\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T \mathcal{V} [\vec{w}]^{\mathcal{B}} = (\mathcal{V} [\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T [\vec{w}]^{\mathcal{B}} ;$$

d'altra parte, per la simmetria di A vale che

$$\langle \mathbf{C}\vec{v}, \vec{w} \rangle = (C [\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T A [\vec{w}]^{\mathcal{B}} = (A C [\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T [\vec{w}]^{\mathcal{B}} = (\mathcal{V} [\vec{v}]^{\mathcal{B}})^T [\vec{w}]^{\mathcal{B}} .$$

Dunque, per il teorema *spettrale* (vedi Abate, Cap. 12), esiste in \mathbb{R}^l una base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}^{(l)}\}$ di autovettori reali dell'operatore \mathbf{C}

$$(15.4.15) \quad \mathbf{C}\mathbf{u}^{(k)} = \gamma_k \mathbf{u}^{(k)} \quad \gamma_k \in \mathbb{R},$$

la quale è ortonormale rispetto al prodotto scalare definito da A , cioè tale che

$$(15.4.16) \quad A'_{jk} = \langle \mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{u}^{(k)} \rangle = ([\mathbf{u}^{(j)}]^\mathcal{B})^T A [\mathbf{u}^{(k)}]^\mathcal{B} = \delta_{jk}.$$

Su tale base, la matrice rappresentativa dell'operatore \mathbf{C} è diagonale e, detti $(\gamma_1, \dots, \gamma_l)$ i suoi autovalori, dalla definizione di \mathbf{C} segue che

$$(15.4.17) \quad [\mathbf{C}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_l) = (A')^{-1} \mathcal{V}' \stackrel{(15.4.16)}{=} \mathcal{V}',$$

dove, con \mathcal{V}' abbiamo denotato la matrice rappresentativa sulla base \mathcal{B}' della forma bilineare definita dalla matrice \mathcal{V} sulla base \mathcal{B} . Detta S la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B}' a \mathcal{B} ,

$$S := [\mathbb{1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = [[\mathbf{u}^{(1)}]^\mathcal{B}, \dots, [\mathbf{u}^{(l)}]^\mathcal{B}],$$

la matrice C si trasforma per similitudine come nella (15.4.10), mentre le matrici A e \mathcal{V} si trasformano per congruenza e quindi, per la (15.4.16) si ottiene

$$S^T A S = A' = \mathbb{1}_l$$

e per la (15.4.17)

$$S^T \mathcal{V} S = \mathcal{V}' = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_l)$$

□

N.B. Si osservi che la matrice del cambiamento di base S *non* è ortogonale, a meno che la matrice $A = \mathbb{1}_l$, nel qual caso il problema si riduce alla diagonalizzazione della sola matrice \mathcal{V} mediante una trasformazione ortogonale.

Corollario 15.4.1. *Dato il sistema differenziale lineare*

$$(15.4.18) \quad A\ddot{\mathbf{x}} + \mathcal{V}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

con A matrice reale, simmetrica e definita positiva, \mathcal{V} matrice reale e simmetrica, esiste una trasformazione lineare di coordinate $T: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l, (x_1, \dots, x_l) \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_l)$

$$(15.4.19) \quad \boldsymbol{\xi} = T\mathbf{x}$$

che permette di disaccoppiare il sistema, cioè di scriverlo nella forma

$$(15.4.20) \quad \ddot{\xi}_j + \gamma_j \xi_j = 0 \quad j = 1, \dots, l \quad \gamma_j \in \mathbb{R}.$$

Le nuove coordinate (ξ_1, \dots, ξ_l) sono dette coordinate normali per il sistema (15.4.18).

Dimostrazione. Basta identificare $\mathbf{x}(t) = [\vec{v}]^{\mathcal{B}}$ e $\boldsymbol{\xi}(t) = [\vec{v}]^{\mathcal{B}'}$ e tener conto che della (15.4.6) e dalle (15.4.14) segue

$$\mathbf{0} = S^T A [\ddot{\vec{v}}]^{\mathcal{B}} + S^T \mathcal{V} [\vec{v}]^{\mathcal{B}} = S^T A S [\ddot{\vec{v}}]^{\mathcal{B}'} + S^T \mathcal{V} S [\vec{v}]^{\mathcal{B}'} = \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathcal{V}' \boldsymbol{\xi} .$$

Dunque, la trasformazione lineare T è data da

$$T = S^{-1} = S^T A$$

□

Ricapitolando, la procedura per trovare le coordinate normali di un sistema come (15.4.18) consta dei seguenti passi:

1. calcolare gli autovalori dell'operatore \mathbf{C} definito dalla matrice $[\mathbf{C}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = C = A^{-1}\mathcal{V}$. A tale scopo, si deve risolvere l'equazione caratteristica

$$(15.4.21) \quad \det(C - \gamma \mathbb{1}_l) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathcal{V} - \gamma A) = 0 ,$$

poichè $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Il Teorema 15.4.1 assicura che le soluzioni di (15.4.21) sono tutte reali.

2. Calcolare gli autovettori di \mathbf{C} , risolvendo i sistemi lineari

$$(15.4.22) \quad (C - \gamma_k \mathbb{1}_l) \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathcal{V} - \gamma_k A) \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{0} \quad k = 1, \dots, l .$$

Il Teorema 15.4.1 assicura che ogni sistema (15.4.22) ammette, in totale, *almeno* ∞ soluzioni reali e almeno l tra loro sono linearmente indipendenti.

3. Normalizzare ciascun autovettore $\mathbf{u}^{(k)}$, che è sempre definito a meno di una o più costanti moltiplicative. Le costanti sono fissate dalle relazioni di ortogonalità (15.4.16)

$$([\mathbf{u}^{(j)}]^{\mathcal{B}})^T A [\mathbf{u}^{(k)}]^{\mathcal{B}} = \delta_{jk} \quad j \leq k = 1, \dots, l .$$

4. Costruire la matrice S , incolonnando gli autovettori normalizzati

$$S = [[\mathbf{u}^{(1)}]^{\mathcal{B}}, \dots, [\mathbf{u}^{(l)}]^{\mathcal{B}}] .$$

5. Calcolare la matrice $T = S^{-1} = S^T A$ e determinare le coordinate normali

$$\boldsymbol{\xi} = S^{-1} \mathbf{x} .$$

N.B. Se si vuole soltanto trovare l'integrale generale (dipendente da $2l$ costanti arbitrarie) del sistema differenziale (15.4.18), ci si può limitare ai passi 1 e 2 della procedura per trovare gli autovalori e gli autovettori generalizzati (a meno di costanti moltiplicative) e poi si può scrivere l'integrale generale come sovrapposizione dei modi normali.

Esempio 15.4.2.

Riprendiamo l'esempio 15.3.2 della molecola biatomica.

1. L'equazione caratteristica del sistema (15.3.8) è data dalla

$$(15.4.23) \quad \det \left(c \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \gamma m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0,$$

che ammette le due soluzioni positive

$$(15.4.24) \quad \gamma_1 = \frac{c}{m}, \quad \gamma_2 = 5 \frac{c}{m}.$$

I corrispondenti valori di λ sono $\lambda_1 = \sqrt{-\gamma_1} = \pm i \sqrt{\frac{c}{m}}$, $\lambda_2 = \sqrt{-\gamma_2} = \pm i \sqrt{5 \frac{c}{m}}$.

2. Gli autovettori corrispondenti sono tutte e sole le soluzioni del sistema

$$(15.4.25) \quad \begin{cases} (3c - \gamma_k m)u_1 - 2cu_2 & = 0 \\ -2cu_1 + (3c - \gamma_k m)u_2 & = 0 \end{cases}$$

Tale sistema lineare e omogeneo ha, per ogni γ_k , ∞^1 soluzioni poichè le due equazioni sono linearmente dipendenti. Ad esempio, la prima delle (15.4.25) fornisce

$$u_2 = \left(\frac{3}{2} - \gamma_k \frac{m}{2c} \right) u_1$$

Pertanto, sostituendo a γ_k i due valori (15.4.24) si ottengono gli autovettori

$$(15.4.26) \quad \mathbf{u}^{(1)} = \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \beta_1 \in \mathbb{R},$$

$$(15.4.27) \quad \mathbf{u}^{(2)} = \beta_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \beta_2 \in \mathbb{R}.$$

Quindi, i due modi normali di vibrazione sono

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (a_{11} \cos(\nu_1 t) + a_{12} \sin(\nu_1 t)), \quad \nu_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \\ \mathbf{n}^{(2)}(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (a_{21} \cos(\nu_2 t) + a_{22} \sin(\nu_2 t)), \quad \nu_2 = \sqrt{5 \frac{c}{m}}, \end{aligned}$$

cioè due moti periodici di pulsazione, rispettivamente, ν_1 e ν_2 . L'integrale generale per questa molecola biatomica sarà

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_e + \mathbf{x}(t) = \mathbf{q}_e + \mathbf{n}^{(1)}(t) + \mathbf{n}^{(2)}(t),$$

cioè

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \frac{L}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (a_{11} \cos(\nu_1 t) + a_{12} \sin(\nu_1 t)) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (a_{21} \cos(\nu_2 t) + a_{22} \sin(\nu_2 t))$$

Le quattro costanti d'integrazione $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ dipendono dalle condizioni iniziali. Ad esempio, determiniamo la soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali

$$(15.4.28) \quad \mathbf{q}(0) = \frac{L}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

Se imponiamo tali condizioni sull'integrale generale otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} &= \frac{L}{35} \\ a_{11} - a_{21} &= -\frac{L}{35} \\ a_{12}\nu_1 + a_{22}\nu_2 &= 0 \\ a_{12}\nu_1 - a_{22}\nu_2 &= v_0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$(15.4.29) \quad a_{11} = 0, a_{12} = \frac{v_0}{2\nu_1}, a_{21} = \frac{L}{35}, a_{22} = -\frac{v_0}{2\nu_2}.$$

Pertanto, l'unico moto del modello che soddisfa le condizioni iniziali (15.4.28) è

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \frac{L}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{v_0}{2\nu_1} \sin(\nu_1 t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \left(\frac{L}{35} \cos(\nu_2 t) - \frac{v_0}{2\nu_2} \sin(\nu_2 t) \right),$$

cioè un moto oscillatorio, quasi-periodico poichè $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{5}$ è un numero irrazionale.

3. Imponiamo le condizioni di normalizzazione del passo 3 della procedura suddetta

$$\left([\mathbf{u}^{(1)}]^\mathcal{B} \right)^T A [\mathbf{u}^{(2)}]^\mathcal{B} = 0, \quad \left([\mathbf{u}^{(1)}]^\mathcal{B} \right)^T A [\mathbf{u}^{(1)}]^\mathcal{B} = 1, \quad \left([\mathbf{u}^{(2)}]^\mathcal{B} \right)^T A [\mathbf{u}^{(2)}]^\mathcal{B} = 1.$$

In questo caso, la prima condizione è identicamente soddisfatta, poichè gli autovalori corrispondenti sono distinti e, quindi, gli autovettori corrispondenti sono ortogonali. La seconda e la terza forniscono

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}.$$

4. Pertanto, la matrice degli autovettori normalizzata è data da

$$S = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. La sua inversa è

$$T = S^{-1} = S^T A = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Quindi, in questo caso, le coordinate normali sono

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}(x_1 + x_2), \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{m}{2}}(x_1 - x_2),$$

cioè la somma e la differenza (normalizzate) degli scostamenti dalla configurazione di equilibrio.

Esercizio

Verificare che i dati iniziali per i quali il moto del modello è quello che eccita soltanto il primo modo di vibrazione, sono tutti e soli quelli che realizzano entrambe le condizioni

$$\mathbf{x}(0) \parallel \mathbf{u}^{(1)}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) \parallel \mathbf{u}^{(1)}.$$

