

## Capitolo 8

# Equazioni cardinali della statica dei sistemi meccanici

In questo capitolo presentiamo un metodo più generale del PLV, per studiare l'equilibrio dei modelli meccanici.

### 8.1 Classificazione delle sollecitazioni agenti in un sistema meccanico

Dapprima, consideriamo i seguenti tipi di forze e di coppie: di contatto o a distanza, di volume o di superficie, concentrate o distribuite.

**Di contatto o a distanza.** Le sollecitazioni di **contatto** sono quelle che agiscono tra due corpi a contatto: ad esempio quelle che esercitiamo con le mani e con i piedi, o quella del vento su una vela. Le forze (coppie) a **distanza** sono quelle che agiscono senza contatto tra i corpi: ad esempio forza di gravità e la forza elettromagnetica.

**Di superficie o di volume.** Le sollecitazioni di **superficie** sono quelle che agiscono solo sulla superficie di un corpo: la forza dell'acqua sulla carena di una nave, la forza del vento su una vela, la resistenza aerodinamica su di un veicolo. Le forze di **volume** sono invece quelle che agiscono su ogni parte di un corpo: ad esempio la forza peso, la forza elettromagnetica, la forza d'inerzia centrifuga dovuta a un riferimento in rotazione.

**Concentrate o distribuite.** Le forze **concentrate** sono quelle che agiscono su i singoli punti di un corpo, le forze **distribuite** sono quelle che agiscono su tutta una parte (o su tutto) il corpo e si assegnano tramite una funzione densità di forza. Analogamente, le coppie concentrate sono quelle dovute all'azione di forze concentrate, mentre quelle distribuite sono dovute all'azione di forze distribuite e si assegnano mediante una funzione densità di momento.

Ai fini delle Equazioni Cardinali della Statica, sarà fondamentale la seguente classificazione delle sollecitazioni:

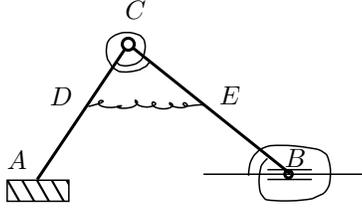
**attive:** non sono dovute a vincoli;

**reattive:** l'insieme di forze che, sostituite ai vincoli, ne realizzano gli stessi effetti meccanici. Il fatto che sia sempre possibile sostituire i vincoli con un insieme di forze applicate (parzialmente incognite) è noto come *Postulato delle Reazioni Vincolari*.

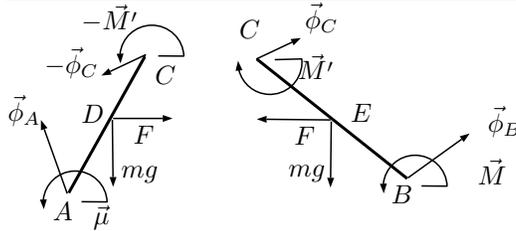
**esterne:** quelle che agenti esterni esercitano sul modello;

**interne:** che si esplicano tra parti interne del modello.

**Esempio 8.1.1.** 2 aste + 1 incastro + 1 appoggio + 1 cerniera interna, nel piano verticale.

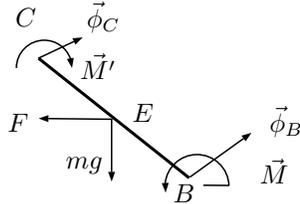


FORZE	ESTERNE	INTERNE
attive	peso proprio dell'asta	molla in D ed E
reattive	appoggio in B, incastro in A	cerniera in C, vincoli di rigidità
COPPIE	ESTERNE	INTERNE
attive	molla applicata in B	molla applicata in C
reattive	incastro in A	vincoli di rigidità



**N.B.** La classificazione delle sollecitazioni interne ed esterne dipende dai confini del modello.

**Esempio 8.1.2.** Se considero la sola asta BC del modello precedente



FORZE	ESTERNE	INTERNE
attive	peso asta, molla in E	
reattive	appoggio in B, cerniera in C	vincoli di rigidità
COPPIE	ESTERNE	INTERNE
attive	molla in B, molla in C	
reattive		vincoli di rigidità

## 8.2 Sollecitazioni interne

Studiamo le proprietà delle forze interne a un qualsiasi modello meccanico  $\mathcal{B}$ .

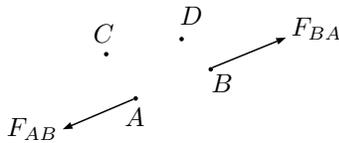
**Teorema 8.2.1.** *Delle forze interne. Se la sollecitazione attiva (rispettivamente reattiva) interna a un qualsiasi modello materiale  $\mathcal{B}$  è di tipo Newtoniano, cioè soddisfa il principio di azione e reazione, allora ha risultante e momento risultante nulli, cioè valgono le equazioni*

$$(8.2.1) \quad \vec{R}^{(int,att)} = \vec{0}, \quad \vec{M}_O^{(int,att)} = \vec{0}$$

$$(8.2.2) \quad \vec{R}^{(int,reatt)} = \vec{0}, \quad \vec{M}_O^{(int,reatt)} = \vec{0}$$

*Dimostrazione.* Valutiamo

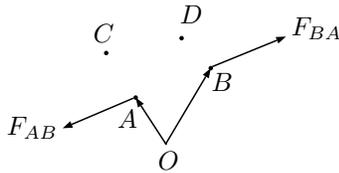
$$\vec{R}^{(int,att)} = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P^{(int,att)} = (\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} + \dots) + (\vec{F}_{BA} + \vec{F}_{BC} + \dots) + (\vec{F}_{CA} + \vec{F}_{CB} + \dots) + \dots + (\dots) = \vec{0}$$



Discorso analogo vale per  $\vec{R}^{(int,reatt)}$ . A parole: poiché le forze attive (rs. reattive) interne a un sistema materiale sono un insieme di coppie il loro vettore risultante è nullo.

Valutiamo

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^{(int,att)} &= \sum_{P \in \mathcal{B}} (P - O) \times \vec{F}_P^{(int,att)} = (A - O) \times (\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} + \dots) + (B - O) \times (\vec{F}_{BA} + \vec{F}_{BC} + \dots) + \dots \\ &= ((A - O) - (B - O)) \times \vec{F}_{AB} + \dots = \vec{0} \end{aligned}$$



Discorso analogo vale per  $\vec{M}_O^{(int,reatt)}$ . A parole: poiché le forze attive (rs. reattive) interne sono un insieme di coppie a braccio nullo, il momento della singola coppia è nullo e quindi il momento risultante di tutte le forze attive (rs. reattive) interne è nullo. □

### 8.2.1 Sollecitazione interne in un rigido

**Proposizione 8.2.1.** *In un rigido il lavoro virtuale delle forze interne attive e quello delle forze interne reattive sono entrambi nulli.*

*Dimostrazione.* Basta ricordare che in un rigido  $\mathcal{R}$  il lavoro virtuale si può calcolare come

$$(8.2.3) \quad LV = \vec{R} \cdot \delta \vec{x}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\epsilon} \quad O \in \mathcal{R} .$$

Pertanto, sostituendo nella (8.2.3) le (8.2.1) ed (8.2.2) si ottiene la tesi.  $\square$

È facile ricavare, con una procedura analoga a quella usata per ricavare la (8.2.3), la formula per la potenza (possibile, virtuale, effettiva) di una sollecitazione agente su un rigido

$$(8.2.4) \quad \Pi = \vec{R} \cdot \vec{v}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}, \quad O \in \mathcal{R}.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{P \in \mathcal{R}} \vec{F}_P \cdot (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_O)) \\ &= \sum_{P \in \mathcal{R}} \vec{F}_P \cdot \vec{v}_O + \sum_{P \in \mathcal{R}} \vec{F}_P \cdot \vec{\omega} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_O) \\ &= \left( \sum_{P \in \mathcal{R}} \vec{F}_P \right) \cdot \vec{v}_O + \sum_{P \in \mathcal{R}} \vec{\omega} \cdot (\vec{x}_P - \vec{x}_O) \times \vec{F}_P \\ &= \vec{R} \cdot \vec{v}_O + \vec{\omega} \cdot \sum_{P \in \mathcal{R}} (\vec{x}_P - \vec{x}_O) \times \vec{F}_P. \end{aligned}$$

Un espediente mnemonico per ricordare la (8.2.4) è quello di dividere la (8.2.3) rispettivamente per  $(\partial t, \delta \tau, dt)$ .

Tenendo conto delle (8.2.1), (8.2.2), dalla (8.2.4) segue immediatamente

**Proposizione 8.2.2.** *In un rigido, la potenza (possibile, virtuale, effettiva) delle forze interne attive e quella delle forze interne reattive sono entrambe nulle.*

### 8.3 Equazioni cardinali della statica dei sistemi

Dato un osservatore qualunque, utilizzando il *principio di inerzia* e il *principio di azione e reazione* possiamo dimostrare il seguente

**Teorema 8.3.1.** *Se un sistema di punti materiali  $\mathcal{B}$  è in equilibrio allora valgono le ECS*

$$(8.3.1) \quad \vec{R}^{(est)} = \vec{0}, \quad \vec{M}_O^{(est)} = \vec{0}.$$

*Dimostrazione.* Se  $\mathcal{B}$  è in equilibrio allora ogni  $P \in \mathcal{B}$  è in equilibrio. Quindi  $\forall t \in I$  e  $\forall P \in \mathcal{B}$  vale che

**I ECS**

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{F}_P = \vec{F}_P^{(int)} + \vec{F}_P^{(est)} \Rightarrow \\ \vec{0} &= \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P = \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P^{(int)} + \sum_{P \in \mathcal{B}} \vec{F}_P^{(est)} = \vec{R}^{(int)} + \vec{R}^{(est)} \stackrel{(8.2.1), (8.2.2)}{=} \vec{R}^{(est)} \end{aligned}$$

**II ECS**

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{F}_P = \vec{F}_P^{(int)} + \vec{F}_P^{(est)} \Rightarrow \\ \vec{0} &= \sum_{P \in \mathcal{B}} (P - O) \times \vec{F}_P = \sum_{P \in \mathcal{B}} (P - O) \times \vec{F}_P^{(int)} + \sum_{P \in \mathcal{B}} (P - O) \times \vec{F}_P^{(est)} = \vec{M}_O^{(int)} + \vec{M}_O^{(est)} \stackrel{(8.2.1), (8.2.2)}{=} \vec{M}_O^{(est)} \end{aligned}$$

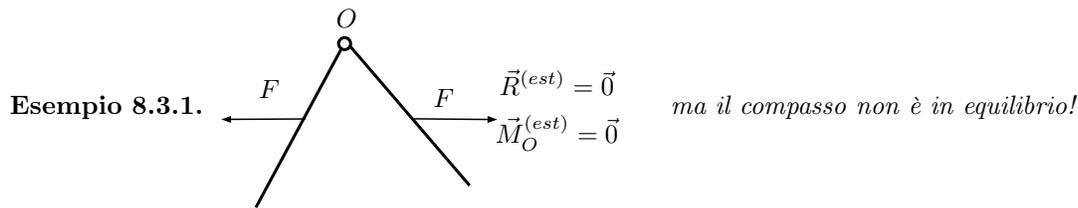
□

**N.B.** Se la I ECS è soddisfatta e la II ECS è soddisfatta per un polo fissato  $O$ , allora la II è soddisfatta per qualsiasi punto di  $\mathcal{E}_3$ , poiché

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \times \vec{R} = \vec{M}_O = \vec{0}$$

**N.B.** Abbiamo ricavato le ECS per un sistema di punti materiali. Lo stesso procedimento si può utilizzare se il modello è un rigido o un sistema articolato. In generale, riterremo valide le ECS per qualunque modello materiale  $\mathcal{B}$ .

**Quiz.** Sono le ECS sufficienti a garantire l'equilibrio di un sistema inizialmente in quiete? NO!



Dimostreremo ora, che le ECS sono sufficienti a garantire l'equilibrio di un rigido, inizialmente in quiete. Il motivo è che il lavoro virtuale delle forze interne a un rigido è nullo grazie ai vincoli di rigidità, i quali mantengono invariate le distanze mutue tra i punti. Possiamo affermare che

**Teorema 8.3.2.** *Le Equazioni Cardinali della Statica sono sufficienti a garantire l'equilibrio di un rigido.*

*Dimostrazione.* Si procede in due passi.

1. Supponiamo di studiare l'equilibrio di un rigido privo di vincoli. In questo caso, se in una data configurazione sono soddisfatte le ECS segue che, scelto un polo  $O \in \mathcal{R}$ ,

$$\vec{R}^{(est)} = \vec{0} \text{ et } \vec{M}_O^{(est)} = \vec{0} \Rightarrow LV^{est} = 0$$

Poiché il rigido è privo di vincoli esterni e, in più, il lavoro virtuale delle forze attive *interne* è nullo per la Prop. 8.2.1, si ha

$$0 = LV^{(est)} = LV^{(est,att)} + \cancel{LV^{(est,reatt)}} = LV^{(est,att)} + LV^{(int,att)} = LV^{(att)},$$

cioè che il lavoro virtuale di tutte le forze attive agenti sul rigido è nullo. Allora, il PLV è soddisfatto e ciò garantisce l'equilibrio del rigido nella configurazione data.

2. Ora, supponiamo che il rigido sia vincolato in modo qualsiasi e che in una configurazione valgano le ECS

$$\vec{R}^{(est,att+reatt)} = \vec{0} \text{ et } \vec{M}_O^{(est,att+reatt)} = \vec{0}$$

Introdurre il contributo delle reazioni vincolare equivale a considerare il rigido privo di vincoli e soggetto alla sollecitazione di tutte le forze esterne, sia attive, sia reattive. Se tale sollecitazione è equilibrata, per il punto 1 il rigido è in equilibrio.

□

Comunque, se il modello è composto da più corpi rigidi vale il seguente

**Corollario 8.3.1.** *Le ECS sono condizione necessaria all'equilibrio di un qualunque sistema materiale e sono sufficienti se sono soddisfatte per ciascuna componente rigida del sistema (a patto che sia inizialmente in quiete).*

## 8.4 Sollecitazione reattiva su un rigido

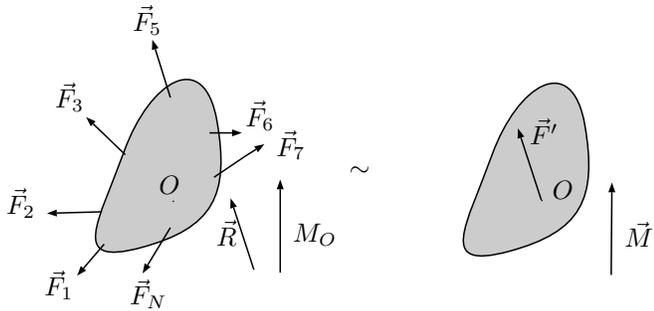
Abbiamo già visto nel Cap. 7 che il più generale insieme di forze applicate ad un rigido  $\mathcal{S}$ , per quanto complicato possa essere, si può sempre ridurre a uno delle quattro classi di equivalenza del Teo. 7.3.2. Comunque, nel caso di un torsore e di un singolo vettore applicato, il punto di applicazione del risultante di  $\mathcal{S}$  non può essere scelto ad arbitrio ma deve appartenere all'asse centrale. Presentiamo qui un altro tipo di riduzione che permette di scegliere in modo completamente arbitrario il punto di applicazione del risultante.

**Proposizione 8.4.1.** *Ogni insieme  $\mathcal{S}$  di forze applicate a un rigido è equivalente a un insieme  $\mathcal{S}'$  costituito dal risultante (eventualmente nullo) di  $\mathcal{S}$  applicato in un punto qualunque  $O$  e da una coppia  $\vec{M}'$  (eventualmente nulla) pari al momento risultante di  $\mathcal{S}$  rispetto a  $O$ . In formule*

$$\mathcal{S} = \left\{ (A_i, \vec{F}_i) \right\}_{i=1, \dots, N} \sim \mathcal{S}' = \left\{ (O, \vec{F}'), \vec{M}' \right\}$$

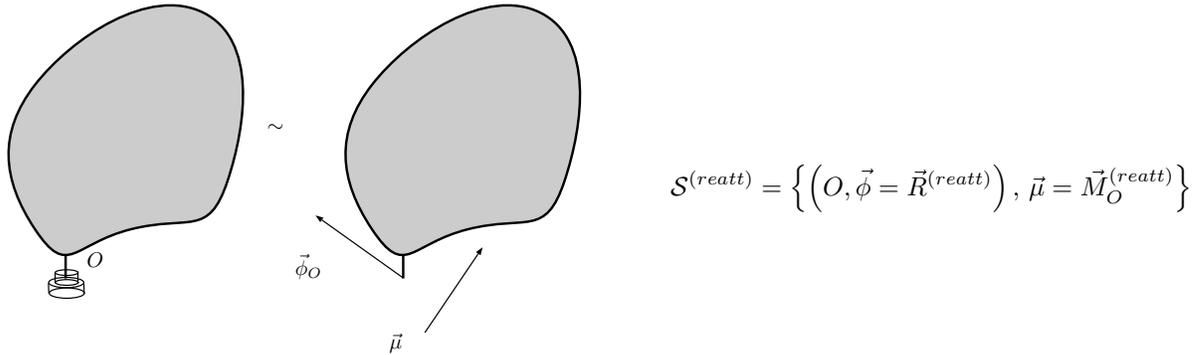
$$(8.4.1) \quad (\vec{R}, \vec{M}_O) \quad (\vec{F}' = \vec{R}, \vec{M}' = \vec{M}_O)$$

È ovvio dalla (8.4.1) che  $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$ .



**N.B.** È chiaro che tale riduzione dipende dalla scelta del polo  $O$ . Esso è un qualunque punto dello spazio, anche mobile, anche non appartenente al rigido.

Da quanto detto sopra, anche l'insieme delle reazioni vincolari su un *rigido* si può sempre ridurre al risultante  $\vec{\phi}$  applicato ad un qualunque polo  $O$  ed a una coppia di reazione  $\vec{\mu}$ , pari al momento risultante delle reazioni rispetto a  $O$ .



A questo proposito osserviamo che, in Meccanica Razionale, si trascurano le dimensioni del vincolo modellizzato come puntiforme e si sceglie proprio tale punto  $O$ , comune al vincolo e al rigido, come punto di applicazione del risultante delle reazioni vincolari. In tal modo, si rinuncia a determinare le singole reazioni vincolari sui diversi punti del vincolo (oggetto di studio nei corsi successivi) e ci si accontenta di calcolare solo il vettore risultante  $\vec{\phi}_O$  e la coppia di reazione  $\vec{\mu}$ .

Dunque, il lavoro virtuale della sollecitazione reattiva può essere calcolato come

$$LV^{(reatt)} = \vec{\phi}_O \cdot \delta \vec{x}_O + \vec{\mu} \cdot \vec{\epsilon}.$$

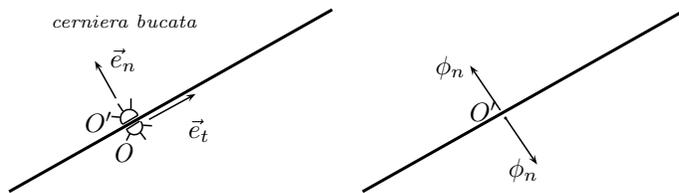
Inoltre, se il vincolo è non dissipativo vale

$$\vec{\phi}_O \cdot \delta \vec{x}_O + \vec{\mu} \cdot \vec{\epsilon} \geq 0 \quad \forall \delta \vec{x}_O, \forall \vec{\epsilon} \text{ virtuali}$$

e se il vincolo è anche bilatero, vale l'uguaglianza. Sotto analizzeremo le reazioni vincolari di alcuni vincoli non *dissipativi*, piani e spaziali ricordando, che le reazioni vincolari rimangono incognite parziali sia in statica, sia in dinamica.

### 8.4.1 Vincoli piani non dissipativi

#### Passaggio bilatero per un punto



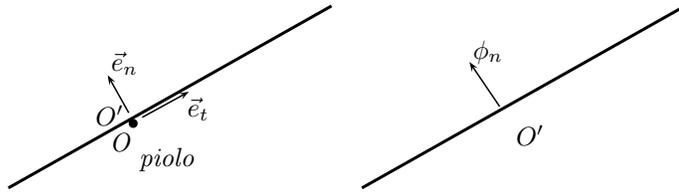
Poiché  $\delta \vec{x}_{O'} = \delta s \vec{e}_t$ ,  $\vec{\epsilon} = \delta \varphi \vec{e}_3$ , il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 = \vec{\phi}_{O'} \cdot \delta s \vec{e}_t + \vec{\mu} \cdot \delta \varphi \vec{e}_3 \quad \forall \delta s, \forall \delta \varphi \in \mathbb{R}$$

Pertanto, le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$(8.4.2) \quad \begin{cases} \vec{\phi}_{O'} \cdot \vec{e}_t = 0 \\ \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\phi}_{O'} \perp \vec{e}_t \\ \vec{\mu} \in \pi \end{cases}$$

### Passaggio unilatero per un punto



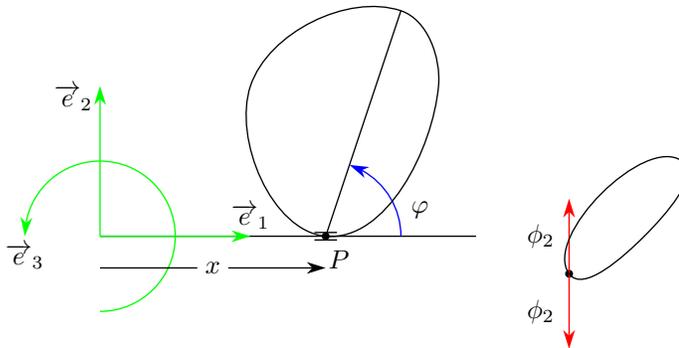
Poiché  $\delta\vec{x}_{O'} = \delta s \vec{e}_t + \delta y \vec{e}_n$ ,  $\vec{\epsilon} = \delta\varphi \vec{e}_3$ , il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 \leq \vec{\phi}_{O'} \cdot (\delta s \vec{e}_t + \delta y \vec{e}_n) + \vec{\mu} \cdot \delta\varphi \vec{e}_3 \quad \forall \delta s, \delta\varphi \in \mathbb{R} \quad \forall \delta y \geq 0$$

Pertanto, le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$\begin{cases} \vec{\phi}_{O'} \cdot \vec{e}_t = 0 \\ \vec{\phi}_{O'} \cdot \vec{e}_n \geq 0 \\ \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\phi}_{O'} \perp \vec{e}_t \\ \vec{\phi}_{O'} \text{ concorde a } \vec{e}_n \\ \vec{\mu} \in \pi \end{cases}$$

### Cerniera cilindrica scorrevole bilatera

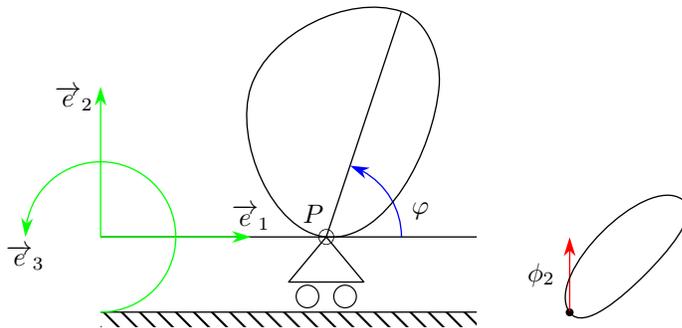


Poiché  $\delta\vec{x}_P = \delta x \vec{e}_1$ ,  $\vec{\epsilon} = \delta\varphi \vec{e}_3$  il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 = \vec{\phi}_P \cdot \delta x \vec{e}_1 + \vec{\mu} \cdot \delta\varphi \vec{e}_3 \quad \forall \delta x, \forall \delta\varphi \in \mathbb{R}$$

Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$(8.4.3) \quad \begin{cases} \vec{\phi}_P \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\phi}_P \perp \vec{e}_1 \\ \vec{\mu} \in \pi \end{cases}$$

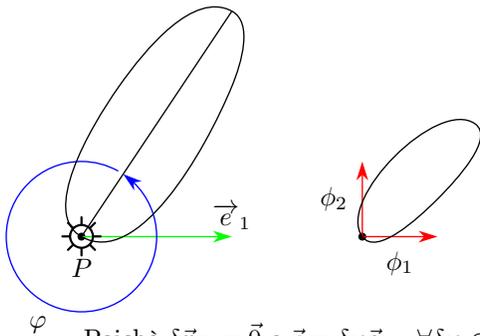
**Cerniera cilindrica scorrevole unilatera**

Poichè  $\delta \vec{x}_P = \delta x \vec{e}_1 + \delta y \vec{e}_2$ ,  $\forall \delta x \in \mathbb{R}, \forall \delta y \geq 0$  e  $\vec{\epsilon} = \delta \varphi \vec{e}_3$ ,  $\forall \delta \varphi \in \mathbb{R}$  il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 \leq \vec{\phi}_P \cdot (\delta x \vec{e}_1 + \delta y \vec{e}_2) + \vec{\mu} \cdot \delta \varphi \vec{e}_3 \quad \forall \delta x, \forall \delta \varphi \in \mathbb{R}, \quad \forall \delta y \geq 0.$$

Le soluzioni di tale disequazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$\begin{cases} \vec{\phi}_P \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \vec{\phi}_P \cdot \vec{e}_2 \geq 0 \\ \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\phi}_P \perp \vec{e}_1 \\ \vec{\phi}_P \text{ concorde a } \vec{e}_2 \\ \vec{\mu} \in \pi \end{cases}.$$

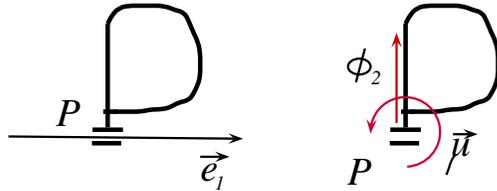
**Cerniera cilindrica fissa bilatera**

Poichè  $\delta \vec{x}_P = \vec{0}$  e  $\vec{\epsilon} = \delta \varphi \vec{e}_3$ ,  $\forall \delta \varphi \in \mathbb{R}$  il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 = \vec{\phi}_P \cdot \delta \vec{x}_P + \vec{\mu} \cdot \delta \varphi \vec{e}_3 \quad \forall \delta \varphi \in \mathbb{R}.$$

Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$(8.4.4) \quad \begin{cases} \vec{\phi}_P = \text{qualsiasi} \\ \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\phi}_P = \text{qualsiasi} \\ \vec{\mu} \in \pi \end{cases}.$$

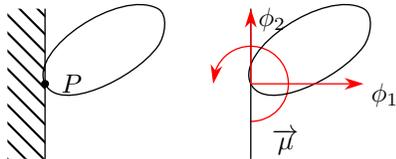
**Pattino bilatero**

Poichè  $\delta\vec{x}_P = \delta x \vec{e}_1$  e  $\vec{\epsilon} = \vec{0}$ , il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 = \vec{\phi}_P \cdot \delta x \vec{e}_1 + \vec{\mu} \cdot \vec{\xi}.$$

Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$(8.4.5) \quad \begin{cases} \vec{\phi}_P \perp \vec{e}_1 \\ \vec{\mu} = \text{qualsiasi} \end{cases}$$

**Incastro bilatero**

Poichè  $\delta\vec{x}_P = \vec{0}$  e  $\vec{\epsilon} = \vec{0}$  il vincolo è non dissipativo se e solo se

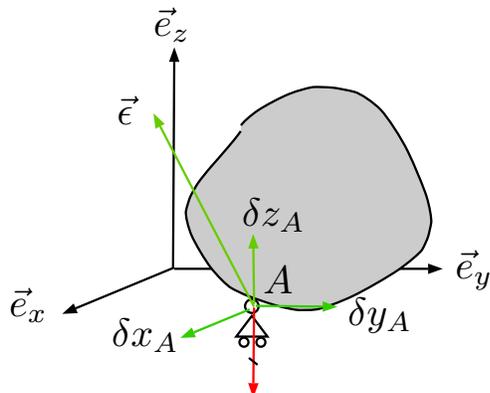
$$0 = \vec{\phi}_P \cdot \delta\vec{x}_P + \vec{\mu} \cdot \vec{\xi}.$$

Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$(8.4.6) \quad \begin{cases} \vec{\phi}_P = \text{qualsiasi} \\ \vec{\mu} = \text{qualsiasi} \end{cases}$$

### 8.4.2 Vincoli spaziali non dissipativi

Appoggio unilatero su di un piano



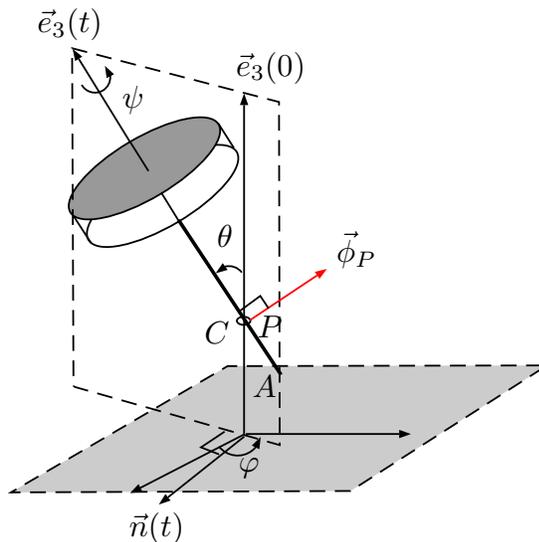
Poichè  $\delta \vec{x}_A = \delta x_A \vec{e}_x + \delta y_A \vec{e}_y + \delta z_A \vec{e}_z$  con  $\delta z_A \geq 0$  ed  $\vec{\epsilon} \in E_3$ , il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 \leq \vec{\phi}_A \cdot (\delta x_A \vec{e}_x + \delta y_A \vec{e}_y + \delta z_A \vec{e}_z) + \vec{\mu} \cdot \vec{\epsilon} \quad \forall \delta x_A, \delta y_A \in \mathbb{R}, \delta z_A \geq 0, \forall \vec{\epsilon} \in E_3 .$$

Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$(8.4.7) \quad \begin{cases} \vec{\phi}_A \cdot \vec{e}_x = 0 \\ \vec{\phi}_A \cdot \vec{e}_y = 0 \\ \vec{\phi}_A \cdot \vec{e}_z \geq 0 \\ \vec{\mu} = \vec{0} \end{cases}$$

Anellino fisso o cerniera sferica “bucata” fissa



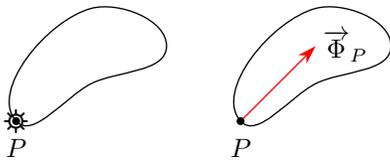
Poichè  $\delta\vec{x}_P = \delta s \vec{e}_3(t)$  ed  $\vec{\epsilon} \in E_3$ , il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 = \vec{\phi}_P \cdot \delta s \vec{e}_3(t) + \vec{\mu} \cdot \vec{\epsilon} \quad \forall \delta s \in \mathbb{R}, \forall \vec{\epsilon} \in E_3 .$$

Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$(8.4.8) \quad \begin{cases} \vec{\phi}_P \cdot \vec{e}_3(t) = 0 \\ \vec{\mu} = \vec{0} \end{cases}$$

### Cerniera sferica fissa



Poichè  $\delta\vec{x}_P = \vec{0}$  e  $\vec{\epsilon} \in E_3$  il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 = \vec{\phi}_P \cdot \delta\vec{x}_P + \vec{\mu} \cdot \vec{\epsilon} \quad \forall \vec{\epsilon} \in E_3$$

Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$\begin{cases} \vec{\phi}_P = \text{qualsiasi} \\ \vec{\mu} = \vec{0} \end{cases}$$

*Cerniera sferica scorrevole:* per esercizio

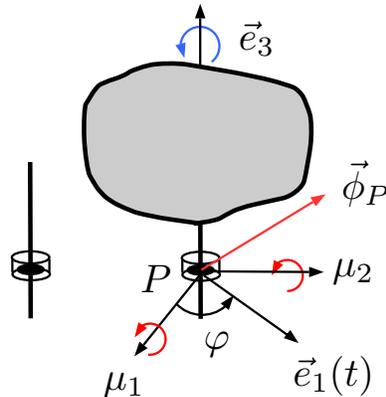
### Cerniera cilindrica fissa

Poichè  $\delta\vec{x}_P = \vec{0}$ ,  $\vec{\epsilon} = \delta\varphi \vec{e}_3$  il vincolo è non dissipativo se e solo se

$$0 = \vec{\phi}_P \cdot \delta\vec{x}_P + \vec{\mu} \cdot \delta\varphi \vec{e}_3 \quad \forall \delta\varphi \in \mathbb{R}$$

Le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole le sollecitazioni reattive date da

$$\begin{cases} \vec{\phi}_P = \text{qualsiasi} \\ \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 = 0 \Leftrightarrow \vec{\mu} \in \pi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \end{cases}$$



*Cerniera cilindrica scorrevole o collare cilindrico: per esercizio.*

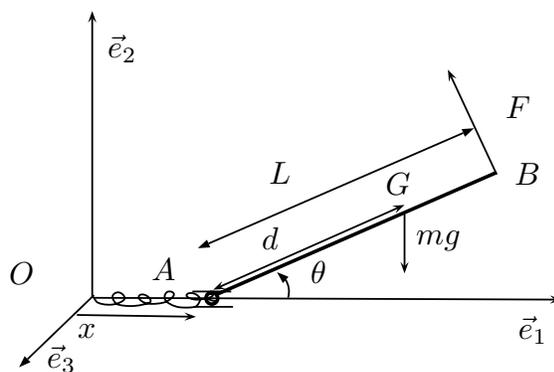
## 8.5 Problemi della statica dei modelli

La statica studia principalmente due problemi:

**diretto:** date le sollecitazioni agenti su un modello, trovare le eventuali configurazioni di equilibrio e determinare le reazioni vincolari che, come abbiamo visto, sono a priori parzialmente incognite, in quelle configurazioni;

**inverso (o del controllo):** assegnata una configurazione, determinare quali valori devono assumere alcuni parametri del modello (lunghezza di aste, rigidità di molle, intensità di forze) affinché tale configurazione sia di equilibrio.

Riprendiamo il problema diretto dell'Esempio 5.11.1 già trattato con il PLV



### Esempio 8.5.1.

*Consideriamo l'asta della figura, vincolata con una cerniera cilindrica scorrevole lungo l'asse  $(O; \vec{e}_1)$ , a stare nel piano verticale  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Supponiamo che i vincoli siano lisci e bilateri.*

Trovare:

1. Tutte le eventuali configurazioni di equilibrio.
2. Le reazioni dei vincoli sul modello in equilibrio.
  - (a) Analisi cinematica: gradi di libertà e coordinate libere.  
L'equazione di vincolo è  $y_A = 0$ , indipendente dal tempo (vincolo fisso). Quindi il vincolo è semplice, ( $v = r = 1$ ). Pertanto,

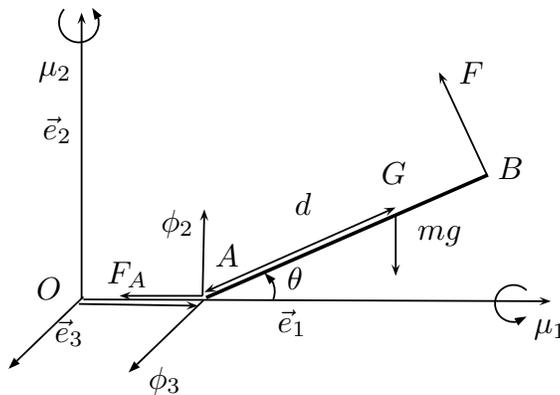
$$l = g - v = 3 - 1 = 2$$

coordinate libere:  $(\theta, x = x_O) \quad -\pi < \theta \leq \pi, x \in \mathbb{R} \quad \mathcal{C}_V = S^1 \times \mathbb{R}$

- (b) Analisi delle forze *esterne*

	attive	reattive
molla	$\vec{F}_A = -c(A - O) = -cx\vec{e}_1$	$\mathcal{S}^{(r)} = \left\{ (A, \vec{\phi}), \vec{\mu} \right\}, \vec{\phi}_A \cdot \vec{e}_1 \stackrel{(8.4.3)}{=} 0, \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 \stackrel{(8.4.3)}{=} 0$
follower	$\vec{F}_B = \frac{F}{L}\vec{e}_3 \times (B - A) = F(-\sin\theta \vec{e}_1 + \cos\theta \vec{e}_2)$	
peso	$m\vec{g} = -mg\vec{e}_2$	

Diagramma delle forze o di corpo libero



Scomponiamo le reazioni vincolari sulla base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$\vec{\phi}_A = \phi_2 \vec{e}_2 + \phi_3 \vec{e}_3, \quad \vec{\mu} = \mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2,$$

dove, con  $\phi_2, \phi_3$ , e  $\mu_1, \mu_2$ , abbiamo denotato le componenti scalari (non il modulo) della reazione  $\vec{\phi}_A$  e, rispettivamente, della coppia  $\vec{\mu}$ . Il segno di tali componenti, a priori incognito, verrà determinato dalle equazioni.

1. Equilibrio

poiché il sistema è rigido, le ECS sono sufficienti a garantire l'equilibrio. Quindi le configurazioni di equilibrio  $\mathbf{q}_e = (\theta_e, x_e)$  sono tutte e sole le soluzioni del sistema delle 2 equazioni vettoriali

$$(8.5.1) \quad \begin{cases} \vec{R}^{est}(x, \theta, \phi_2, \phi_3, \mu_1, \mu_2) = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{est}(x, \theta, \phi_2, \phi_3, \mu_1, \mu_2) = \vec{0} \end{cases} ,$$

nelle 6 incognite  $(x, \theta, \phi_2, \phi_3, \mu_1, \mu_2)$ . La scelta di  $A$  come polo del momento ne semplifica il calcolo poiché  $\vec{\phi}_A$  e  $\vec{F}_A$  non danno contributo. Quindi, i lati sinistri del sistema (8.5.1) sono

$$(8.5.2) \quad \vec{R}^{(est)} = \vec{R}^{(est,att)} + \vec{R}^{(est,reatt)} = \vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_B + \vec{\phi}_A$$

$$(8.5.3) \quad \vec{M}_A^{(est)} = \vec{M}_A^{(est,att)} + \vec{M}_A^{(est,reatt)} = (G - A) \times m\vec{g} + (B - A) \times \vec{F}_B + \vec{\mu} .$$

equivalenti alle 6 equazioni scalari

$$(8.5.4) \quad \vec{R} \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad - cx - F \sin \theta = 0$$

$$(8.5.5) \quad \vec{R} \cdot \vec{e}_2 = 0 \quad - mg + F \cos \theta + \phi_2 = 0$$

$$(8.5.6) \quad \vec{R} \cdot \vec{e}_3 = 0 \quad \phi_3 = 0$$

$$(8.5.7) \quad \vec{M}_A \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad \mu_1 = 0$$

$$(8.5.8) \quad \vec{M}_A \cdot \vec{e}_2 = 0 \quad \mu_2 = 0$$

$$(8.5.9) \quad \vec{M}_A \cdot \vec{e}_3 = 0 \quad - mgd \cos \theta + FL = 0$$

Si osservi che in *questo caso*, poiché il modello è *piano* e le forze attive sono *complanari*, il sistema si disaccoppia in

$$\phi_3 = 0 , \quad \mu_1 = 0 , \quad \mu_2 = 0 ,$$

e nel sistema delle 3 equazioni scalari nelle 3 incognite  $(x_e, \theta_e, \phi_2)$ ,

$$(8.5.10) \quad \vec{R} \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad - cx - F \sin \theta = 0$$

$$(8.5.11) \quad \vec{R} \cdot \vec{e}_2 = 0 \quad - mg + F \cos \theta + \phi_2 = 0$$

$$(8.5.12) \quad \vec{M}_A \cdot \vec{e}_3 = 0 \quad - mgd \cos \theta + FL = 0 ,$$

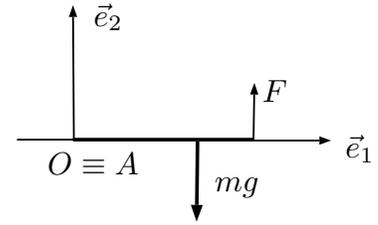
Tale sistema è lineare nella reazione vincolare  $\phi_2$  ma non lineare nella coordinata libera  $\theta$ .

La (8.5.10) e la (8.5.12) non contengono la sollecitazione reattiva: la (8.5.10), poiché l'unica reazione in  $A$  è ortogonale a  $\vec{e}_1 \Leftrightarrow \vec{\phi}_A \cdot \vec{e}_1 = 0$ , la (8.5.12), grazie alla scelta del polo nel punto di applicazione della reazione vincolare. Per tale ragione, si dicono equazioni pure di equilibrio e coincidono con le (5.12.4), che abbiamo già risolto nel Cap. 5, Esempio 5.11.1.

Riscriviamo le soluzioni, cioè le configurazioni di equilibrio  $\mathbf{q}_e = (\theta_e, x_e)$ :

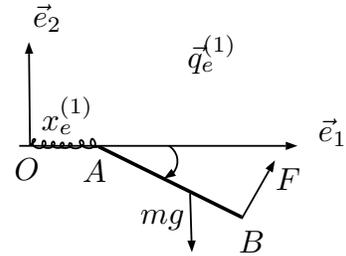
se  $\lambda = 1 \Leftrightarrow FL = mgd$

$$\mathbf{q}_e^{(0)} = (0, 0)$$

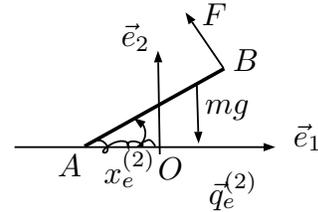


se  $\lambda < 1 \Leftrightarrow FL < mgd$

$$\mathbf{q}_e^{(1)} = \left( -\arccos \lambda, \frac{F}{c} \sqrt{1 - \lambda^2} \right)$$



$$\mathbf{q}_e^{(2)} = \left( \arccos \lambda, -\frac{F}{c} \sqrt{1 - \lambda^2} \right)$$



## 2. Reazioni vincolari

Dall'equazione (8.5.11) ricaviamo la reazione vincolare:

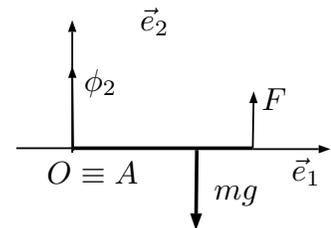
$$\phi_2 = mg - F \cos \theta = mg - F\lambda \quad \text{se } \lambda \leq 1$$

Allora, possiamo riassumere i risultati ottenuti:

se  $\lambda = 1 \Leftrightarrow FL = mgd$

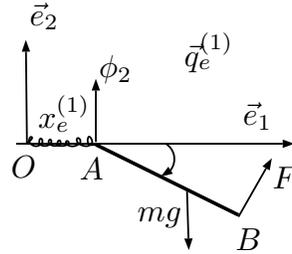
$$\mathbf{q}_e^{(0)} = (0, 0)$$

$$\phi_2 = mg - F = mg \left( 1 - \frac{d}{L} \right) > 0, \phi_3 = 0, \mu_1 = 0, \mu_2 = 0$$



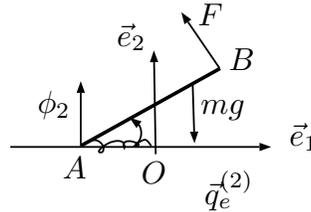
se  $\lambda < 1 \Leftrightarrow FL < mgd$

$$\mathbf{q}_e^{(1)} = \left( -\arccos \lambda, \frac{F}{c} \sqrt{1 - \lambda^2} \right)$$



$$\phi_2 = mg - \lambda F, \phi_3 = 0, \mu_1 = 0, \mu_2 = 0$$

$$\mathbf{q}_e^{(2)} = \left( \arccos \lambda, -\frac{F}{c} \sqrt{1 - \lambda^2} \right)$$



**Quiz.** Qual è il verso di  $\vec{\phi}_A$ ? La sua componente scalare è data da

$$\phi_2 = mg \left( 1 - \lambda \frac{F}{mg} \right) = mg \left( 1 - \lambda^2 \frac{d}{L} \right),$$

che ha segno positivo se e solo se

$$\lambda^2 < \frac{L}{d} \Leftrightarrow \lambda < \sqrt{\frac{L}{d}}.$$

Tale condizione è soddisfatta poiché  $\sqrt{\frac{L}{d}} > 1$  e  $\lambda < 1$ , pertanto segue che:

$$\lambda < 1 < \sqrt{\frac{L}{d}}.$$

Dunque, in questo problema,  $\phi_2 > 0$ , quindi  $\vec{\phi}_A$  è sempre concorde al versore  $\vec{e}_2$ , quindi è diretta verso l'alto.

Supponiamo, ora, che la guida sia scabra. Sperimentalmente è stato osservato che, per un rigido 3D come nella Figura 8.5.1, oltre al componente reattivo ortogonale al vincolo,  $\vec{\phi}_n$ , esiste anche un componente tangente al vincolo,  $\vec{\phi}_t$ , che soddisfa la relazione di Coulomb:

$$(8.5.13) \quad \frac{|\vec{\phi}_t|}{|\vec{\phi}_n|} \leq \nu_s \quad \nu_s: \text{coefficiente di attrito statico}$$

Le condizioni nelle quali si realizza l'uguaglianza nella (8.5.13), si chiamano condizioni di *equilibrio limite*. Dunque, nel nostro problema, la reazione in A si scompone come  $\vec{\phi}_A = \phi_1 \vec{e}_1 + \phi_2 \vec{e}_2 + \phi_3 \vec{e}_3$  e vale la relazione  $\frac{|\phi_1|}{\sqrt{\phi_2^2 + \phi_3^2}} \leq \nu_s$ ; in condizioni di equilibrio limite  $|\phi_1| = \nu_s \sqrt{\phi_2^2 + \phi_3^2}$ .

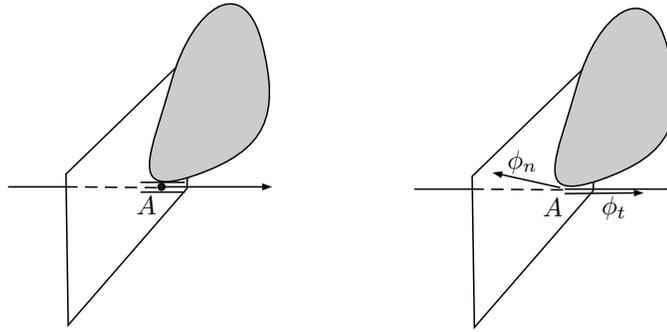


Figura 8.5.1: Reazioni di un appoggio semplice lungo una guida scabra

Allora, le ECS e la relazione di Coulomb si scrivono

$$(8.5.14) \quad \phi_1 - cx - F \sin \theta = 0$$

$$(8.5.15) \quad \phi_2 - mg + F \cos \theta = 0$$

$$(8.5.16) \quad \phi_3 = 0$$

$$(8.5.17) \quad \mu_1 = 0$$

$$(8.5.18) \quad \mu_2 = 0$$

$$(8.5.19) \quad -mgd \cos \theta + FL = 0$$

$$(8.5.20) \quad |\phi_1| = \nu_s \sqrt{\phi_2^2 + \phi_3^2}$$

poiché le (8.5.15)–(8.5.19) sono invariate, le soluzioni per  $\theta_e$  e le componenti della sollecitazione reattiva  $\phi_2, \phi_3, \mu_1, \mu_2$ , assumono gli stessi valori del caso senza attrito.

$$\theta_e = \left\{ \theta_e^{(0)} = 0, \theta_e^{(1)} = -\arccos \lambda, \theta_e^{(2)} = \arccos \lambda \right\} \quad \lambda = \frac{FL}{mgd} \leq 1$$

$$\phi_2 = mg - F\lambda = mg \left( 1 - \lambda^2 \frac{d}{L} \right) > 0, \quad \phi_3 = 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0.$$

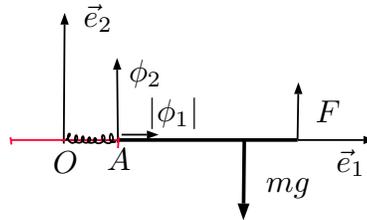
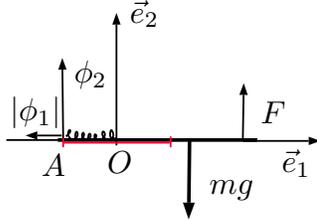
poiché  $\phi_2$  è sempre positiva all'equilibrio, possiamo scrivere la (8.5.14) e la (8.5.20) nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{F}{c} \sin \theta + \frac{\phi_1}{c} \\ |\phi_1| = \nu_s |\phi_2| = \nu_s \phi_2 \Rightarrow \end{array} \right. \begin{cases} \phi_1 = \nu_s \phi_2 & \text{se } \phi_1 > 0 \\ \phi_1 = -\nu_s \phi_2 & \text{se } \phi_1 < 0 \end{cases}$$

Allora, in condizioni di equilibrio limite  $\mathbf{q}_e = (\theta_e, \bar{x}_e)$ , si ha:

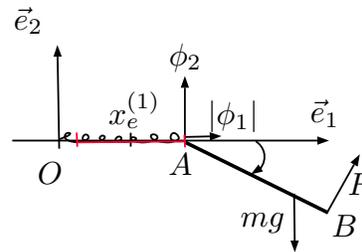
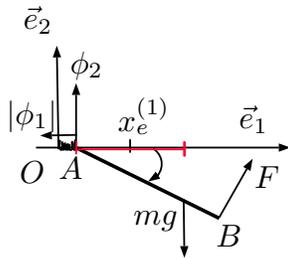
$$1. \text{ se } \lambda = 1, \theta_e^{(0)} = 0 \quad \phi_2 = mg \left(1 - \frac{d}{L}\right), \quad \phi_3 = 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0$$

$$\phi_1 = \pm \nu_s mg \left(1 - \frac{d}{L}\right) \quad \bar{x}_e^{(0)} = \pm \frac{\phi_1}{c} = \pm \nu_s \frac{mg}{c} \left(1 - \frac{d}{L}\right) = \pm \Delta x_e$$



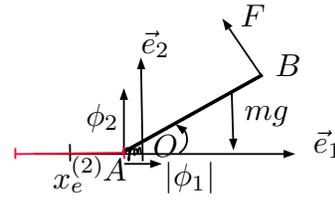
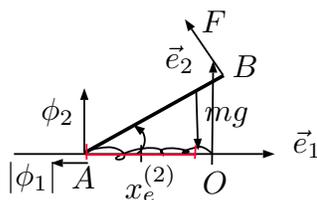
$$2. \text{ se } 0 < \lambda < 1, \theta_e^{(1)} = -\arccos \lambda \quad \phi_2 = mg \left(1 - \lambda^2 \frac{d}{L}\right), \quad \phi_3 = 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0$$

$$\phi_1 = \pm \nu_s mg \left(1 - \lambda^2 \frac{d}{L}\right) \quad \bar{x}_e^{(1)} = x_e^{(1)} \pm \Delta x_e$$



$$3. \text{ se } 0 < \lambda < 1, \theta_e^{(2)} = \arccos \lambda \quad \phi_2 = mg \left(1 - \lambda^2 \frac{d}{L}\right), \quad \phi_3 = 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0$$

$$\phi_1 = \pm \nu_s mg \left(1 - \lambda^2 \frac{d}{L}\right) \quad \bar{x}_e^{(2)} = x_e^{(2)} \pm \Delta x_e$$



Dunque, in condizioni di equilibrio limite ogni configurazione di equilibrio del caso senza attrito si duplica, cioè le configurazioni di equilibrio raddoppiano. Invece, nelle condizioni di equilibrio non limite,  $\mathbf{q}_e = (\theta_e, \bar{x}_e)$ , è facile convincersi che le configurazioni di equilibrio diventano infinite, poiché coincidono con tutti i punti degli intervalli aventi come estremi le configurazioni di equilibrio limite, e come centri le configurazioni di equilibrio in assenza di attrito:

$$1. \text{ se } \lambda = 1, \theta_e^{(0)} = 0, -\Delta x_e \leq \bar{x}_e^{(0)} \leq \Delta x_e$$

$$2. \text{ se } 0 < \lambda < 1, \theta_e^{(1)} = -\arccos \lambda, x_e^{(1)} - \Delta x_e \leq \bar{x}_e^{(1)} \leq x_e^{(1)} + \Delta x_e$$

$$3. \text{ se } 0 < \lambda < 1, \theta_e^{(2)} = \arccos \lambda, x_e^{(2)} - \Delta x_e \leq \bar{x}_e^{(2)} \leq x_e^{(2)} + \Delta x_e$$

In conclusione, abbiamo constatato che la presenza di attrito “favorisce” l’equilibrio. Ecco perché trascurare l’attrito vuol dire mettersi nella situazione più sfavorevole per l’equilibrio e quindi in quella di maggior sicurezza. È quello che faremo da ora in poi.

**N. B.** Se la guida è scabra, le ECS sono l’unico metodo che possiamo usare per studiare gli equilibri di un sistema meccanico. Infatti, l’uso del PLV richiede l’ipotesi di vincoli *non dissipativi*.