

## Capitolo 3

# Vincoli e gradi di libertà di un sistema meccanico

In questo capitolo, per comodità didattica, considereremo i modelli meccanici come insiemi discreti di punti materiali e introdurremo in modo informale i concetti che descrivono il piazzamento nello spazio di tali modelli. Comunque, avvisiamo il lettore che quanto diremo vale anche per il modello dei continui rigidi, modello che esamineremo in dettaglio più avanti.

### 3.1 Spazio delle configurazioni

I modelli meccanici che studieremo, saranno immersi nello spazio affine euclideo tridimensionale  $\mathcal{E}_3$ . Chiameremo *configurazione* o *piazzamento* di un modello l'insieme delle posizioni di tutti i punti di tale modello e supporremo che ogni configurazione sia individuata univocamente da un numero sufficiente di parametri indipendenti che chiameremo coordinate *libere* o *lagrangiane* del modello.

**Definizione 3.1.1.** *Lo spazio delle configurazioni di un modello meccanico è l'insieme dei parametri necessari e sufficienti ad individuare tutte le configurazioni che il modello può assumere.*

**Esempio 3.1.1.** *Lo spazio delle configurazioni di un punto materiale  $(P, m)$  libero nello spazio coincide con  $\mathbb{R}^3$ . Come coordinate libere possiamo prendere, ad esempio, le coordinate cartesiane del punto  $P$ ,  $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ , rispetto a un riferimento cartesiano ortogonale fissato.*

**Esempio 3.1.2.** *Lo spazio delle configurazioni di due cariche elettriche libere è  $\mathbb{R}^6 \setminus \{x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2\}$ .*

**Esempio 3.1.3.** *Lo spazio delle configurazioni di un insieme di  $N$  punti materiali liberi  $\{(P_i, m_i) \mid i = 1, \dots, N\}$  in  $\mathcal{E}_3$  è l'iperspazio  $\mathbb{R}^{3N}$  (privato dell'insieme dei punti di collisione). Infatti, dette  $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_N, y_N, z_N)$  le coordinate cartesiane di ciascuno dei punti materiali in  $\mathcal{E}_3$ , possiamo introdurre in  $\mathbb{R}^{3N}$  il punto geometrico  $\mathcal{P}$  di coordinate  $(x_1, y_1, z_1; \dots; x_N, y_N, z_N)$ . Allora, le posizioni di  $\mathcal{P} = (P_1, P_2, \dots, P_N)$  in  $\mathbb{R}^{3N}$  equivalgono alle configurazioni dell'insieme  $\{P_1, \dots, P_N\}$  in  $\mathcal{E}_3$ .*

D'ora in poi denoteremo con  $\mathcal{C}$  lo spazio delle configurazioni di un modello meccanico. Osserviamo che il numero delle coordinate libere del modello coincide con la dimensione di  $\mathcal{C}$ .

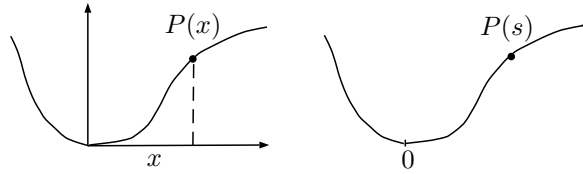
## 3.2 Vincoli e loro classificazione

Chiameremo vincolo un qualsiasi dispositivo che limita le configurazioni che un modello meccanico può assumere e/o che limita la velocità dei suoi punti.

**Esempio 3.2.1.** Per un punto materiale soggetto a stare su un piano  $\Pi \subset \mathcal{E}_3$ ,  $\mathcal{C} \equiv \mathbb{R}^2$  e le coordinate libere sono due.

**Esempio 3.2.2.** Consideriamo un punto materiale vincolato a stare sul sostegno di una curva regolare  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}_2$ . In questo caso  $\mathcal{C} \equiv \cup_{t \in \mathbb{R}} \gamma(t)$  e la coordinata libera è una.

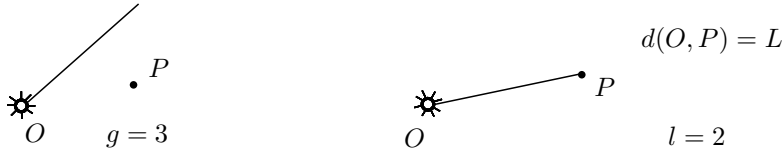
Nel caso dell'esempio 3.2.2 possiamo scegliere una delle coordinate cartesiane del punto  $P$ , oppure l'ascissa curvilinea di  $P$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .



**N.B.** La scelta delle coordinate dipende di volta in volta dal problema da risolvere. Trovare un insieme di coordinate che meglio si “adattano” al problema specifico è spesso una questione delicata che necessita di una buona dose di “intuito”.

Gli esempi precedenti possono indurre a pensare erroneamente che lo spazio delle configurazioni abbia sempre una struttura di spazio vettoriale. Invece ha una struttura matematica di varietà differenziabile.

**Esempio 3.2.3.** Consideriamo un “pendolo ad asta”, cioè un punto materiale  $(P, m)$  posto ad un estremo di un’asta rigida di lunghezza  $L$  e massa trascurabile, che ha l’altro estremo fissato in un punto  $O$ .



Il punto  $P$  è vincolato dall’asta a stare sulla superficie sferica di raggio  $L$  e centro  $O$ . Quindi, il suo spazio delle configurazioni è

$$\mathcal{C} = S^2,$$

cioè una varietà bidimensionale e il punto  $P$  ha 2 coordinate libere. Possiamo scegliere, ad esempio, le coordinate sferiche  $\theta$  e  $\varphi$  del punto  $P$ ,  $0 < \theta < \pi$  e  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . Si osservi che la coordinata radiale  $r$  non è libera perché è vincolata dall’equazione  $r = L$ .

Introduciamo, ora, la seguente fondamentale classificazione dei vincoli:

**vincoli olonomi**, sono quelli che limitano solo le configurazioni accessibili ad un sistema e sono detti anche vincoli di *posizione* e sono esprimibili mediante relazioni del tipo

$$(3.2.1) \quad f(\mathcal{P}, t) \geq 0;$$

**vincoli di mobilità**, sono quelli che limitano anche le velocità che i punti di un sistema meccanico possono assumere e sono rappresentati da relazioni del tipo

$$(3.2.2) \quad f(\mathcal{P}, \dot{\mathcal{P}}, t) \geq 0 .$$

Tutti i vincoli degli esempi precedenti sono vincoli olonomi.

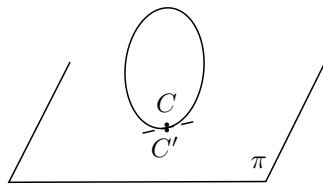
I vincoli di mobilità si possono suddividere a loro volta in due classi:

**vincoli integrabili**, sono quelli che possono essere integrati rispetto al tempo, riducendosi a vincoli olonomi;

**vincoli non integrabili**, sono quelli che non possono essere integrati rispetto al tempo, quindi rimangono vincoli genuini sulle velocità. Sono detti, anche, vincoli *anolonomi*.

Presentiamo un esempio familiare di vincolo anolonomo.

**Esempio** Vincolo di puro rotolamento su un piano:  $\vec{v}_C = \vec{v}_{C'}$



Un disco (di spessore trascurabile) che rotola *senza strisciare* su di un piano è soggetto ad un vincolo anolonomo. Infatti il vincolo di puro rotolamento costringe il punto di contatto  $C$  tra il disco e il piano ad avere velocità nulla. È, quindi, un vincolo di mobilità che, si può dimostrare, non può essere integrato e quindi non si può esprimere mediante un vincolo sulle configurazioni. Si veda la Sez. 4.10.

$C$ : punto del disco a contatto con il piano  $\pi$

$C'$ : punto di  $\pi$  a contatto con il disco

quindi  $\vec{v}_{C'} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_C = \vec{0}$ .

Invece, come vedremo nella Sez. 4.9.2, il vincolo di puro rotolamento di un disco posto in un piano e che rotola lungo una guida (curva nel piano) è un vincolo di mobilità integrabile, quindi si riduce a un vincolo olonomo.

Da ora in poi considereremo solo vincoli olonomi, per i quali possiamo introdurre la seguente

**Definizione 3.2.1.** *I gradi di libertà,  $l$ , di un sistema materiale soggetto a vincoli olonomi, sono pari al numero delle coordinate libere (o indipendenti) sufficienti a individuare univocamente tutte le configurazioni che il sistema può assumere.*

Quindi, possiamo affermare che

$$l = \dim \mathcal{C}$$

**Esempio**

- 1) Un punto materiale libero nello spazio ha 3 gradi di libertà.
- 2) Lo stesso punto vincolato a stare su un piano ha 2 gradi di libertà.
- 3) Lo stesso punto vincolato a stare su una curva ha 1 grado di libertà.

4) Il pendolo ad asta ha 2 gradi di libertà.

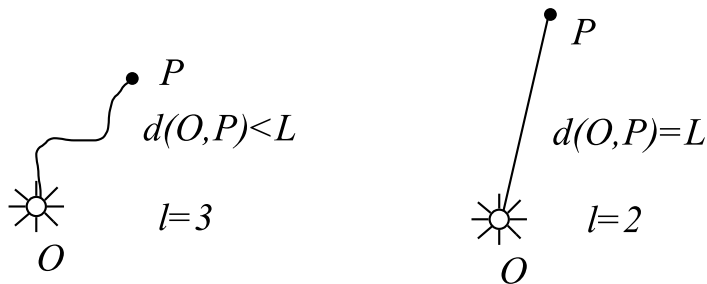
I vincoli si possono ulteriormente distinguere in:

**vincoli bilateri**, sono esprimibili da equazioni (es: il pendolo ad asta,  $x^2 + y^2 + z^2 = L^2$ );

**vincoli unilateri**, sono esprimibili da disequazioni (es: il pendolo a filo,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq L^2$ ).

Le configurazioni in cui è soddisfatta l'equazione si dicono configurazioni di *confine*, quelle in cui è soddisfatta la disequazione stretta, *ordinarie*. Si osservi che un sistema con vincoli unilateri ha un diverso numero di gradi di libertà a seconda che si trovi in una configurazione ordinaria o una di confine.

**Esempio 3.2.4.** Consideriamo un “pendolo a filo”, cioè un punto materiale posto ad un estremo di un filo inestensibile di lunghezza  $L$  e massa trascurabile, che ha l'altro estremo fissato in un punto  $O$ . Per questo modello si ha

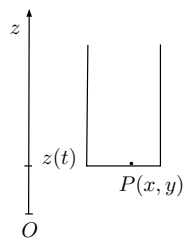


Dunque, in un problema a vincoli unilateri bisogna studiare separatamente le configurazioni di confine e quelle ordinarie.

I vincoli olonomi possono essere ulteriormente distinti in due classi, a seconda del loro eventuale moto rispetto all'osservatore:

**vincoli fissi**, sono quelli la cui espressione matematica (equazione o disequazione) è indipendente dal tempo;

**vincoli mobili**, sono quelli, al contrario, la cui espressione matematica dipende esplicitamente dal tempo.



Un punto materiale vincolato a stare sul pavimento di un ascensore che si muove con un moto assegnato. Se  $z$  è la quota del pavimento dell'ascensore, l'equazione di vincolo è  $z=z(t)$ .

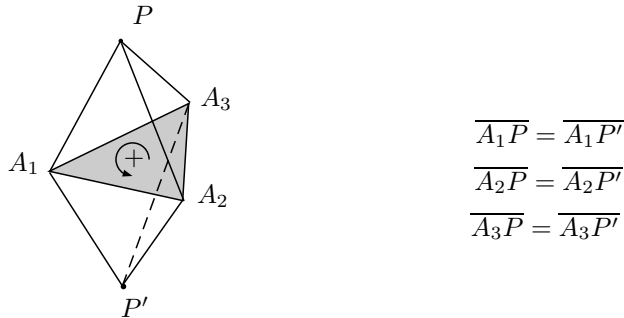
Infine, possiamo ancora distinguere fra:

**vincoli interni**, quelli che vincolano tra loro parti interne del modello;

**vincoli esterni**, quelli che vincolano parti del modello con agenti esterni.

### 3.3 Gradi di libertà di un rigido

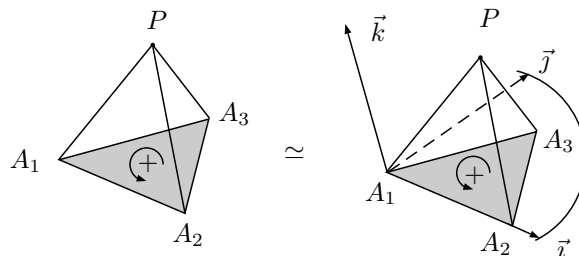
Consideriamo, ora, un sistema *rigido* (asta esclusa), cioè un insieme di punti materiali le distanze dei quali siano invariabili, libero nello spazio  $\mathcal{E}_3$  e calcoliamo i suoi gradi di libertà. Innanzitutto, osserviamo che la configurazione di un rigido nello spazio è univocamente determinata se si conosce la posizione di soli 3 dei suoi punti non allineati ( $A_1, A_2, A_3$ ) e un'*orientazione* del rigido. Infatti, la posizione di un generico punto  $P$  del rigido, che ha distanze fissate dai 3 punti ( $A_1, A_2, A_3$ ) deve coincidere con il vertice di uno dei due tetraedri che hanno come base il triangolo  $\widehat{A_1 A_2 A_3}$ .



Se assegno un'orientazione al triangolo, per esempio chiamo positiva la faccia del triangolo sulla quale i vertici  $A_1, A_2, A_3$  sono disposti in senso antiorario, e negativa l'altra faccia, posso selezionare il punto  $P$  o il punto  $P'$  che rimarrà in ogni configurazione dalla parte della stessa faccia (positiva o negativa) in cui si trova nella configurazione di riferimento.

Dunque, i gradi di libertà di un rigido libero sono quelli di 3 punti non allineati che si trovano a distanze mutue fissate. In altre parole, i gradi di libertà di un triangolo rigido nello spazio  $\mathcal{E}_3$ .

Una schematizzazione equivalente di un rigido, è quella della terna *solidale*. Si tratta di una terna rigida ortonormale solidale al rigido: per esempio, fissata al rigido tramite una saldatura. È facile convincersi che le configurazioni di un rigido sono tutte e sole quelle di una terna ad esso solidale, considerando l'equivalenza (in infiniti modi) tra il tetraedro e una terna rigida costruita, ad esempio, prendendo l'origine in uno dei vertici, come asse  $\vec{i}$  uno degli spigoli, come asse  $\vec{j}$  un asse ortogonale ad  $\vec{i}$  in modo che il piano  $(\vec{i}, \vec{j})$  contenga la base del tetraedro, e  $\vec{k}$  ortogonale a tale faccia, in modo che la terna  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sia una terna destra.



#### Spazio solidale ad un rigido

L'insieme dei punti di  $\mathcal{E}_3$  che conservano la stessa distanza dai punti del rigido, qualunque sia la sua configurazione, costituisce lo *spazio solidale* ad esso. Tale spazio è dato da tutti e soli quei punti di

$\mathcal{E}_3$  le cui coordinate, rispetto a una terna solidale non dipendono dalla particolare configurazione assunta dal rigido. Ad esempio, il centro di un anello rigido, che non è un punto materiale ma un punto geometrico solidale all'anello.

### Metodo del bilancio

Per calcolare i gradi di libertà di un triangolo rigido, utilizzeremo il cosiddetto *metodo del bilancio*. Esso consiste nel calcolare i gradi di libertà di un sistema materiale vincolato, calcolando la differenza tra i gradi di libertà del sistema immaginato privo di alcuni (o tutti i) vincoli e il numero delle equazioni dei vincoli *efficaci* tolti. Daremo la definizione di vincoli efficaci a pag. 36.

Indicheremo con

- $l$  = gradi di libertà del modello vincolato;
- $r$  = numero delle equazioni dei vincoli efficaci da togliere;
- $g$  = gradi di libertà del modello ottenuto togliendo i vincoli suddetti.

Come vedremo in seguito, vale l'equazione di bilancio

$$(3.3.1) \quad l = \max \{g - r, 0\}$$

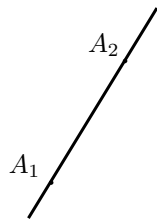
**Esempio.** Nel caso di 3 punti non allineati a distanza fissata si ha che le equazioni di vincolo sono 3:  $\overline{A_1A_2} = d_{12}$ ,  $\overline{A_1A_3} = d_{13}$ ,  $\overline{A_2A_3} = d_{23}$ , dove  $d_{12}, d_{13}, d_{23}$  sono le mutue distanze tra i 3 punti. Quindi,

$$g = 3 \cdot 3 = 9, \quad r = 3, \quad \Rightarrow l = 9 - 3 = 6$$

Pertanto, vale la

**Proposizione 3.3.1.** *Un rigido nello spazio 3D ha 6 gradi di libertà, tranne che nel caso di un'asta, cioè di un rigido costituito da un insieme di punti allineati. Infatti, un'asta ha 5 gradi di libertà e verrà definita: caso "degenere".*

**N.B.** Nel caso di un'asta, cioè di un insieme allineato di punti materiali, bastano 2 punti a distanza fissata per individuarne ogni configurazione. In tal caso, si ha 1 equazione di vincolo

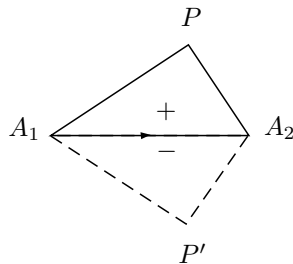


$$\overline{A_1A_2} = d_{12}$$

Quindi

$$g = 2 \cdot 3 = 6, \quad r = 1 \Rightarrow l = 6 - 1 = 5$$

Nel caso particolare di un rigido piano (lamina) posto in un piano, la posizione di un generico punto  $\mathcal{P}$  della lamina è univocamente determinata se si conoscono le posizioni di 2 punti  $A_1$  e  $A_2$  del rigido più l'orientazione del segmento  $\overline{A_1A_2}$ .



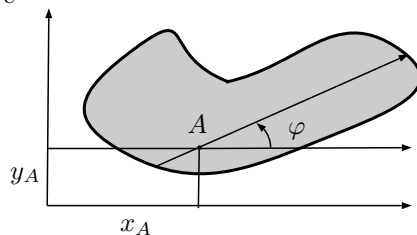
Dunque, i gradi di libertà di una lamina su un piano sono quelli dei due punti  $A_1, A_2$  che si trovano in un piano a distanza fissata ( $\overline{A_1 A_2} = d_{12}$ ). Di nuovo, con il metodo del bilancio troviamo che

$$l = g - r = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

Quindi una lamina e anche un qualunque rigido piano, ad esempio un telaio piano, un'asta, ha 3 g.l. e il suo spazio delle configurazioni è:

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}^2 \times S^1,$$

dove con  $S^1$  denotiamo la circonferenza di raggio unitario. Infatti, possiamo scegliere come coordinate libere



coordinate libere =  $\{x_A, y_A, \varphi\}$

$$x_A, y_A \in \mathbb{R}$$

$$-\pi < \varphi \leq \pi$$

**N.B.** Mentre nello spazio 3D l'asta è un caso degenere, nel piano non lo è poiché ha 3 g.l. come tutti gli altri rigidi piani.

### Compatibilità ed efficacia dei vincoli

Vediamo nell'esempio seguente che il metodo del bilancio richiede molta cautela.

**Esempio** Consideriamo un punto materiale  $P = (x, y, z)$  obbligato a stare contemporaneamente su due piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$  di equazioni, rispettivamente

$$(3.3.2) \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 & \pi_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 & \pi_2 \end{cases}$$

È ovvio che, se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  sono paralleli e distinti il sistema (3.3.2) non ha alcuna soluzione, quindi non esiste nessuna configurazione possibile per il punto  $P$ . Inoltre, se i piani sono coincidenti, è chiaro che il vincolo efficace è soltanto uno. Allora avremo la situazione seguente:

- se  $\pi_1 \neq \pi_2$  **et**  $\pi_1 \parallel \pi_2$  nessuna configurazione;
- se  $\pi_1 \neq \pi_2$  **et**  $\pi_1$  non  $\parallel \pi_2$ ,  $g = 3$ ,  $r = 2 \Rightarrow l = 3 - 2 = 1$  ;

- se  $\pi_1 = \pi_2$ ,  $g = 3$ ,  $r = 1 \Rightarrow l = 3 - 1 = 2$ .

Quindi, prima di utilizzare l'equazione di bilancio (3.3.1) per il calcolo di  $l$ , è necessario assicurarsi che il sistema delle equazioni vincolari, cioè dei vincoli *semplici* a cui è soggetto il modello, abbia almeno una soluzione e che non ci siano vincoli inefficaci. Per garantire tale situazione, richiederemo che le equazioni di vincolo soddisfino due condizioni: la compatibilità e l'efficacia. Introduciamo le seguenti notazioni:

$\mathcal{C}_L$ : spazio delle configurazioni del sistema (parzialmente) libero, cioè privo di alcuni (o di tutti i) vincoli,  $\dim \mathcal{C}_L = g$ . Le coordinate dei punti di tale spazio, denotate con  $\{(x_1, \dots, x_g)\}$ , saranno dette coordinate *sovrabbondanti*.

$\mathcal{C}_V$ : spazio delle configurazioni del sistema vincolato,  $\dim \mathcal{C}_V = l$ , cioè l'insieme dei punti soluzione del sistema dato dalle  $r$  equazioni scalari,

$$(3.3.3) \quad \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_g) = 0 \\ \vdots \\ f_r(x_1, \dots, x_g) = 0 \end{cases}$$

La condizione di compatibilità garantisce che il modello vincolato ammetta almeno una configurazione possibile; quella di efficacia che non venga conteggiato un vincolo il cui effetto è già assicurato dagli altri vincoli. Matematicamente, le due condizioni si esprimono nel seguente modo .

1. Compatibilità:

$$(3.3.4) \quad \mathcal{C}_V \neq \emptyset$$

2. Efficacia:

$$(3.3.5) \quad \text{rango} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{|\mathcal{C}_V} = \max ,$$

cioè il rango della matrice Jacobiana (a  $r$  righe e  $g$  colonne) valutata nei punti di  $\mathcal{C}_V$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} \text{grad} f_1 \\ \text{grad} f_2 \\ \vdots \\ \text{grad} f_r \end{bmatrix}_{|\mathcal{C}_V}$$

deve essere massimo, cioè pari al minimo fra  $(r, g)$ .

**N.B.** Il rango della matrice Jacobiana è una funzione sullo spazio  $\mathcal{C}_V$ . Esso coincide con la dimensione dello spazio vettoriale tangente (l'insieme dei vettori tangenti alla varietà delle configurazioni) in un suo punto fissato. Quindi, può succedere che esso sia non massimo solo in alcuni punti di tale spazio, cioè che la dimensione dello spazio tangente in quei punti sia inferiore alla dimensione della varietà. Tali punti singolari sono detti, in Meccanica, configurazioni a vincoli *inefficaci*.

Possiamo, adesso, classificare i sistemi vincolati che soddisfano le condizioni di compatibilità ed efficacia, nelle seguenti classi:



- $r < g$  sistema ipostatico       $l = g - r > 0$  (ammette almeno una coordinata libera)  
 $r = g$  sistema isostatico       $l = g - r = 0$  (tolto un qualunque vincolo il modello diventa ipostatico)  
 $r > g$  sistema iperstatico       $l = 0$  (esistono  $r - g$  vincoli, tolti i quali il modello diventa isostatico)

**N.B.** In molti testi di Scienza delle Costruzioni e in alcuni di Meccanica Razionale, i sistemi ipostatici vengono chiamati *labili*. Inoltre, per i modelli iperstatici, la differenza  $i = r - g$  si dice grado di iperstaticità del modello.

#### Dimostrazione del metodo del bilancio nel caso di sistemi ipostatici ( $r < g$ )

Consideriamo il modello privo di alcuni vincoli e parametrizzato da  $g$  coordinate sovrabbondanti  $(x_1, x_2, \dots, x_{g-1}, x_g)$ . Supponiamo che i vincoli mancanti si esprimano tramite  $r$  equazioni vincolari

$$(3.3.6) \quad \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_g) = 0 \\ \vdots \\ f_r(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_g) = 0 \end{cases}$$

compatibili ed efficaci, cioè soddisfano le (3.3.4) e (3.3.5).

Sotto tali ipotesi, il teorema di Dini assicura che possiamo risolvere *localmente* il sistema rispetto a  $r$  variabili, diciamo  $(x_1, \dots, x_r)$ , e scrivere

$$(3.3.7) \quad \begin{cases} x_1 = h_1(x_{r+1}, \dots, x_g) \\ x_2 = h_2(x_{r+1}, \dots, x_g) \\ \vdots \\ x_r = h_r(x_{r+1}, \dots, x_g) \end{cases} .$$

In tal modo, rimangono libere le  $(g - r)$  coordinate  $(x_{r+1}, \dots, x_g)$ , mentre  $(x_1, \dots, x_r)$  si esprimono come loro funzioni. Quindi, il numero delle coordinate libere del sistema vincolato è pari a:

$$l = g - r$$

**N.B.** Nella pratica, le  $l$  coordinate libere  $(x_{r+1}, \dots, x_g)$  possono essere scomode da usare. Allora, può essere più conveniente scegliere altre coordinate  $(q_1, \dots, q_l)$ , a condizione che siano legate alle  $(x_{r+1}, \dots, x_g)$  da una trasformazione differenziabile

$$(3.3.8) \quad \begin{cases} x_{r+1} = h_{r+1}(q_1, \dots, q_l) \\ \vdots \\ x_g = h_g(q_1, \dots, q_l) \end{cases}$$

A questo punto, anche le coordinate residue  $(x_1, \dots, x_r)$  possono essere scritte in termini di  $(q_1, \dots, q_l)$ , concatenando le (3.3.7) e (3.3.8).

**N.B.** Le condizioni di compatibilità ed efficacia dei vincoli devono essere verificate anche nel caso di una sola equazione vincolare. Infatti, può succedere che un'equazione vincolare che non soddisfi la condizione 2 di efficacia della pagina precedente, rappresenti un vincolo doppio anziché

semplice. A questo proposito si veda l'Esempio 1.7 di pag.14 in [Ughi, 2003], dove si utilizza il fatto che

$$x_0^2 + y_0^2 = 0 \iff \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

### 3.4 Grado di un vincolo

Classifichiamo, ora, alcuni vincoli, introducendo il concetto di grado o molteplicità di un vincolo.

**Definizione 3.4.1.** *Chiameremo grado di vincolo,  $v$ , il numero delle equazioni compatibili ed efficaci che traducono le condizioni vincolari esercitate da un singolo dispositivo vincolare e diremo che un vincolo con  $v = 1$  è semplice, con  $v = 2$  è doppio, con  $v = N$  è  $N$ -plo.*

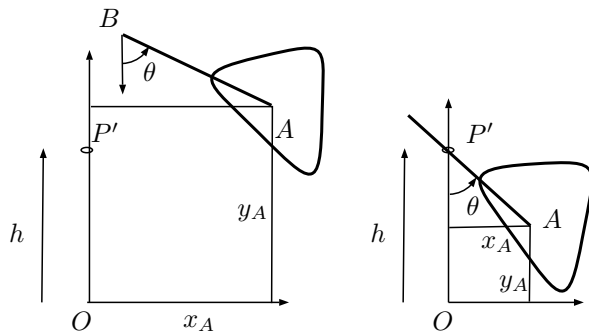
#### Vincoli piani su un rigido ( $g = 3$ )

Illustriamo alcuni vincoli *piani*, applicati ad un rigido piano (lamina o asta). Ricordiamo che se tale rigido è libero,  $g = 3$  e lo spazio delle configurazioni è dato da

$$\mathcal{C}_L = \{(x_A, y_A, \theta)\}$$

#### Vincoli semplici ( $v=1$ )

- Passaggio per un punto fisso  $P'$ : il punto del rigido a contatto con il vincolo varia.

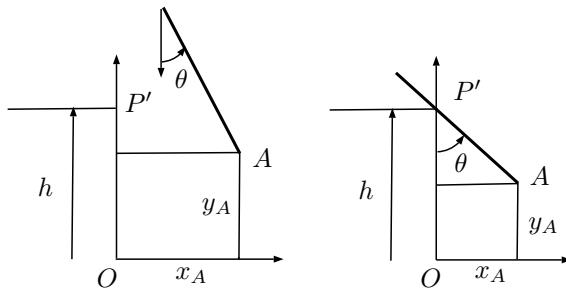


anellino o cerniera  
cilindrica "bucata"  
 $l = 2$

Bilatero:

$$x_A = (h - y_A) \tan \theta \quad \text{se } \theta \neq \pm\pi/2$$

$$y_A = h \quad \text{se } \theta = \pm\pi/2$$



config. di confine:  $l = 2$   
config. ordinarie:  $l = 3$

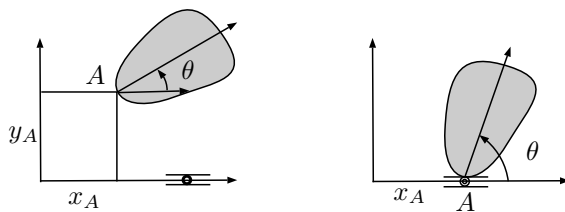
Unilatero:

$$x_A \geq (h - y_A) \tan \theta \quad \text{se } \theta \neq \pm\pi/2$$

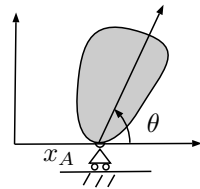
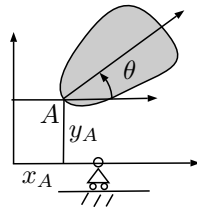
$$y_A \geq h \quad \text{se } \theta = \pm\pi/2$$

modello ipostatico.

- Appoggio o carrello con cerniera o cerniera scorrevole: il punto del rigido a contatto con il vincolo non varia.



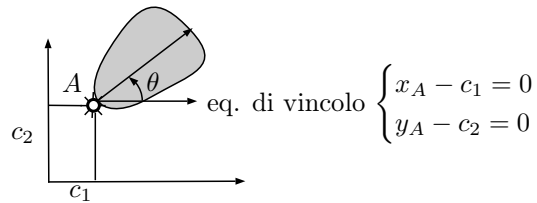
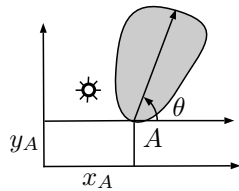
Bilatero,  $y_A = 0$ ,  $l = 2$ .



Unilatero,  $y_A \geq 0$   
 config. di confine:  $l = 2$   
 config. ordinarie:  $l = 3$

### Vincoli doppi (v=2)

- cerniera fissa:

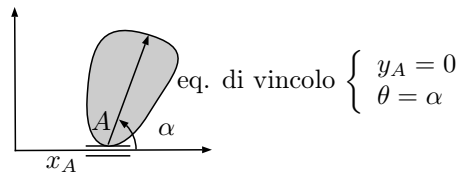
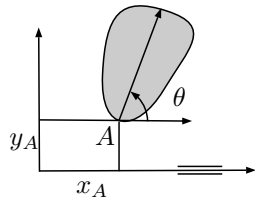


eq. di vincolo  $\begin{cases} x_A - c_1 = 0 \\ y_A - c_2 = 0 \end{cases}$

1.  $\mathcal{C}_V = \{-\pi < \theta \leq \pi\} = S^1$
2.  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 2 = \max \Rightarrow v = 2$   
 $l = 3 - 2 = 1$

modello ipostatico;

- pattino: carrello senza cerniera o incastro scorrevole o doppio pendolo:



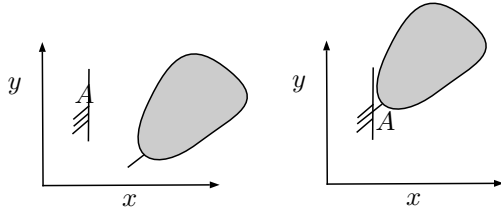
eq. di vincolo  $\begin{cases} y_A = 0 \\ \theta = \alpha \end{cases}$

1.  $\mathcal{C}_V = \{-\infty < x_A < \infty\} = \mathbb{R}$
2.  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 2 = \max \Rightarrow v = 2$   
 $l = 3 - 2 = 1$

modello ipostatico

**Vincolo triplo (v=3)**

- incastro:



eq. di vincolo

$$\begin{cases} x_A = c_1 \\ y_A = c_2 \\ \theta = \alpha \end{cases}$$

1.  $\mathcal{C}_V = \{x_A = c_1, y_A = c_2, \theta = \alpha\} \equiv 1$  sola configurazione possibile

$$2. \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 3 = \max \Rightarrow v = 3$$

$l = 0$       modello isostatico

**Vincoli nello spazio su un rigido (g = 6)**

Lo spazio delle configurazioni di un rigido libero è:  $\mathcal{C}_L = \{(x_A, y_A, z_A, \theta_1, \theta_2, \theta_3)\} = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ , dove  $SO(3)$  è il gruppo di Lie delle matrici  $(3 \times 3)$  ortogonali speciali, cioè con determinante pari a 1.

**Vincolo semplice (v=1)**

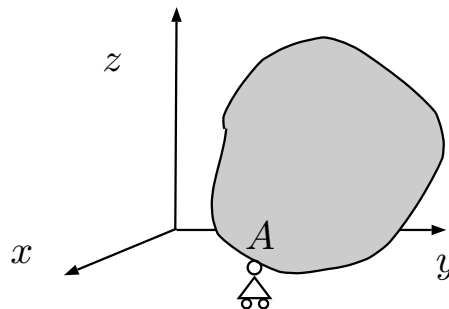
- appoggio su una superficie fissa

eq. di vincolo

$$z_A = 0$$

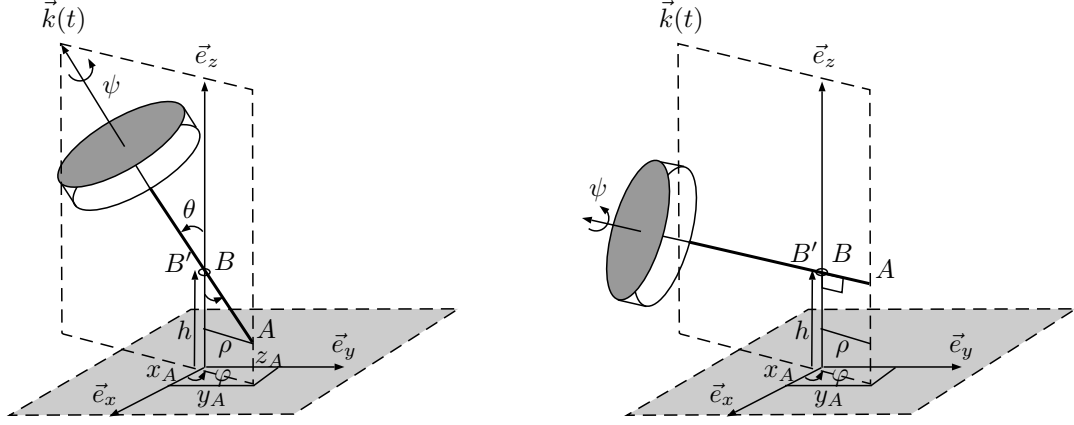
$$\text{rango} = 1 = \max$$

$$v = 1 \Rightarrow l = 5$$



### Vincoli doppi (v=2)

- passaggio per un punto o anellino fisso o cerniera sferica bucata fissa



$$0 \leq \theta_1 = \varphi < 2\pi, 0 < \theta_2 = \theta < \pi, 0 \leq \theta_3 = \psi < 2\pi$$

Se  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  le equazioni di vincolo sono

$$\begin{cases} x_A = (h - z_A) \tan \theta \cos \varphi \\ y_A = (h - z_A) \tan \theta \sin \varphi \end{cases}$$

Se  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , et

$$\begin{cases} \varphi \neq \pm\pi/2 & \begin{cases} z_A = h \\ y_A = x_A \tan \varphi \end{cases} \\ \varphi = \pm\pi/2 & \begin{cases} z_A = h \\ x_A = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$1. \mathcal{C}_V = \{(z_A, \theta \neq \frac{\pi}{2}, \varphi, \psi)\} \cup \{(x_A, \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi \neq \pm\pi/2, \psi)\} \cup \{(y_A, \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = \pm\pi/2, \psi)\}$$

$$2. \text{ Se } \theta \neq \pi/2, \text{ allora } \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tan \theta \cos \varphi & -(z_A - h) \tan \theta \sin \varphi & (z_A - h) \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \theta} & 0 \\ 0 & 1 & \tan \theta \sin \varphi & (z_A - h) \tan \theta \cos \varphi & (z_A - h) \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \theta} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ Se } \theta = \pi/2 \text{ e } \varphi \neq \pm\pi/2, \text{ allora } \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tan \varphi & -1 & 0 & \frac{x_A}{\cos^2 \varphi} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

invece,

$$\text{ se } \theta = \pi/2 \text{ e } \varphi = \pm\pi/2, \text{ allora } \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

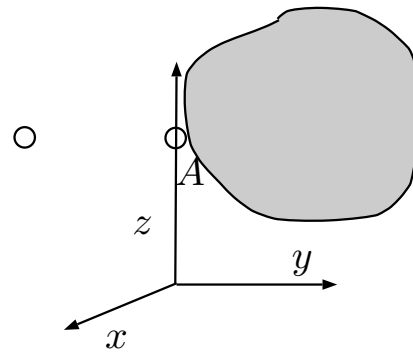
In tutti i casi, rango = 2 = max  $\Rightarrow v = 2$ . Dunque,  $l = 4$  e il modello è ipostatico.

- cerniera sferica scorrevole lungo un asse fisso

$$\text{eq. di vincolo } \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \end{cases}$$

$$\text{rango} = 2 = \text{max}$$

$$v = 2 \Rightarrow l = 4$$



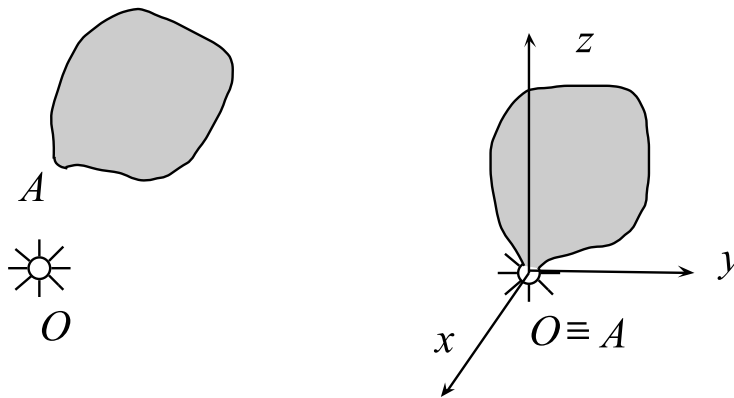
### Vincolo triplo (v=3)

- cerniera sferica fissa

$$\text{eq. di vincolo } \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ z_A = 0 \end{cases}$$

$$\text{rango} = 3 = \text{max}$$

$$v = 3 \Rightarrow l = 3$$



### Vincolo quadruplo (v=4)

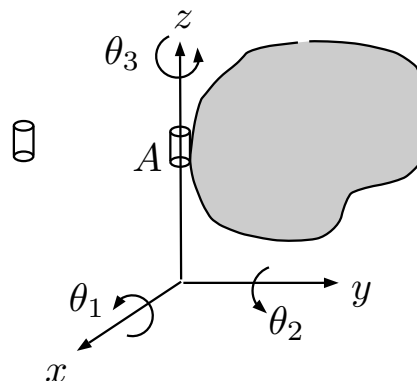
- cerniera cilindrica scorrevole lungo un asse fisso o collare cilindrico o manicotto

eq. di vincolo

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{rango} = 4 = \text{max}$$

$$v = 4 \Rightarrow l = 2$$



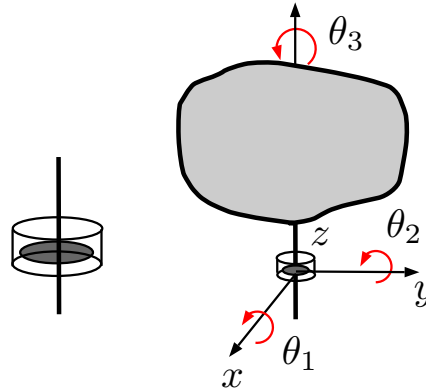
**Vincoli quintupli (v=5)**

- cerniera cilindrica fissa

$$\text{eq. di vincolo } \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ z_A = 0 \\ \theta_1 = \text{cost} \\ \theta_2 = \text{cost} \end{cases}$$

$$\text{rango} = 5 = \text{max}$$

$$v = 5 \Rightarrow l = 1$$



**N.B.** Nei problemi piani useremo sempre cerniere cilindriche: quelle fisse, sono vincoli *doppi* nel piano mentre sono vincoli *quintupli* nello spazio.

- incastro scorrevole lungo un asse fisso o pattino  
eq. di vincolo

$$(3.4.1) \quad \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{rango} = 5 = \text{max}$$

$$v = 5 \Rightarrow l = 1$$

**Vincolo sestuplo (v=6)**

- incastro  
eq. di vincolo

$$(3.4.2) \quad \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ z_A = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{rango} = 6 = \text{max}$$

$$v = 6 \Rightarrow l = 0$$



### 3.5 Sovrapposizione di più vincoli

Supponiamo di imporre ad un modello meccanico con  $g$  gradi di libertà,  $m$  vincoli, ognuno dei quali abbia grado di vincolo  $v_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

Allora, il numero delle equazioni vincolari (che supponiamo compatibili)

$$v = \sum_{k=1}^m v_k$$

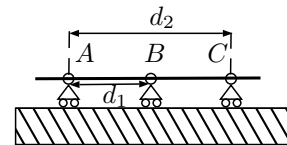
sarà detto *grado di vincolo apparente*.

Si potrebbe pensare ingenuamente che  $v$  coincida con  $r$ , cioè con il numero delle equazioni vincolari efficaci e, quindi, che i gradi di libertà del modello si calcolino come

$$(3.5.1) \quad l = \max \{g - v, 0\}$$

Tale procedura è sbagliata come dimostra il seguente esempio.

**Esempio.** Asta con 3 appoggi semplici.



$$v = 3 \cdot 1 = 3 \quad g - v = 0, \text{ tuttavia } l = 1!$$

**Esercizio 3.5.1.** Verificare la condizione di efficacia dei vincoli dell'Esempio precedente nelle configurazioni di confine.

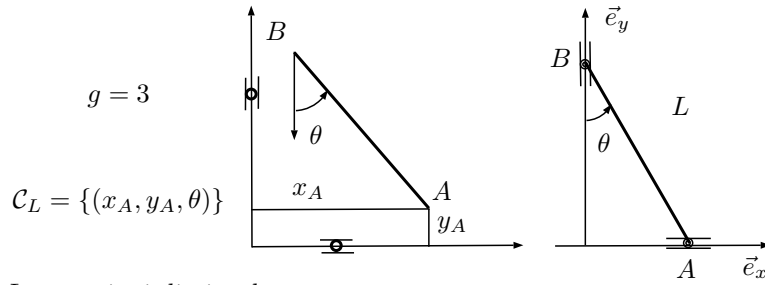
Il motivo dell'errore è che quando si sovrappongono più vincoli, alcuni di essi possono diventare inefficaci, cioè possono limitare configurazioni già limitate da altri vincoli. In questo caso,  $v > r$ , quindi usare la (3.5.1) significherebbe contare alcuni vincoli più di una volta. Pertanto, anche nel caso di sovrapposizione di più vincoli multipli, la formula da usare per il calcolo dei gradi di libertà del modello vincolato è sempre la (3.3.1), dove  $r$  è il numero delle equazioni vincolari efficaci. Tale numero risulta in generale  $r \leq v$  ed è detto *grado di vincolo effettivo*. In particolare, ci sono due possibilità che dipendono dal rango della matrice Jacobiana dei vincoli. Precisamente:

- se  $\text{rango} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{|C_V} = \max$ , allora  $r \equiv v$ , tutti i vincoli sono efficaci;
- se  $\text{rango} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{|C_V} < \max$ , allora  $r \equiv \text{rango}$ , solo  $r < v$  vincoli sono efficaci.

Vediamo, ora, alcuni esempi di sovrapposizione di vincoli per modelli piani.

#### Sovrapposizione di due vincoli semplici ( $v=2$ )

**Esempio 3.5.1.** Scala con 2 appoggi bilateri su 2 guide ortogonali fra loro.



Le equazioni di vincolo sono

$$\begin{cases} x_B = 0 \\ y_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - L \sin \theta = 0 \\ y_A = 0 \end{cases}$$

quindi  $v = 2$

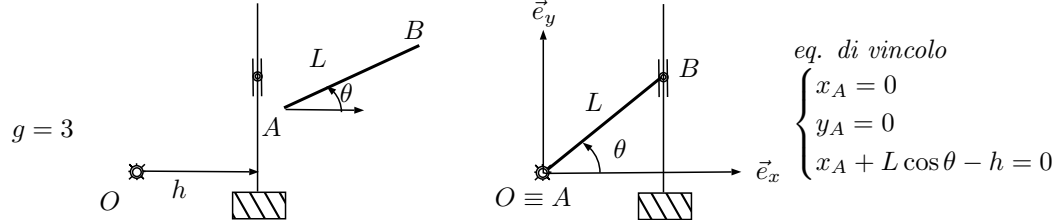
$$1. \mathcal{C}_V = \{-\pi < \theta \leq \pi\} = S^1$$

$$2. \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -L \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{|\mathcal{C}_V} \Rightarrow \text{rango} = 2 = \max$$

$$r = v = 2 \quad l = 3 - 2 = 1 \quad \text{modello ipostatico}$$

### Sovrapposizione di un vincolo doppio e di uno semplice ( $v=3$ )

**Esempio 3.5.2.** Cerniera fissa + carrello su una guida a distanza  $h$  dalla cerniera.



$$1. \text{Compatibilità: } \cos \bar{\theta} = \frac{h}{L}, \text{ se } h \leq L;$$

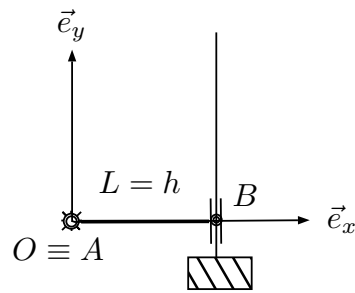
$$2. \text{Efficacia: } \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -L \sin \bar{\theta} \end{bmatrix} \Rightarrow \det \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{|\mathcal{C}_V} = -L \sin \bar{\theta}$$

Dunque;

- se  $h < L \Rightarrow \bar{\theta} \neq 0$ ,  $r = v$ ,  $l = 0 \Rightarrow$  modello isostatico

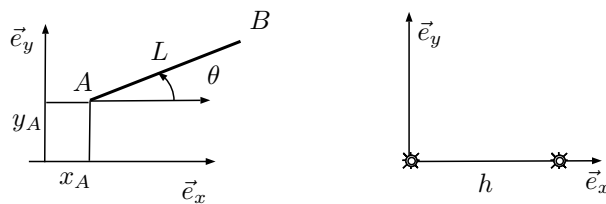
$$\mathcal{C}_V = \left\{ \bar{\theta} = \arccos \frac{h}{L} \right\} \text{ oppure } \mathcal{C}_V = \left\{ \bar{\theta} = -\arccos \frac{h}{L} \right\}$$

- se  $h = L \Rightarrow \bar{\theta} = 0$ ,  $\det \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{|\mathcal{C}_V} = 0 \Rightarrow$  rango = 2 < max  $\Rightarrow$  vincoli inefficaci,  $r = 2 < v$

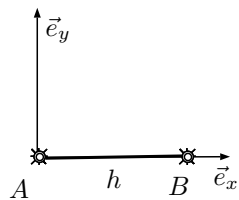


### Sovrapposizione di due vincoli doppi (v=4)

**Esempio 3.5.3.** Due cerniere fisse a distanza  $h$  fra loro.



$$g = 3 \quad \mathcal{C}_L = \{(x_A, y_A, \theta)\}$$



eq. di vincolo

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ x_B = h \\ y_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ x_A + L \cos \theta = h \\ y_A + L \sin \theta = 0 \end{cases}$$

1. *Compatibilità:*  $h = L \quad \mathcal{C}_V = \{x_A = y_A = \theta = 0\}$

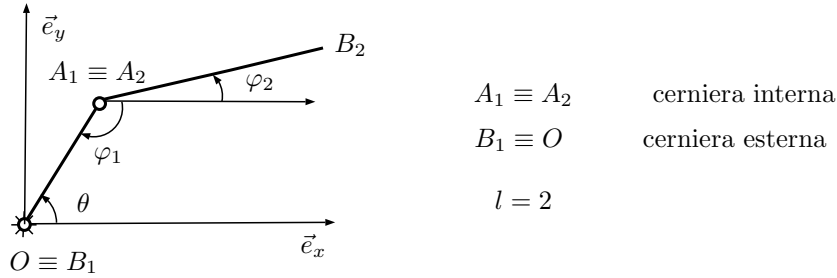
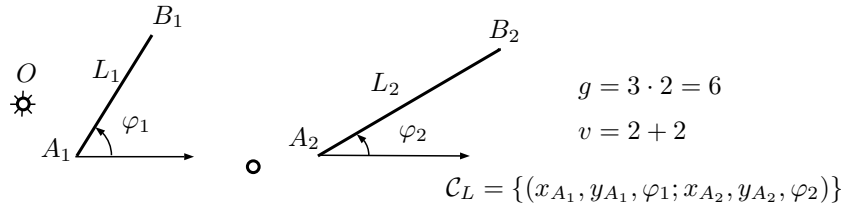
2. *Efficacia:*  $\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -L \sin \theta \\ 0 & 1 & L \cos \theta \end{bmatrix}_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L \end{bmatrix} \quad \text{rango} = 3 = \max$

$$r = v = 4 > g, \quad l = 0$$

modello iperstatico (1 volta).

### Esempio

1. 2 aste + 1 cerniera interna + 1 cerniera esterna fissa: **pendolo doppio**



In coordinate sovrabbondanti le eq. di vincolo si scrivono:

$$\begin{cases} x_{A_1} = x_{A_2} & \text{cerniera} \\ y_{A_1} = y_{A_2} & \text{interna} \\ x_{B_1} = 0 & \text{cerniera} \\ y_{B_1} = 0 & \text{esterna} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A_1} - x_{A_2} = 0 \\ y_{A_1} - y_{A_2} = 0 \\ x_{A_1} + L_1 \cos \varphi_1 = 0 \\ y_{A_1} + L_1 \sin \varphi_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A_2} = -L_1 \cos \varphi_1 \\ y_{A_2} = -L_1 \sin \varphi_1 \\ x_{A_1} = -L_1 \cos \varphi_1 \\ y_{A_1} = -L_1 \sin \varphi_1 \end{cases}$$

(a) Compatibilità: è sempre soddisfatta. Lo spazio delle configurazioni del pendolo doppio risulta

$$\mathcal{C}_V = \{-\pi < \varphi_1 \leq \pi\} \times \{-\pi < \varphi_2 \leq \pi\} = S^1 \times S^1,$$

cioè il toro bidimensionale.

(b) Efficacia:

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -L_1 \sin \varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_1 \cos \varphi_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{|\mathcal{C}_V} \Rightarrow \text{rango} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] = 4 = \max$$

Infatti

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Pertanto, il pendolo doppio ha gradi di libertà pari a

$$l = g - r = 6 - 4 = 2$$

ed è un modello ipostatico in ogni configurazione di  $\mathcal{C}_V = S^1 \times S^1$ . Come coordinate libere possiamo scegliere i 2 angoli

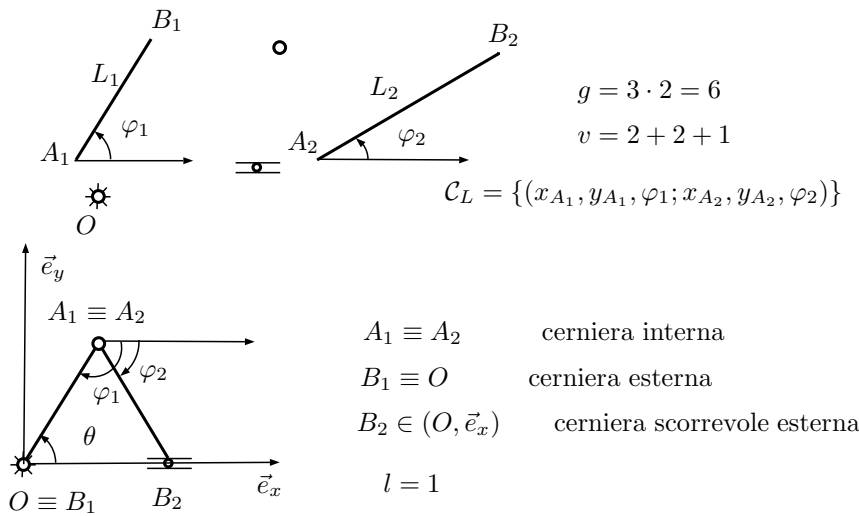
$$c.l. = (\varphi_1, \varphi_2) ,$$

oppure i 2 angoli

$$c.l. = (\theta, \varphi_2), \text{ dove } \theta = \pi + \varphi_1$$

**N.B.** In questo caso, come in molti altri casi, una volta determinato lo spazio delle configurazioni del sistema vincolato  $\mathcal{C}_V$ , conviene scegliere coordinate libere più "comode" di quelle scelte inizialmente come coordinate sovrabbondanti.

2. Ai vincoli del punto 1 aggiungiamo un appoggio semplice, bilatero sull'asse  $x$  in modo da ottenere il modello **biella-manovella**. Inoltre, per semplicità di calcolo, supponiamo  $L_1 = L_2 = L$ .

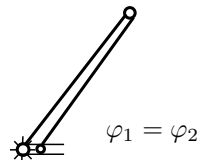


Le eq. di vincolo sono

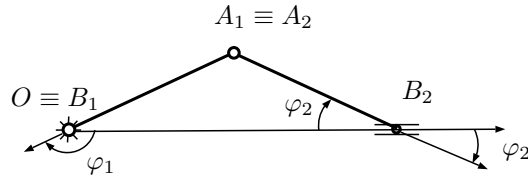
$$(3.5.2) \quad \begin{cases} x_{A_1} = x_{A_2} \\ y_{A_1} = y_{A_2} \\ x_{B_1} = 0 \\ y_{B_1} = 0 \\ y_{B_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A_1} - x_{A_2} = 0 \\ y_{A_1} - y_{A_2} = 0 \\ x_{A_1} + L \cos \varphi_1 = 0 \\ y_{A_1} + L \sin \varphi_1 = 0 \\ y_{A_2} + L \sin \varphi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A_2} = x_{A_1} \\ y_{A_2} = y_{A_1} \\ x_{A_1} = -L \cos \varphi_1 \\ y_{A_1} = -L \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 \end{cases}$$

- (a) Compatibilità: il sistema (3.5.2) ammette sempre soluzioni date da

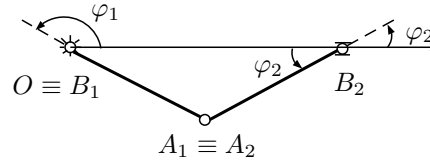
1) se  $\varphi_1 = \varphi_2$



2) se  $\varphi_1 + \varphi_2 = -\pi$



3) se  $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$



(b) Efficacia

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -L \sin \varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L \cos \varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare, con un po' di calcoli, che il rango della matrice Jacobiana precedente è  $max$  se e solo se

$$(3.5.3) \quad \cos \varphi_2 \neq 0 .$$

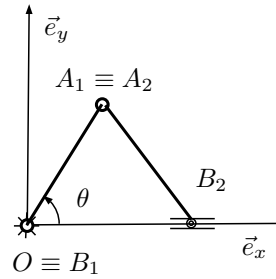
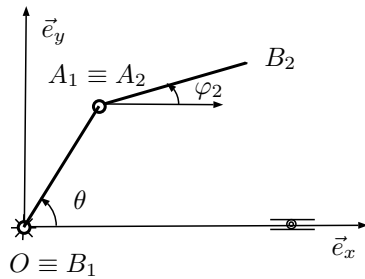
Possiamo, però, procedere in un altro modo, più semplice dal punto di vista computazionale, utilizzando i risultati del punto 1. Precisamente, partiamo dal modello parzialmente svincolato del pendolo doppio.

$$\mathcal{C}_L = \{(\theta, \varphi_2)\}$$

$$g = 2$$

$$\mathcal{C}_V = \{-\pi < \theta \leq \pi\}$$

$$l = 2 - 1 = 1$$



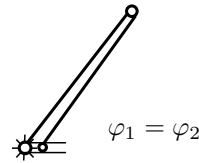
e vincoliamo il punto  $B_2$  con un appoggio semplice sull'asse  $x$ , in modo che

$$(3.5.4) \quad 0 = y_{B_2} = y_{A_2} + L \sin \varphi_2 = L \sin \theta + L \sin \varphi_2$$

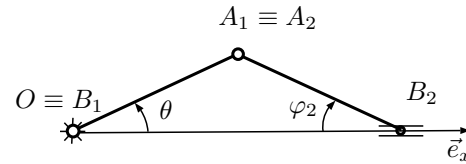
Basta, ora, studiare l'unica eq. vincolare (3.5.4) al posto del sistema (3.5.2).

(a) Compatibilità: l'eq. ammette sempre le soluzioni

1)  $\varphi_2 = \theta - \pi$

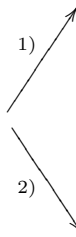


2)  $\varphi_2 = -\theta$



(b) Efficacia

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{C_V} = [L \cos \theta, L \cos \varphi_2] =$$



$$[L \cos \theta, L \cos(\theta - \pi)] = [L \cos \theta, -L \cos \theta]$$

$$[L \cos \theta, L \cos(-\theta)] = [L \cos \theta, L \cos \theta]$$

È immediato concludere che il vincolo è inefficace se e solo se

$$\cos \theta = 0 \iff \theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

Pertanto, per evitare problemi, possiamo escludere le configurazioni a vincoli inefficaci dallo spazio delle configurazioni del sistema biella-manovella e dire che esso è dato da

$$C_V = S^1 \setminus \left( \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} \right\} \right),$$

che è la circonferenza unitaria privata dei punti  $\pm \frac{\pi}{2}$ , cioè privata delle configurazioni in cui biella e manovella sono parallele tra loro e ortogonali alla guida.

Si vedrà in statica e in dinamica che tali configurazioni creano problemi, per esempio, nel calcolo delle reazioni vincolari.

Concludendo, per il modello biella manovella, analizzato prendendo come modello svincolato il pendolo doppio, risulta

- se  $\theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $g = 2$ ,  $v = r = 1$ ,  $l = 1 \Rightarrow$  modello ipostatico
- se  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $g = 2$ ,  $v = 1$ ,  $r = 0 \Rightarrow$  vincoli inefficaci

Naturalmente, lo stesso risultato, ma con più fatica, si ottiene partendo dal modello totalmente svincolato, come al punto 1.

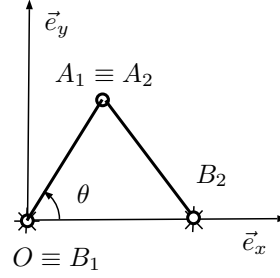
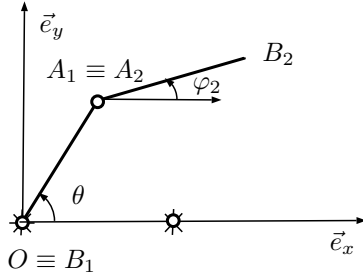
3. 2 aste + 2 cerniere esterne fisse a distanza  $d$ : **arco a 3 cerniere**.

Procediamo come al punto precedente, partendo dal pendolo doppio e aggiungendovi una cerniera esterna fissa in  $B_2$

$$\mathcal{C}_L = \{(\theta, \varphi_2)\}$$

$$g = 2$$

$$l = 2 - 2 = 0$$



Le equazioni di vincolo sono ( $v = 2$ ):

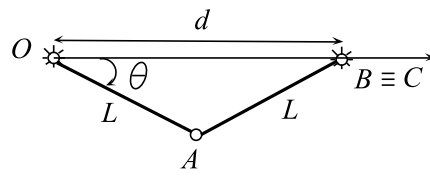
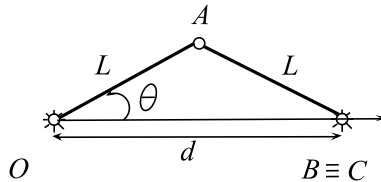
$$\begin{cases} y_{B_2} = 0 \\ x_{B_2} = d \end{cases} \quad \begin{cases} L \sin \theta + L \sin \varphi_2 = 0 \\ L \cos \theta + L \cos \varphi_2 = d \end{cases}$$

(a) Compatibilità: le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} \varphi_2 = -\theta \\ 2L \cos \theta = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_2 = -\theta \\ \cos \theta = \frac{d}{2L} \end{cases} \quad \text{se } d \leq 2L$$

Quindi  $\mathcal{C}_V \neq \emptyset$  se e solo se  $d \leq 2L$ , come è ovvio dalla figura. Sotto questa condizione di compatibilità, lo spazio delle configurazioni del modello è dato da un'unica configurazione, cioè

$$(3.5.5) \quad \mathcal{C}_V = \left\{ \bar{\theta} = \arccos \frac{d}{2L} \right\} \quad \text{oppure} \quad \mathcal{C}_V = \left\{ \bar{\theta} = -\arccos \frac{d}{2L} \right\}$$



(b) Efficacia

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} L \cos \theta & L \cos \varphi_2 \\ -L \sin \theta & -L \sin \varphi_2 \end{bmatrix}_{|\mathcal{C}_V} = L \begin{bmatrix} \cos \bar{\theta} & \cos \bar{\theta} \\ -\sin \bar{\theta} & \sin \bar{\theta} \end{bmatrix}_{|\mathcal{C}_V}$$

Quindi,

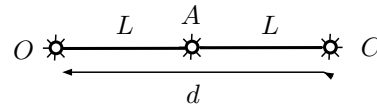
$$\det \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{|\mathcal{C}_V} = 2L^2 \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} = \pm 2L^2 \frac{d}{2L} \sqrt{1 - \left( \frac{d}{2L} \right)^2} = \pm Ld \sqrt{1 - \left( \frac{d}{2L} \right)^2}$$



Pertanto, i vincoli sono inefficaci nella configurazione

$$d = 2L$$

in cui rango =  $r = 1 < v$



Anche in questo caso, vedremo che tale configurazione crea problemi nel calcolo delle reazioni vincolari.

In conclusione, per l'arco a 3 cerniere risulta che:

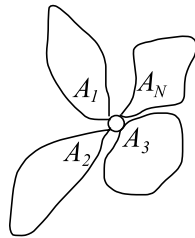
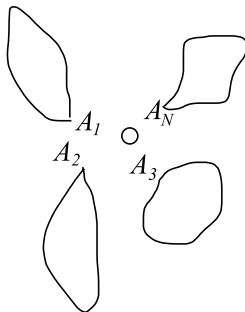
- se  $d < 2L$ ,  $g = 2$ ,  $v = r = 2$ ,  $l = 0$ , modello isostatico
- se  $d = 2L$ ,  $g = 2$ ,  $v = 2$ ,  $r = 1$ , vincoli inefficaci.

### 3.6 Modelli articolati

Introduciamo la seguente

**Definizione 3.6.1.** *I modelli articolati piani sono i sistemi meccanici costruiti con lamine e/o aste giacenti su uno stesso piano e vincolate con cerniere cilindriche, ciascuna avente il proprio asse ortogonale al piano suddetto.*

Ora, vediamo qual è l'effetto delle cerniere su tali modelli. Calcoliamo, ad esempio, il grado di vincolo di una cerniera interna (o nodo) in cui convergono  $N$  lamine ( $g = 3N$ ,  $\mathcal{C} = \{(x_1, y_1, \theta_1, \dots, x_n, y_n, \theta_n)\}$ )



$$\begin{aligned} A_1 &= (x_1, y_1) \\ A_2 &= (x_2, y_2) \\ &\vdots \\ A_N &= (x_N, y_N) \end{aligned}$$

Scriviamo le equazioni di vincolo:

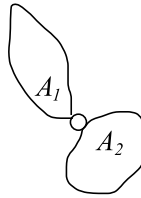
$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ x_2 = x_3 \\ y_2 = y_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} = x_N \\ y_{N-1} = y_N \end{cases} \quad v = 2(N - 1)$$

Se invece che interna, la cerniera è esterna (fissa), devo aggiungere altre 2 equazioni di vincolo ( $x_1 = c_1$ ,  $y_1 = c_2$ ) quindi

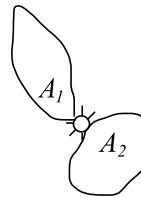
$$v = 2N - 2 + 2 = 2N$$

**Esempio 3.6.1.**  $N = 2$ 

1. se la cerniera è interna  $\implies v = 2$



2. se la cerniera è fissata a terra  $\implies v = 4$ .

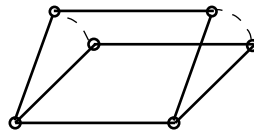


*Si noti che, in questo caso, il vincolo è contemporaneamente esterno ed interno.*

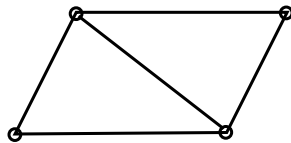
**Sistemi articolati lineari:** modelli fatti da aste vincolate mediante cerniere.

Si classificano in:

- modelli deformabili

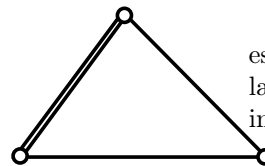
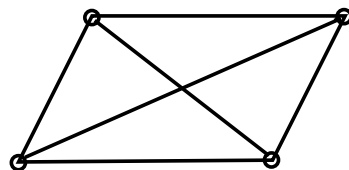


- modelli rigidi o indeformabili o *travature reticolari* che, a loro volta, si dividono in:
  - travature strettamente indeformabili



togliendo qualunque asta il sistema diventa deformabile

- travature ad aste sovrabbondanti,



esiste almeno un'asta, tolta la quale il sistema rimane indeformabile

**Problema 3.6.1.** Qual è il numero delle aste di una travatura strettamente indeformabile avente  $N$  cerniere (nodi)?

Soluzione: Consideriamo gli  $N$  nodi come i punti di un sistema libero e le aste come i vincoli semplici da imporre per “irrigidire” il sistema. Dal metodo del bilancio (supponendo di evitare configurazioni

a vincoli inefficaci) si ha

$$g = 2N, \quad l = 3, \quad r = g - l = 2N - 3.$$

Dunque, il numero delle aste è  $v = r = 2N - 3$ .

**N.B.** Strutture analoghe alle traviature nello spazio  $3D$  si dicono *tralicci*.

### 3.7 Soluzione dell'Esercizio 3.5.1

Le coordinate sovrabbondanti sono  $(x_A, y_A, \theta)$ , mentre le equazioni di vincolo

$$\begin{cases} y_A = 0 \\ y_B = 0 \\ y_C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 0 \\ y_A + d_1 \sin \theta = 0 \\ y_A + d_2 \sin \theta = 0 \end{cases}$$

quindi  $v = 3$ .

1.  $\mathcal{C}_V = \{(x_A, y_A = 0, \theta = 0)\} = \mathbb{R} \Rightarrow l = 1$ , modello ipostatico.

$$2. \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & d_1 \cos \theta \\ 0 & 1 & d_2 \cos \theta \end{bmatrix}_{|\mathcal{C}_V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 1 & d_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 2 < \max$$

$$r = 2 < v, \quad l = 3 - 2 = 1.$$