

Capitolo 7

Forze applicate su un rigido

Nel Cap. 5 abbiamo visto che il PLV è una condizione necessaria e sufficiente all'equilibrio di un modello meccanico soggetto a vincoli fissi e non dissipativi. Ciò che conta, quindi, è il lavoro virtuale dell'insieme delle forze attive per il calcolo degli equilibri ed il lavoro virtuale dell'insieme delle forze reattive per la definizione dei vincoli non dissipativi. Insomma, non sono le singole forze applicate che contano, bensì il loro *lavoro virtuale* complessivo. Convienne, allora, introdurre la seguente

Definizione 7.0.1. Diremo che due insiemi di forze $\mathcal{S} = \{(A_i, \vec{F}_i)\}$ ed $\mathcal{S}' = \{(A'_i, \vec{F}'_i)\}$, applicate sullo stesso corpo rigido vincolato sono equivalenti e scriveremo in simboli

$$\mathcal{S} \sim \mathcal{S}' ,$$

se producono lo stesso lavoro virtuale per ogni insieme di spostamenti virtuali del modello

$$(7.0.1) \quad \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{A}_i = \sum \vec{F}'_i \cdot \delta \vec{A}'_i \quad \forall \delta \vec{A}_i \quad , \forall \delta \vec{A}'_i$$

7.1 Insiemi di forze equivalenti su un rigido

Sappiamo che, nel caso di un rigido \mathcal{R} , il lavoro virtuale di un insieme di forze applicate si calcola come

$$(7.1.1) \quad LV = \vec{R} \cdot \delta \vec{x}_{O'} + \vec{M}_{O'} \cdot \vec{\epsilon} \quad O' \in \mathcal{R} .$$

Possiamo quindi enunciare la seguente proposizione di semplice dimostrazione

Proposizione 7.1.1. Due insiemi di forze \mathcal{S} e \mathcal{S}' agenti su un rigido sono equivalenti se

$$(7.1.2) \quad \vec{R} = \vec{R}'$$

e se \exists un punto $O \in \mathcal{E}_3$ tale che

$$(7.1.3) \quad \vec{M}_O = \vec{M}'_O$$

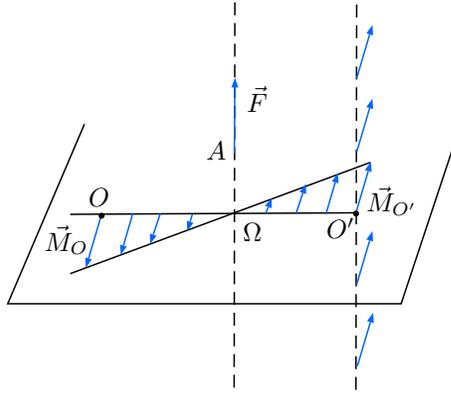


Figura 7.2.1: Campo dei momenti di una singola forza: struttura rotatoria

Dimostrazione. Basta dimostrare che se valgono la (7.1.2) e la (7.1.3), la (7.1.3) è verificata anche per tutti gli altri punti O' appartenenti al rigido. Ciò è assicurato dal fatto che, nelle suddette ipotesi, la (7.1.3) vale per un polo del tutto arbitrario, grazie alla formula di trasporto. Infatti:

$$(7.1.4) \quad \vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \times \vec{R}$$

$$\vec{M}'_{O'} = \vec{M}'_O + (O - O') \times \vec{R}' .$$

Dunque, se $\vec{R} = \vec{R}'$ e $\vec{M}_O = \vec{M}'_O \Rightarrow \vec{M}_{O'} = \vec{M}'_{O'} \quad \forall O' .$ □

Dunque, possiamo concludere che insiemi *diversi* di forze applicate su un rigido, ma aventi lo stesso risultante e lo stesso momento risultante rispetto allo stesso polo, hanno lo stesso effetto meccanico ai fini dell'equilibrio di un corpo rigido. Per tale motivo, i due vettori (\vec{R}, \vec{M}_O) si dicono vettori caratteristici per l'insieme \mathcal{S} .

7.2 Insiemi elementari di forze su un rigido

In questa sezione faremo vedere che il più generale insieme di forze applicate ad un rigido è equivalente a uno dei quattro insiemi elementari che elencheremo nel seguito. Di tutti gli insiemi elementari di vettori applicati, disegneremo il campo dei momenti, cioè il momento risultante calcolato rispetto a ciascun punto dello spazio e rappresentato come un vettore applicato allo stesso punto. A tale scopo, utilizzeremo la formula di trasporto (7.1.4).

7.2.1 Singola forza

Nel caso di una singola forza $\mathcal{S} = \{(A, \vec{F})\}$, il momento di \vec{F} rispetto a qualsiasi polo O si può sempre scrivere

$$(7.2.1) \quad \vec{M}_O = (A - O) \times \vec{F} = ((A - \Omega) + (\Omega - O)) \times \vec{F} = (\Omega - O) \times \vec{F} \quad \Omega \in r ,$$

dove Ω è un qualunque punto di r , retta d'azione di \vec{F} . Allora, scegliendo Ω come il punto d'intersezione di r con il piano passante per O e ortogonale a r , è facile osservare che il campo dei momenti ha una struttura rotatoria e gode delle seguenti proprietà:

- la retta d'azione di \vec{F} è il luogo di tutti e soli i punti a momento nullo;
- il momento di \vec{F} rispetto a un punto O fuori dalla retta d'azione, giace nel piano ortogonale a r e passante per O , e ha modulo proporzionale alla distanza di O da r ;
- il momento di \vec{F} rispetto ai punti che stanno su una parallela a r non varia.

Il campo dei momenti di una singola forza è rappresentato nella Fig. 7.2.1.

7.2.2 Coppia

Invece, nel caso di una coppia, il campo dei momenti è uniforme, cioè non dipende dal polo, come abbiamo già osservato nel Cap. 2. Quindi, se $\vec{M} \neq \vec{0}$, non esiste alcun punto dello spazio rispetto al quale il momento si annulla ed esso si può rappresentare come in Fig. 7.2.2.

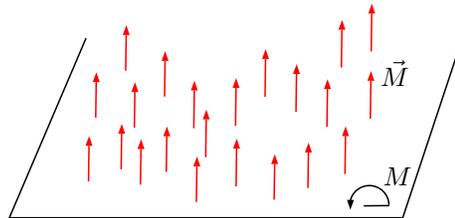


Figura 7.2.2: Campo dei momenti di una coppia di forze: struttura uniforme

7.2.3 Torsore

Introduciamo, ora, il terzo degli insiemi elementari, cioè il torsore.

Definizione 7.2.1. L'insieme di forze $\mathcal{S} = \{(A, \vec{F}), \vec{M}\}$, costituito da una singola forza (A, \vec{F}) e da una coppia di momento \vec{M} parallelo a \vec{F} , si dice torsore. Esso è caratterizzato dall'equazione

$$\vec{F} \times \vec{M} = \vec{0}.$$

Il campo dei momenti di un torsore, illustrato nella Fig. 7.2.3, è la somma vettoriale del campo uniforme della coppia e del campo dei momenti della singola forza

$$(7.2.2) \quad \vec{M}_O = \vec{M} + (A - O) \times \vec{F}.$$

La retta di applicazione della forza \vec{F} si dice *asse* del torsore. È facile osservare che il campo dei momenti ha una struttura elicoidale e gode delle seguenti proprietà:

- l'asse del torsore è il luogo di tutti e soli i punti rispetto ai quali il momento del torsore è minimo (in modulo) ed è parallelo all'asse;

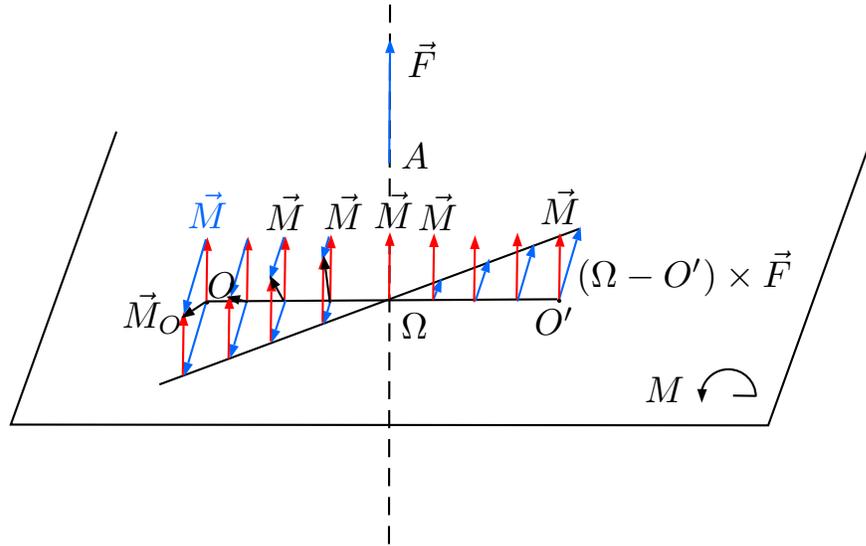


Figura 7.2.3: Campo dei momenti di un torsore: struttura elicoidale

- il momento del torsore rispetto a un punto O fuori dall'asse, è tangente alla superficie del cilindro circolare passante per O e avente come asse l'asse del torsore;
- il momento del torsore rispetto ai punti che stanno su una parallela all'asse del torsore non varia.

7.2.4 Insieme nullo o equilibrato

È quello formato dal vettore nullo applicato in un punto qualsiasi e si indica con $\{\vec{0}\}$. Quindi, ha risultante e momento risultante nulli. Ad esempio, una coppia di forze a braccio nullo.

7.3 Caso generale

Studiamo, ora, il campo dei momenti di un generico insieme di forze. A tale scopo, conviene introdurre i seguenti *invarianti*.

Definizione 7.3.1. .

- *Invariante scalare statico*

$$\mathcal{I} := \vec{M}_O \cdot \vec{R} \quad O \in \mathcal{E}_3$$

- *Invariante vettoriale statico*

$$\vec{M}_{\parallel} := \left(\vec{M}_O \cdot \text{vers}(\vec{R}) \right) \text{vers}(\vec{R}) = \frac{\mathcal{I}}{|\vec{R}|^2} \vec{R},$$

che coincide con il componente di \vec{M}_O parallelo a \vec{R} .

È immediato osservare che \mathcal{I} e, quindi \vec{M}_{\parallel} , non dipendono dal polo O . Infatti, se scegliamo un diverso polo O' , dalla formula di trasporto (2.7.4) segue che

$$\mathcal{I}_{O'} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \left(\vec{M}_O + (O - O') \times \vec{R} \right) \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} + \underbrace{(O - O') \times \vec{R}}_{\perp \vec{R}} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = \mathcal{I}_O .$$

Teorema 7.3.1 (Esistenza dell'asse centrale). *Per ogni insieme \mathcal{S} di forze applicate con $\vec{R} \neq \vec{0}$, esiste una retta parallela ad \vec{R} , detta asse centrale di \mathcal{S} , rispetto ai punti della quale il momento risultante è minimo. L'equazione parametrica di tale asse è*

$$(7.3.1) \quad \Omega - O = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R} \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Dimostrazione. Scelto un qualunque polo O , scomponiamo \vec{M}_O nel suo componente \vec{M}_{\parallel} parallelo ad \vec{R} e in quello ortogonale $\vec{M}_{\perp}(O)$

$$(7.3.2) \quad \vec{M}_O = \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_{\perp}(O) ,$$

e cerchiamo un punto Ω rispetto al quale il momento risultante sia minimo o, equivalentemente, rispetto al quale si annulli $\vec{M}_{\perp}(\Omega)$. A tale scopo, utilizziamo la formula di trasporto nella (7.3.2), ottenendo

$$\vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_{\perp}(O) = \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_{\perp}(\Omega) + (\Omega - O) \times \vec{R}$$

Richiedere che $\vec{M}_{\perp}(\Omega) = \vec{0}$, equivale a chiedere che Ω risolva l'equazione vettoriale

$$(\Omega - O) \times \vec{R} = \vec{M}_{\perp}(O)$$

Tale equazione è stata risolta nel Cap. 2 (vedi Eq. (2.1.15)) e le sue soluzioni sono tutti e soli i punti della retta di equazione parametrica (7.3.1) (vedi Eq. (2.1.17)). \square

Teorema 7.3.2 (di classificazione). *Gli insiemi \mathcal{S} di forze applicate ad un rigido possono essere suddivisi in quattro classi di equivalenza, come illustrato nella tabella seguente*

Tabella 7.3.1: Classificazione degli insiemi di forze su un rigido

$\mathcal{I} = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$	\vec{R}	\vec{M}_O	Categoria	\mathcal{S}
$\neq 0$			Torsore	$\{(\Omega, \vec{R}), \vec{M}_{\parallel}\}$
$= 0$	$\neq 0$		Vettore	$\{(\Omega, \vec{R})\}$
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	Coppia	$\{\vec{M}_O\}$
$= 0$	$= 0$	$= 0$	Nulla	$\{\vec{0}\}$

Dimostrazione. .

1. Se l'invariante scalare \mathcal{I} è non nullo, $\vec{R} \neq \vec{0}$, quindi esiste l'asse centrale di \mathcal{S} per il Teo 7.3.1. In tal caso, \mathcal{S} equivale al torsore il cui asse coincide con l'asse centrale di \mathcal{S} e il cui momento è pari all'invariante vettoriale \vec{M}_{\parallel} di \mathcal{S} .

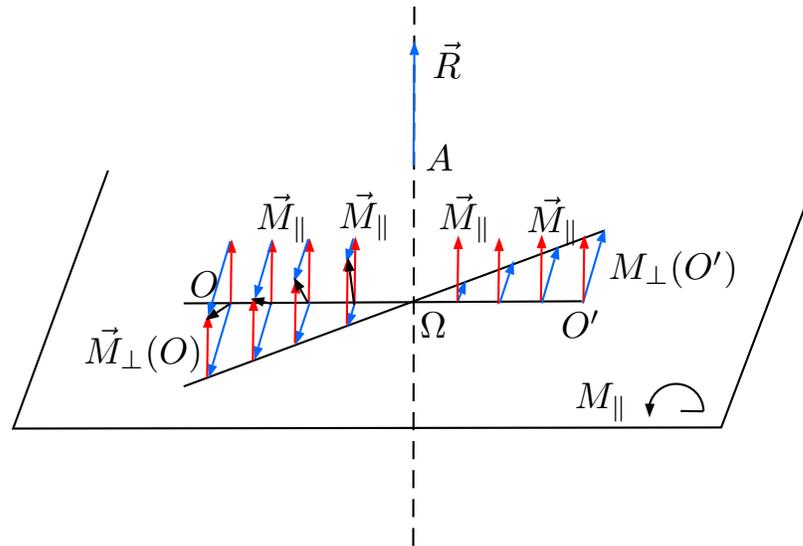


Figura 7.3.1: Asse centrale di un insieme di forze

2. Se l'invariante scalare \mathcal{I} è nullo et \vec{R} è non nullo, allora \mathcal{S} equivale a un singolo vettore \vec{R} applicato in un punto dell'asse centrale. In tal caso, \mathcal{S} è detto insieme di forze a *risultante equivalente*.
3. Se $\mathcal{I} = 0$ et $\vec{R} = \vec{0}$ et $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, allora \mathcal{S} equivale ad una coppia il cui momento è pari a \vec{M}_O , essendo O un polo qualsiasi.
4. Se $\mathcal{I} = 0$ et $\vec{R} = \vec{0}$ et $\vec{M}_O = \vec{0}$, allora \mathcal{S} equivale a l'insieme nullo. Ad esempio, una coppia di forze a braccio nullo.

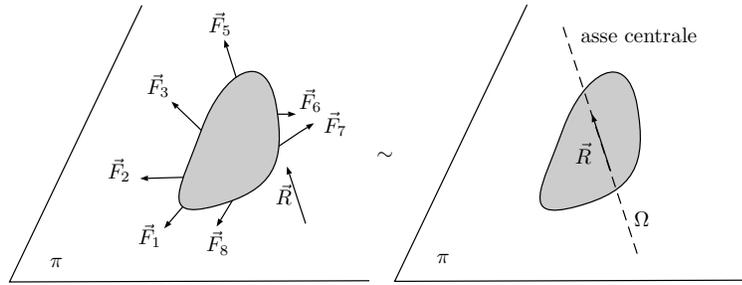
□

7.4 Insiemi di forze a risultante equivalente

Gli insiemi di forze equivalenti a un singolo vettore applicato sono detti, anche, insiemi a *risultante equivalente*. Vediamone tre esempi rilevanti: le forze complanari, forze concorrenti e forze parallele.

7.4.1 Forze complanari.

Consideriamo un qualunque insieme di forze complanari, insieme che ricorre in tutti i problemi di meccanica delle lamine soggette a forze nel loro piano.



In questo caso, $\vec{R} \in \pi$, $\vec{M}_O \perp \pi \quad \forall O \in \pi$.

Proposizione 7.4.1. Poiché per ogni insieme \mathcal{S} di forze complanari il momento risultante \vec{M}_O rispetto a un qualsiasi polo appartenente al piano, è ortogonale a \vec{R} , risulta che $\mathcal{I} = 0$. Quindi, \mathcal{S} equivale a :

1. se $\vec{R} \neq \vec{0} \Rightarrow \mathcal{S} \sim$ singola forza $\left\{ (\Omega, \vec{R}) \right\}$;
2. se $\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0} \Rightarrow \mathcal{S} \sim$ coppia di momento ortogonale a π ;
3. se $\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \mathcal{S} \sim$ coppia a braccio nullo.

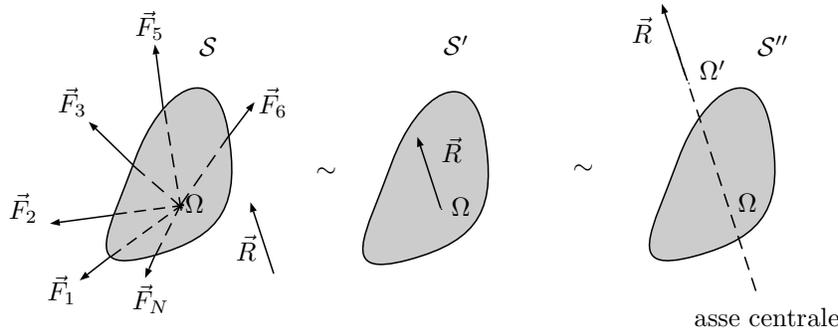
In conclusione, nel caso 1. esiste un'intera retta parallela a \vec{R} , rispetto ai punti della quale il momento risultante di \mathcal{S} si annulla. È l'asse centrale dell'insieme delle forze complanari e passa per il punto

$$\Omega - O = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2},$$

che appartiene al piano. Quindi, l'asse centrale di un insieme di forze complanari giace nel piano delle forze.

7.4.2 Forze concorrenti

Consideriamo un insieme di forze concorrenti in un punto Ω dello spazio \mathcal{E}_3 . Poiché $\vec{M}_\Omega = \vec{0}$, esso ha invariante scalare nullo, $\mathcal{I} = \vec{M}_\Omega \cdot \vec{R} = 0$. Allora equivale all'insieme equilibrato se $\vec{R} = \vec{0}$, invece è un insieme a risultante equivalente se $\vec{R} \neq \vec{0}$.

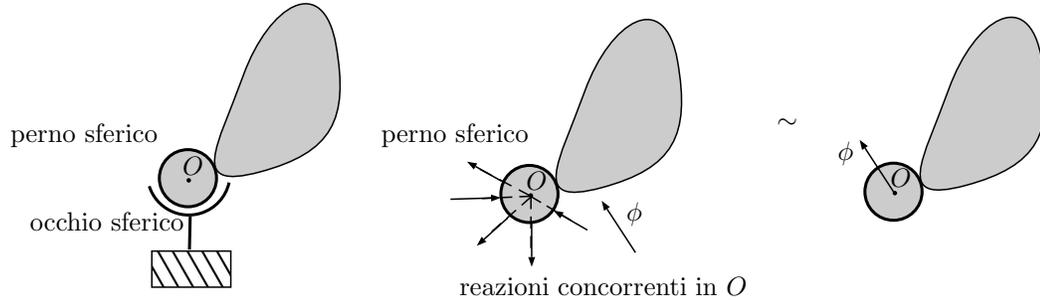


$$\frac{\mathcal{S}}{\begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_\Omega = \vec{0} \end{array}} \sim \frac{\mathcal{S}'}{\begin{array}{l} \vec{R}' = \vec{R} \\ \vec{M}'_\Omega = \vec{0} \end{array}}$$

N.B. Se scelgo come punto di applicazione del risultante \vec{R} un qualunque punto Ω' dell'asse centrale, ottengo un altro sistema equivalente $\mathcal{S}'' = \{(\Omega', \vec{R})\}$, quindi

$$\mathcal{S} \sim \mathcal{S}' \sim \mathcal{S}'' .$$

Esempio 7.4.1. Reazioni vincolari di una cerniera sferica liscia “estesa”.



7.4.3 Forze parallele

Consideriamo un insieme di forze parallele in \mathcal{E}_3 , $\mathcal{S} = \{(A_i, F_i \vec{e})\}_{i=1, \dots, N}$. In tal caso, il vettore risultante è

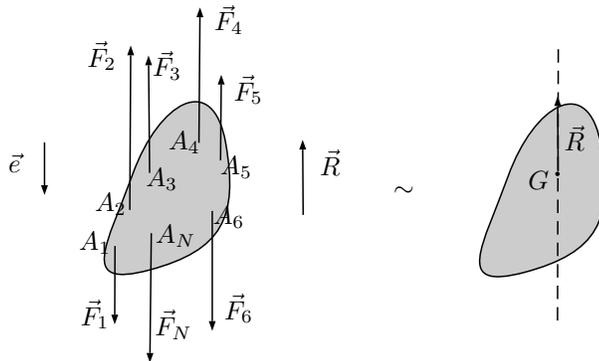
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N F_i \vec{e} = R \vec{e}, \quad R = \sum_{i=1}^N F_i .$$

Allora, il momento risultante rispetto a un qualsiasi polo O risulta

$$\vec{M}_O = \sum (A_i - O) \times F_i \vec{e} = \left(\sum (A_i - O) F_i \right) \times \vec{e} \Rightarrow \vec{M}_O \perp \vec{e}$$

Quindi, l'invariante scalare è $\mathcal{I} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot R \vec{e} = 0$.

Allora, se $\vec{M}_O \neq \vec{0}$ ed $\vec{R} = \vec{0}$, l'insieme delle forze equivale ad una coppia il cui piano è un qualsiasi piano ortogonale a \vec{M}_O (quindi contenente il versore \vec{e}). Se, invece $\vec{R} \neq \vec{0}$, l'insieme equivale al suo risultante applicato in un punto dell'asse centrale.



Dimostriamo, ora, che esiste un punto privilegiato G dell'asse centrale. Sappiamo che rispetto a G il momento risultante di \mathcal{S} deve essere nullo. Allora, risolvendo l'equazione

$$\begin{aligned}\vec{M}_G = \vec{0} &\Leftrightarrow \vec{M}_O + (O - G) \times \vec{R} = \vec{0} \\ \sum (A_i - O) \times F_i \vec{e} + (O - G) \times R \vec{e} &= \vec{0} \\ \left(\sum F_i (A_i - O) + R (O - G) \right) \times \vec{e} &= \vec{0},\end{aligned}$$

troviamo che la soluzione più semplice è

$$(7.4.1) \quad G - O = \frac{\sum F_i (A_i - O)}{R}.$$

Il punto G è detto centro delle forze parallele, per un motivo che vedremo tra poco.

Esempio 7.4.2. *Baricentro* := centro delle forze peso

$$G - O = \frac{\sum m_i g (A_i - O)}{\sum m_i g} = \frac{\sum m_i (A_i - O)}{\sum m_i}$$

N.B. Quando il baricentro esiste, cioè quando il campo delle forze peso si può approssimare come un campo di forze parallele, esso coincide con il centro di massa, definito da

$$C - O = \frac{\sum m_i (A_i - O)}{\sum m_i},$$

il quale dipende solo dalla distribuzione di massa del modello e non dalle forze applicate. Quindi, possiamo affermare che

Proposizione 7.4.2. *Se il modello \mathcal{B} è rigido, $G \equiv C$ è solidale a \mathcal{B} .*

Quiz. Il continente Africano e una navicella spaziale lontana dalla Terra hanno un baricentro? E un centro di massa?

In un riferimento cartesiano $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ le coordinate del centro di forze parallele, per un sistema materiale discreto, sono date da

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N F_i x_i}{\sum_{i=1}^N F_i}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^N F_i y_i}{\sum_{i=1}^N F_i}, \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^N F_i z_i}{\sum_{i=1}^N F_i}.$$

Per un sistema continuo la (7.4.1) deve essere modificata in:

$$(7.4.2) \quad G - O = \frac{\int_{\mathcal{B}} (P - O) f(P) d\mathcal{R}}{\int_{\mathcal{B}} f(P) d\mathcal{R}}$$

dove $f(P)$ è la funzione densità (scalare) di forza o forza specifica definita da

$$f(P) := \lim_{\Delta\mathcal{R} \rightarrow 0} \frac{f(\Delta\mathcal{R})}{\Delta\mathcal{R}} \quad \Rightarrow \quad R = \int_{\mathcal{B}} f(P) d\mathcal{R},$$

dove $d\mathcal{R}$ è l'elemento infinitesimo di volume, o di superficie o di linea.

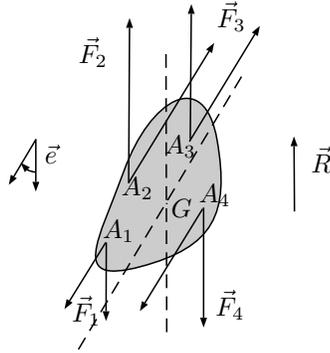
La (7.4.2), in un riferimento cartesiano $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, si scrive:

$$x_G = \frac{\int_{\mathcal{B}} x(P) f(P) d\mathcal{R}}{\int_{\mathcal{B}} f(P) d\mathcal{R}}, \quad y_G = \frac{\int_{\mathcal{B}} y(P) f(P) d\mathcal{R}}{\int_{\mathcal{B}} f(P) d\mathcal{R}}, \quad z_G = \frac{\int_{\mathcal{B}} z(P) f(P) d\mathcal{R}}{\int_{\mathcal{B}} f(P) d\mathcal{R}}$$

7.5 Proprietà del centro G delle forze parallele

Elenchiamo alcune proprietà (senza dimostrarle tutte) del centro delle forze parallele, che ci saranno utili per facilitarne il calcolo.

1. G non dipende da \vec{e} , cioè dalla direzione comune alle forze applicate. Quindi, se, ad esempio, ruoto tutti i vettori \vec{F}_i dello stesso angolo θ intorno allo stesso asse, lasciando invariati i punti di applicazione A_i e le componenti scalari F_i , ottengo un nuovo insieme di forze parallele che ha un nuovo asse centrale ma lo stesso centro di forze G . Dunque G è il punto di intersezione degli assi centrali che si ottengono per tutte le direzioni di \vec{e} , a parità di (A_i, F_i) . Questo è il motivo della parola centro ed è anche il motivo per cui G è un punto caratteristico di un corpo rigido e non dell'insieme di forze.



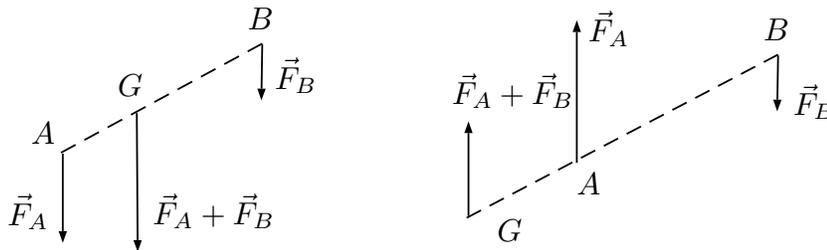
2. G non dipende da O . Infatti, se scelgo un altro punto O' come polo "di servizio" e calcolo $(G' - O') \Rightarrow (G' - G) = \vec{0}$ (verificare per esercizio).
3. G non varia se amplifico (o smorzo) tutte le forze \vec{F}_i di uno stesso fattore scalare $c \in \mathbb{R}$

$$\vec{F}_i \Rightarrow G \quad , \quad c\vec{F}_i \Rightarrow G$$

Esempio 7.5.1. Grazie a questa proprietà il baricentro coincide con il centro di massa.

4. Per un sistema di 2 forze parallele, G sta sulla congiungente i 2 punti di applicazione, è interno se le 2 forze sono concordi, esterno se sono discordi, dalla parte della forza che ha modulo maggiore. Precisamente, vale la relazione

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = \frac{|F_B|}{|F_A|}$$



$$S = \left\{ (A, \vec{F}_A), (B, \vec{F}_B) \right\} \sim S' = \left\{ (G, \vec{F}_A + \vec{F}_B) \right\}$$

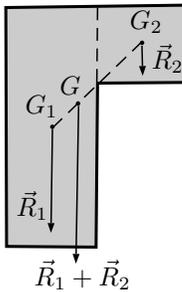
Infatti,

$$G - O = \frac{F_A(A - O) + F_B(B - O)}{F_A + F_B} \stackrel{O \equiv A}{=} \frac{F_B}{F_A + F_B}(B - A).$$

Quindi,

$$\overline{AG} = \frac{|F_B|}{|F_A + F_B|} \overline{AB}, \quad \overline{BG} = \frac{|F_A|}{|F_A + F_B|} \overline{AB}.$$

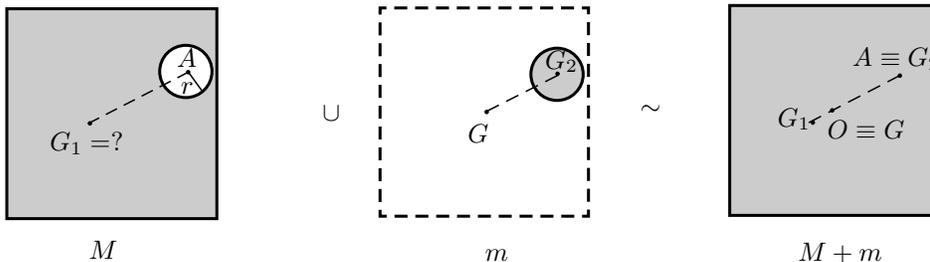
5. Proprietà distributiva. Ripartendo S in 2 sottoinsiemi disgiunti:



$S = S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2 = \emptyset,$
 se $S_1 \sim \{(G_1, \vec{R}_1)\}$ e $S_2 \sim \{(G_2, \vec{R}_2)\},$
 allora
 $S \sim \{(G, \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2)\},$ dove G è
 calcolato in base alla proprietà 4.

Profilo ad L (omogeneo)

Esempio 7.5.2. Consideriamo una lamina quadrata omogenea bucata di massa M e lato a , in cui è praticato un foro circolare di raggio $r < a/\sqrt{\pi}$ e centro A . Determiniamo il baricentro della lamina.



Si può procedere utilizzando la proprietà distributiva 5. Allora,

$$G - O = \frac{M(G_1 - O) + m(G_2 - O)}{M + m}$$

Risolviendo l'equazione precedente rispetto a $(G_1 - O)$ si ottiene

$$(7.5.1) \quad G_1 - O = \frac{(M + m)(G - O) - m(G_2 - O)}{M} = \frac{(S_1 + S_2)(G - O) - S_2(G_2 - O)}{S_1},$$

dove con S_1 , S_2 abbiamo indicato rispettivamente l'area della superficie della lamina bucata e l'area della superficie del foro. Si osservi che la posizione del baricentro G_1 non dipende dalla densità di massa (supposta uniforme) ma solo dalle superfici in gioco, oltre che dalla posizione di G e di G_2 .

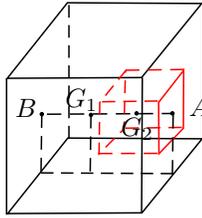
Scegliendo $O \equiv G$, segue che

$$G_1 - O = -\frac{m}{M}(G_2 - O) = -\frac{S_2}{S_1}(G_2 - O) = -\frac{\pi r^2}{a^2 - \pi r^2}(A - O)$$

Dunque, G_1 sta sulla congiungente di G con G_2 , esternamente al segmento GG_2 dalla parte di G , a una distanza da G pari a $\frac{\pi r^2}{a^2 - \pi r^2} \overline{GG_2}$.

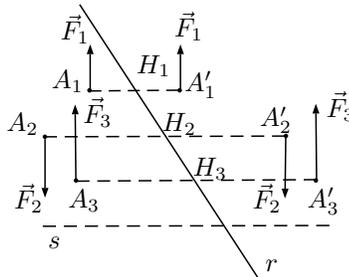
L'equazione (7.5.1) si può anche interpretare come un'applicazione della proprietà distributiva in cui si attribuisce una massa *negativa* a quella asportata dal foro, di densità pari a quella della massa residua.

Esercizio 7.5.1. *Calcolare il baricentro di un cubo omogeneo di lato a al quale è stato asportato il cubetto di lato b come nella figura. Il punto A è il centro comune alle facce dei due cubi che sono tangenti.*



6. Proprietà di simmetria materiale: se esiste un asse o un piano di simmetria materiale allora G appartiene all'asse o al piano.

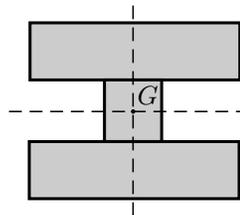
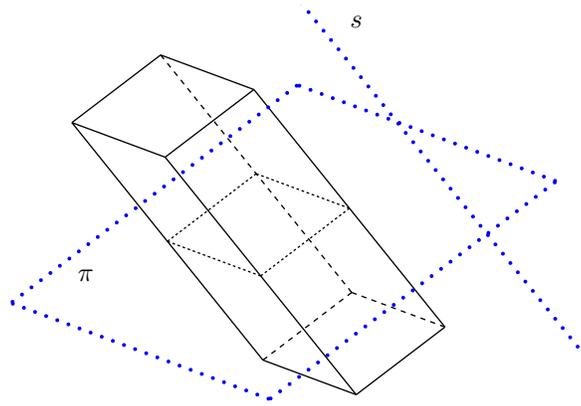
Definizione 7.5.1. *Asse r (rs. piano π) di simmetria obliqua materiale coniugato a una direzione s .*



simmetria geometrica: $\overline{A_i H_i} = \overline{A'_i H_i} \quad \forall A_i$

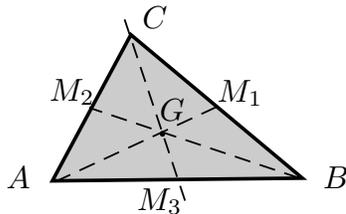
simmetria materiale: $F'_i = F_i$ se il modello è discreto,
 $f(A_i) dV = f(A'_i) dV'$ se il modello è continuo.

Se r e s sono ortogonali, r è un asse di simmetria ortogonale.



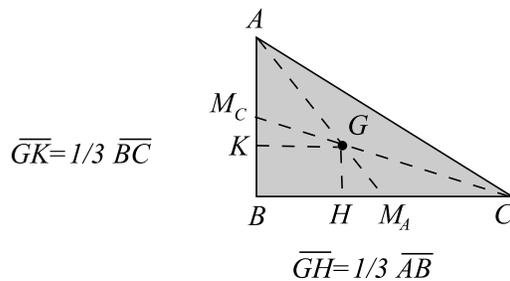
Esempio 7.5.3. *Profilo ad H omogeneo*

Esempio 7.5.4. *Baricentro di una lamina triangolare omogenea.*



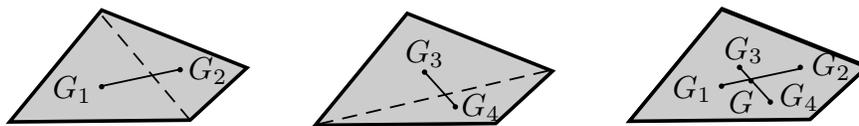
Le mediane sono assi di simmetria geometrica coniugate alla direzione dei rispettivi lati. Dunque, G coincide con il baricentro geometrico e quindi divide le mediane in modo che, ad esempio, $\frac{\overline{AG}}{\overline{GM_1}} = 2$

Esercizio 7.5.2. *Dimostrare che il baricentro di una lamina omogenea a forma di triangolo rettangolo si trova a una distanza da ogni cateto pari a $1/3$ della lunghezza dell'altro cateto.*

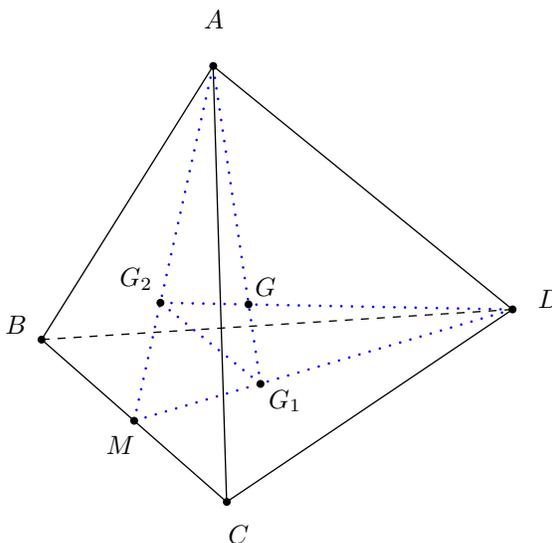


Esempio 7.5.5. *Baricentro di una lamina quadrangolare omogenea:*

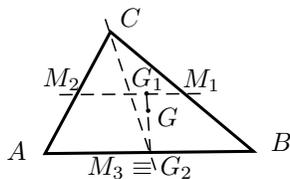
$$G \equiv G_1G_2 \cap G_3G_4$$



Esercizio 7.5.3. Dimostrare che il baricentro di un tetraedro omogeneo appartiene ai segmenti che uniscono un vertice al baricentro della faccia opposta.



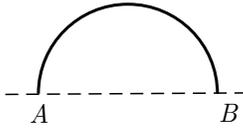
Esercizio 7.5.4. Dimostrare che il baricentro di un telaio triangolare omogeneo non coincide con il baricentro geometrico del triangolo, tranne nel caso di un triangolo equilatero.



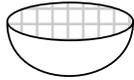
7. Inviluppo convesso di forze parallele e *concordi*: G appartiene all'inviluppo convesso dei punti di applicazione delle forze.

Definizione 7.5.2. *l'inviluppo (o involuppo) convesso* è l'insieme convesso minimale (è contenuto in tutti i convessi contenenti i punti di applicazione) che include tutti i punti di applicazione delle forze.

Esempio 7.5.6. Arco semicircolare



Esempio 7.5.7. *Guscio sferico*



8. I teorema di Pappo-Guldino: baricentro di un arco.

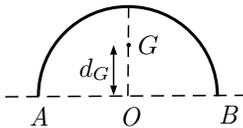
Assegnata una curva semplice e regolare γ , l'area A della superficie di rotazione ottenuta ruotando γ intorno ad un asse che non la intersechi in punti interni, è data da

$$(7.5.2) \quad A = 2\pi L(\gamma) d_G ,$$

dove d_G è la distanza del baricentro G dall'asse di rotazione e $L(\gamma)$ è la lunghezza della curva.

Esempio 7.5.8. *Arco omogeneo semicircolare.* Per le proprietà 6 e 7, G sta sul raggio ortogonale al diametro AB . Detta d_G la distanza di G dal centro O , per la proprietà 8 segue che

$$d_G = 4\pi R^2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\pi R} = \frac{2}{\pi} R$$



9. Il teorema di Pappo-Guldino: baricentro di una lamina.

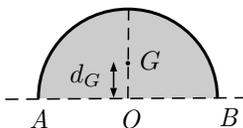
Assegnata una superficie regolare S , il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando S intorno ad un asse che non la intersechi in punti interni, è data da

$$(7.5.3) \quad V = 2\pi A(S) d_G ,$$

dove d_G è la distanza del baricentro G dall'asse di rotazione e $A(S)$ è l'area della superficie.

Esempio 7.5.9. *Lamina omogenea semicircolare.* Per le proprietà 6 e 7, G sta sul raggio ortogonale al diametro AB . Detta d_G la distanza di G dal centro O , per la proprietà 9 segue che

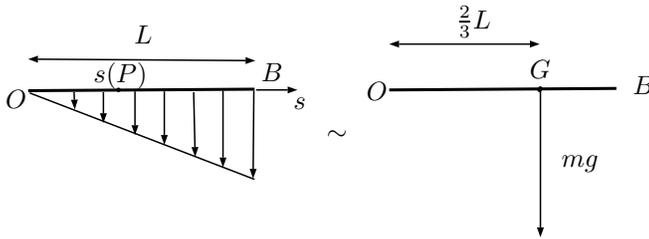
$$d_G = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{2\pi} \frac{2}{\pi R^2} = \frac{4}{3\pi} R$$



Baricentro per un'asta non omogenea

Consideriamo un'asta non omogenea di lunghezza L e massa m . Per individuare un suo punto introduciamo l'ascissa curvilinea $s(P)$ con origine nell'estremo O . Supponiamo che la funzione densità di massa definita da $\rho(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta m(s)}{\Delta s}$ dipenda linearmente da s

$$\rho(s) = a \frac{s}{L} \quad (a > 0)$$



L'ascissa del baricentro G si trova calcolando il seguente integrale di linea

$$s(G) = \frac{\int_0^L \rho(s) s(P) ds}{\int_0^L \rho(s) ds} = \frac{1}{m} \int_0^L a \frac{s^2}{L} ds = \frac{a}{mL} \left[\frac{s^3}{3} \right]_0^L = \frac{a}{mL} \frac{L^3}{3} = \frac{aL^2}{3m}$$

È possibile esprimere il risultato in termini della sola lunghezza totale. A tale scopo, eliminiamo la costante a calcolando

$$m = \int_0^L \rho(s) ds = \int_0^L a \frac{s}{L} ds = \frac{a}{L} \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^L = \frac{aL^2}{2L} = \frac{a}{2} L \Rightarrow a = \frac{2m}{L}$$

Quindi, l'ascissa di G risulta essere

$$s(G) = \frac{2mL^2}{3mL} = \frac{2}{3}L,$$

indipendente dalla massa m e dalla costante a .

Esercizio 7.5.5. Calcolare il baricentro se $\rho(s) = \frac{as^2}{L}$. Soluzione: $s(G) = \frac{3}{4}L$

Esercizio 7.5.6. Trovare il centro S delle forze parallele esercitate dalla pressione dell'acqua, di peso specifico p , sulla faccia della paratia di altezza h e larghezza L della figura, sapendo che la forza specifica per unità di superficie è data da $\vec{f}(P) = p(h - y(P)) \vec{e}_x$, dove $y(P)$ denota la quota del generico punto P , misurata a partire dal fondo. Il punto S è detto centro di spinta. Inoltre, determinare il vettore risultante delle forze parallele.

