

Capitolo 2

Calcolo Vettoriale

Tutti i sistemi fisici sono collocati nello spazio, del quale abbiamo un'esperienza quotidiana (ma limitata) e si evolvono nel tempo. In questo capitolo richiameremo il modello matematico per lo spazio fisico, in cui ambienteremo i modelli meccanici che studieremo in questo corso: lo spazio affine euclideo tridimensionale. Gli elementi di tale spazio, formalizzano il *posto* in cui avviene un evento (per esempio il posto in cui decade una particella elementare o quello in cui si trova un aereo su uno schermo radar) e lo *spostamento* da un posto all'altro (della particella, dell'aereo). Il posto e lo spostamento sono rappresentati da due enti matematici fondamentali: i *punti* e i *vettori*. Richiamiamo, prima, alcuni concetti sui vettori, già acquisiti dai corsi di Fisica 1, Algebra Lineare e Geometria, Analisi I e II, rinviando a quei corsi per tutte le dimostrazioni. Poi, ricorderemo la nozione di spazio affine euclideo.

2.1 Richiami di algebra vettoriale

Consideriamo uno spazio vettoriale astratto tridimensionale munito di prodotto *scalare* e prodotto *vettoriale* (E_3, \cdot, \times). Come esempio, possiamo pensare a \mathbb{R}^3 con le proprietà della geometria euclidea usuale. Gli elementi di E_3 sono detti vettori *liberi*. Fissata una base $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, possiamo esprimere in modo univoco un qualunque vettore di E_3 come combinazione lineare degli elementi della base e chiameremo *componenti* del vettore (sulla base scelta) i coefficienti della combinazione lineare. Ad esempio

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow [\vec{a}]^{\mathcal{B}} = [a_x \ a_y \ a_z]^T$$
$$\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow [\vec{b}]^{\mathcal{B}} = [b_x \ b_y \ b_z]^T$$

N.B. Spesso, i vettori vengono identificati con gli elementi di \mathbb{R}^n . Ad esempio, se $n = 3$, si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra i vettori di E_3 e gli elementi di \mathbb{R}^3 , tramite l'applicazione

$$\vec{a} \mapsto [a_x \ a_y \ a_z]^T$$

ed identificare E_3 con \mathbb{R}^3 . Si tenga presente, comunque, che tale identificazione dipende dalla base poichè le componenti di un vettore dipendono dalla base scelta. Vediamo come le componenti si trasformano sotto un cambiamento di base. Indichiamo con $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la “nuova” base e con $[R]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice del cambiamento di base, le cui *colonne sono le componenti della “vecchia base” sulla “nuova”*, quindi soddisfano la relazione

$$(2.1.1) \quad \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} [R]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Allora, il vettore \vec{a} si scrive

$$(2.1.2) \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{bmatrix} [\vec{a}]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} [R]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [\vec{a}]^{\mathcal{B}}.$$

Pertanto, vale la legge di trasformazione

$$(2.1.3) \quad [\vec{a}]^{\mathcal{B}'} = [R]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [\vec{a}]^{\mathcal{B}}.$$

Definizione 1. Diremo che due basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' dello spazio vettoriale E_3 hanno la stessa orientazione se la matrice del cambiamento di base ha determinante positivo

$$(2.1.4) \quad \det \left([R]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \right) > 0,$$

altrimenti diremo che hanno orientazioni opposte.

Esercizio 2.1.1. Verificare che la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, ha la stessa orientazione di $(\vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_x)$ e di $(\vec{e}_z, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, mentre ha opposta orientazione di $(\vec{e}_y, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$, $(\vec{e}_x, \vec{e}_z, \vec{e}_y)$, $(\vec{e}_z, \vec{e}_y, \vec{e}_x)$.

Richiamiamo le operazioni sui vettori, rinviando, per le definizioni, ai corsi precedenti.

Somma di vettori

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{e}_x + (a_y + b_y)\vec{e}_y + (a_z + b_z)\vec{e}_z$$

Prodotto di un vettore per un fattore scalare

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x)\vec{e}_x + (\lambda a_y)\vec{e}_y + (\lambda a_z)\vec{e}_z \quad (\text{l'operatore prodotto si sottintende}).$$

Diremo che \vec{a} e \vec{b} sono paralleli (o proporzionali) se $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

Prodotto scalare tra due vettori

$$\cdot : E_3 \times E_3 \rightarrow \mathbb{R}, (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (\text{l'operatore prodotto NON si sottintende}).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ et } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Lo scalare $|\vec{a}| := \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ è detto modulo del vettore \vec{a} ed è un numero positivo se $\vec{a} \neq \vec{0}$, è nullo se e solo se $\vec{a} = \vec{0}$.

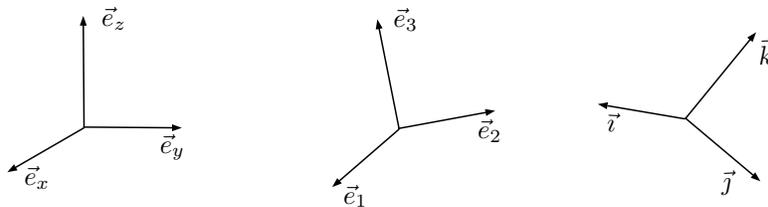
Il versore di \vec{a} è il vettore di modulo pari a 1, parallelo e concorde ad \vec{a} . Quindi, è definito come $\text{vers}(\vec{a}) := \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Di solito, useremo basi ortonormali (ON) in E_3 , cioè tali che

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3,$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker, che assume valore 1 se $i = j$ e valore 0 se $i \neq j$.

Spesso indicheremo le basi ON scelte con $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, etc..

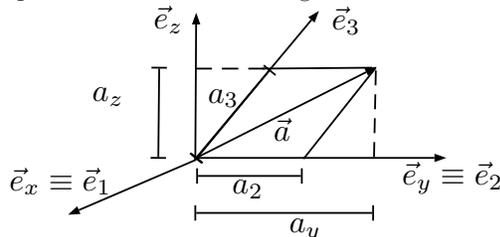


Se la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ è ortonormale, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, quindi $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Esercizio 2.1.2. Verificare che le componenti del vettore \vec{a} sulla base ortonormale $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, si calcolano come

$$(2.1.5) \quad a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i \quad i = 1, 2, 3 .$$

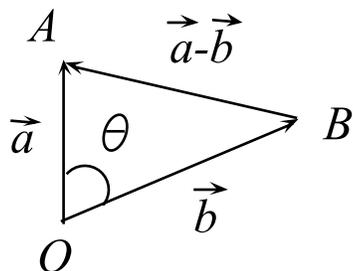
N.B. Si osservi che la (2.1.5) non vale su basi che non siano ON. Ad esempio, confrontando le componenti del vettore \vec{a} di figura su una base ON, $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ e una base non ON, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, si trova



$$\begin{aligned} a_y &= \vec{a} \cdot \vec{e}_y \neq a_2 \\ a_z &= \vec{a} \cdot \vec{e}_z \neq a_3 \end{aligned}$$

Applicazione

La lunghezza del lato AB del triangolo scaleno AOB si può calcolare utilizzando il teorema del “coseno” o di Carnot:



$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ \overline{AB}^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \end{aligned}$$

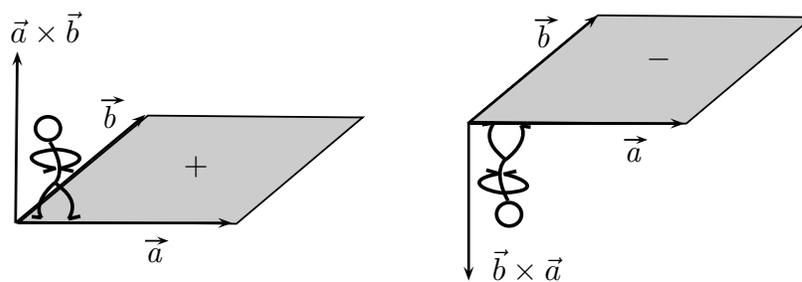


Figura 2.1.1: Prodotto vettoriale come area orientata

Prodotto vettoriale tra due vettori

È l'applicazione $\times : E_3 \times E_3 \rightarrow E_3, (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \times \vec{b}$, che in forma geometrica si può calcolare come

$$(2.1.6) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{cases} \text{modulo:} & |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\sin \varphi| \\ \text{direzione:} & \perp \pi(\vec{a}, \vec{b}) \\ \text{verso:} & \text{regola della mano destra, della vite, del cavatappi} \end{cases}$$

Esso rappresenta l'area della superficie *orientata* del parallelogramma che ha per lati i vettori \vec{a} e \vec{b} , come nella Fig. 2.1.1.

In forma algebrica, scelta una base ON $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, il prodotto vettoriale si può calcolare tramite il determinante formale

$$(2.1.7) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \vec{e}_x (a_y b_z - a_z b_y) - \vec{e}_y (a_x b_z - a_z b_x) + \vec{e}_z (a_x b_y - a_y b_x)$$

Segue immediatamente che il prodotto vettoriale è anti-commutativo $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$; ciò implica che $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. Inoltre vale la

Legge di Annullamento

Se $\vec{a} \neq \vec{0}$ et $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ se e solo se \vec{a} è parallelo a \vec{b} .

Dalla Eq. (2.1.7) segue che i prodotti vettoriali dei versori della base \mathcal{B} sono

$$(2.1.8) \quad \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

Definizione 2.1.1. Diremo *base destra* una base ON che soddisfa le Eq. (2.1.8) e *base sinistra* una base con orientazione opposta.

Le Eq. (2.1.8) permettono di calcolare il prodotto vettoriale facendo uso della proprietà distributiva.

Esercizio 2.1.3. Calcolare $\vec{a} \times \vec{b}$ mediante la proprietà distributiva e le (2.1.8). Poi, confrontare il risultato con la (2.1.7).

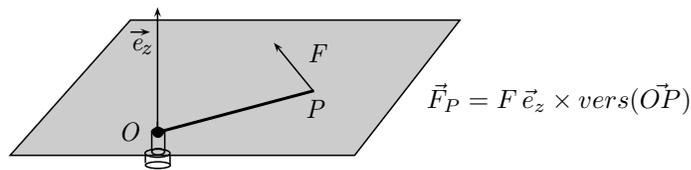


Figura 2.1.2: Carico follower ortogonale a un'asta vincolata in un piano

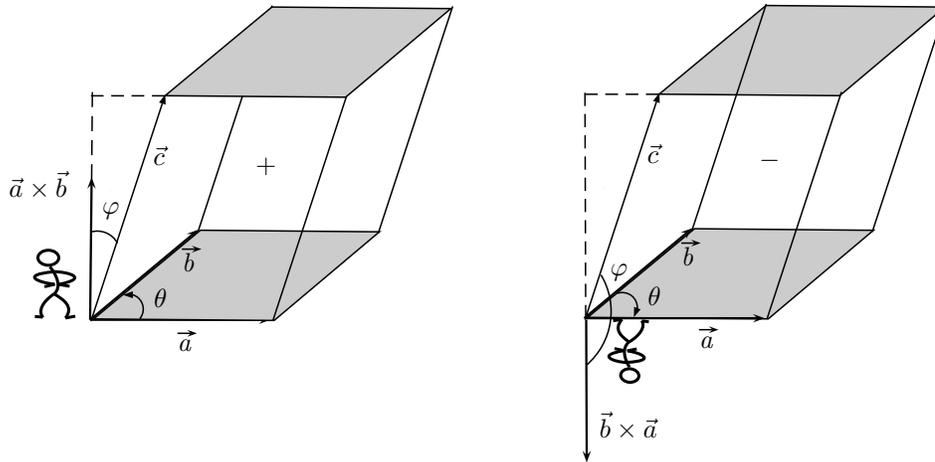


Figura 2.1.3: Prodotto misto come volume orientato

Applicazione

Carico ortogonale all'asta OP vincolata in un piano con una cerniera cilindrica in O , come nella Fig. 2.1.2.

Prodotto misto

È l'applicazione data da $E_3 \times E_3 \times E_3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \mapsto \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$. In forma geometrica si può calcolare come

$$(2.1.9) \quad \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta |\vec{c}| \cos \varphi .$$

Quindi alla terna di vettori $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ associa il volume *orientato* del parallelepipedo di lati $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$, come nella Fig. 2.1.3. In forma algebrica, scelta una base ON $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, si può scrivere come

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \det \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} .$$

Legge di annullamento

Se \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} sono complanari, allora $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. In particolare, se $\vec{a} \left(\text{o } \vec{b} \right) \parallel \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. Viceversa, se $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ et $\vec{a} \neq \vec{0}$ et $\vec{b} \neq \vec{0}$ et $\vec{c} \neq \vec{0}$, allora \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} sono complanari.

Proprietà d'invarianza

Dalla rappresentazione mediante il determinante segue l'invarianza del prodotto misto per permutazioni cicliche e per scambio degli operatori prodotto:

$$(2.1.10) \quad \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \times \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{permutazioni cicliche} \quad \begin{array}{c} \vec{c} \\ \circlearrowleft \\ \vec{a} \end{array} \vec{b}$$

$$(2.1.11) \quad \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} \quad \begin{array}{c} \Downarrow \\ \text{scambio} \end{array}$$

Doppi prodotti vettoriali

Iterando il prodotto vettoriale, si possono costruire le due applicazioni da $E_3 \times E_3 \times E_3 \rightarrow E_3$, date da

$$(2.1.12) \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \mapsto (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

$$(2.1.13) \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \mapsto \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

Poichè i due prodotti danno come risultato due vettori differenti, possiamo concludere che

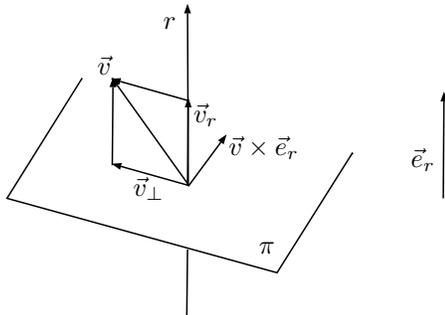
Lemma 1. *Il prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa.*

Esercizio 2.1.4. *Verificare che vale l'identità di Jacobi, cioè:*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$$

Applicazione 1

Scomposizione di un vettore lungo un asse (retta orientata) e nel piano $\pi \perp$ all'asse.



Chiameremo:

- $v_r = v_{\parallel} = \vec{v} \cdot \vec{e}_r = |\vec{v}| \cos \varphi$, la componente (scalare) di \vec{v} lungo l'asse r ;
- $\vec{v}_r = \vec{v}_{\parallel} = v_r \vec{e}_r$, il componente (vettoriale) di \vec{v} lungo l'asse r ;
- $\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_r = \vec{v} - v_r \vec{e}_r \stackrel{(2.1.13)}{=} \vec{e}_r \times (\vec{v} \times \vec{e}_r)$, il componente di $\vec{v} \perp$ all'asse r .

Pertanto, vale la seguente scomposizione:

$$(2.1.14) \quad \vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_{\perp} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r + \vec{e}_r \times (\vec{v} \times \vec{e}_r)$$

Applicazione 2

Consideriamo l'equazione vettoriale

$$(2.1.15) \quad \vec{x} \times \vec{a} = \vec{b},$$

dove \vec{a}, \vec{b} sono due vettori assegnati di E_3 e cerchiamone tutte le soluzioni, cioè tutti i vettori $\vec{x} \in E_3$ che la soddisfano. Cominciamo con l'osservare che tale equazione è *lineare* in \vec{x} e, se $\vec{b} \neq \vec{0}$, è anche non omogenea. Quindi, la soluzione generale sarà la somma delle soluzioni dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare della non omogenea. Innanzitutto, osserviamo che se $\vec{a} = \vec{0}$ e $\vec{b} \neq \vec{0}$, non esiste alcuna soluzione, mentre, se $\vec{a} = \vec{0}$ e $\vec{b} = \vec{0}$, l'equazione (2.1.15) è identicamente soddisfatta da tutti i vettori di E_3 . Esaminiamo, quindi, il caso $\vec{a} \neq \vec{0}$ e cerchiamo una soluzione particolare \vec{x}_0 dell'equazione *non* omogenea. Dalla definizione di prodotto vettoriale (2.1.6), segue che la (2.1.15) ha soluzione solo se \vec{a} e \vec{x} sono ortogonali a \vec{b} . Dunque, devono valere le condizioni di esistenza

$$(2.1.16) \quad \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}$$

Allora, verificato che \vec{a} è ortogonale a \vec{b} , cerchiamo una soluzione particolare \vec{x}_0 nel piano ortogonale a \vec{b} e, per semplicità, in direzione ortogonale anche ad \vec{a} , come nella Fig. 2.1.4. Affinché tale soluzione particolare soddisfi la (2.1.6), deve avere modulo pari a $|\vec{b}|/|\vec{a}|$ e verso tale che $(\text{vers}(\vec{x}_0), \text{vers}(\vec{a}), \text{vers}(\vec{b}))$ sia una base destra. Quindi, essa si scrive

$$\vec{x}_0 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2}.$$

Adesso, osserviamo che la soluzione generale dell'omogenea associata è data da tutti e soli i vettori paralleli ad \vec{a} . Dunque, la soluzione generale dell'eq. (2.1.6) risulta

$$(2.1.17) \quad \vec{x} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2} + \lambda \vec{a} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

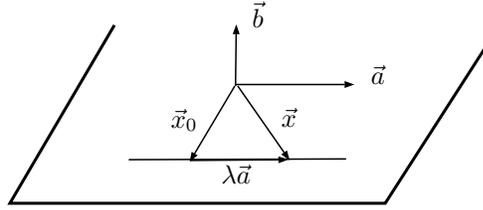


Figura 2.1.4: Soluzioni dell'equazione $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$

Operatori lineari trasposti, simmetrici, antisimmetrici

Dato un generico operatore lineare (o endomorfismo) su uno spazio vettoriale euclideo $\mathbf{A} : E_3 \rightarrow E_3$, ricordiamo che la sua matrice rappresentativa su una base *ortonormale* $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è data da

$$(2.1.18) \quad A_{ij} = \vec{e}_i \cdot \mathbf{A} \vec{e}_j .$$

L'operatore *trasposto* di \mathbf{A} rispetto al prodotto scalare, denotato da $\mathbf{A}^T : E_3 \rightarrow E_3$, è definito come

$$(2.1.19) \quad \vec{u} \cdot (\mathbf{A}^T \vec{v}) = (\mathbf{A} \vec{u}) \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E_3$$

Allora, la sua matrice rappresentativa avrà come elementi

$$(2.1.20) \quad (\mathbf{A}^T)_{ij} \stackrel{(2.1.18)}{=} \vec{e}_i \cdot \mathbf{A}^T \vec{e}_j \stackrel{(2.1.19)}{=} (\mathbf{A} \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j \stackrel{(2.1.18)}{=} A_{ji} ,$$

quindi la sua matrice sarà la trasposta di quella di \mathbf{A}

$$(2.1.21) \quad [\mathbf{A}^T]_{\mathcal{B}} = \left([\mathbf{A}]_{\mathcal{B}} \right)^T .$$

Gli operatori che soddisfano la condizione

$$(2.1.22) \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Leftrightarrow \vec{u} \cdot (\mathbf{A} \vec{v}) = (\mathbf{A} \vec{u}) \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E_3 .$$

si dicono *simmetrici* (o autoaggiunti). Per la (2.1.21) la loro matrice rappresentativa, su una base ON, è una matrice simmetrica, cioè una matrice che ha uguali fra loro gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale: $A_{ij} = A_{ji}$. Invece, gli operatori che soddisfano la condizione

$$(2.1.23) \quad \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \Leftrightarrow \vec{u} \cdot (\mathbf{A} \vec{v}) = -(\mathbf{A} \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

si dicono *antisimmetrici* (o emisimmetrici). Su una base ortonormale, la loro matrice rappresentativa è una matrice antisimmetrica, cioè una matrice che ha gli elementi della diagonale principale nulli e quelli simmetrici rispetto alla stessa diagonale, opposti: $A_{ij} = -A_{ji}$.

Operatori ortogonali

Nella cinematica dei rigidi utilizzeremo spesso operatori lineari che conservano il prodotto scalare e, per questo, sono detti ortogonali

$$(2.1.24) \quad \mathbf{R} \vec{u} \cdot \mathbf{R} \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E_3$$

Introducendo l'operatore trasposto, segue che

$$\mathbf{R}\vec{u} \cdot \mathbf{R}\vec{v} = \vec{u} \cdot (\mathbf{R}^T \mathbf{R}\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E_3$$

Confrontando le due formule precedenti, si vede subito che un operatore ortogonale è caratterizzato dalla proprietà

$$(2.1.25) \quad \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{R}^T \equiv \mathbf{R}^{-1}$$

Questa implica che

$$1 = \det(\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = \det(\mathbf{R}) \det(\mathbf{R}^T) = \det(\mathbf{R})^2$$

Pertanto, il determinante di un operatore ortogonale è pari a $+1$ o -1 .

2.2 Spazio affine euclideo \mathcal{E}_3

Finora abbiamo incontrato solo vettori *liberi*. Introduciamo, in questa sezione, il concetto di vettore *applicato* in un punto di uno spazio *affine euclideo*. Consideriamo la terna $\mathcal{E}_3 = (\mathcal{A}_3, E_3, \sigma)$ in cui

\mathcal{A}_3 : insieme di elementi che chiamiamo punti e indichiamo con P, Q, \dots ;

E_3 : insieme dei vettori liberi \vec{u}, \vec{v}, \dots ;

σ : applicazione bi-punto,

$$\sigma : \mathcal{A}_3 \times \mathcal{A}_3 \rightarrow E_3, \quad (P, Q) \mapsto \sigma(P, Q) .$$

Il vettore $\sigma(P, Q)$ è detto vettore posizione di Q rispetto a P , o vettore *spostamento* da P a Q e viene denotato in diversi modi, tra i quali

$$\sigma(P, Q) = \overrightarrow{PQ} = Q - P$$

L'applicazione σ deve soddisfare gli assiomi seguenti:

Assioma 1: $\forall (P, \vec{v}) \exists! Q \in \mathcal{A}_3$ t.c. $\vec{v} = \sigma(P, Q)$.

In altri termini, ogni applicazione parziale:

$$\sigma_P : \mathcal{A}_3 \rightarrow E_3, \quad Q \mapsto \sigma_P(Q) = \sigma(P, Q)$$

è invertibile, cioè: $\forall P \exists \sigma_P^{-1} : E_3 \rightarrow \mathcal{A}_3, \vec{v} \mapsto Q$ t.c. $\vec{v} = \sigma(P, Q)$.

La coppia (P, \vec{v}) è detta vettore *applicato* e spesso sarà denotato con \vec{v}_P . L'assioma 1 permette di definire la somma di un *punto* P e di un *vettore* \vec{v} applicato in P , che scriveremo

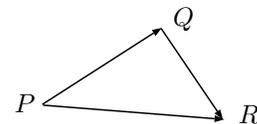
$$(2.2.1) \quad P + \vec{v} = Q \quad \text{dove} \quad Q = \sigma_P^{-1}(\vec{v}).$$

Assioma 2 $\forall (P, Q, R) \quad \sigma(P, Q) + \sigma(Q, R) = \sigma(P, R)$

Tale assioma è detto proprietà triangolare.

Scritta mediante la notazione di Grassmann permette di utilizzare facilmente "l'algebra dei punti":

$$(Q - P) + (R - Q) = (\emptyset - P) + (R - \emptyset) = (R - P)$$



N.B. Fissando un punto $O \in \mathcal{E}_3$, detto origine, si può introdurre una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti \mathcal{E}_3 e lo spazio euclideo soggiacente E_3 , tramite l'applicazione

$$P \mapsto \vec{x}_P := P - O ,$$

che a ogni punto P di \mathcal{E}_3 associa il suo vettore posizione rispetto all'origine O . Tale vettore è anche detto vettore raggio di P . Si noti, comunque, che tale corrispondenza dipende dalla scelta di O . Tramite i vettori posizione di P e di Q possiamo anche scrivere

$$Q - P = \vec{x}_Q - \vec{x}_P .$$

Esempio 2.2.1. (vedi la Figura 2.2).

1. Asse (o retta orientata) passante per un punto O e parallelo ad un vettore \vec{v} . Sarà denotato con (O, \vec{v}) ed ha equazione parametrica:

$$P(\lambda) = O + \lambda \vec{v} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Il piano ortogonale a un vettore \vec{v} e passante per un punto O avrà equazione

$$(2.2.2) \quad (P - O) \cdot \vec{v} = 0$$

3. Distanza di un punto P da un altro punto Q

$$d(P, Q) = |P - Q|$$

4. Distanza orientata di un punto P da un piano π . Detto \vec{u} uno dei due versori (tra loro opposti) ortogonali a π e O un generico punto del piano, risulta

$$d(P, \pi) = |P - O| \cos \theta = (P - O) \cdot \vec{u}$$

Il segno sarà positivo se P sta nel semispazio (aperto) verso cui punta \vec{u} , negativo se P sta nel semispazio opposto.

5. Distanza di un punto P da un asse r passante per un punto O e parallelo a un versore \vec{u}

$$d(P, r) = |P - O'| \sin \theta = |(P - O') \times \vec{u}| \quad O' \in (O, \vec{u})$$

2.2.1 Applicazioni affini in \mathcal{E}_3

Nel seguito avremo bisogno di alcune applicazioni affini. Le applicazioni affini $\Phi : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3$ sono quelle che rispettano la struttura affine dello spazio e sono definite implicitamente dalla esistenza e dall'unicità di un operatore lineare associato $\hat{\Phi} : E_3 \rightarrow E_3$ che soddisfa la condizione

$$(2.2.3) \quad \Phi(Q) - \Phi(P) = \hat{\Phi}(Q - P) \quad \forall P, Q \in \mathcal{E}_3$$

La trasformazione lineare $\hat{\Phi}$, che deve essere indipendente dai punti P e Q dello spazio, si dice la parte lineare di Φ poichè, se $Q = P + \vec{v}$, l'incremento dell'applicazione Φ nel passaggio da P a Q si scrive, per la (2.2.3),

$$(2.2.4) \quad \Phi(P + \vec{v}) - \Phi(P) = \hat{\Phi} \vec{v} .$$

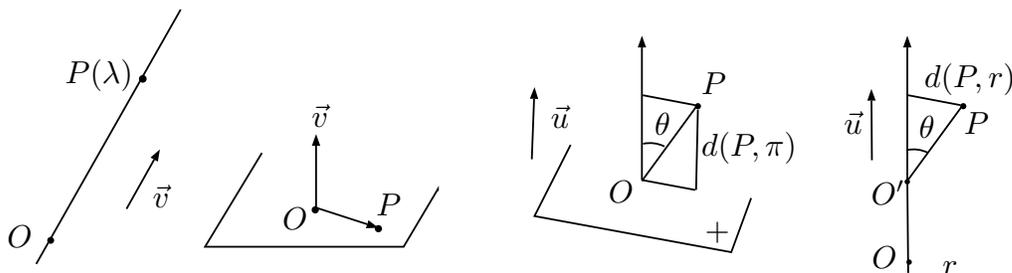


Figura 2.2.1: Geometria affine euclidea

Dunque, $\hat{\Phi}$ coincide con il differenziale dell'applicazione Φ e la sua rappresentazione matriciale coincide con la matrice Jacobiana di Φ che, evidentemente, risulta indipendente dal punto P

$$(2.2.5) \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] (P) \equiv [\hat{\Phi}]$$

Esempio 2.2.2. Fissato un punto $O' \in \mathcal{E}_3$ e un operatore lineare $\mathbf{A} : E_3 \rightarrow E_3$, l'applicazione

$$(2.2.6) \quad \Phi(P) = O' + \mathbf{A}(P - O')$$

è un'applicazione affine.

Esercizio 2.2.1. Dimostrare che l'applicazione Φ (2.2.6) è affine e ha almeno un punto fisso, cioè un punto Q tale che $\Phi(Q) \equiv Q$.

Esercizio 2.2.2. Dimostrare che l'applicazione della Figura 2.2.2, detta Riflessione rispetto al piano π , si può scrivere come

$$S_\pi(P) = O + \hat{\mathbf{S}}_{\vec{u}}(P - O) \quad \forall O \in \pi, \vec{u} \perp \pi,$$

dove, se $|\vec{u}| = 1$,

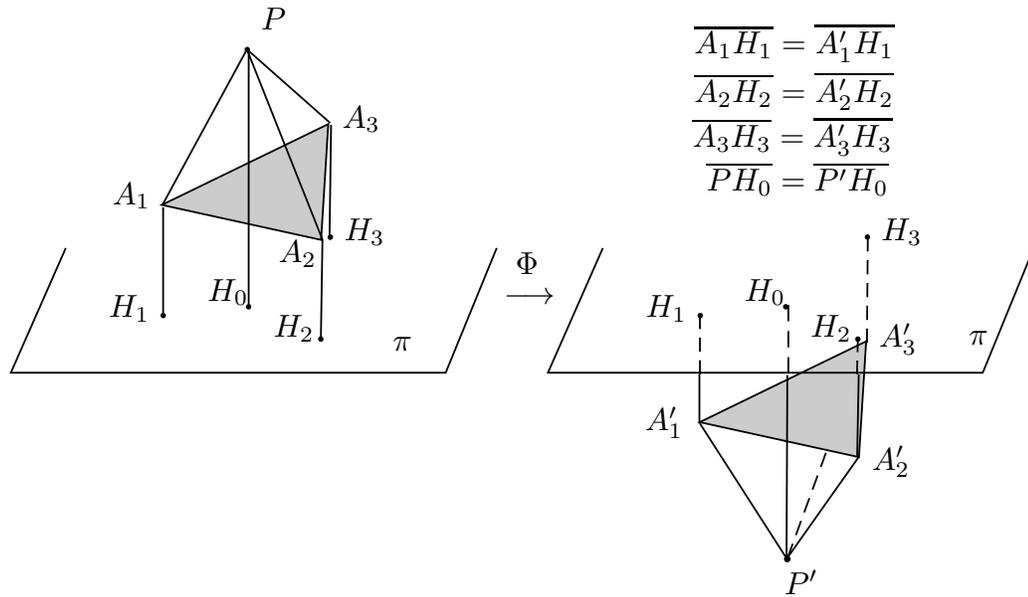
$$\hat{\mathbf{S}}_{\vec{u}}(\vec{v}) := \vec{v} - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} \quad \forall \vec{v} \in E_3.$$

Inoltre, dimostrare che S_π è un'applicazione affine e determinarne i punti fissi. Poi, dimostrare che $\hat{\mathbf{S}}_{\vec{u}}$ è un operatore simmetrico ed ortogonale e calcolarne gli autospazi e i relativi autovalori. Infine trovare una base ON di autovettori per $\hat{\mathbf{S}}_{\vec{u}}$, la sua matrice rappresentativa su tale base e il suo determinante.

Definizione 2.2.1. Le applicazioni affini $\Phi : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3$, bigettive e, quindi, invertibili, si dicono trasformazioni affini di \mathcal{A}_3 o affinità.

2.3 Riferimento cartesiano in \mathcal{E}_3

Un riferimento cartesiano in \mathcal{E}_3 è definito dalla scelta di un punto $O \in \mathcal{A}_3$, detto origine del riferimento, e dalla scelta di una base di vettori $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ in E_3 . Esso sarà indicato con $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Figura 2.2.2: Riflessione rispetto al piano π

Grazie a tali scelte possiamo scrivere il vettore posizione di un generico punto P nel modo seguente

$$(2.3.1) \quad \vec{x}_P = P - O = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Supponiamo che il punto P sia mobile e la sua equazione di moto sia $P(t) \simeq \vec{x}_P(t)$. Calcoliamo velocità e accelerazione di P nel riferimento cartesiano assegnato, derivando rispetto al tempo il vettore posizione e il vettore velocità di P :

$$(2.3.2) \quad \vec{v}_P = \frac{d\vec{x}_P}{dt} = \dot{\vec{x}}_P = \dot{x}_1 \vec{e}_x + \dot{x}_2 \vec{e}_y + \dot{x}_3 \vec{e}_z$$

$$(2.3.3) \quad \vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d^2\vec{x}_P}{dt^2} = \ddot{x}_1 \vec{e}_x + \ddot{x}_2 \vec{e}_y + \ddot{x}_3 \vec{e}_z,$$

dove abbiamo tenuto conto che i versori della base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ non dipendono dal tempo.

Definizione

Diremo coordinate cartesiane del punto P rispetto al riferimento $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la terna ordinata (x_1, x_2, x_3) delle componenti di \vec{x}_P . L'applicazione che associa ad ogni punto di \mathcal{A}_3 le sue coordinate cartesiane permette di identificare \mathcal{E}_3 con \mathbb{R}^3 . Si osservi, comunque, che tale identificazione dipende dal riferimento scelto.

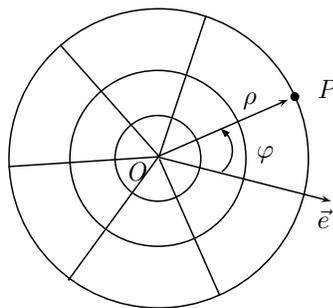


Figura 2.4.1: Coordinate polari piane

In tale riferimento, l'applicazione Φ dell'Es. 2.2.2 si rappresenta come

$$(2.3.4) \quad \begin{bmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \\ x_3(P) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1(O') \\ x_2(O') \\ x_3(O') \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(P) - x_1(O') \\ x_2(P) - x_2(O') \\ x_3(P) - x_3(O') \end{bmatrix}$$

Esercizio 2.3.1. Calcolare la rappresentazione in coordinate dell'applicazione affine di Riflessione dell'Esercizio 2.2.2, scegliendo un riferimento cartesiano $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, con \vec{e}_3 ortogonale al piano π . Calcolare gli autovalori e gli autovettori di $\hat{S}_{\vec{u}}$.

2.4 Riferimento polare in \mathcal{E}_2

A differenza di quanto abbiamo fatto nella sezione precedente, procediamo in senso inverso: prima definiamo le coordinate polari e poi introduciamo una base in E_2 adattata al riferimento.

Nel piano affine \mathcal{E}_2 introduciamo (vedi Fig. 2.4.1) un punto O , che chiameremo origine o *polo* e un asse (O, \vec{e}) che chiameremo *asse polare*. Per ogni punto $P \neq O$, consideriamo la sua distanza dal polo O , che chiameremo *raggio* di P e indicheremo con ρ e l'angolo φ , compreso tra l'asse polare e il vettore $(P - O)$, che chiameremo *anomalia* di P .

Definizione

Chiameremo coordinate polari del punto P la coppia ordinata (ρ, φ) , Tale sistema di coordinate è ben definito in $\mathcal{E}_2 \setminus \{O\}$ se $\rho > 0$ et $-\pi < \varphi \leq \pi$, oppure $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Con l'aiuto della Fig. 2.4.2 è facile ricavare le trasformazioni fra il riferimento polare e uno cartesiano con la stessa origine e con il versore \vec{e}_x parallelo ed equiverso all'asse polare. Esse sono date da

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan 2(x, y) \end{cases}$$

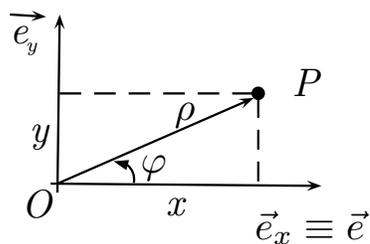


Figura 2.4.2: Trasformazione coordinate polari-cartesiane

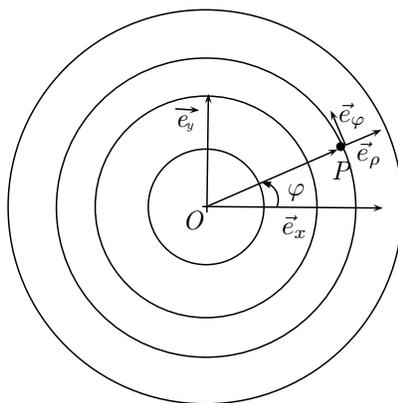


Figura 2.4.3: Base adattata alle coordinate polari

N.B. La funzione di due variabili $\arctan 2(x, y)$ è definita come l'applicazione da $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$(2.4.1) \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } y \geq 0, \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

Costruiamo la base dei versori adattata alle coordinate polari. A tale scopo, consideriamo il vettore posizione di P

$$\vec{x}_P = \rho(\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y)$$

e introduciamo i versori:

$$(2.4.2) \quad \vec{e}_\rho(P) := \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \rho} = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y = \frac{1}{\rho} \vec{x}_P \quad \text{versore radiale}$$

$$(2.4.3) \quad \vec{e}_\varphi(P) := \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \quad \text{versore trasverso,}$$

rappresentati nella Fig. 2.4.3.

Calcolando i prodotti scalari dei suddetti vettori è facile dimostrare che

Proposizione 2.4.1. (Fig.2.4.3) Il riferimento $(O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$, detto riferimento polare, è un riferimento ortonormale in \mathcal{E}_2 , nel quale il vettore posizione di un punto P si scrive

$$(2.4.4) \quad \vec{x}_P = (\vec{x}_P \cdot \vec{e}_\rho) \vec{e}_\rho + (\vec{x}_P \cdot \vec{e}_\varphi) \vec{e}_\varphi = \rho \vec{e}_\rho .$$

Si noti che, a differenza del riferimento cartesiano $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, quello polare dipende dal punto P poiché

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho(\varphi(P)), \quad \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi(P)),$$

cioè la direzione dei versori $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ dipende dal punto P .

Supponiamo che il punto P sia mobile e calcoliamo la sua velocità nel riferimento polare:

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{x}_P}{dt} = \dot{\vec{x}}_P = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho$$

Dalle equazioni (2.4.2) e (2.4.3) segue che

$$(2.4.5) \quad \begin{aligned} \dot{\vec{e}}_\rho &= -\sin \varphi \dot{\varphi} \vec{e}_x + \cos \varphi \dot{\varphi} \vec{e}_y = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\cos \varphi \dot{\varphi} \vec{e}_x - \sin \varphi \dot{\varphi} \vec{e}_y = -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho . \end{aligned}$$

Quindi

$$(2.4.6) \quad \vec{v}_P = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

Inoltre, il vettore accelerazione del punto P è dato da

$$(2.4.7) \quad \begin{aligned} \vec{a}_P &= \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\vec{e}}_\rho + (\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \dot{\vec{e}}_\varphi = \\ &= \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + (\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} (-\dot{\varphi}) \vec{e}_\rho = \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

2.5 Riferimento cilindrico in \mathcal{E}_3

È un riferimento di \mathcal{E}_3 che si può ottenere trasladando un riferimento polare piano lungo un qualsiasi asse ortogonale a tale piano. In alternativa, introduciamo un asse arbitrario (O, \vec{e}_r) detto *asse polare*, un piano ad esso ortogonale e passante per O , detto *piano equatoriale* e un generico semipiano con origine sull'asse polare, detto *semipiano polare*. Preso un punto generico $P \in \mathcal{A}_3$, consideriamo il semipiano per l'asse polare e passante per P , detto *semipiano meridiano*. Introduciamo i seguenti parametri

ρ	distanza di P dall'asse polare
φ	angolo fra il semipiano polare e il semipiano meridiano
z	quota di P rispetto al piano equatoriale

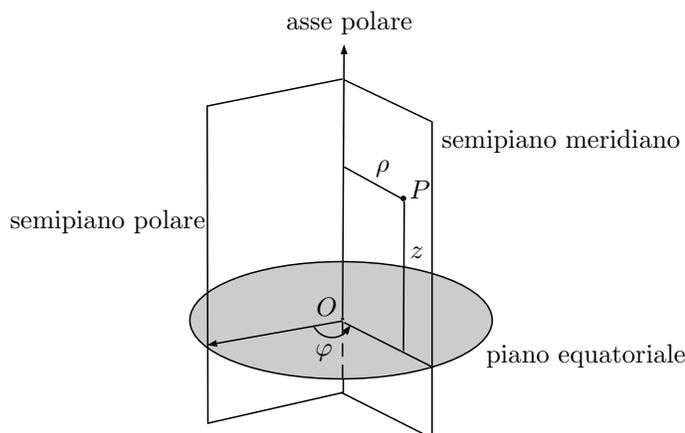


Figura 2.5.1: Coordinate cilindriche

Definizione

Chiameremo coordinate cilindriche del punto P la terna ordinata (ρ, φ, z) , con $\rho > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $z \in \mathbb{R}$. Tale sistema di coordinate è ben definito in $\mathcal{E}_3 \setminus \{\text{asse polare}\}$.

In ogni riferimento cartesiano $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, il vettore posizione di P rispetto ad O è dato da $\vec{x}_P = P - O = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$. Se ora consideriamo il particolare riferimento cartesiano ON , con asse (O, \vec{e}_x) coincidente con l'intersezione del semipiano polare con il piano equatoriale e asse (O, \vec{e}_z) coincidente con l'asse polare, come nella Fig. 2.5.2, possiamo subito ricavare le trasformazioni dirette e inverse tra i due sistemi di coordinate

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan 2(x, y) \\ z = z \end{cases}$$

Costruiamo una base adattata al riferimento cilindrico introducendo i versori:

$$(2.5.1) \quad \vec{e}_\rho := \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \rho} = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \quad \text{versore radiale ,}$$

$$(2.5.2) \quad \vec{e}_\varphi := \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \quad \text{versore trasverso ,}$$

rappresentati nella Fig. 2.5.3. Calcolando i prodotti scalari e vettoriali dei suddetti vettori è facile dimostrare che

Proposizione 2.5.1. *Il riferimento $(O; \vec{e}_\rho(P), \vec{e}_\varphi(P), \vec{e}_z)$, detto riferimento cilindrico, è un riferimento ortonormale destro in \mathcal{E}_3 , nel quale il vettore posizione di un punto P si scrive*

$$(2.5.3) \quad \vec{x}_P = (\vec{x}_P \cdot \vec{e}_\rho) \vec{e}_\rho + (\vec{x}_P \cdot \vec{e}_\varphi) \vec{e}_\varphi + (\vec{x}_P \cdot \vec{e}_z) \vec{e}_z = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z .$$

Si noti che, come il riferimento polare piano e a differenza del riferimento cartesiano, quello cilindrico dipende dal punto P poiché

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho(\varphi(P)), \quad \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi(P)),$$

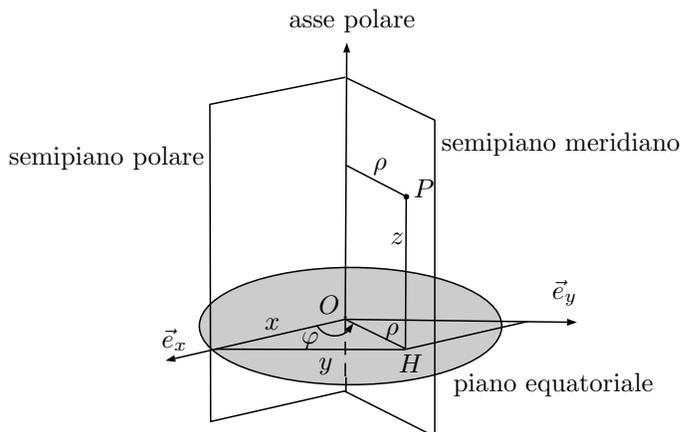


Figura 2.5.2: Trasformazione coordinate cilindriche-cartesiane

cioè la direzione dei versori \vec{e}_ρ , \vec{e}_φ dipende dal punto P .

Supponiamo che il punto P sia mobile e la sua equazione di moto sia $P(t) \simeq \vec{x}_P(t)$. Calcoliamo velocità e accelerazione di P nel riferimento cilindrico, derivando rispetto al tempo il vettore posizione e il vettore velocità di P e tenendo conto che i versori $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ dipendono da P e quindi dal tempo t .

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{x}_P}{dt} = \dot{\vec{x}}_P = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}\vec{e}_z$$

Dalle (2.4.2) e (2.4.3) segue che

$$\dot{\vec{e}}_\rho = -\sin\varphi\dot{\varphi}\vec{e}_x + \cos\varphi\dot{\varphi}\vec{e}_y = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\cos\varphi\dot{\varphi}\vec{e}_x - \sin\varphi\dot{\varphi}\vec{e}_y = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$$

Quindi

$$(2.5.4) \quad \vec{v}_P = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$$

Inoltre, il vettore accelerazione del punto P è dato da

$$(2.5.5) \quad \begin{aligned} \vec{a}_P &= \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\vec{e}}_\rho + (\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z = \\ &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + (\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}(-\dot{\varphi})\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{e}_z = \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z \end{aligned}$$

2.6 Riferimento sferico in \mathcal{E}_3

Come per il riferimento cilindrico, consideriamo un asse arbitrario, detto asse polare, un generico piano ortogonale all'asse, detto piano equatoriale e un generico semipiano per l'asse, detto semipiano

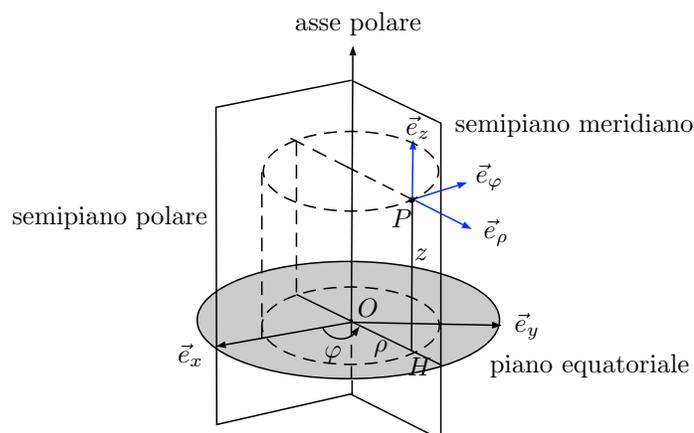


Figura 2.5.3: Base adattata alle coordinate cilindriche

polare. Chiamiamo O il punto d'intersezione dell'asse polare con il piano equatoriale e introduciamo i seguenti parametri, illustrati nella Fig. 2.6.1:

r	distanza di P dal polo O	<i>raggio</i>
θ	angolo tra l'asse polare e il vettore $P - O$	<i>colatitudine</i>
φ	angolo fra il semipiano polare e il semipiano meridiano	<i>longitudine</i>

Definizione

Chiameremo coordinate sferiche del punto P la terna ordinata (r, θ, φ) , con $r > 0$, $0 < \theta < \pi$ e $-\pi < \varphi \leq \pi$. Tale sistema di coordinate è ben definito in $\mathcal{E}_3 \setminus \{\text{asse polare}\}$.

Se ora consideriamo il particolare riferimento cartesiano con origine in O , asse (O, \vec{e}_x) coincidente con l'intersezione del semipiano polare con il piano equatoriale e asse (O, \vec{e}_z) coincidente con l'asse polare, come nella Fig. 2.6.2, possiamo ricavare le trasformazioni dirette e inverse tra i due sistemi di coordinate

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi = \arctan 2(x, y) . \end{cases}$$

Introduciamo i vettori:

$$(2.6.1) \quad \vec{e}_r := \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \quad \text{versore radiale}$$

$$(2.6.2) \quad \vec{e}_\theta := \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \quad \text{versore meridiano}$$

$$(2.6.3) \quad \vec{e}_\varphi := \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \quad \text{versore parallelo ,}$$

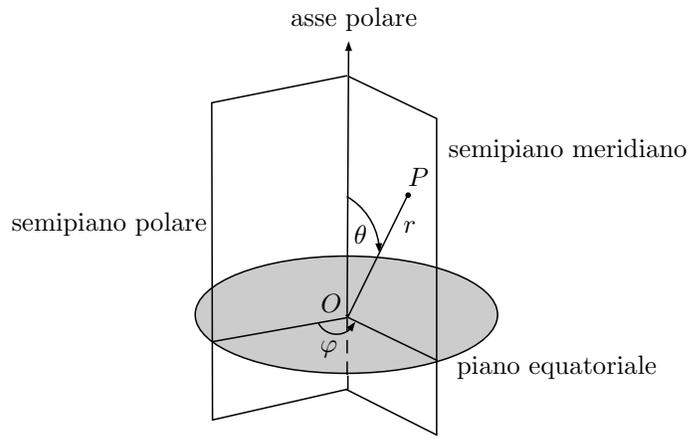


Figura 2.6.1: Coordinate sferiche

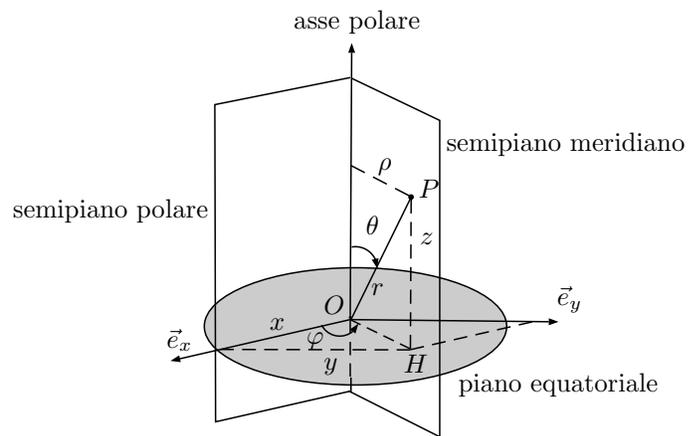


Figura 2.6.2: Trasformazione di coordinate cartesiane-sferiche

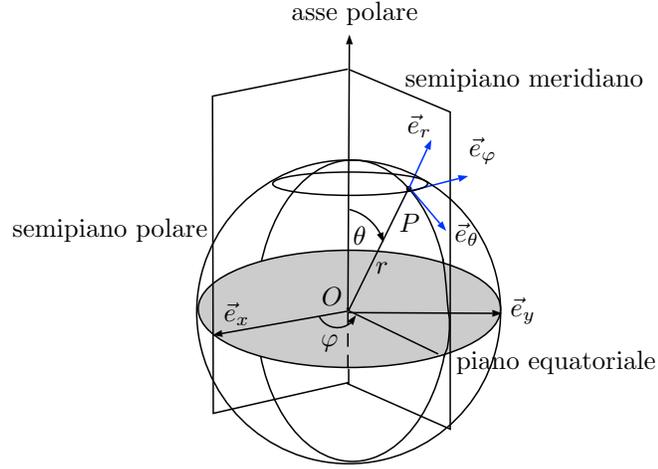


Figura 2.6.3: Base adattata alle coordinate sferiche

rappresentati nella Fig. 2.6.3. Calcolando i prodotti scalari e vettoriali dei suddetti vettori è facile dimostrare che

Proposizione 2.6.1. *Il riferimento $(O; \vec{e}_r(P), \vec{e}_\theta(P), \vec{e}_\varphi(P))$, detto riferimento sferico, è un riferimento ortonormale destro in \mathcal{E}_3 , nel quale il vettore posizione di un punto P si scrive*

$$(2.6.4) \quad \vec{x}_P = (\vec{x}_P \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r + (\vec{x}_P \cdot \vec{e}_\theta) \vec{e}_\theta + (\vec{x}_P \cdot \vec{e}_\varphi) \vec{e}_\varphi = r \vec{e}_r .$$

Si noti che, come il riferimento cilindrico, anche quello sferico dipende dal punto P poiché

$$\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta(P), \varphi(P)), \quad \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(\theta(P), \varphi(P)), \quad \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\theta(P), \varphi(P)),$$

cioè la direzione dei versori \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_φ dipende dal punto P .

Supponiamo che il punto P sia mobile e la sua equazione di moto sia $P(t) \simeq \vec{x}_P(t)$. Calcoliamo velocità e accelerazione di P nel riferimento sferico, derivando rispetto al tempo il vettore posizione e il vettore velocità di P .

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{x}_P}{dt} = \dot{\vec{x}}_P = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r$$

Dalle (2.4.2) e (2.4.3) segue che

$$\dot{\vec{e}}_r = (\cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z) \dot{\theta} + \sin \theta (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y) \dot{\varphi} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

Analogamente, si calcolano

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r + \cos \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta)$$

Quindi,

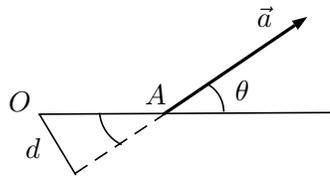
$$(2.6.5) \quad \vec{v}_P = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

Inoltre, il vettore accelerazione del punto P è dato da

$$(2.6.6) \quad \begin{aligned} \vec{a}_P &= \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\vec{e}}_\theta + (\dot{r} \sin \theta \dot{\varphi} + r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} + r \sin \theta \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + r \sin \theta \dot{\varphi} \dot{\vec{e}}_\varphi \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\theta + (2 \sin \theta \dot{r} \dot{\varphi} + 2r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} + r \sin \theta \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

2.7 Momenti di vettori applicati

Consideriamo un qualunque vettore applicato (A, \vec{a}) in un punto A di \mathcal{E}_3 .



$d :=$ braccio di \vec{a} rispetto ad O .

Momento polare di un vettore applicato

Scelto un punto O detto polo, è definito come

$$(2.7.1) \quad \vec{M}_O := (A - O) \times \vec{a}$$

e il suo modulo vale

$$|\vec{M}_O| = |A - O| |\sin \theta| |\vec{a}| = d |\vec{a}| .$$

Per esempio, se $\vec{a} = \vec{F}$, \vec{M}_O è il momento della forza \vec{F} rispetto ad O , se $\vec{a} = m\vec{v}$, \vec{M}_O è il momento della quantità di moto della particella (A, m) rispetto ad O .

Formula di trasporto

$$(2.7.2) \quad \vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \times \vec{a}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= (A - O') \times \vec{a} \\ &= [(A - O) + (O - O')] \times \vec{a} \\ &= (A - O) \times \vec{a} + (O - O') \times \vec{a} \\ &= \vec{M}_O + (O - O') \times \vec{a} \end{aligned}$$

□

Momento assiale di un vettore applicato

Il momento rispetto ad un asse $r = (O, \vec{e}_r)$, detto in breve momento assiale, è definito da

$$(2.7.3) \quad M_r = \overrightarrow{M_O} \cdot \vec{e}_r \quad O \in r .$$

È indipendente da O , purché $O \in r$. Infatti, preso $O' \in r$, risulta

$$\overrightarrow{M_{O'}} \cdot \vec{e}_r \stackrel{(2.7.2)}{=} \left(\overrightarrow{M_O} + (O - O') \times \vec{a} \right) \cdot \vec{e}_r = \overrightarrow{M_O} \cdot \vec{e}_r$$

poichè il vettore $O - O'$ è parallelo a \vec{e}_r (vedi la Legge di annullamento del prodotto misto).

Insieme di vettori applicati

Indichiamo con $\mathcal{S} = \{(A_i, \vec{a}_i), i = 1, \dots, N\}$ un insieme di vettori applicati in diversi punti di \mathcal{E}_3 . Se si tratta di forze, l'insieme \mathcal{S} si dice *sollecitazione* applicata all'insieme dei punti $\{A_i, i = 1, \dots, N\} \subset \mathcal{E}_3$

Risultante

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{a}_i$$

è un vettore *libero* $\in E_3$!

Momento risultante rispetto a un polo O

$$\overrightarrow{M_O} = \sum_{i=1}^N (A_i - O) \times \vec{a}_i$$

N.B. Si noti che $\overrightarrow{M_O}$ non è il momento di \vec{R} rs. ad O . Infatti \vec{R} , che è un vettore libero, non ha in generale punto di applicazione, quindi non ha senso calcolare il suo momento!

Formula di trasporto

$$(2.7.4) \quad \overrightarrow{M_{O'}} = \overrightarrow{M_O} + (O - O') \times \vec{R}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O'}} &= \sum_{i=1}^N (A_i - O') \times \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N [(A_i - O) + (O - O')] \times \vec{a}_i \\ &= \sum_{i=1}^N (A_i - O) \times \vec{a}_i + \sum_{i=1}^N (O - O') \times \vec{a}_i \\ &= \overrightarrow{M_O} + (O - O') \times \sum_{i=1}^N \vec{a}_i \\ &= \overrightarrow{M_O} + (O - O') \times \vec{R} \end{aligned}$$

□

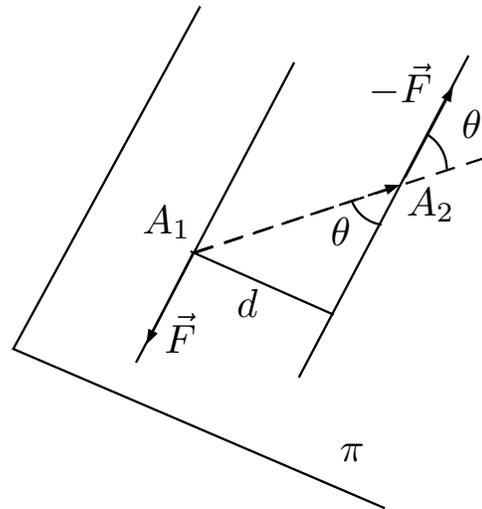
Corollario 2.7.1. Se $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_O = \vec{M}_{O'} \quad \forall O, O'$

Esempio 2.7.1. Coppia di forze

$$\mathcal{S} = \{(A_1, \vec{F}_1), (A_2, \vec{F}_2 = -\vec{F}_1)\}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 - \vec{F}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{M} = \begin{cases} \text{modulo: } |\vec{F}_1| d = |\vec{F}_2| d, \\ \text{direzione: } \perp \pi, \\ \text{verso: regola della mano destra} \end{cases}$$



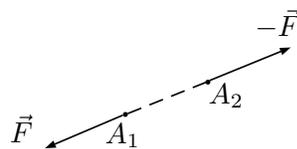
d = braccio della coppia

π = piano della coppia

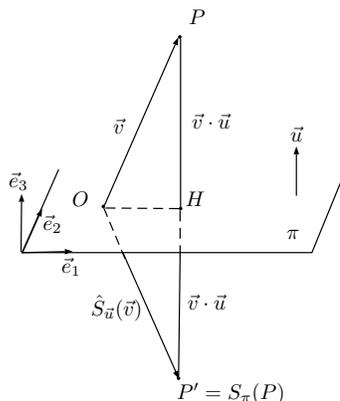
$$\text{Infatti } |\vec{M}_{A_1}| = |(A_2 - A_1) \times \vec{F}_2| = |A_2 - A_1| |\sin \theta| |\vec{F}_2| = d |\vec{F}_1|.$$

N.B. Si osservi che il momento di una coppia si denota semplicemente con \vec{M} (tralasciando il polo) poichè esso è indipendente dal polo, come segue immediatamente dalla formula di trasporto e dal fatto che il vettore risultante di una coppia è nullo per definizione.

Esempio 2.7.2. Coppia a braccio nullo: $d = 0 \Rightarrow \vec{M} = \vec{0}$.



2.8 Soluzione dell'Es. 2.2.2



- S_π è affine poiché soddisfa la condizione (4.2.6). Infatti,

$$S_\pi(P) - S_\pi(Q) = \emptyset + \hat{S}_{\vec{u}}(P - O) - (\emptyset + \hat{S}_{\vec{u}}(Q - O)) = \hat{S}_{\vec{u}}(P - Q) \quad \forall P, Q \in \mathcal{E}_3.$$

- I punti fissi sono tutti e soli i punti del piano π . Infatti, l'equazione dei punti fissi è

$$P = S_\pi(P) = O + \hat{S}_{\vec{u}}(P - O) = \emptyset + \left(P - \emptyset - 2(\vec{u} \cdot (P - O))\vec{u} \right)$$

ed ha soluzione se e solo se $\vec{u} \cdot (P - O) = 0$, che è l'equazione (2.2.2) del piano passante per O ed ortogonale a \vec{u} .

- Basta verificare che $\hat{S}_{\vec{u}}$ soddisfa le condizioni (15.4.2) e (2.1.24). Dalla proprietà di simmetria e dal Teorema spettrale segue che $\hat{S}_{\vec{u}}$ ammette una base ON di autovettori (vedi l'ultimo punto).
- Scriviamo l'equazione agli autovettori per l'operatore lineare $\hat{S}_{\vec{u}}$

$$(2.8.1) \quad \vec{v} - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow (1 - \lambda)\vec{v} - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} = 0$$

Ci sono due alternative:

- Il vettore \vec{v} è proporzionale a \vec{u} , cioè $\vec{v} = c\vec{u}$, $c \in \mathbb{R}$. Allora, l'equazione si riduce a

$$(1 - \lambda)c\vec{u} - 2(c\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{u} = 0$$

ed ha soluzione se e solo se $\lambda = -1$. Dunque, l'autospazio con autovalore $\lambda = -1$ è quello generato dal versore \vec{u}

$$V_{-1} = \text{Span}(\vec{u}) \quad \Rightarrow \quad \dim(V_{-1}) = 1.$$

- I vettori \vec{v} e \vec{u} sono linearmente indipendenti. Allora l'Eq. (2.8.1) ha soluzione solo se i coefficienti della combinazione lineare sono entrambi nulli. Quindi,

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

Dunque, l'autospazio con autovettore $\lambda = 1$ è il complemento ortogonale di V_{-1} in E_3 , cioè

$$V_1 = V_{-1}^\perp = \{\vec{v} \in E_3 : \vec{v} \cdot \vec{u} = 0\} \Rightarrow \dim(V_1) = 2$$

- Poichè

$$E_3 = V_1 \oplus V_{-1} ,$$

come base ON di autovettori per \hat{S} basta prendere $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ con \vec{e}_1, \vec{e}_2 versori ortogonali in V_1 ed $\vec{e}_3 = \vec{u}$. Su tale base, la matrice rappresentativa di \hat{S} sarà

$$[\hat{S}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\hat{S}) = -1 .$$